



UNIVERSIDAD CATOLICA  
**SILVA HENRIQUEZ**

*FACULTAD DE EDUCACIÓN*  
*Escuela de Educación en Humanidades y Ciencias*  
*Departamento de Educación Matemática*

**IMPLEMENTACIÓN DEL PROYECTO “NOCIONES DE AZAR Y  
PROBABILIDAD, UNA PROPUESTA METODOLOGICA PARA  
EL AULA”, BASANDOSE EN LA INGENIERÍA DIDÁCTICA.**

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE  
LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL  
TITULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN  
MEDIA EN MATEMÁTICAS E  
INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES  
NOGUERA REYES, KAREN ARLETTE  
PARADA CONTRERAS, NATALIA CELINIA

PROFESOR GUÍA:  
SERGIO TORRES BALCHEN.

SANTIAGO, CHILE

2011

## AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer a mis padres, por ser quienes me guiaron y me enseñaron a luchar sin dejar de lado mis valores y convicciones, a mis hermanos y cuñada por estar siempre a mi lado, sin importar lo difícil que fuese este camino. A mi sobrino y a mis amigas que compartieron junto a mí este proceso.

En especial este seminario está dedicado al que iba a ser mi compañero de vida, quien me apoyo y creyó en mí siempre, Christian Cabrera Carrasco (QEPD), si bien no está presente al finalizar este camino, dejó una gran compañera que me sostuvo en esos momentos tan difíciles, su madre, quien está presente al terminar esta etapa y refleja el amor que construimos.

Quisiera agradecer a toda mi familia por acompañarme en este camino, que muchas veces fue difícil y en el que sentí todo el apoyo, en especial a mi madre por ser el pilar fundamental de mi vida, quien me dio las fuerzas para seguir en los momentos complicados que he pasado, en el transcurso de todos estos largos años de formación profesional. Gracias Madre mía.

A una persona especial, a quien amo con toda el alma y quien me sostuvo y me levantó cuando no tenía las ganas de salir adelante, cuando sentía que fracasaba y demostró creer en mí. Gracias por todo tu amor, comprensión y fuerzas, por consolarme y ayudarme a salir a flote y a su familia por el cariño y las consideraciones de todos estos años que hemos compartido.

A todos quienes fueron testigos de este gran desafío, a mis amigas por caminar junto a mí y sostenerme cuando quise caer, en especial a quien me acompañó en la elaboración de este seminario y que Dios puso en mi vida, para que juntas lográramos nuestra primera gran meta.

A mis sobrinitos que espero en un futuro, vivan este gran día y sean felices.

A nuestros profesores de la universidad, que con agrado compartieron sus conocimientos durante toda nuestra formación profesional, en especial a Sergio Torres por apoyarnos, por la disponibilidad y la paciencia que tuvo con nosotras para que finalmente resultara un buen trabajo, a Maritza por los retos y disposición con la que nos condujo a al logro de esta gran meta.

***“Tan solo por la educación puede el hombre llegar a ser hombre. El hombre no es más que lo que la educación hace de él”.***

***Emmanuel Kant.***

## RESUMEN

Este seminario constituye la aplicación de un proyecto de aula, realizado en "Nociones de probabilidad", para segundo año medio, el cual fue elaborado por seminaristas de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, de la Universidad Católica Silva Henríquez, en el año 2007.

Esta implementación, se efectúa basándose en la Ingeniería Didáctica de la Educación Matemática, propuesta por la autora francesa Michèle Artigue. Considerándose las cuatro fases que se detallan en su libro.

La finalidad que tiene esta implementación es verificar la efectividad, la coherencia y la pertinencia del diseño elaborado por Carmen Escanilla, Karina Hernández y María José Ocares.

## INDICE

INTRODUCCIÓN .....	6
CAPÍTULO I: PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.....	9
I.1 INTRODUCCIÓN.....	10
I.2 ANTECEDENTES DEL PROBLEMA.....	12
I.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	13
I.4 OBJETIVOS.....	14
I.4.1 OBJETIVO GENERAL.....	14
I.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	15
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO.....	16
II.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN.....	17
II.2 TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS.....	20
II.3 TEORÍA DE TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA.....	23
CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO.....	27
III.1 TIPO DE TESIS.....	28
III.2 ELECCIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO.....	30
III.3 MUESTRA Y SUS CARACTERÍSTICAS.....	30
III.4 ETAPAS METODOLÓGICAS.....	32
III.5 INSTRUMENTOS UTILIZADOS.....	33
CAPÍTULO IV: APLICACIÓN DEL PROYECTO.....	34
IV.1 ANÁLISIS PRELIMINAR.....	37
IV.2 DISEÑO DE LA ACTIVIDAD.....	41
IV.3 ANTECEDENTES.....	42
IV.4 DISEÑO.....	44
IV.5 ANÁLISIS A PRIORI.....	62
IV.6 DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES.....	64
IV.7 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.....	65
IV.8 ANÁLISIS A POSTERIORI.....	67

CONCLUSIÓN.....	74
SUGERENCIAS Y RECOMENDACIONES.....	77
BIBLIOGRAFÍA.....	79

## INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años se han efectuado cambios en el currículo, no tan sólo nacional sino mundialmente, entre éstos, en la enseñanza obligatoria se ha brindado un énfasis al estudio de la estadística y las probabilidades, se siente la necesidad de que las nociones de probabilidad se hagan presentes desde los inicios de la educación básica con el estudio de fenómenos aleatorios, tal como se plantea en los planes y programas propuestos por el MINEDUC, además se considera fundamental cambiar la metodología de enseñanza, haciéndola más activa y exploratoria, logrando la comprensión de las informaciones presentes en los medios de comunicación, provocando el interés de los estudiantes y la valoración de los conocimientos probabilísticos, para tomar decisiones en un ambiente de incertidumbre.

En una investigación realizada por Estrada, Batanero y Fortuny (2004)<sup>1</sup>, se indica que la formación de profesores en estadística y probabilidades no es adecuada, porque los estudiantes no logran adquirir los conocimientos cognitivos en el área, ni las competencias para diseñar situaciones didácticas. Lo que conlleva a que sus prácticas en el aula, no cumplan con los objetivos y los aprendizajes esperados para los estudiantes, establecidos en los planes y programas oficiales.

Algunos autores analizan la forma en que los profesores diseñan y llevan a cabo unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad, sobre todo en la escuela primaria, en donde la gran mayoría de estos profesores muestran dificultad al enfrentarse a conceptos nuevos (López, 2006), lo que demuestra la importancia de su formación profesional.

El estudio de la estadística y las probabilidades fomenta el razonamiento crítico de los estudiantes, además los fenómenos aleatorios o estocásticos, son frecuentes en la vida cotidiana, lo que hace indispensable que forme parte del currículo.

En el año 2007, un grupo de estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de la Universidad Católica Silva Henríquez, elaboraron su seminario de grado llamado "Nociones de azar y probabilidad, una propuesta metodológica en el aula", en la unidad de nociones de probabilidad de

---

<sup>1</sup> Estrada, Batanero y Fortuny, "Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación", editorial Santillana, 2004).

segundo año medio, teniendo como finalidad optar al grado académico de Licenciado en Educación y al título profesional de Profesor de Educación Media en Matemáticas e Informática Educativa.

El proyecto fue un diseño integral de la unidad de nociones de probabilidad, que usó una serie de actividades acompañadas por el devenir histórico de la unidad, con la finalidad de que este diseño favoreciera desde una visión constructivista al aprendizaje significativo de los estudiantes. Se diseñó considerando como marco teórico el currículo nacional, basándose en los planes y programas del MINEDUC.

La finalidad de realizar este seminario es comprobar la efectividad del proyecto realizado en el 2007, considerando que éste fue diseñado pero no implementado en el aula por las estudiantes.

Con la aplicación de este guión en el aula, se espera cumplir con los objetivos propuestos por el programa oficial de estudio. Además, facilita la práctica docente con visión constructivista, al ser una guía para la realización de sus clases, pues esta propuesta cuenta con las actividades y materiales de apoyo para lograr aprendizajes significativos en los estudiantes.

Para llevar a cabo la implementación del proyecto, se diseñaron situaciones didácticas basada en ingeniería didáctica, metodología propuesta por Michèle Artigue, la cual se sustenta en la “teoría de situaciones didácticas” y la “teoría de transposición didáctica” elaboradas en Francia, por los autores Guy Brousseau e Yves Chevallard.

El presente trabajo se divide en cuatro capítulos, que siguiendo la estructura correspondiente a una investigación se refieren a lo siguiente:

En el primer capítulo el lector encontrara el planteamiento del problema, que contempla su introducción, los antecedentes y la formulación del problema, el objetivo general y los específicos.

El segundo capítulo contempla el marco teórico de la tesis, considerando la ingeniería didáctica y su base fundamentada en la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau y en la teoría de transposición didáctica de Yves Chevallard.

El tercer capítulo corresponde al marco metodológico, en el cual se presenta el tipo de tesis, la elección del objeto de estudio, las etapas metodológicas.

El cuarto capítulo es la implementación del proyecto, usando la metodología de la ingeniería didáctica, la que establece una estructura para la aplicación del proyecto y que se detalla en el libro de Michéle Artigue.

Finalmente los resultados, comentarios, sugerencias y conclusiones de la investigación realizada, la bibliografía que sustenta a esta investigación y los anexos que derivaron de su aplicación.



# CAPÍTULO I

## PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

## I.1 INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la estadística y las probabilidades es considerado fundamental para el desarrollo de los estudiantes, pues “la estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de ordenadores, trabajo cooperativo y en grupo, a las que se le dan gran importancia en los nuevos currículos” (Begg, 1997). Por otro lado, la enseñanza de las probabilidades se justifica ya que “en el mundo contemporáneo la educación científica no puede reducirse a una interpretación determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico” (Fischbein, 1975).

En el currículo nacional, el aprendizaje de la estadística y las probabilidades (Eje de Datos Y Azar), se ha instaurado desde los inicios de la educación básica, tal como se propone en el ajuste curricular realizado por el MINEDUC, que comenzarán a implementarse para segundo medio a partir del año 2012.

Los fenómenos estocásticos<sup>2</sup> son hechos relacionados con el azar, según Godino “La principal razón para introducir el estudio de las situaciones aleatorias y las nociones básicas sobre probabilidad en la enseñanza primaria es que tales situaciones son frecuentes en la vida cotidiana”.

Para el MINEDUC “El foco central de esta unidad es desarrollar la noción de probabilidad a partir del análisis de situaciones que sean interesantes y motivadoras para las alumnas y los alumnos; es importante que puedan interpretar informaciones referidas a diversos ámbitos, tales como economía, salud, educación, comunicación, diseño de políticas, etc., que involucren y hacen referencia a variables aleatorias”.

Con el propósito de lograr los objetivos propuestos, en el programa oficial, es que se plantean el análisis de juegos y los fenómenos aleatorios, utilizando diversos software que se encuentran disponibles y sin enfatizar en el uso del lenguaje estricto en el que encontramos conceptos tales como espacio muestral.

Además se debe considerar el contexto histórico de las probabilidades, considerando autores importantes que han realizado grandes aportes a esta área y

---

<sup>2</sup> [adj.](#) Perteneiente o relativo al azar. [f. Mat.](#) Teoría estadística de los procesos cuya evolución en el tiempo es aleatoria, tal como la secuencia de las tiradas de un dado. “*Diccionario de la Real Academia Española*”

que los niños deben conocer, para así comprender las influencias que tuvieron y seguirán teniendo las probabilidades a lo largo del tiempo.

La historia de las probabilidades se inicia en la época renacentista, etapa en la que se comienza a dar explicaciones coherentes a los fenómenos que no seguían un patrón determinado, que sucedían al azar, de manera aleatoria. Para explicarlos, se recurría a la matemática y la filosofía. Estos fenómenos relativos a la probabilidad de sucesos eran principalmente los juegos de azar. En esta época se destacaron autores como Pacioli, Cardano y Tartaglia, quienes se centraron en el análisis de los juegos de azar. En 1565, Cardano presenta el “Libro de los juegos de azar”, siendo la primera obra que se relaciona con el cálculo de probabilidades.

Luego Pascal junto a Pierre de Fermat dan origen a la teoría moderna de la probabilidad, la que actualmente influye en muchos aspectos de la vida. Posteriormente se realizó la primera publicación importante acerca de las probabilidades, que tenía como autor a Jacob Bernoulli, quien da a conocer la teoría de Bernoulli y origina la ley de los grandes números. Finalmente, nombramos a Laplace, matemático y físico del siglo XIX que publicó su ensayo haciendo referencia a la probabilidad de un suceso elemental. Un fragmento de su libro señala: “La teoría del azar consiste en (...) determinar el número de casos favorables al acontecimiento cuya probabilidad de busca. La proporción entre este número y el de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad, que no más que una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el de todos los casos posibles”.

Por la importancia de las probabilidades en el mundo actual, es que estudiantes de la carrera de pedagogía en matemáticas e informática educativa, de la Universidad Católica Silva Henríquez (2007) elaboraron para su seminario de grado, un proyecto de innovación pedagógica para la unidad de probabilidades, contemplando todo el material para que los profesores elaboraren sus clases, de tal manera que se logren los objetivos y los aprendizajes que propone el MINEDUC en sus Planes y programas.

Este proyecto se implementará en el colegio Australia, que se encuentra en La Pintana, comuna en que residen niños con vulnerabilidad social, que tienen padres con baja escolaridad, hogares mal constituidos, en dónde se presencia consumo y/o venta de drogas, familiares presos, violencia intrafamiliar o en los alrededores del barrio, contexto social que debe considerarse a la hora de realizar las clases.

El proyecto será implementado usando la metodología de la ingeniería didáctica en educación matemática, que propone en su libro Michéle Artigue.

## I.2 ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

La estadística ha jugado un papel primordial en el desarrollo de la sociedad moderna, al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar en forma óptima estudios y experimentos y mejorar las predicciones y toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. En las últimas décadas, su enseñanza se ha incorporado, crecientemente, a la escuela, institutos y carreras universitarias, no sólo por su carácter instrumental, sino por el valor que el desarrollo del razonamiento estadístico tiene en una sociedad caracterizada por la disponibilidad de información y la necesidad de toma de decisiones en ambientes de incertidumbre.<sup>3</sup>

Según Holmes<sup>4</sup> (2002), la enseñanza de la estadística y probabilidad fue ya introducida en 1961, en el currículo de Inglaterra en forma opcional para los estudiantes de 16 a 19 años que querían especializarse en matemáticas, con el fin de mostrar las aplicaciones de las matemáticas a una amplia variedad de materias. Holmes y su equipo, con el proyecto School Council Project (Holmes, 1980) mostraron que era posible iniciar la enseñanza ya desde la escuela primaria, justificándola por las razones siguientes:

- La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.
- Es útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva.

---

<sup>3</sup> Batanero y Godino, "Perspectivas de la educación estadística como área de investigación".

<sup>4</sup> Batanero y Godino, "Perspectivas de la educación estadística como área de investigación".

- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

En el año 2007, Carmen Escanilla, Karina Hernández y María José Ocares diseñaron una serie de actividades que favorecen constructivísticamente el aprendizaje significativo de la Unidad de Nociones de Probabilidad. Sin embargo, esta unidad no ha sido implementada en el aula, por lo que no se puede indicar su efectividad, solo se supone que cumplen con los objetivos que se propusieron a la hora de crear esta propuesta.

Una de las integrantes del grupo, consulto a un estudiante que cursa por segunda vez el segundo año medio en el colegio Australia, cómo le enseñaron probabilidades el año anterior. Este expuso “que de manera muy tradicional, el profesor les hacía definiciones de conceptos y trabajaban las actividades que se encontraban en el texto del estudiante<sup>5</sup>. Pero, que de esta forma finalmente no aprendió nada de la unidad”<sup>6</sup>.

La profesora le presentó al curso, las características del proyecto que pretende instaurar en clases, el estudiante consultado y sus compañeros se mostraron altamente motivados, porque el proyecto plantea el aprendizaje mediante juegos, que los jóvenes consideraron sumamente atractivos, despertando en ellos el deseo de participar en las clases.

### I.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Por la importancia de las probabilidades en la vida del ser humano, es necesario mejorar sustantivamente la enseñanza de las probabilidades en la educación media.

Por lo tanto un interesante problema a investigar es **“implementar el diseño integral de la Unidad de Nociones de Probabilidad, que propone una serie de actividades que acompañadas con el devenir histórico de la unidad, favorezcan constructivísticamente el aprendizaje significativo en los estudiantes”**.

---

<sup>5</sup> Texto del estudiante segundo año medio. Editorial Cal y Canto, 2009.

<sup>6</sup> Entrevista realizada a un alumno de segundo medio en el colegio Australia.

Este diseño fue realizado por las actuales profesoras Carmen Nayade Escanilla Montorfano, Karina Alejandra Hernández Oyarzún y María José Ocares Mancilla en el año 2007, proyecto que incluyó planificaciones, actividades y evaluaciones de la unidad de probabilidades, que deberían servir de apoyo al profesor.

Para concretar y comprobar si el proyecto cumple satisfactoriamente con lo establecido en el momento de su creación, es que surge la necesidad de aplicarla en la sala de clases, de poner en práctica las actividades que se presentan en el proyecto y observar si los estudiantes muestran un mayor interés, motivación y mejor comprensión en el estudio de las probabilidades. Además considerar la percepción del profesor que aplicará el proyecto en la sala de clases, teniendo en cuenta que este instrumento pretendía también facilitar la labor docente.

La finalidad de implementar esta propuesta es comprobar la efectividad de su aplicación en relación al logro de los aprendizajes esperados y la adquisición de habilidades, que se establecen para los estudiantes de segundo año medio, en la unidad de Datos y Azar en los planes y programa establecidos por el MINEDUC.

El profesor o la profesora deberá tener en cuenta toda la problemática preexistente en estos alumnos a la hora de realizar las actividades propuestas en el proyecto, utilizando la ingeniería didáctica en educación matemática como metodología para desarrollar el proyecto en el aula y para realizar el análisis de los resultados obtenidos con posterioridad a su aplicación, validando o no el proyecto.

## I.4 OBJETIVOS

### I.4.1 OBJETIVO GENERAL

Implementar y evaluar la efectividad, coherencia y pertinencia del proyecto de innovación pedagógica de la unidad de Nociones de Probabilidades en segundo año medio, conforme al diseño propuesto en el seminario de grado “Nociones de azar y probabilidad, una propuesta metodológica para el aula” en el año 2007.

#### I.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Seleccionar antecedentes históricos que evidencian la importancia de las probabilidades en el mundo.
2. Analizar los conceptos de aleatoriedad y probabilidad desde la perspectiva epistemológica.
3. Recopilar e indagar acerca de la ingeniería didáctica al interior de la educación matemática, recopilando antecedentes y fundamentos.
4. Conocer el desarrollo cognitivo y psicosocial de los estudiantes de segundo medio del colegio Australia, a objeto de tenerlo presente a la hora de implementar la unidad.
5. Analizar el diseño del proyecto de innovación pedagógica a aplicar.
6. Implementar el proyecto de innovación pedagógica con base en la ingeniería didáctica.
7. Identificar las fases del proyecto, según la metodología de la ingeniería didáctica.
8. Evaluar la implementación realizada a la luz de las mediciones efectuadas.

# CAPÍTULO II

## MARCO TEÓRICO



## II.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN.

En esta investigación se usa la Ingeniería didáctica como metodología de investigación. Sin embargo, en este trabajo pretendemos dilucidar los patrones que orienten la elaboración de situaciones didácticas en torno a la aplicación del proyecto de innovación pedagógica de nociones de probabilidad en estudiantes de segundo medio. Es decir, el cómo se implementa el proyecto, la elaboración de las clases de la unidad y los conocimientos que deben considerarse antes de su aplicación.

En este capítulo se presentan las ideas que sustentan la metodología escogida para el desarrollo de este seminario de grado.

La ingeniería didáctica surge de la didáctica de las matemáticas que se originó en Francia, al inicio de la década de los ochenta. Se considera como una metodología sustentada por la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau y en la transposición didáctica de Yves Chevallard.

La ingeniería didáctica se puede emplear de dos formas, una como metodología de investigación, y la otra como una producción de situaciones de enseñanza-aprendizaje.

La Teoría de las Situaciones Didácticas es una de las teorías de la Matemática Educativa, que fue desarrollada por el educador francés Guy Brousseau, considerado por algunos como el padre de la didáctica de las matemáticas. Esta teoría plantea las situaciones didácticas, como una manera de moldear el proceso de enseñanza – aprendizaje, en el que se encuentren representadas las relaciones que surgen entre los actores que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, también hay una preocupación por expandir esta propuesta a todos los profesores para que experimenten las situaciones didácticas en un ambiente adecuado de trabajo, sirviendo de base para su labor docente.

Este trabajo establece la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación.

El nombre de ingeniería didáctica nace por la similitud que tiene con la actividad que debe realizar un ingeniero. Según Artigue (1998, p.33), un ingeniero “para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de

su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.”

Según Douady (1995), una Ingeniería Didáctica es un conjunto de secuencias de clases, diseñadas, organizadas y manipuladas debidamente por un “profesor-ingeniero”, para poder lograr el aprendizaje de un conocimiento en un grupo de alumnos en particular. En otras palabras brinda una mejor organización sobre el sistema educativo. Fundamentalmente los productos son construidos a partir de experimentaciones didácticas realizadas en un medio.

La Ingeniería Didáctica se compone básicamente por cuatro etapas, definidas en el texto de Artigue como Fases que se mencionan a continuación:

**Fase 1: análisis preliminar que considera las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir.**

Un análisis preliminar de la situación está integrado por estas tres dimensiones o componentes:

- La componente didáctica, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza;
- La componente epistemológica proporciona la explicación del devenir del contenido matemático en juego, así como su funcionamiento y diversas formulaciones; y
- La componente cognitiva, es decir, las concepciones de los estudiantes, las dificultades y obstáculos que deben de enfrentar para apropiarse de las nociones puestas en juego en la secuencia implementada.

**Fase 2: Concepción y análisis a “priori” de las situaciones didácticas.**

En esta segunda fase se eligen las variables didácticas que se van a controlar y se determina la forma en que estas variables serán gestionadas. También, en esta etapa, se formulan las hipótesis de trabajo, lo que se espera de los estudiantes con la situación didáctica diseñada, qué avances se estimaran dentro de las expectativas, indicar los errores persistentes, qué mecanismos se

sospecha que serán utilizados, en fin, todo lo inherente a las hipótesis de trabajo y expectativas del investigador.

Según Briand (1996) una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno.

Una vez determinadas las variables didácticas y definidas las hipótesis, se pasa al diseño de la situación didáctica en sí misma, esta situación debe considerar el medio adecuado para que el alumno la acepte y se sienta atraído con la apropiación del saber propuesto.

### **Fase 3: La experimentación.**

Esta fase se considera como una “puesta en escena” de la situación didáctica, es el “proceso”, en el cual el profesor implementa el producto, efectuando los ajustes y adaptaciones necesarias que exija la dinámica de la clase.

Las formas en las cuales se recopilará la información son decisión del investigador. Es importante que éste realice un control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y la caracterización de los mismos, repercutirá en la calidad y veracidad de la siguiente etapa.

### **Fase 4: El análisis a posteriori y validación.**

En la última etapa, el análisis a posteriori consiste en una minuciosa revisión de los sucesos acontecidos durante la puesta en escena de la situación didáctica diseñada, es en esta etapa donde se determina si la hipótesis planteada en el análisis a priori es válida y en qué medida las expectativas propuestas fueron alcanzadas y cuanto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

De esta confrontación entre los análisis a priori y a posteriori surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación de la misma.

Esta validación, se comporta como un instrumento que impulsa el ciclo entre lo que se quiere y lo que sucede, entre las intenciones del diseño y la puesta en escena de éste. Buscamos la estabilidad de los diseños, en caso de no alcanzar los objetivos se ajusta el diseño o el análisis predictivo.

## II.2 TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícitas y/o implícitas que se establecen entre un alumno o un grupo de alumnos, el medio (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor, esta relación se genera con el fin de permitir a los alumnos aprender significativamente y/o reconstruir algún conocimiento. Las situaciones didácticas son aquellas que comprenden el proceso en el cual el docente da a conocer ciertos conocimientos o proporciona el medio didáctico para que el estudiante construya el conocimiento.

Como se mencionó anteriormente hay dos teorías que son la base teórica de la Ingeniería Didáctica, una la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y la teoría de transposición didáctica de Chevallard, ambas serán expuestas en este trabajo.

La Teoría de Situaciones Didácticas fue establecida en Francia por G. Brousseau a finales de los años sesenta del siglo XX, esta teoría busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos; el autor afirma: *“Una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, sólo si es una solución de un problema. Tales problemas, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción....”* (Brousseau, 1983, pp. 169-171).

En la modelización de la teoría de Brousseau influyen los estudios realizados por Piaget, considerándose que el alumno aprende de sus experiencias, es por ello que el discurso del profesor debe ser vital, sin errores; para que el alumno construya su conocimiento.

La Teoría de Situaciones está basada en el enfoque constructivista – en el sentido piagetiano- del aprendizaje, concepción de Brousseau (1986) de esta manera: *“El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje”.*

En torno a la adaptación al medio del estudiante, define la actitud del estudiante frente a una situación didáctica, es decir, *“el conocimiento proviene en buena parte del hecho que el alumno lo adquiera en su adaptación a las situaciones didácticas que le son propuestas”* (Brousseau, 1986).

Por otra parte, aunque la situación didáctica es propuesta por el profesor, para que se pueda adquirir un conocimiento, tal conocimiento puede confirmarse verdaderamente en su adquisición, cuando pueda ponerlo en acción en un contexto ajeno de toda intencionalidad didáctica. Tal situación es denominada a-didáctica, la cual es específica del saber aunque carece de la intención de enseñar.

Situación a- didáctica claramente es el proceso que se efectúa, luego de que el estudiante a construido el conocimiento y se le plantea un problema ajeno a lo que trabajo en la situación didáctica, y que debe afrontar y resolver sin la intervención del profesor.

En relación con la importancia y el significado de la no intervención del maestro en la situación a-didáctica, queda aún por comprender que la entrada en una fase a-didáctica es algo que debe gestionar el mismo maestro. Esto dio lugar al concepto de “devolución” desarrollado por Brousseau (1988): *“La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia”*.

La situación propuesta por el profesor al alumno, es aquella que le permita proporcionar el conocimiento que se desea impartir, con un significado propio y beneficioso para su utilización en la resolución de otro problema. La situación planteada debe tener como finalidad que el alumno interactúe con el saber, es decir, que actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le sean útiles (Lezama, 1999).

El diseñar una situación por parte del profesor, para ofrecerla al alumno con el fin de construir un conocimiento, da lugar a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como instantes en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de cualquier problema, sin intervención alguna del profesor en las cuestiones relativas del saber en juego.

Esto evidencia que existen características de la situación, que el docente puede cambiar de tal manera que se reformulen las estrategias consideradas para la resolución y en consecuencia el conocimiento a construir, y hacer que el alumno, dependiendo de su nivel, acepte el problema como suyo y así pueda reproducir sus propias respuestas. A estas interacciones entre el docente y el alumno con los problemas que él ha propuesto, se le conoce como situación didáctica.

Aunque la situación didáctica es propuesta por el profesor, para que el alumno adquiera un conocimiento, este conocimiento puede confirmarse verdaderamente en su adquisición, cuando pueda ponerlo en acción en un contexto ajeno a toda intencionalidad didáctica. Tal situación es denominada a-didáctica, la cual es específica del saber, aunque carece de la intención de enseñar.

En resumen, una situación a-didáctica es aquella en la cual el profesor no interviene dentro del escenario, dejando que el alumno viva esta situación como investigador de un problema matemático, independiente del sistema educativo (Margolinas, 1993).

Cada conocimiento tiene situaciones a-didácticas que preservan su sentido, estas situaciones son denominadas situaciones fundamentales (Situación didáctica) por Brousseau.

La teoría de las situaciones forma parte de la matemática educativa y se apoya en la tesis de que el alumno construya un conocimiento matemático, mediante un proceso similar al que realizaron los productores originales del conocimiento que se quiere enseñar. El diseño de las situaciones didácticas relativas a un concepto matemático dado, se orienta a la construcción de su génesis artificial, que simularía los diferentes aspectos actuales del concepto para los estudiantes y que sin producir el proceso histórico, conduciría no obstante, a resultados similares.

En síntesis, la teoría de situaciones permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase, concebidas por el profesor con el fin de disponer de un medio para realizar un cierto proyecto de aprendizaje.

### II.3 TEORÍA DE TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA, DEL SABER SABIO AL SABER ENSEÑADO.

Esta teoría fue desarrollada por el francés Yves Chevallard, quien es Licenciado en Matemáticas desde 1967, es profesor en el Instituto Universitario de Formación de Profesores (IUFM) y realiza investigaciones en educación matemática en la Universidad de Aix Marseille, Francia. Es conocido mundialmente por su “teoría de transposición didáctica” y últimamente por la “Teoría antropológica de la didáctica” (TAD). En Chile participó en el año 2002, con un proyecto que fue aprobado por el FONDECYT (Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico) que se llama “La matemática en educación básica y media: Un análisis de las discontinuidades entre ambos niveles educativos”, lo que demuestra su importancia y la vigencia que tiene en nuestro país este didacta francés.

El tema de transposición didáctica tiene un gran poder de seducción, ya que el concepto trascendió más allá de los didactas de las matemáticas, siendo utilizado también en la didáctica de la física y en el sistema de educación en general.

En esta teoría se habla de sistema didáctico, que es diferente a decir sistema educativo, porque el segundo incluye la parte administrativa y burocrática del sistema, en cambio el sistema didáctico es aquel compuesto por un docente, los alumnos y un saber matemático. Una relación ternaria es la relación didáctica, la que antiguamente sólo se consideraba como una relación enseñante-enseñado, no contemplando el saber, lo que hizo necesario rectificar el error en esta relación haciéndose parte de este sistema didáctico el saber. Este se presenta como un “saber enseñado” que especialmente encuentra el observador, lo que conlleva a cuestionar la relación que se entabla con el “saber sabio”, el de los matemáticos y la distancia que existe entre un saber y el otro (Chevallard, 1998)<sup>7</sup>.

El concepto de transposición didáctica se refiere al paso del saber sabio al saber enseñado.

La teoría expone que el sistema didáctico no es efecto de nuestra voluntad. Su funcionamiento (sin referirse al buen funcionamiento), supone que la “materia” (enseñante, alumnos y saber) que vendrá a ocupar cada uno de los lugares, satisfaga ciertos requisitos específicos.

---

<sup>7</sup> Chevallard, “La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigne, Aique Grupo editor, 1998.

Chevallard indica en su libro, para que la enseñanza de un determinado elemento de saber sea totalmente posible, ese elemento debe haber sufrido ciertas alteraciones, que lo harán apto de ser enseñado, es decir, el autor sugiere que el conocimiento designado como "Saber a Enseñar" sufre un conjunto de *transformaciones adaptativas* que lo hará apto para ocupar un lugar entre los Objetos de Enseñanza. La *Transposición Didáctica* se ocupa y toma un lugar dentro de este conjunto de transformaciones.

La transformación de un objeto de saber a enseñar a un objeto de enseñanza (o la traslación de conocimiento científico a conocimientos escolares) es el trabajo que realiza la transposición didáctica. Por lo que el objeto de estudio de esta transposición es el saber y las transformaciones que sufre este saber desde que su origen hasta que se pone en práctica en la sociedad.<sup>8</sup>

La transposición didáctica cambia el saber de una comunidad científica al de la comunidad escolar, según las diversas transformaciones se generan distintos modos de saber que van cumpliendo distintas funciones. Los distintos modos se presentan a continuación:

- El primer modo es el saber sabio, que es aquel generado por el matemático profesional o el investigador en matemáticas. Este saber se desarrolla en diferentes centros, universidades, laboratorios y/o institutos, lugares en donde se realizan los procedimientos para lograr un saber especializado. Estos saberes son reconocidos y valorados por la comunidad científica y se encuentran vinculados a otras áreas de interés como la economía, política, tecnología, entre otras. Estos además son financiados por algún poder económico, ya sea del Estado o privado.
- El segundo, el saber científico que no puede ser enseñado tal cual se presenta en los textos o artículos, pues serían un obstáculo para el proceso de aprendizaje por su complicada comprensión, lo que hace necesaria la transformación a un saber a enseñar, el que se estipula en los programas de estudios establecidos en el currículo, y además debe ser entregado al estudiante de una forma didáctica.  
En el paso del saber científico al saber enseñado, ocurre la creación de un modelo teórico que traspase los límites del saber matemático. A partir de

---

<sup>8</sup> Edison De Faria, "Cuadernos de investigación y formación en educación matemática", 2006.



esta teoría o modelo surgen los materiales de apoyo a la enseñanza. Una teoría didáctica tiene como finalidad orientar el trabajo del docente.

- Saber a enseñar, es aquel que se convierte en el saber enseñado por medio de la intervención de instituciones y personas.
- “Finalmente, este Saber a Enseñar, por la mediación de instituciones y personas, se convierte después en el **Saber Enseñado**. Así, el proceso de enseñanza resulta finalmente en el verdadero objeto del *saber enseñado*, esto es, aquél saber registrado en el plano de aula del docente, que no coincide necesariamente con la intención prevista en los objetivos programados al nivel del *saber a enseñar*. Este saber está ubicado en los *Sistemas Didácticos*, los cuales, corresponden propiamente a la relación ternaria: profesor-estudiante-saber” (De Faria, 2006).

Se debe recalcar que la diferencia entre saber enseñado y el saber a enseñar, según De Faria, autor que resume claramente la teoría de Chevallard, es que “el saber enseñado acontece propiamente en el aula, aquel saber que un docente lleva a su aula”, el saber a enseñar se ubica en la teoría didáctica que sustenta el trabajo del docente.

De lo anterior se deduce que los modos del saber sufren dos transformaciones: La primera es cuando el saber sabio, generado en el ámbito científico, se convierte en el saber a enseñar, que se definen en los programas de estudio, la segunda transformación se presenta cuando el saber a enseñar es conducido al aula, es decir, cuando se ha transformado en saber enseñado.

Ambas transformaciones son separadas por Yves Chevallard, clasificándolas en transposición externa y transposición interna.

La Transposición externa es el cambio del saber sabio al saber a enseñar. Un saber generado por un científico se desarrolla en un contexto, tiene su historia y un lenguaje propio que es difícil de comprender por quienes no sean parte de la comunidad científica, lo que hace que no sea apto para ser enseñado en las escuelas, colegios ni tampoco en las universidades. Los cambios que se realizan para que lleguen a conformar el programa oficial es una transposición externa, convirtiéndose en saber a enseñar.

La transposición interna es la que sucede cuando el docente toma el documento oficial del Ministerio de Educación y lo conduce al aula, planificando sus clases y ahí realiza este tipo de transposición.

Esta teoría es considerada como fundamento de la metodología de ingeniería didáctica, por todo lo que plantea acerca de la transposición, de la importancia del saber y las modificaciones que se realizan con el fin de que el alumno aprenda.

# CAPÍTULO III

## MARCO METODOLÓGICO

### III.1 TIPO DE TESIS

El presente trabajo corresponde a una tesis mixta, basándose en investigación documental y de campo, con el fin de alcanzar los objetivos propuestos.

Según Zorrilla (1993), la investigación se clasifica en cinco tipos: *básica, aplicada, documental, de campo y mixta*. Además, se refiere a otros tipos de investigación y en este caso se toma como criterio el lugar y los recursos donde se obtiene la información requerida.

- La investigación documental es aquella que se realiza a través de la consulta de documentos (libros, revistas, periódicos, memorias, anuarios, registros, códigos, constituciones, etc.).
- La de campo o investigación directa es la que se efectúa en el lugar y tiempo en que ocurren los fenómenos objeto de estudio.
- La investigación mixta es aquella que se efectúa considerando la naturaleza de la investigación documental y en la investigación de campo. (Zorrilla, 1993)

Baena (1985) señala "La investigación documental es una técnica que consiste en la selección y recopilación por medio de la lectura y crítica de documentos y materiales bibliográficos, de bibliotecas, hemerotecas, centros de documentación e información".

Garza (1988) presenta una definición más específica de investigación documental. Este autor considera que esta técnica "... Se caracteriza por el empleo predominante de registros gráficos y sonoros como fuentes de información..., registros en forma de manuscritos e impresos".

Arias (1999) plantea lo siguiente "en la investigación de campo los datos se recolectan directamente de la realidad donde ocurren".

Carlos Sabino (s/f), señala que la investigación de campo se basa en informaciones obtenidas directamente de la realidad, permitiéndole al investigador cerciorarse de las condiciones reales en que se han conseguido los datos.<sup>9</sup>

Las definiciones anteriores sobre la investigación documental concuerdan que es una técnica que recopila la información utilizando registros escritos, gráficos y/o sonoros, que son posibles de analizar, criticar, comparar y conducirnos a elaborar un nuevo documento. La investigación de campo coincide en que es una técnica que recopila la información en el lugar y al mismo tiempo que ocurren los fenómenos que se consideran como objeto de estudio.

Los autores definen la investigación documental y de campo por separado, concluyendo que la investigación mixta es una fusión de ambas. Las características de cada uno de estos tipos de investigación no son excluyentes, por lo que se pueden utilizar juntos sin manifestarse problemas.

Una investigación documental realizada de manera minuciosa puede producir diferentes tipos de trabajos documentales como: ensayos, críticas valorativas, memorias, compilaciones, monografías, entre otras.<sup>10</sup>

En el caso particular de las investigaciones de campo, el investigador extrae los datos de la realidad mediante técnicas de recolección de datos (cuestionarios, entrevistas, observación científica) a fin de alcanzar los objetivos planteados en su investigación.

Mediante el uso de ambos tipos de investigación se realizará este seminario de grado, la primera técnica se considerará para la implementación del proyecto que está diseñado con la metodología de ingeniería didáctica, para lo cual es fundamental apoyarse en varios autores y textos que faciliten la comprensión del tema, centrándose por sobre todo en el texto "ingeniería en didáctica de la educación matemática" de Michéle Artigue, que señala las fases de la aplicación del proyecto en el aula.

En cuanto a la técnica de investigación de campo, se recopilará la información entregada por los jóvenes durante la realización de las clases, al mismo tiempo que se implementa el guión didáctico.

---

<sup>9</sup> Del Texto " El proceso de investigación".

<sup>10</sup> Baena (1985)

### III.2 ELECCIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO

El objeto de estudio de nuestro trabajo de investigación es la implementación del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Unidad de Nociones de Probabilidades en segundo año medio, creado por estudiantes seminaristas del Programa de Formación en el año 2007.

Dada la importancia del estudio de las probabilidades a nivel mundial, es fundamental que exista un proceso aprendizaje-enseñanza constructivista de estos contenidos, teniendo en cuenta a sus actores fundamentales, profesor- alumno.

Considerando que este proceso debe conducir al logro de aprendizajes significativos para el desarrollo cognitivo y social de los estudiantes, permitiéndoles interpretar, reflexionar y tomar decisiones ante la presencia de sucesos aleatorios que surjan en su vida diaria.

### III.3 MUESTRA Y SUS CARACTERÍSTICAS.

El proyecto diseñado, se pondrá en marcha en el segundo año medio del colegio Australia, dependencia particular subvencionada de la comuna de La Pintana.

Este colegio imparte educación preescolar, básica y media, contando con un curso por nivel. El establecimiento no está adherido a la Jornada Escolar Completa (JEC).

Los estudiantes del segundo año medio, asisten en la jornada de la mañana con horario desde las 8.00 a las 13.30 horas, teniendo seis horas semanales de clases de la asignatura de matemática en su carga horaria anual.

La metodología de investigación utilizada para el desarrollo del proyecto en clases, será la ingeniería didáctica en educación matemática, expuesta en el libro de Artigue. Para cumplir a cabalidad con las fases propuestas en el libro, se solicitó previamente un informe del curso al psicólogo de establecimiento, que indica lo siguiente:

- Al encontrarse el establecimiento educacional dentro de una comuna de estrato socioeconómico bajo, la mayor parte del estudiantado presenta conductas de desmotivación educacional, pues la mayor parte de los padres

y apoderados no finalizó la educación escolar, por lo cual los alumnos no ven la educación como necesidad básica para enfrentar la vida. Se visualiza carencia de figuras de autoridad al interior del núcleo familiar.

- Las carencias básicas como alimentación, protección y ayuda incondicional son satisfechas al interior del establecimiento. Pasando a ser los educadores parte fundamental en la entrega de valores, siendo modelos a seguir por los estudiantes.
- Este curso es bastante resistente a los cambios y modificaciones tanto de educadores como de figuras de autoridad al interior del establecimiento. Lo cual es reflejado en un comportamiento confrontacional y de prueba constante a los educadores, esto finalizaría al ver la actitud y apoyo por parte de ellos.
- Al interior de segundo año medio se puede encontrar una gama amplia de problemáticas que dificultarían la educación de los alumnos, siendo uno de los principales factores la carencia afectiva y dificultades emocionales producto de conflictos familiares tanto de separación como de abandono.
- Existen alumnos que han presentado conductas delictivas, por las que han llegado a permanecer al interior del Servicio Nacional de Menores.
- Las dificultades cognitivas no están ajenas a este curso encontrando alumnos (as) que presentan coeficientes intelectuales bajo lo esperado para la educación regular, lo que dificultaría aun más la enseñanza por parte de los docentes.

Este informe muestra las características de los estudiantes, las que deben ser consideradas por el profesor, a la hora de realizar sus clases.

Además el puntaje promedio obtenido por el colegio Australia en el SIMCE de matemática del año 2010, aplicado a los estudiantes de segundo año medio fue de 208 puntos, estando muy por debajo del promedio nacional de 256 puntos.<sup>11</sup>, resultados que evidencian una mejora en el quehacer pedagógico en el aula.

---

<sup>11</sup> Resultados SIMCE 2010, MINEDUC. [www.simce.cl](http://www.simce.cl)

### III.4 ETAPAS METODOLÓGICAS

Toda investigación, sobre todo mixta que considera la investigación documental y de campo, establece etapas metodológicas, al igual que la ingeniería didáctica que establece fases de una investigación en el aula.

Las etapas seguidas en esta investigación son las siguientes:

1. Recopilación bibliográfica, estudio documental que fundamente y guíe los distintos temas que se consideraran en su objeto de estudio y el desarrollo del seminario en sí, como:
  - i) El concepto de probabilidad y su enfoque epistemológico.
  - ii) El concepto de azar
  - iii) El concepto de fenómenos estocásticos
  - iv) El concepto de didáctica
  - v) La Ingeniería didáctica como metodología de investigación.
  - vi) Proceso enseñanza- aprendizaje
  - vii) Currículo nacional
  - viii) Resultados SIMCE matemática.
  - ix) Educación secundaria.
  - x) Metodología de investigación
2. Determinar fases indicadas en la ingeniería didáctica.
3. Elaboración de clases guiadas por las planificaciones de la unidad.
4. Aplicación y análisis de prueba diagnóstica para iniciar la unidad.
5. Repaso de contenido.
6. Entrevistas a alumnos.
7. Observaciones de clases.
8. Supervisión de actividades grupales realizadas por los estudiantes.
9. Análisis de informe de curso elaborado por el psicólogo del establecimiento.
10. Aplicación de instrumento evaluativo.
11. Lectura y análisis de material recopilado
12. Conclusiones y sugerencias.



### III.5 INSTRUMENTOS UTILIZADOS

Los instrumentos utilizados para realizar este trabajo son: prueba de diagnóstico, evaluación sumativa y una entrevista a los estudiantes posterior a esta evaluación.

#### Prueba de diagnóstico

Para iniciar la unidad se realizó una prueba diagnóstica (ver anexo N°1), que como su nombre lo indica permite diagnosticar y conocer cuáles son los contenidos que los estudiantes dominan y en cuáles presentan dificultad. Esta prueba debe estar confeccionada exclusivamente con los conceptos y conocimientos previos que el estudiante debiese manejar en el nivel escolar en el que se encuentra. Los resultados de ella orientan al profesor a clarificar que contenidos debe repasar antes de comenzar con la unidad, para así no arrastrar problemas que se harán presentes constantemente a la hora de realizar sus clases y en el aprendizaje de los contenidos posteriores.

#### Evaluación sumativa

Al término de la aplicación del proyecto, se evaluó a los estudiantes por medio de una evaluación sumativa (Ver anexo N°2). En esta prueba se espera que los alumnos reflejen los aprendizajes adquiridos durante toda la implementación de la unidad. Además comprobar la efectividad del proyecto, si su uso facilita el aprendizaje significativo de los niños en el aula.

#### Entrevista

Se realizó entrevista a estudiantes del curso (Ver Carpeta entrevista en Cd), para conocer su apreciación de la asignatura y sus reacciones ante la metodología usada en la implementación del proyecto. En particular se hicieron las siguientes preguntas:

# CAPÍTULO IV

## APLICACIÓN DEL PROYECTO

#### **CAPÍTULO IV: APLICACIÓN DEL PROYECTO DE INNOVACIÓN PEDAGÓGICA EN NOCIONES DE PROBABILIDADES.**

Durante el desarrollo de este capítulo se pretende exponer la aplicación y ajustes necesarios para la realización de la implementación del guión didáctico realizado en el seminario de grado "Noción de azar y probabilidad, una propuesta metodológica para el aula" en el año 2007. En la implementación de esta secuencia didáctica se propone incorporar la metodología de ingeniería didáctica.

La ingeniería didáctica surge en la década de los ochenta, una de sus características son "las realizaciones didácticas" (Artigue, 1995), esta corresponde a la formulación de una idea, implementación, observación y análisis de secuencias de enseñanzas.

La ingeniería didáctica propone que en la segunda fase se examine y analice el proyecto, antes de ser aplicado (análisis a priori) y en la última fase (a posteriori), ambos análisis tanto a priori como a posteriori se comparen con la aplicación efectuada. Este contraste sigue tres dimensiones: cognitiva, epistemológica y didáctica, sin perder de vista los objetivos específicos de la investigación.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación se sostiene en dos teorías didácticas, la primera corresponde a la "Teoría de situaciones didácticas" de Brousseau, que se caracteriza por un conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor – estudiante – medio didáctico, y la segunda "La teoría de la transposición didáctica" de Chevallard, que es el proceso en donde el saber se convierte en un objeto de enseñanza.

La fase de planeación está determinada por cuatro etapas que corresponden primeramente al análisis preliminar, que toma en consideración el enfoque epistemológico, cognitivo y didáctico. La fase del diseño (a priori), que está dirigido por el análisis de las restricciones y la determinación de las variables de control también llamadas variables didácticas. La tercera etapa es la aplicación de la secuencia, que se desarrolla mediante la observación y la recolección de información y finalmente la fase última que es la validación del proyecto, y que resulta de la confrontación que se realiza entre el análisis a priori y posteriori.

En la ingeniería didáctica, el profesor posee conocimientos científicos que son fundamentados mediante diversas teorías, este conocimiento debe ser enseñado a los estudiantes, lo cual es una problemática que debe ser abordada por un profesor ingeniero que cuente con las capacidades para ser frente a la disyuntiva presenciada.

El guión didáctico elaborado en el seminario antes mencionado, está intencionalizado con un orden particular de las unidades y de los contenidos que se encuentran especificados en los planes y programas de estudio establecidos por el Ministerio de Educación.

En la unidad de Probabilidades se busca que los y las estudiantes desarrollen la capacidad de “Analizar experimentos aleatorios e investigar sobre las probabilidades en juegos de azar sencillos, estableciendo las diferencias entre fenómenos aleatorios y los deterministas”<sup>12</sup>.

Contenidos de la unidad elaborados por el Ministerio de Educación<sup>13</sup>:

1. Juego de azar sencillos; representación y análisis de los resultados; uso de tablas y gráficos. Comentario histórico acerca de los inicios del estudio de la probabilidad.
2. La probabilidad como proporción entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, en el caso de experimentos con resultados equiprobables. Sistematización de recuentos por medio de diagramas de árbol.
3. Iteración de experimentos sencillos, por ejemplo, lanzamiento de una moneda; relación con el Triángulo de Pascal. Interpretación de combinatorias.

Los aprendizajes esperados propuestos en el programa de estudios elaborado por el MINEDUC<sup>14</sup> son los siguientes:

1. Relacionan la noción de probabilidades con la información estadística que deriva de la repetición de fenómenos aleatorio y explican que diferencia a estos de los fenómenos determinísticos.
2. Analizan e interpretan los resultados de problemas que involucran cálculo de probabilidades, considerando experimentos aleatorios simples; explican los

---

<sup>12</sup> Planes y programas de segundo medio, Mineduc, 1999.

<sup>13</sup> Planes y programas de segundo medio, Mineduc, 1999.

procedimientos utilizados; analizan la independencia de los mismos; reconocen los casos de equiprobabilidad.

3. Conocen y utilizan la fórmula de Laplace para el cálculo de probabilidades; comparan probabilidades y analizan su valor máximo y su valor mínimo.
4. Utilizan el Triángulo de Pascal y el diagrama del árbol como técnicas de conteo en la resolución de problemas.
5. Interpretan información de diversos ámbitos, que involucran probabilidades.

Mediante el aprendizaje de las probabilidades se espera que los estudiantes sean capaces de contextualizarla en la vida diaria, valorizando la adquisición de competencias para la explicación de fenómenos aleatorios, orientando al educando a realizar sus propias conjeturas con respecto al cálculo de las probabilidades.

#### IV. 1 ANÁLISIS PRELIMINAR

##### Componente epistemológico:

El aspecto epistemológico es fundamental en la reflexión del aprendizaje de las matemáticas. Un ejemplo de la importancia de la epistemología son los inconvenientes surgidos históricamente con respecto a la disciplina, que de cierta forma, se replican en los estudiantes. Además este aspecto permite comprender las posibles dificultades que los y las estudiantes puedan presentar en los conceptos que son utilizados para la resolución problemas en distintos contextos.

Las probabilidades a pesar de contar con una axiomática apropiada poseen controversias sobre la interpretación de conceptos básicos tales como probabilidad y aleatoriedad. Estas no son técnicas ya que el cálculo en sí no desarrolla contradicciones, los problemas radican en la naturaleza de los elementos representados por medio de la probabilidad. Expresiones tales como “experimento aleatorio”, “suceso aleatorio” y “azar” están presentes en el lenguaje cotidiano y textos escolares, pero su significado no es único ni claro, por lo que puede llevar a confusiones de comprensión en los y las estudiantes.

---

<sup>14</sup> ídem

Godino y Batanero (1994) establecen que, el significado de los objetos matemáticos no puede reducirse a una mera definición matemática, cuando nos interesamos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos. El carácter histórico y la evolución de las probabilidades y las nociones que intervinieron en la construcción de éstas, deben ser tomadas en cuenta en la enseñanza de esta rama de las matemáticas.

En el comienzo, el cálculo de probabilidades se relaciona el concepto de aleatorio con equiprobabilidad producto del desarrollo de los juegos de azar, en los cuales el número de posibilidades eran finitas (Liber de Ludo Aleae, Cardano). Entre los siglos XVIII y XIX se manifiesta una extensión de las situaciones de carácter aleatorias a los fenómenos naturales. Conjuntamente se elabora gradualmente un concepto de aleatoriedad más formalizado, incorporando el concepto de independencia lo que es un claro avance para la certeza de la aleatoriedad de un suceso en experimentos repetitivos. El resultado de un experimento aleatorio se podía predecir, pero el desconocimiento de este era parte de la ignorancia del ser humano.

En la actualidad la aleatoriedad se puede explicar en función a las probabilidades: un suceso es un elemento aleatorio de cierta clase, si la probabilidad es la misma que otro elemento cualquiera de la misma clase. Esta definición es suficiente para cualquier experimento aleatorio equiprobable, pero que ocurre si no todos los elementos de esta clase tienen la misma probabilidad (ejemplo: dados cargados).

Al aplicar el concepto de probabilidad a situaciones de la vida real, por ejemplo de carácter biológico (probabilidad de adquirir una determinada enfermedad) los sucesos no son equiprobables. Entonces la definición de elemento aleatorio estaría determinada a la frecuencia relativa, luego de haber observado repetitivamente dicho experimento. Esta concepción es frecuencial, muy útil si se cuenta de estadísticas registradas sobre determinados casos. La dificultad es establecer el número de veces que se debe realizar el experimento para concluir su carácter aleatorio.

Si la definición de aleatorio la condicionamos a la interpretación de cada persona, se eliminaría la propiedad de objetividad del suceso y adquiriría un carácter subjetivo, dependiendo del conocimiento del científico. Este enfoque es llamado subjetivista.

Como se puede observar existen distintas distinciones que depende del experimento que deseamos analizar.

#### Componente cognitiva:

Piaget e Inhelder, lograron explicar el desarrollo del concepto de probabilidad en niños vinculado con la teoría genética de Piaget. La base para la incorporación del concepto, radica en la habilidad para discriminar entre azar y necesidad. En la etapa pre-operativa, la estructura cognitiva que permite distinguir entre sucesos necesarios (predecibles) y aleatorio (no predecibles) no se encuentra desarrollada, por lo que el niño cree que los sucesos aleatorios son de carácter determinista.

El niño en el siguiente estadio, es capaz de diferenciar entre los sucesos necesarios y aleatorios, alcanzando en la etapa operativa concreta la capacidad de estimar probabilidades sencillas, aunque carece de habilidades combinatorias y la capacidad de generar modelos abstractos de un experimento aleatorio. Para lograr la superación el niño debe construir y representar todos los sucesos, considerar las diversas relaciones para calcular las proporciones las que serán adquiridas por el niño, en el estadio de las operaciones formales.

Según Fischbein, el modelo de Piaget presenta dos deficiencias, la primera es que no pueden integrarse las exigencias de progreso, en las tareas del aprendizaje de la probabilidad. La segunda es la desvalorización de los procesos de aprendizaje, que conducen la formación del concepto de probabilidades.

El autor establece que en la etapa pre – operativa, el niño tiene incorporado una comprensión pre – conceptual de los conceptos de frecuencia relativa y probabilidades, basadas en las intuiciones. Estas nociones evolucionan a partir de experiencias cotidianas, que el niño adquiere en su diario vivir. La formalización del concepto de probabilidad, no tiene relación con el crecimiento de este, sino más bien de la escolarización, sin esta el niño jamás será capaz de desarrollar las ideas básicas de la teoría de probabilidad ni mucho menos su cálculo.

El proceso, en donde se reemplaza la intuición de probabilidad por el concepto formal no es secuencial, sino más bien se desarrolla en el momento que el niño descubre la solución de un problema.

Piaget en respuesta a estas deficiencias, propone un planteamiento para el progreso de los aprendizajes y el desarrollo en la adquisición del concepto de probabilidad. Postula que los niños poseen un preconcepto de frecuencia relativa y probabilidad, que vienen de un conocimiento implícito que se desarrolla como consecuencia de la experiencia cotidiana del niño, a medida que este crece estas intuiciones evolucionan en un concepto operativo de probabilidad. Este desarrollo es producto de la instrucción explícita (la escuela), sin este es imposible desarrollar el concepto operativo.

#### Componente didáctica:

La enseñanza tradicional de las matemáticas, según un estudio realizado en Chile por Roberto Araya profesor e investigador de la Universidad de Chile, muestra resultados poco alentadores en el trabajo en el aula de profesores, tanto de enseñanza básica como media. Del estudio se establece que existen dos metodologías didácticas en los profesionales de la educación. La primera es la explicación de ejercicios y preguntas que el profesor realiza a sus estudiantes y la segunda es el trabajo con guías, donde el profesor se mueve por la sala explicando individualmente.

Estas dos metodologías no logran motivar a los y las estudiantes, ya que según este estudio “Los estudiantes hacen muy pocas preguntas matemáticas. Entre todos los estudiantes hacen sólo cerca de una pregunta por hora de clase”<sup>15</sup>. La falta de motivación que provocan estas metodologías, traen como consecuencia los nefastos resultados obtenidos en pruebas nacionales e internacionales (N° 33, de un total de 37, según estudio de la OCDE), que son un síntoma de que la educación matemática está en crisis.

Con respecto a la enseñanza de las probabilidades, existen distintas problemáticas que conllevan a que los estudiantes no comprendan significativamente probabilidades. Una de las aristas a considerar son los distintos enfoques que tiene la concepción de probabilidad.

Estos enfoques son los siguientes:

---

<sup>15</sup> Araya, Proyecto FONIDE “Saber Pedagógico y Conocimiento de la Disciplina Matemática en Profesores”, 2007.



- Enfoque clásico (Laplace): Posee una visión a priori, estudia la probabilidad a partir de experimentos equiprobables, lo que dificulta determinar estos sucesos en experimentos reales.
- Enfoque Frecuencialista: Posee una visión a posteriori, estudia la frecuencia relativa de sucesos, practicando en ensayos repetidos. La dificultad radica en el concepto de límite y convergencia.
- Enfoque subjetivista: La asignación de la probabilidad, se basa en el conocimiento o experiencia que se tiene sobre el experimento, esto produce la dependencia que tiene la probabilidad con el conocimiento que tenga el científico.
- Enfoque estructural: Esta definido por axiomas, conjunto de definiciones y teoremas que pueden ser deducidos por estos.

La enseñanza tradicional, tiene un enfoque probabilístico más cercano a la visión clásica y frecuencialista, pero según el estudio realizado por Hawkins<sup>16</sup>, este se inclina a un enfoque más subjetivista para la enseñanza de las probabilidades, ya que el enfoque clásico no permite una suave y natural transferencia en experimentos aleatorios no uniformes. Con respecto al enfoque frecuencialista, la crítica que realiza, es la utilización de conceptos tales como infinito. Además no todos los experimentos aleatorios pueden ser representados mediante pruebas repetitivas.

La enseñanza de las probabilidades, no debe estar basado en un sólo enfoque, sino debe ir relacionando y articulando cada concepción dependiendo de las necesidades que poseen los educando. Además dependiendo de los recursos, el uso de simuladores computacionales para apoyar el enfoque frecuencialista y situaciones problemáticas.

#### IV. 2 DISEÑO DE LA ACTIVIDAD

El diseño que se aplicará en la presente investigación, fue concebida para estudiantes de segundo año medio.

---

<sup>16</sup> Hawkins y Kapadia, "Concepciones de los niños de la probabilidad: un estudio psicológico y pedagógico", 1984.

El primer módulo está constituido por las actividades, en las que se realizarán juegos y experimentos aleatorios tales como: cachipún, lotería y lanzamientos de monedas, con el fin de establecer por medio de preguntas y visualizaciones de simuladores, tres características fundamentales de experimentos aleatorios:

- Conocer los posibles resultados de un experimento aleatorio (espacio muestral).
- En una repetición cualquiera del experimento, no se puede predecir el resultado que se obtendrá, sino hasta la finalización del experimento.
- Si uno de los experimentos, se repite muchas veces bajo condiciones completamente idénticas, los resultados promedios muestran una regularidad, que permite la construcción de un modelo matemático preciso, con el cual se analiza el experimento (enfoque frecuencialista).

El segundo módulo consiste en analizar situaciones de distintos tipos de experimentos, a través de situaciones problemáticas, experimentos aleatorios y juegos.

El propósito de realizar el análisis en este módulo es:

- Diferenciar e identificar experimentos determinísticos y aleatorios.
- Distinguir entre espacio muestral y suceso.
- Determinar espacios muestrales utilizando gráficos y / o diagramas de árbol.

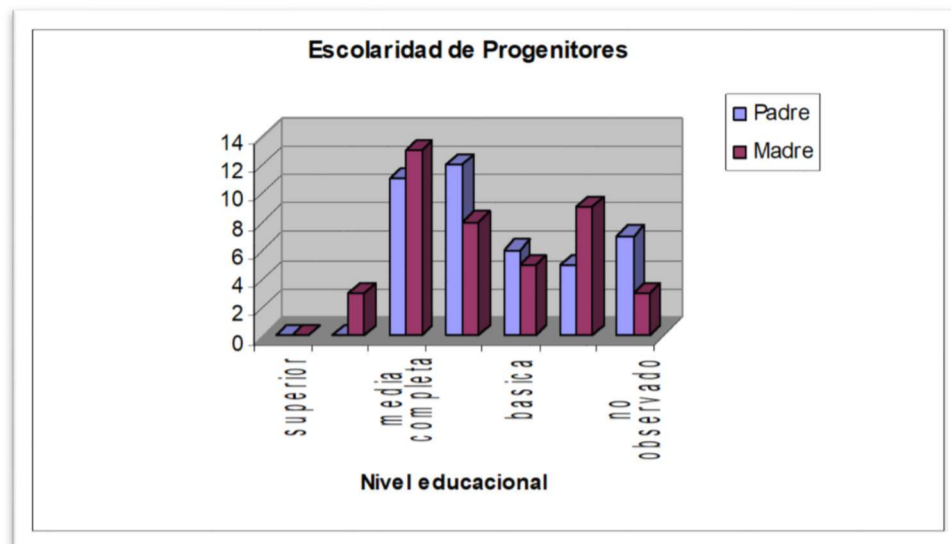
En el tercer módulo, se pretende que los estudiantes mediante ejercicios y simuladores calculen la probabilidad de un suceso (clásica).

Finalmente, en el cuarto módulo se espera que los estudiantes descubran la regularidad del triángulo de Pascal, con el fin de utilizarlo en experimentos aleatorios de dos casos equiprobables.

#### IV. 3 ANTECEDENTES

La aplicación del guión didáctico, se llevará a cabo en el segundo medio del "Colegio Australia" ubicado en la comuna de La Pintana. La edad promedio de estos estudiantes es de 16 años, donde el 34% de estos han repetido al menos un curso.

La escolaridad de los padres se puede visualizar en el siguiente gráfico.



El guión didáctico que se aplicará en la presente investigación, sugiere como actividades que los estudiantes trabajen con simuladores de experimentos aleatorios realizado en Excel, lo que deberá ser modificado porque el establecimiento no cuenta con el equipamiento necesario para realizar las clases utilizando computadores, siendo reemplazado por la visualización de estos experimentos a través del proyector.

Se realizó una evaluación diagnóstica (ver anexo N°1), cuyo objetivo es determinar si los estudiantes poseían los contenidos matemáticos previos, necesarios para iniciar la unidad.

Los objetivos evaluados en esta prueba diagnóstica son los siguientes:

- Transformar números decimales finitos e infinitos periódicos y semiperiódicos en fracción y viceversa.
- Realizar operatoria con números racionales.
- Relacionar frecuencia relativa con frecuencia porcentual.

La evaluación fue realizada por 29 estudiantes, donde el 4% de los logra el primer objetivo, en el segundo objetivo el porcentaje de logro es de un 36% y un 0% de los estudiantes logra el tercer objetivo. Frente a estos resultados se destinaron 5

horas para realizar un reforzamiento de los contenidos, antes de comenzar la aplicación del guión, además de permitir el uso de calculadoras durante el transcurso de la unidad.

La objetivo general de esta investigación, como se escribió anteriormente, en la formulación del problema, corresponde a "Implementar y evaluar la efectividad, coherencia y pertinencia del proyecto de innovación pedagógica de la unidad de Nociones de Probabilidades en segundo año medio, conforme al diseño propuesto en el seminario de grado "Nociones de azar y probabilidad, una propuesta metodológica para el aula" en el año 2007", con esta implementación se espera el logro de los aprendizajes esperados y las habilidades establecidas en los planes y programas de estudio del Ministerio de Educación y además, facilitar la labor docente.

#### IV. 4 DISEÑO

El diseño de la ingeniería didáctica corresponde al realizado en el seminario de grado "Noción de azar y probabilidad, una propuesta metodológica para el aula". Para la implementación de este diseño debió realizarse algunas modificaciones, en relación a las restricciones existentes en el momento de su aplicación, pues el establecimiento no cuenta con un laboratorio de computación adecuadamente equipado (4 computadores en malas condiciones) , por lo que las actividades de simulación de experimentos aleatorios no podrá ser realizado directamente por los estudiantes, sino que será proyectado; no se realizarán todas las actividades por dificultades de tiempo, las actividades no consideradas son las que tienen relación con variaciones o arreglos simples.

A continuación, mostraremos la secuencia didáctica aplicada a los y las estudiantes y se enunciará el propósito de cada pregunta que conformó la actividad de la ingeniería didáctica.

#### **Módulo 1:**

##### Actividad 1.1

El profesor (a) solicita al los estudiantes que en parejas (con el compañero (a) de al lado), jueguen Cachipún, por alrededor de 5 minutos. Al final de este tiempo pregunta ¿Cuáles son los posibles resultados de este juego? y los anota en la pizarra. Posteriormente explica que los resultados posibles de un experimento

aleatorio o juego de azar, llamados sucesos elementales, se conocen antes de realizar dicho juego o experimento.

#### Actividad 1.2

El profesor (a) selecciona tres parejas de estudiantes, para que jueguen al Cachipún, un estudiantes de cada pareja son llamados “adivinos” y relaciona unívocamente jugador y adivinador. A cada “adivino”, se le solicita que traten de predecir los resultados de cada uno de los juegos, anotando dichas predicciones en su cuaderno antes de iniciar el juego. Los estudiantes juegan seis veces, se anota el resultado de cada juego en la pizarra. Posteriormente se compara los resultados de cada juego, con las predicciones registradas en los cuadernos de los estudiantes.

El profesor (a) destaca, que hasta el momento los experimentos aleatorios se caracterizan porque:

- Se conocen todos los resultados posibles del experimento.
- En una repetición cualquiera del experimento, no se puede predecir el resultado que se obtendrá, sino hasta la finalización del experimento.

#### Actividad 1.3

Considerando los números de una lotería o bingo, que se encuentran dentro de una caja. El profesor(a) pregunta ¿cuáles son los posibles resultados, si se selecciona una ficha al azar?, los estudiantes responden y se registran sus respuestas en la pizarra. A continuación el profesor(a) pregunta ¿puede ser seleccionado el número -8 o 540?, la respuesta debiese ser no, ya que esos números no forman parte del conjunto de resultados posibles del experimento.

A continuación, el profesor(a) solicita o designa a tres estudiantes para que sean los “adivinos”, los que deben anotar su predicción en la pizarra. Profesor(a) agita las fichas y sin mirar selecciona una ficha cualquiera, compara el resultado del experimento con las predicciones estudiantiles. Es muy probable que no exista coincidencia, luego repite este proceso cinco veces.

El profesor(a) pregunta ¿se pudo predecir con facilidad el resultado del experimento aleatorio?

Actividad 1.4

El profesor(a) dice a sus estudiantes: “Lanzaré una moneda diez veces y ustedes deben contabilizar el número de caras y sellos que se obtendrán, registrándolas en la siguiente tabla:

Resultado	Tarjas	Total
Cara		
Sello		

Además, se les solicita presentar los resultados en un gráfico de barras.

El profesor dice: “repetiremos este proceso, pero lanzaré la moneda quince veces”. Luego indica: formen grupos de 3 estudiantes, uno de ustedes lanza la moneda veinte y cinco veces, el segundo cuenta el número de sellos y caras, y el tercero realiza el gráfico de barras.

El Profesor pide que repitan la situación, pero ahora se lanza la moneda treinta y cinco veces. Luego que cada grupo realiza el experimento, se revisa los resultados obtenidos, anotándolos en la pizarra.

Se hace una tabla por cada etapa y se solicita al representante de cada grupo, que señale cuales fueron los resultados obtenidos (cantidad de caras y cantidad de sellos):

Grupos	15 lanzamientos		25 lanzamientos		35 lanzamientos	
	Caras	Sellos	Caras	Sellos	Caras	Sellos
G. 1						
G. 2						
G. 3						
.						

.						
G. n						
Total						
Promedio						

El Profesor o la profesora realiza un resumen indicando lo siguiente:

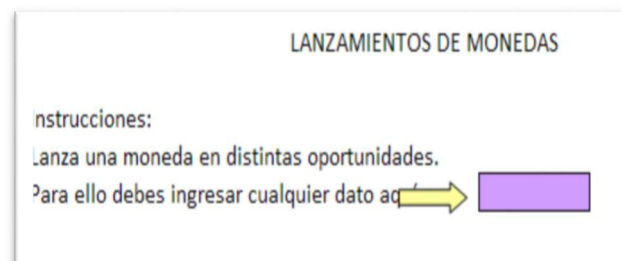
Las tres características fundamentales de los experimentos aleatorios son:

- Se conocen los posibles resultados de un experimento (espacio muestral)
- En una repetición cualquiera del experimento no se puede predecir el resultado que se obtendrá, sino hasta la finalización del experimento
- Si uno de estos experimentos se repite muchas veces bajo condiciones completamente idénticas, los resultados promedios muestran una regularidad que permite la construcción de un modelo matemático preciso con el cual se analiza el experimento

#### Actividad 1.5

El profesor puede simular en el computador la actividad 5. (Ver anexo N°3).

Para poder verificar la regularidad, observaremos la siguiente simulación:

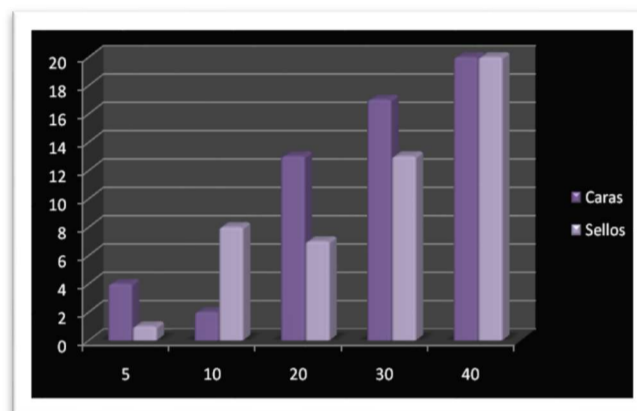


Primero, debes introducir el dígito que tu desees en la casilla correspondiente y presionar ENTER, observarás cambios posibles que pueden suceder, en el caso del lanzamiento de una moneda, ya sea 5, 10, 20, 30 y 40 veces

observando entonces, los posibles resultados, los cuales se representarán en una tabla:

	5	10	20	30	40
Caras	4	2	13	17	20
Sellos	1	8	7	13	20

Para finalizar observen el gráfico, en la cual se verá de manera más clara, que a medida que aumentan los lanzamientos de las monedas, los resultados obtenidos tienen casi la misma frecuencia.



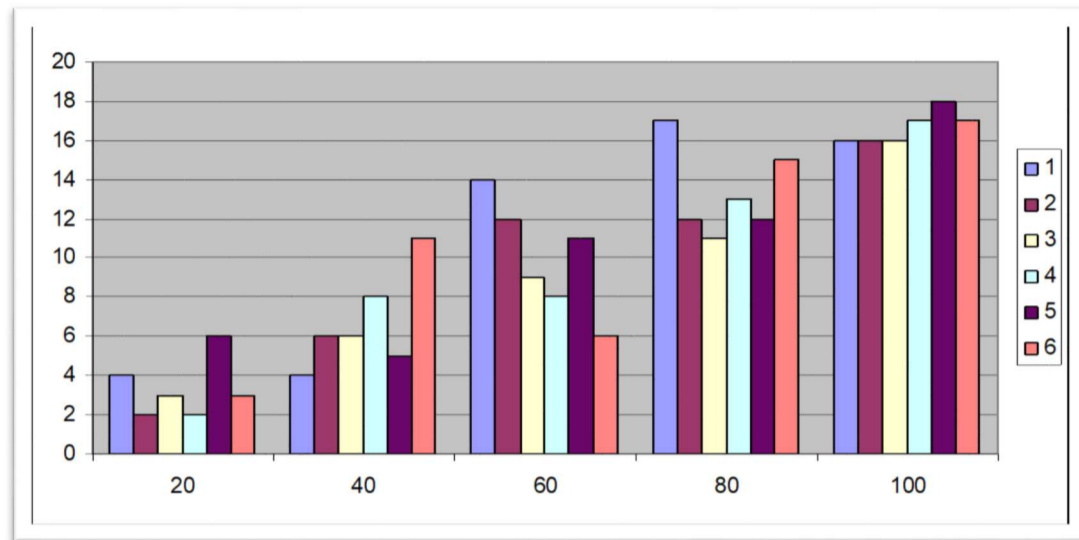
Al simular el lanzamiento de un dado, encontrarán una tabla como la que se aprecia a continuación:

	Lanzamiento				
	20	40	60	80	100
1	4	4	14	17	16
2	2	6	12	12	16
3	3	6	9	11	16
4	2	8	8	13	17
5	6	5	11	12	18
6	3	11	6	15	17

En el eje de las abscisas podemos apreciar el número de lanzamientos (20 veces, 40 veces, etc.) y el en el eje de las ordenadas, los valores de las caras del dado.



Finalmente el gráfico muestra que a medida que aumentan los lanzamientos de los dados, los resultados alcanzados manifiestan una regularidad, en las frecuencias obtenidas.



#### Actividad 1.6

De los siguientes juegos de salón: ludo, dominó, brisca, cacho, tablero chino, ajedrez, y la gran ciudad ¿Cuál de ellos son juegos de azar?.

#### Actividad 1.7

¿Son aleatorios los siguientes experimentos?

- i) Elegir un estudiante al azar, en un cierto curso, y observar si es dama o varón.
- ii) Mezclar un litro de pintura azul con medio litro de pintura amarilla.
- iii) Contar el número de erratas que aparecen en una página de un cierto libro.
- iv) Seleccionar al azar a los estudiantes del curso, hasta encontrar al primero que sea capaz de responder a determinado problema matemático.
- v) Soltar una piedra de una cierta altura
- vi) Se lanzan tres dados e interesa la suma de los puntos de los dados.

Tarea:

Averigua junto a tus compañeros, qué tipos de experimentos se realizan en las otras asignaturas (puedes consultar a los profesores de Física, Química, Biología).

## **Módulo 2:**

### Actividad 2.1

Yolanda y Alberto están jugando con un dado, cuyas caras están enumeradas del 1 al 6. Pero Alberto es muy tramposo y ha cambiado el dado, por otro que tiene en todas las caras el número 6.

Cuando lance Yolanda su dado, ¿podremos predecir qué número saldrá?

Cuando lance Alberto su dado, ¿podremos predecir qué número saldrá?

La respuesta correcta es indicar que el experimento de Yolanda es aleatorio, puesto que no podemos predecir su resultado. El experimento de Alberto en cambio no lo es, puesto que podemos predecir su resultado.

Al conjunto de todos los resultados que pueden obtenerse, al realizar un experimento aleatorio se le llama espacio muestral y se denota por  $\Omega$ .

Entonces se pregunta a los estudiantes, ¿Cuál será el espacio muestral de Yolanda?

Un dado sabemos que este tiene 6 caras y cada una de ellas está enumerada del 1 al 6, entonces el espacio muestral es  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

El espacio muestral, es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Por otra parte, si interesan sólo los resultados del experimento cuyas caras representan números pares, entonces los resultados posibles corresponden a un subconjunto del espacio muestral. De la misma manera, si al lanzar el dado sale una cara impar, entonces se considera otro subconjunto.

Definición:

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, se llama espacio muestral, denotado por  $\Omega$ .

Todo posible resultado de un experimento aleatorio, se llama suceso elemental, denotado por  $w_i$ .

Por lo tanto el espacio muestral es:  $\Omega = \{w_i / w_i \text{ es suceso elemental}\}$

Definición:

Un suceso o evento es un subconjunto del espacio muestral.

Los sucesos o eventos se denotan por A, B, C,..... o por  $A_1, A_2, A_3, \dots$

A suceso  $\Leftrightarrow A \subseteq \Omega$

Ejemplo:

Sea  $\mathcal{E}$ : se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Los sucesos elementales son:  $w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 5$  y  $w_6 = 6$

Se definen los siguientes sucesos o eventos:

A : que salga número par;  $A = \{2, 4, 6\}$

B : que salga número primo;  $B = \{1, 2, 3, 5\}$

C : que salga número par y primo  $C = \{2\}$

D : que no salga número par;  $D = \{1, 3, 5\}$

Asociado a este mismo experimento aleatorio pueden considerarse diferentes espacios muestrales, así este conjunto se podrían definir como:

$$\Omega = \{par, impar\} \text{ o } \Omega = \{ "menor que 3", "mayor o igual que 3" \} .$$

Todo depende de lo que se quiera estudiar con el experimento aleatorio y que se pueda asignar, la posibilidad de ocurrencia (probabilidad) a los sucesos elementales del espacio muestral que se considera.

Lo primero que se debe hacer, por tanto, es decidir cuáles son los posibles resultados del experimento aleatorio. No es posible admitir más de las que realmente pueden ocurrir, pero se debe estar seguro de no olvidar ninguna que pueda ocurrir.

Para determinar espacios muestrales y sucesos interesantes de un experimento, se puede recurrir a gráficos o diagramas del árbol.

Ejemplo

Sea  $\mathcal{E}$  : se lanza un dado y una moneda

Este experimento se puede subdividir en los siguientes experimentos aleatorios:

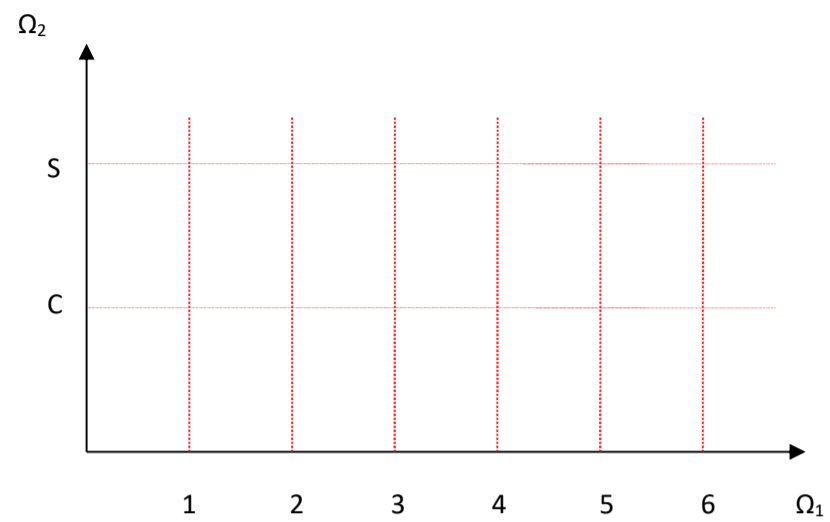
$$\mathcal{E}_1 : \text{ se lanza un dado} \quad \Omega_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{E}_2 : \text{ se lanza una moneda} \quad \Omega_2 = \{ c, s \}$$

El espacio muestral del experimento aleatorio original es  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$$\Omega = \{ (1, c), (1, s), (2, c), (2, s), (3, c), (3, s), (4, c), (4, s), (5, c), (5, s), (6, c), (6, s) \}$$

El espacio muestral se representa en el siguiente gráfico:



Se definen los siguientes sucesos:

$A_1$  : la moneda da cara ,

$$A_1 = \{(1, c), (2, c), (3, c), (4, c), (5, c), (6, c)\}$$

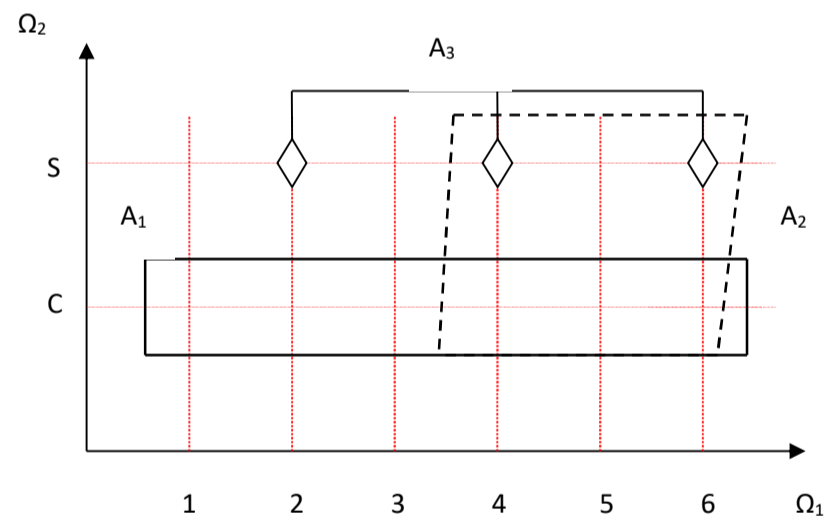
$A_2$  : el dado da un número mayor que 3,

$$A_2 = \{(4, c), (4, s), (5, c), (5, s), (6, c), (6, s)\}$$

$A_3$  : el dado da un número par y la moneda da sello,

$$A_3 = \{(2, s), (4, s), (6, s)\}$$

La representación gráfica de los sucesos es:



Actividad 2.2

Determine el espacio muestral, usando un gráfico del siguiente experimento.

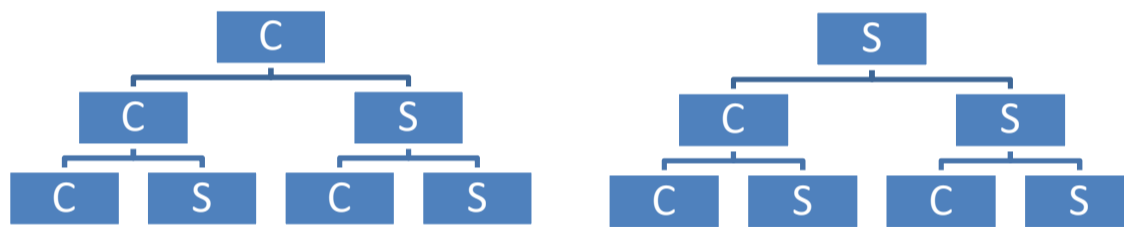
$\mathcal{E}$  : Lance un dado dos veces y determine los siguientes sucesos.

- en el primer lanzamiento sale un número mayor que 4 y en el segundo lanzamiento sale el 1 o el 2
- la suma de los números de ambos lanzamientos es mayor que 7
- el promedio de los números de ambos lanzamientos es mayor que 4

El uso de los diagramas del árbol (es un dibujo que se emplea para enumerar todos los resultados posibles de una serie de experimentos, cada uno de ellos puede suceder de un número finito de maneras), se aprecia en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Sea  $\mathcal{E}$  : se lanza una moneda regular tres veces



Por lo tanto, el espacio muestral es:

$$\Omega = \{ CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS \}$$

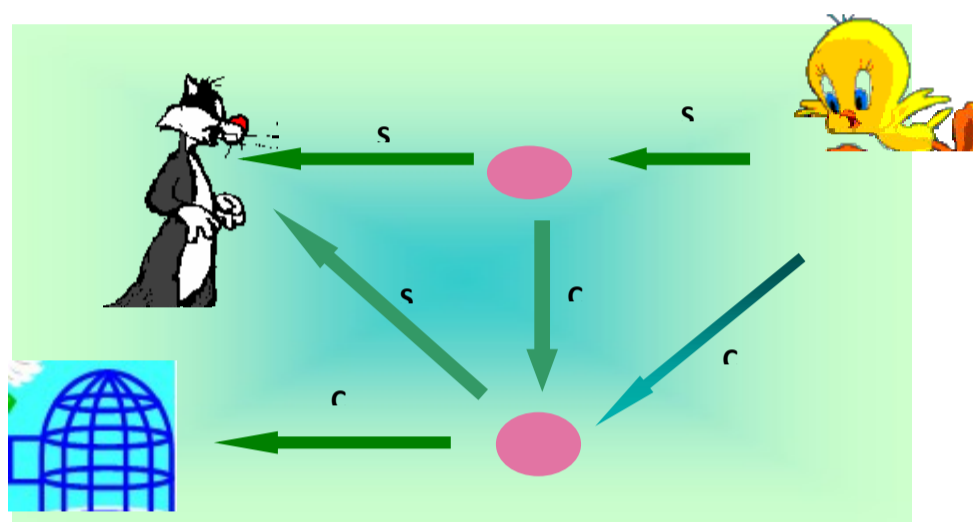
Este experimento también se puede proponer como: “se lanzan 3 monedas regulares y distinguibles, una vez”

Indica cuáles son los sucesos elementales de los siguientes sucesos:

- A : que salgan a lo más dos caras.
- B : que salga una cara o que salgan tres sellos.
- C : que no salgan sellos.
- D : que salgan uno o dos sellos.

### Actividad 2.3

Desarrolla el siguiente experimento<sup>17</sup>: como verás en la imagen, el gato silvestre, corre para tratar de atrapar a piolín y lograr su mayor objetivo, es decir, comérselo, pero como bien sabemos, piolín siempre ha estado preparado para huir de este “lindo gatito”, esta vez, la suerte de piolín, tendrá que ver con tu propia suerte. Para que piolín tome un camino deberás lanzar una moneda al aire y dependiendo del resultado deberás tomar el camino que corresponda, ( c: cara, s: sello). Adelante! vamos a jugar y a probar tu suerte.



Determina el espacio muestral para este juego (experimento aleatorio).

### Actividad 2.4

Usando el diagrama del árbol determina el espacio muestral del siguiente experimento aleatorio “se observa la secuencia de nacimientos en familias de cuatro hijos, donde V significa hijo y D significa hija”

### Actividad 2.5

Una persona escoge al azar como vestirse, teniendo 3 camisas (azul, verde y blanca), 2 pantalones (azul y café), 3 pares de calcetines (celeste, negro y café), y 2 pares de zapatos (negro y café).

<sup>17</sup> Arévalo, M y Faune, P. Nociones de Azar y Probabilidades. Seminario de Título pág.94-

Usando el diagrama del árbol determina el espacio muestral de este experimento aleatorio.

En el diagrama identifica los siguientes sucesos:

- Viste camisa azul y zapatos negros
- Viste zapatos café y calcetines del mismo color
- No viste camisa verde ni calcetines celestes
- Viste camisa blanca y no viste pantalón azul.

### **Módulo 3**

La primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en juegos de azar fue el Libro de los Juegos de Azar de Cardano, escrito en 1565, pero publicado recién en 1663. Cardano, era un jugador empedernido y su obra es más bien un manual para jugadores. Contiene descripciones de juegos y las precauciones a tomar, para que los rivales no hagan trampas y sólo una pequeña parte está dedicada al estudio del azar, con problemas tales como: calcular todos los resultados posibles, al lanzar dos o tres dados y las frecuencias con que aparecían, hallar la probabilidad de que al lanzar un dado, una serie de veces salga un determinado número al menos una vez, o calcular las frecuencias de los valores de la suma de las caras de una tirada de dos dados. En la resolución de estos problemas, Cardano introdujo la idea de asignar una probabilidad entre 0 y 1 a un suceso cuyo resultado se desconoce, considerando el número total de resultados y el número de resultados favorables. Sin embargo, Cardano no alcanzó a reconocer la importancia teórica de estos conceptos, porque consideraba estas relaciones como meramente aritméticas, más que como una medida de la posibilidad de ocurrencia de un suceso aleatorio.

La imposibilidad del conocimiento previo del resultado de un experimento aleatorio genera incertidumbre en el experimentador. La intensidad de esta incertidumbre no tiene que ser igual de unos experimentadores a otros, ni en un mismo experimento los resultados de uno u otro.



### Ejemplo

Cuando se juega con un dado regular es indiferente apostar a uno de sus seis posibles resultados, por ser razonable suponer que ante la ocurrencia de cualquier número la incertidumbre, o su contrario la certidumbre, es la misma.

### Ejemplo

Si el dado tiene marcado cinco, uno y un dos, no es indiferente apostar al uno o al dos, pues parece más seguro ganar el juego apostando al uno que al dos.

Es conveniente cuantificar la incertidumbre, o la certidumbre, que se tiene sobre la ocurrencia de los sucesos elementales de un experimento aleatorio. Esta medición se lleva a cabo a través de la probabilidad.

Tanto el término probabilidad como el de azar, es utilizado de múltiples maneras. Con todas ellas, se puede establecer dos grupos de enunciados a los que se aplica el término probabilidad, conducentes a dos concepciones distintas de la probabilidad: la científica (donde la probabilidad puede expresarse numéricamente) y la lógica o de hipótesis que no puede medirse. En el primer grupo se tienen enunciados como: probabilidad de obtener un seis al lanzar un dado, probabilidad de que una persona de veinte años fallezca antes de cumplir los veinticinco, probabilidad de que un material radiactivo se desintegre en cierta proporción en un tiempo dado, etc. El segundo grupo lo integran enunciados del tipo: probabilidad de que "Elvis" no haya fallecido, probabilidad de que "El Último Grumete de la Baquedano", no lo haya escrito Francisco Coloane, etc.

### Actividad 3.1

Con los datos de la actividad 5 sección .2, calcular los cocientes

$$\frac{\text{número de caras}}{\text{total de lanzamientos}} \quad y \quad \frac{\text{número de sellos}}{\text{total de lanzamientos}}$$

Para 10, 15, 20 y 30 lanzamientos de una moneda

¿A qué número se acercan esos cocientes?

¿Ese número puede ser mayor que 1 o menor que 0?

Durante la segunda mitad del siglo XVII, se inician los primeros intentos científicos de medir la probabilidad de ocurrencia de un suceso (Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli, Leibniz, etc.), pero es con Laplace en 1812 cuando, con su definición de probabilidad conocida como clásica, comienza el cálculo de probabilidades.

Laplace, define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorables (cardinalidad del suceso) y el número total de casos (cardinalidad del espacio muestral), siempre que todos los sucesos elementales sean igualmente posibles (tengan la misma probabilidad de ocurrencia).

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

De acuerdo a esta definición, la probabilidad de que ocurra el espacio muestral es 1 (uno), ya que número de sucesos elementales del espacio muestral  $\Omega$ , es el total de sucesos elementales.

Tarea

Busca en Internet antecedentes biográficos de Pierre-Simón Laplace.

Actividad 3.2

Resuelva los siguientes ejercicios de probabilidad Laplaciana:

1. Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior, cuál es la probabilidad de que :
  - a) Salga un numero par
  - b) Salga un numero primo
  - c) Salga un numero par y menor que 4
  - d) Que no salga número par
  - e) Salga número par y primo.
2. Se lanza un dado dos veces. Determine la probabilidad de que:

- a) la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.
  - b) la diferencia entre el número del primer lanzamiento y el número del segundo sea menor que dos
  - c) la probabilidad del espacio muestral
  - d) que salga el par (2,5) ¿Es la misma probabilidad que tiene el par (6,1)?
3. Se selecciona al azar dos números de teléfono y se observa la última cifra de cada uno, determina la probabilidad de los siguientes sucesos:
- a. las dos cifras son iguales.
  - b. su suma es 11.
  - c. su suma es mayor que 7 y menor que 13.
  - d. la suma de los números es menor que 8
  - e. suma de los números es mayor que 10
4. Una moneda está cargada de manera que la probabilidad de salir cara {c} es el triple que la de sello {s}. Encontrar  $P\{c\}$  y  $P\{s\}$ .

De estos ejercicios se puede deducir algunas características de las probabilidades

- a. La probabilidad de cualquier tipo de suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- b. a probabilidad del espacio muestral es siempre 1.
- c. Si se suman las probabilidades de todos los sucesos elementales, se obtiene la probabilidad del espacio muestral (1).

¿Existirá algún suceso que tenga probabilidad cero?

Aquel cuyo número de casos favorables es igual a cero, o aquel que no contiene sucesos elementales. Tal suceso se llama vacío, denotado por  $\phi$

En un lenguaje moderno, las ideas propuestas por Laplace son las siguientes:

Sea  $\varepsilon$  un experimento aleatorio y sea  $\Omega$  el espacio muestral finito de sus resultados posibles tal que  $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ , suponiendo que cada suceso elemental es equiprobable, entonces  $P(w_i) = p$ .

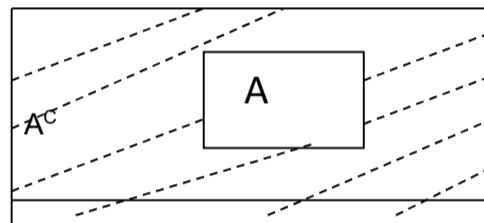
Si  $1 = P(\Omega) = P(w_1) + P(w_2) + P(w_3) + \dots + P(w_n)$ , entonces

$$P(w_i) = p = \frac{1}{n}.$$

Sea  $A$  un subconjunto de  $\Omega$  tal que  $A = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$  entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= P(w_1) + P(w_2) + P(w_3) + \dots + P(w_k) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \\ &= \frac{k}{n} = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{total de casos}} \end{aligned}$$

Una forma interesante de definir un suceso, es mediante la negación de la ocurrencia de otro suceso, llamado suceso contrario o complementario, denotado por  $A^c$ . Esta idea se puede presentar en un diagrama de la siguiente manera:



Del diagrama se deduce que  $P(A^c) = 1 - P(A)$

#### Módulo 4

Representa una regularidad numérica que se ilustra en la siguiente figura:

		1		1		
		1	2	1		
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1	

				1	6	15	20	15	6	1				
			1	7	21	35	35	21	7	1				
		1	8	28	56	70	56	28	8	1				

Se pueden observar algunas regularidades y estas son:

- Los coeficientes primero y último de cada fila son siempre 1.
- Cualquier otro coeficiente de una fila, se obtiene como la suma de los dos valores que están justo arriba en la fila anterior.
- Si se suman los números de cada fila, el resultado es siempre una potencia de 2.
- Existe una simetría, en cada fila respecto a su centro.

El triángulo de Pascal también se utiliza en experimentos aleatorios que tengan dos sucesos equiprobables de ocurrencia, como por ejemplo: lanzar una moneda, el sexo de una persona, respuestas de preguntas del tipo verdadero o falso, etc.

Considerando el experimento aleatorio “se lanza una moneda varias veces”.

Este triángulo se llama triángulo de Pascal y si lo relacionamos con el lanzamiento de la moneda, interpretamos en la cuarta fila que al lanzar una moneda cuatro veces obtenemos:

				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
			1	4	6	4	1		

1 caso en que salen sólo caras (4 caras).

4 casos en que salen 3 caras.

6 casos en que salen 2 caras.

4 casos en que sale 1 cara

1 caso en que no salen caras (0 caras)

Esta técnica, la de utilizar el Triángulo de Pascal para contar rápidamente la cantidad de casos, se utiliza cuando hay dos casos equiprobables.

Otro ejemplo en el cual podemos aplicar el Triángulo de Pascal es el sexo de los hijos de una familia. Por ejemplo, en la cuarta fila el 6 indicaría que hay 6 casos en que hay dos varones y dos niñas en cuatro nacimientos. Si sumamos los coeficientes de esta fila, obtenemos:

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16, \text{ lo que corresponde a los casos totales.}$$

Por lo tanto la probabilidad de tener dos niños y dos niñas en cuatro

nacimientos es:  $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

#### IV. 5 ANÁLISIS A PRIORI

Modulo 1:

En este módulo las variables didácticas involucradas, son los juegos escogidos y el orden de realización de estos mismos, dependiendo de la cardinalidad del espacio muestral (de menor a mayor). Además, el uso de simuladores de lanzamiento de moneda y dados.

En esta serie de actividades, se espera que los estudiantes establezcan las características fundamentales de experimentos aleatorios sin mayor dificultad, puesto que están orientadas a las primeras nociones de probabilidad desarrolladas por Cardano.

Considerando la componente cognitiva, el estudiante debiese encontrarse según Piaget, en el estadio de operaciones formales. Por lo que debe realizar la diferenciación entre sucesos necesarios (determinista) y aleatorios, propios de la etapa preoperativa.

La metodología utilizada en este módulo, facilita el aprendizaje de los estudiantes, porque mediante el juego, el estudiante construye el concepto de aleatoriedad y establecen las características fundamentales de estas, alejándose de la enseñanza tradicional de las matemáticas, en donde el profesor utiliza dos metodologías tradicionales (explicación de ejercicios y trabajos con guías), observadas en el estudio del profesor Roberto Araya.

- Actividades 1.1 y 1.2: Se espera que los estudiantes determinen los sucesos aleatorios sin mayor dificultad.
- Actividad 1.3: Los estudiantes no deben presentar dificultades para lograr diferenciar cuando un suceso es probable o imposible.
- Actividades 1.4 y 1.5: No se espera que exista una dificultad en identificar la regularidad numérica que se observa en el experimento aleatorio, en lo que puede existir mayor dificultad es en contextualizar esta regularidad con el experimento aleatorio.
- Actividad 1.6 y 1.7: Diferenciación de un experimento determinístico de uno aleatorio, no presenta dificultad por parte de los alumnos.

#### Módulo 2:

Las variables didácticas presentes en este módulo, son los ejemplos pertinentes a la realidad y entorno de los estudiantes, además del juego de Piolín y Silvestre.

Las dificultades que se pueden encontrar en este ítem ocurren al determinar los espacios muestrales, posee la noción e incluso es capaz de identificarlos en algunos experimentos aleatorios sencillos, pero en estas actividades es posible notar, que no es posible calcular intuitivamente. Además, en estas actividades debe ser capaz de representar sus ideas en diagramas y gráfico.

- Actividades 2.3: Diferenciar espacio muestral y suceso, no presenta dificultad.

- Actividades 2.4, 2.5 y 2.6: Determinar espacios muestrales y sucesos utilizando gráficos o diagramas, en esta actividad se presenta una mayor dificultad.

Módulo 3:

La variable didáctica presente en este módulo corresponde al simulador del lanzamiento de una moneda utilizado en la actividad 3.1.

En estas actividades, es donde debería presentarse la mayor dificultad, puesto que la actividad introductoria parte, desde una concepción de probabilidad frecuencialista, hasta llegar a definirla en su concepción clásica. Otra dificultad es que los estudiantes, deberán aplicar todos los conceptos antes aprendido para relacionarlos con el cálculo de probabilidades.

Actividades 3.1, 3.2: Esta son las actividades en que mayor dificultad debiesen presentar los y las estudiantes, porque en las ideas y conceptos trabajados en los módulos anteriores, no existía un trabajo aritmético y eran experimentos concretos. En cambio en estas actividades se relacionan todas estas ideas con el fin de determinar, sin realizar el experimento (pensamiento abstracto), la probabilidad de sucesos equiprobables por medio de la visión clásica de esta.

Módulo 4:

En la actividad de este módulo, se pretende que el estudiante encuentre la recurrencia presente en el Triángulo de Pascal, lo que debiese presentar mayor dificultad.

#### IV. 6 DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

Módulo 1:

La primera actividad, provocó en los estudiantes cierta sorpresa, ya que no presentó las características tradicionales de una clase de matemáticas, por lo que generó su atención y disposición a participar y trabajar.

Este módulo tuvo una duración de cinco horas pedagógicas, en la primera sesión se trabajó con el concepto de sucesos aleatorios y experimentos aleatorios, utilizando una presentación en Power Point. La segunda sesión se utilizó como material de apoyo, el uso de simuladores. Los conceptos tratados fueron sucesos y experimentos aleatorios, y espacio muestral.



Se observó que los estudiantes durante el desarrollo de las clases, trabajaban activamente entre ellos, luego de cada juego debían expresar sus conclusiones. En el juego del cara y sello, se observó una disminución de interés, y manifestaron que era aburrido. Cuando se les mostró el simulador del mismo experimento, se interesaron nuevamente.

#### Módulo 2:

Este módulo tuvo una duración de dos sesiones, en la primera sesión que tuvo duración de 135 minutos, la clase fue más expositiva que la anterior, se les presentó el experimento del lanzamiento de dos monedas donde era necesario determinar el espacio muestral, mediante la utilización de gráfico. Se propone la actividad 2.1 para ser realizada por ellos, se aumenta el número de preguntas en relación al modulo anterior.

En la segunda sesión, se les presentó el mismo problema anterior, pero ahora utilizando el diagrama del árbol. Se les da la actividad 2.6 para que sea resuelta de manera individual, observándose un ambiente de trabajo adecuado y dificultades al comenzar la actividad.

#### Módulo 3:

Este módulo, se desarrolló en dos sesiones, las clases fueron expositivas, en la primera sesión los jóvenes realizaron la actividad introductoria, para luego definir el concepto de probabilidad clásica. Los estudiantes resolvieron la actividad propuesta durante la siguiente sesión.

#### Módulo 4:

No pudo ser desarrollada por razones de tiempo, luego que el establecimiento designara las últimas clases para repaso de los contenidos para la prueba coeficiente dos, además de un día feriado.

### IV. 7 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Como se ha mencionado anteriormente, esta implementación fue aplicada al segundo año medio del colegio Australia de la comuna de La Pintana. A continuación mostraremos los resultados obtenidos en la evaluación sumativa (Ver anexo N°2) aplicada el día 14 de diciembre del 2011.

Resultados generales de la evaluación:

Comprensión lectora

	Correcta	Incompleta	Incorrecta
Pregunta 1	29 81%	0 0%	7 19%
Pregunta 2	10 28%	7 19%	19 53%

Selección múltiple

	Correcta	Incorrecta
Pregunta 1	25 68%	12 32%
Pregunta 2	14 38%	23 62%
Pregunta 3	5 14%	32 86%
Pregunta 4	32 86%	5 14%
Pregunta 5	14 38%	23 62%
Pregunta 6	22 59%	15 41%
Pregunta 7	9 24%	28 76%

Desarrollo

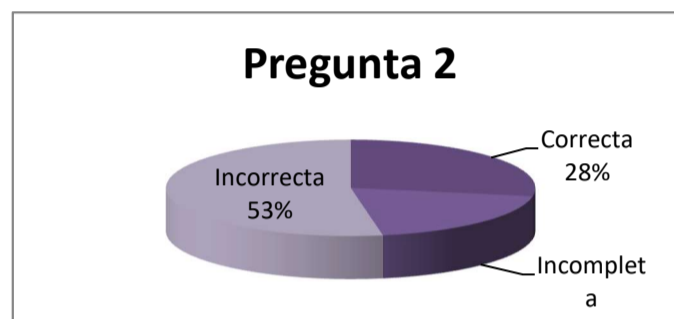
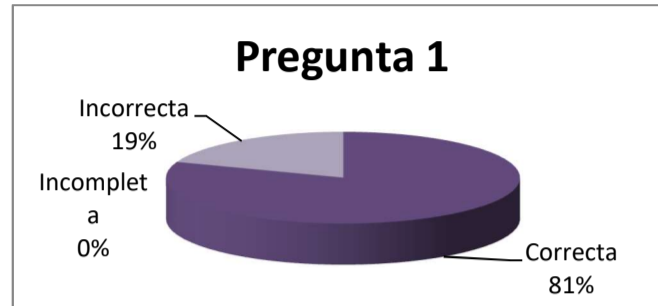
	Correcta	Incompleta	Incorrecta
Pregunta 1	14 38%	5 14%	18 49%
Pregunta 2	15 41%	6 16%	16 43%

#### IV. 8 ANÁLISIS A POSTERIORI

A continuación se analizan las respuestas de las primeras dos preguntas correspondientes a la comprensión lectora de la evaluación sumativa (ver anexo N°2):

Pregunta 1: ¿Cuáles son las dos concepciones de probabilidad?

Pregunta 2: Nombre dos ejemplos de probabilidad lógica



Ambas respuestas se encuentran literalmente en el párrafo elegido de la comprensión lectora, si bien en la pregunta uno la mayor parte (81%) de los estudiantes respondieron correctamente, no así en la pregunta dos en donde sólo el 28% de los estudiantes respondió en forma correcta.

Según Avilés (s/f), en muchas ocasiones el aprendizaje de las matemáticas no se produce en los estudiantes, puesto que no logran comprender el enunciado del problema. La comprensión lectora es un problema transversal y va mucho más allá del estudio de las probabilidades.

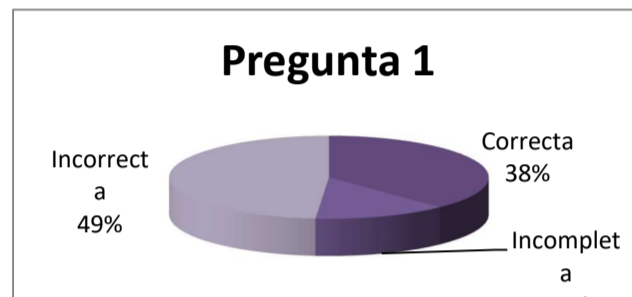
Módulo 1:

Durante el desarrollo de la clase se reafirmó lo esperado en el análisis a priori, es decir, no presentaron dificultades en establecer las características fundamentales de los juegos realizados (experimentos aleatorios), puesto que esta habilidad es desarrollada en el estadio preoperativo (teoría Piagetana).

Cabe mencionar que los estudiantes indican que existe un 50% de posibilidades de ganar en el juego del cara o sello. Esto significa que tienen una idea intuitiva de la probabilidad de ocurrencia de un suceso, esta es independiente y anterior a la realización del módulo, denominada según Fischbein como intuición primaria producto del proceso cognitivo desarrollado por la experiencia física y social del estudiante.

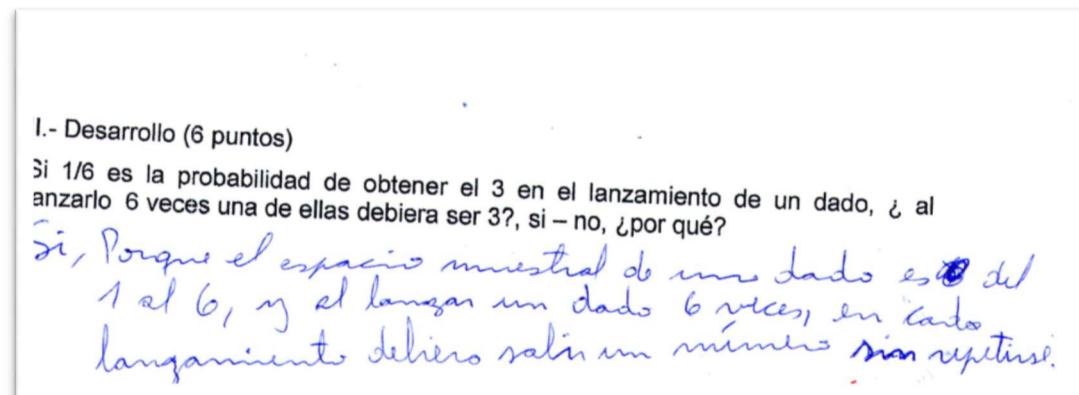
La pregunta de la evaluación sumativa, correspondiente a este módulo, se encuentra en el ítem de desarrollo, enfrenta al estudiante en la siguiente situación:

Si  $\frac{1}{6}$  es la probabilidad de obtener el 3 al lanzar un dado, ¿Al lanzarlo 6 veces una de ellas debiera ser 3? se obtuvieron los siguientes resultados:



Al finalizar el proyecto aun existe un porcentaje importante (62%) de estudiantes, que le da un carácter determinístico a experimentos aleatorios.

En el siguiente recuadro se presenta una respuesta incompleta.



El estudiante, tiene noción sobre el carácter aleatorio del experimento, pero aún sigue dando un carácter determinístico al experimento, condicionando que el número tres no puede salir más de dos veces.

Esto demuestra que los estudiantes, son capaces de distinguir las características de un experimento aleatorio, pero no relacionan estas en la resolución de un ejercicio concreto.

Los resultados de la evaluación, se contradicen con lo observado durante el desarrollo de la clase, puesto que los estudiantes no tuvieron dificultades en determinar las características fundamentales de los experimentos aleatorios, sin embargo, en la evaluación sumativa fue posible observar que sólo un 38% de los estudiantes contestaron correctamente. Los estudiantes no fueron capaces de utilizar las conclusiones obtenidas de los experimentos aleatorios, para lograr diferenciar estos con los experimentos determinísticos.

Si bien los estudiantes deberían estar en el estadio operacional formal, en la realidad esto no ocurre, es esta una de las críticas a la teoría piagetana, puesto que el aprendizaje de las probabilidades no necesariamente se produce junto con el desarrollo biológico del estudiante, sino más bien es un proceso continuo.

Fischebein, establece que la intuición primaria se vuelve secundaria en un proceso súbito al descubrir la solución de un problema, es este proceso el que no se desarrolla en los estudiantes, puesto que las actividades dirigidas a la diferenciación (determinístico y aleatorio) no fueron lo suficientemente concretas según las necesidades del curso.

#### Módulo 2:

En el análisis a priori, no se consideró que los estudiantes asignarán características deterministas a un experimento aleatorio, sin embargo al preguntar a los estudiantes: "Si se realizó un estudio donde se establecía que 3 de cada 10 personas les gusta el color verde, ¿puedo asegurar que si yo elijo 10 personas al azar entre estas van a existir tres que les gusta el verde? Al responder el 40% contesta que sí.

En las Actividades 2.4, 2.5 y 2.6: Determinar espacios muestrales y sucesos utilizando gráficos o diagramas, se esperaba encontrar mayor dificultad en la realización del diagrama árbol que en la construcción del gráfico, comprobándose que lo propuesto era al revés, se registra mayor dificultad en construir el gráfico.

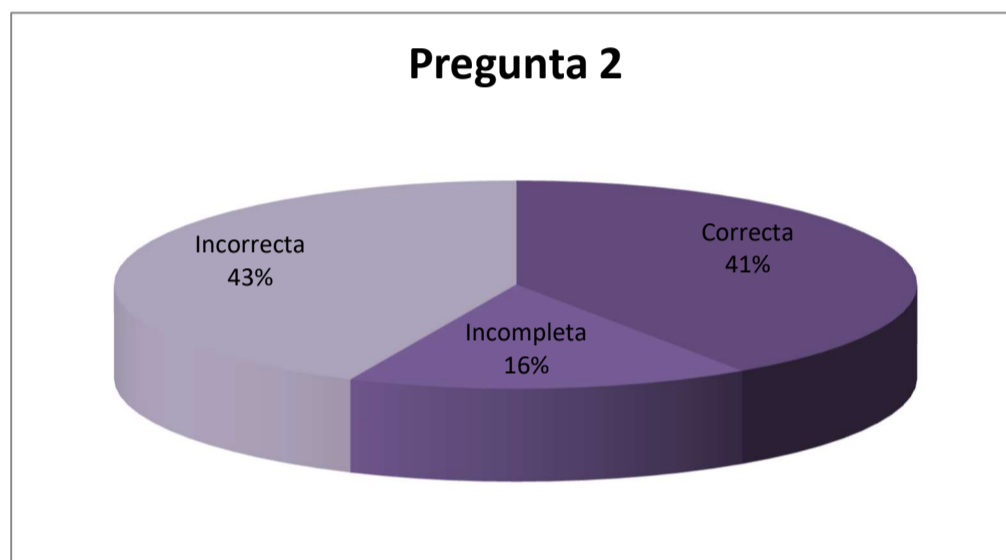
En las otras actividades, se encuentra concordancia con lo propuesto en el análisis a priori, es decir, no hubo dificultades en la identificación de espacios muestrales y sucesos.

Al analizar los resultados de la evaluación correspondientes a este módulo es posible observar lo siguiente:

Pregunta 2, ítem de desarrollo

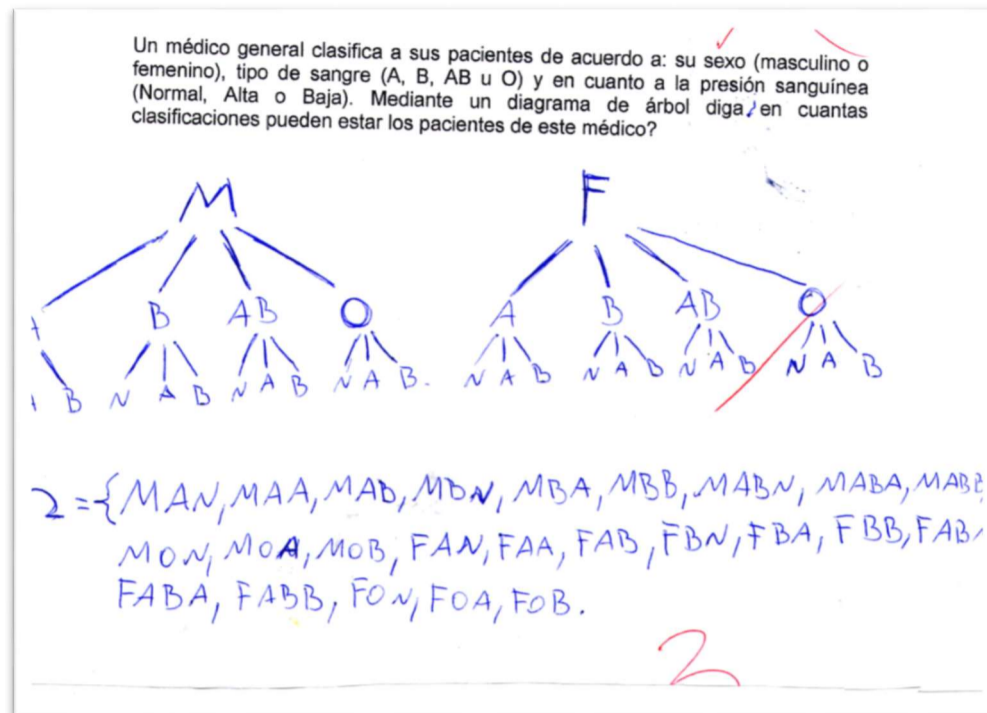
Un médico general clasifica sus pacientes de acuerdo a: sexo (masculino o femenino), tipo de sangre (A, B, AB u O) y en cuanto a la presión sanguínea (normal, alta o baja). Mediante un diagrama de árbol diga en cuántas clasificaciones pueden estar los pacientes de este médico.

Las respuestas de esta pregunta son:



Si bien, el porcentaje de respuestas incorrectas, es mayor que el de las correctas (43% y 41% respectivamente), los estudiantes son capaces de construir el diagrama de árbol, la mayor dificultad es expresar el espacio muestral como conjunto.

La respuesta dada por un estudiante es:

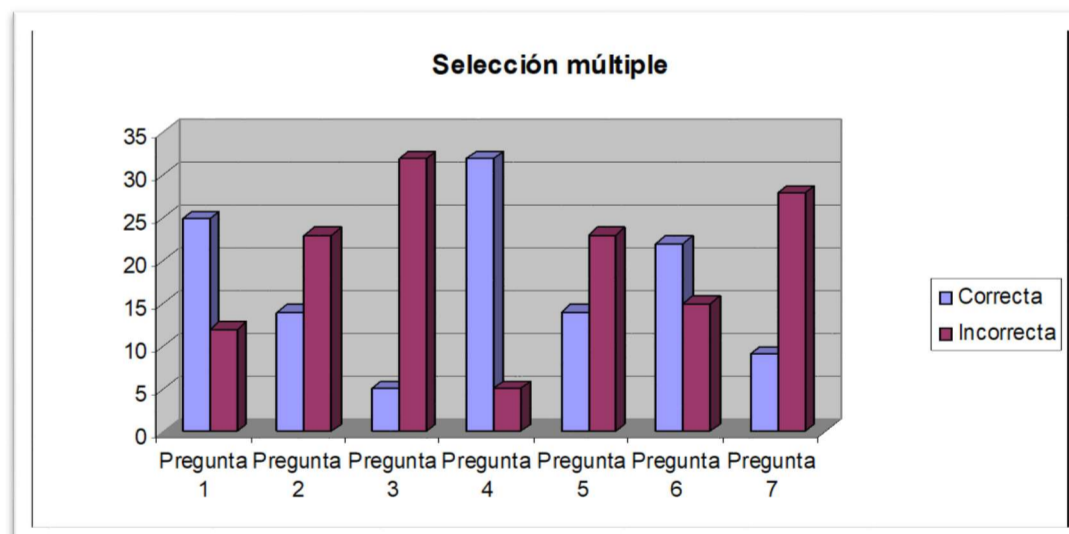


Es conveniente enfatizar más en la escritura de espacios muestrales y sucesos como conjuntos por extensión, asociando las distintas ramas del árbol con un suceso elemental.

Módulo 3:

Con respecto a este módulo, se esperaba que los estudiantes presentaran dificultades en entrelazar los conceptos antes aprendidos con la regla de Laplace. En los resultados obtenidos en la evaluación final, se puede visualizar que no se logro el objetivo en su totalidad.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en las preguntas del ítem de selección múltiple.



Los estudiantes, presentaron deficiencias en el cálculo de la probabilidad, si bien identifican los espacios muestrales no logran aplicar la regla de Laplace en el cálculo de probabilidades.

En las preguntas dos y tres que contienen el mismo enunciado: “En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. Han comido carne 16 hombres y 20 mujeres. El resto comió pescado. Si elegimos una persona al azar.”

Pregunta 2: ¿Cuál es la probabilidad que haya comido pescado?

Pregunta 3: ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida sea hombre y haya elegido pescado?

En ambas preguntas existe una mayoría de estudiantes que responden en forma errónea (62% y 86% respectivamente), puesto que es necesario comprender el problema y calcular la cantidad de personas que consumieron pescado (pregunta 2) y además cumplan con la condición de ser hombre (pregunta 3). Ya en el ítem de comprensión lectora arrojó que los estudiantes no fueron capaces de responder preguntas que estaban explícitamente en el texto, aun más difícil es que puedan realizar cálculos previos antes de encontrar la cantidad pedida.

La pregunta número tres, tiene un mayor grado de dificultad, porque el estudiante debe encontrar la probabilidad que cumpla con la condición de que sea hombre **y** haya comido pescado, ese “y” el estudiante debe relacionarlo con el concepto de intersección, lo cual se torna complicado, ya que no posee conocimientos conjuntistas.

Cuando se le pregunta a los estudiantes ¿qué probabilidad tienes de obtener un número primo al lanzar un dado?, pregunta número cinco, una mayoría (62%) responde en forma incorrecta, si bien conocen el espacio muestral del lanzamiento de un dado, éstos tienen dificultades en entender cuales son los números primos, además muchos de ellos llegaron a la respuesta  $\frac{3}{6}$ , la cual no es errónea ya que es equivalente a un medio, pero al no encontrarla dentro de las alternativas se confundieron y no fueron capaces de marcar la respuesta correcta.

En la pregunta 3, un 78% respondió en forma incorrecta. Como vemos en una de las respuesta dada por uno de los estudiantes, éste fue capaz de encontrar el espacio muestral, mediante el uso del diagrama del árbol, pero no fue capaz de expresar en forma conjuntista, ni mucho menos expresar todos los sucesos favorables.



7.- Si se tiran 3 monedas, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos caras y un sello?

a)  $\frac{1}{8}$   
 b)  $\frac{1}{4}$   
~~c)  $\frac{1}{2}$~~   
 d)  $\frac{3}{8}$   
 e)  $\frac{3}{4}$

En la solución presentada se visualiza que el estudiante sabe que debe determinar el espacio muestral, utilizando el diagrama del árbol, pero no es capaz de concretizar sus saberes calculando adecuadamente la probabilidad pedida.

## CONCLUSIÓN

La finalidad de este trabajo se centró en implementar un diseño pedagógico en el aula, basándose en la ingeniería didáctica. Este diseño, está relacionado con las nociones de probabilidad, unidad que se enseña en segundo medio lo que significa estudiar y comprender la importancia de las probabilidades en la vida del ser humano, pero fundamentada con hechos concretos y referencias de autores confiables, que corroboraron lo trascendental de aprender probabilidades desde los inicios de la etapa escolar, convenciéndonos de lo beneficioso que es para los estudiantes. Autores como Fischbein, que expresa la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad, señala "En el Mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico".<sup>18</sup>

De las probabilidades han surgido varias teorías, desde la época renacentista se han destacado autores que demuestran la importancia de la estadística y las probabilidades, en 1565 destaca Cardano, luego Pacioli y Tartaglia, además el famoso Pascal y Pierre de Fermat que contribuyeron a la teoría moderna de las probabilidades, la teoría de Bernoulli y Laplace con su teoría de azar, estos autores entre otros, a la fecha se encuentran vigentes con sus propuestas que aún se enseñan en el aula.

Al momento de aplicar el proyecto en el aula dedujimos que hay conceptos que los estudiantes utilizan y que han adquirido mediante la intuición. Cardano en el siglo XVI, relacionaba los conceptos de aleatoriedad y probabilidad con los juegos e incluso elaboró un libro al respecto, hoy en día los jóvenes siguen relacionado estos conceptos con los juegos de azar, y lo hacen de manera intuitiva, por lo que el profesor debe aprovechar esta percepción para conducirlo al logro de los aprendizajes esperados en esta unidad.

En resumen, el desarrollo de los conceptos de aleatoriedad y probabilidad, durante la historia del hombre, se ve reflejado con el desarrollo que se produce en los estudiantes, durante todo el proceso de enseñanza y aprendizaje de la unidad de nociones de probabilidad.

---

<sup>18</sup> Fischbein, "The intuitive sources of probability thinking in children".

Considerando que la aplicación del proyecto, se realizó utilizando la metodología de la ingeniería didáctica, propuesta por la francesa Michéle Artigue. Esto significó hacer un estudio cauteloso de su propuesta, la que se encuentra en el libro "Ingeniería didáctica en Educación Matemática", en este se expresan 4 etapas o fases, las que se debieron cumplir en el transcurso de la unidad. Además esta metodología se sustenta fundamentalmente en dos teorías, que son la "Teoría de situaciones didácticas" de Brousseau y la "teoría de transposición didáctica" de Chevallard, ambos autores provienen de Francia, país gestor de las teorías didácticas, las que aportan no tan sólo a la educación matemática, sino influyen en la formación general de profesores. Con el análisis de estas teorías deducimos los aportes de la didáctica en la labor docente, en el logro de aprendizajes y de habilidades de los estudiantes, porque conduce a realizar clases motivadoras y lúdicas para los alumnos.

Al aplicar el proyecto basándose en la ingeniería didáctica se realizaron todas las etapas propuestas por Artigue. Primero se realizó un análisis preliminar de los estudiantes del segundo año medio del colegio Australia, analizando las características de los integrantes del curso, su nivel socioeconómico, la escolaridad de sus padres, su edad, conocer si habían repetido algún curso, etc. Estas características hacen que el profesor analice los obstáculos y las dificultades que se van a presentar en la aplicación del proyecto, además establece las restricciones en la realización didáctica. Las experiencias y la realidad de cada estudiante son distintas y deben ser consideradas por el profesor a la hora de realizar sus clases, para que estas cumplan el objetivo propuesto.

Por ejemplo, el bajo nivel de escolaridad de los padres está ligado al bajo rendimiento de sus hijos, por la falta de apoyo que estos tienen en sus casas, o bien la falta de incentivo a los niños, porque los padres no consideran la educación como algo importante y primordial en sus vidas, en general no visualizan esta, como una manera de salir de la pobreza y de vivir en mejores condiciones, por lo que no exigen a sus hijos que estudien, que estén atentos en clases o que realicen sus tareas, haciendo aún más difícil la labor del docente, que tiene el desafío de revertir esa situación y motivar a sus estudiantes a aprender y salir adelante.

Por el contexto social de los estudiantes, por sus intereses, por la reducción del tiempo y la realidad del establecimiento, el proyecto de innovación pedagógica diseñado por las profesoras Carmen Escanilla, Karina Hernández y María José Ocares debió ser modificado, no fue posible aplicar todas las actividades propuestas, por no contar con las horas necesarias. Las aplicaciones que los

estudiantes debían realizar en el computador, fue sustituido por las mismas aplicaciones, pero expuestas mediante un proyector en la pizarra de la sala de clases, porque el establecimiento no cuenta con un laboratorio de computación equipado.

La implementación del proyecto se inicio con la prueba de diagnóstico, la que no arrojó resultados favorables. Los alumnos en su mayoría no dominaban los conocimientos previos, necesarios para comenzar la unidad, por lo que se realizó un repaso, al empezar luego con las actividades que constituían juegos, los estudiantes demostraron gran motivación e interés por aprender, participaron activamente de las clases, se generó un ambiente distinto al generado en las unidades vistas con anterioridad, hubo gran disposición de los estudiantes, pero a la hora de aplicar la evaluación final, esta registro resultados insatisfactorio, no lográndose los objetivos propuestos en la prueba.

Los resultados obtenidos por los estudiantes concluimos que se deben a que las actividades realizadas por estos en clases y sin mayor dificultad, constituían actividades de situaciones concretas, en cambio la evaluación apunta a constatar la evolución del pensamiento concreto de los estudiantes, al pensamiento abstracto. Los jóvenes no son capaces de resolver los problemas planteados, porque estos constituyen un análisis del pensamiento abstracto, el cual por la edad que estos tienen y según lo que expresa la teoría Piagetiana, debiesen tener la capacidad de pensar de manera abstracta. Concluimos además, que en la evaluación se plantearon problemas de forma escrita, lo que también constituye una gran dificultad para los jóvenes, porque no cuentan con una comprensión lectora adecuada y acorde con su etapa de vida.

La Implementación del proyecto no puede ser considerada efectiva, pues los estudiantes en la evaluación no desarrollaron los problemas de manera satisfactoria, pero si consideramos que con modificaciones puede ser una herramienta positiva en la labor docente, porque resulta una propuesta atractiva para los niños, ya con eso se deduce que puede ser positivo para el desarrollo de los estudiantes y la comprensión de la unidad, sólo que el profesor debe tener la capacidad de crear el vínculo entre las percepciones intuitivas de los conceptos, la visualización concreta y la relación de estas, para lograr en sus estudiantes un pensamiento abstracto que le permita plantear y resolver un problema de probabilidad y realizar cálculos.

## SUGERENCIAS Y COMENTARIOS

Los resultados obtenidos en la evaluación final, no arrojaron los resultados esperados en este seminario, puesto que la mayoría de los estudiantes no lograron adquirir la totalidad de los aprendizajes esperados.

Luego de analizar los resultados obtenidos junto con los antecedentes de los estudiantes, fue posible vislumbrar la debilidad de esta secuencia didáctica, ésta radica en que si bien las primeras actividades son bastante concretas (módulo 1), las restantes no lo fueron tanto, dadas las condiciones de los estudiantes. Puesto que se esperaba que los estudiantes por su edad y nivel educativo lograran avanzar de un pensamiento concreto a uno abstracto, al finalizar el primer módulo.

Es por esto que se sugiere que los docentes realicen actividades de carácter lúdico al comenzar cada uno de los módulos, para lograr el enlace entre el nuevo concepto con la realización de nuevas situaciones problemáticas.

La matemática no es una isla en el conocimiento humano, es por esto que es sumamente importantes que los docentes de las diferentes asignaturas que componen el currículum nacional trabajen en conjunto con el fin de conectar las distintas disciplinas, es por esto que se sugiere que los docentes trabajen en conjunto con el propósito del enriquecimiento cada uno de los saberes. Por ejemplo, actividades en las cuales los estudiantes puedan observar empíricamente la diferencia entre un experimento determinístico y aleatorio, estas pueden ser apoyadas por los docentes de otras asignatura tales como ciencias, de esta forma el estudiante será capaz de transitar desde su propia experiencia a ejemplos donde no será necesaria la experimentación.

La realización de este seminario utilizó la metodología de la ingeniería didáctica, ésta, en su fase preliminar, consta de los análisis didáctico, epistemológico y cognitivo del contenido en el cual se realizará la investigación. El análisis epistemológico permite al docente prever las posibles dificultades que presentarán los estudiantes, ya que el desarrollo que formó a la disciplina se presenta en los estudiantes, es por esto que se sugiere al Departamento de Matemática realizar cursos de perfeccionamiento relacionados con el devenir histórico de los contenidos, complementándolos con aplicaciones didácticas en el aula.

Es sumamente importante que los docentes realicen investigaciones didácticas durante todo el ejercicio de su profesión, puesto que de esta forma se

enriquece a si mismo y mejora la calidad de su trabajo. Si bien los docentes no cuentan con el tiempo necesario para realizarlas, es necesario realizar un esfuerzo, no hay que olvidar que la labor docente va más allá que ser un mero reproductor de contenidos.

Las universidades tienen la misión de formar a los nuevos profesionales y además generar nuevos saberes mediante la investigación. Al finalizar los estudios superiores, los futuros docentes no deberían romper el vínculo con la universidad, sino más bien trabajar en conjunto, no de una forma paternalista, sino con un trabajo en conjunto, puesto que la universidad genera investigación y los egresados de estas están en las aulas día a día.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France, 1951
2. Godino, Juan : “Matemática para maestros”. Proyecto EDUMAT-maestros.
3. Artigue, Michéle: “Ingeniería didáctica en educación matemática”, Grupo editorial Iberoamericana, Bogotá, 1995.
4. Lorca, Arturo: “acerca de la importancia de matemática para nuestro país”, coloquio didáctica 2010, PUCV.
5. Batanero, Carmen: Capítulo “El desarrollo de la educación estadística en el siglo XX y perspectivas futuras”, 2000.
6. Planes y programas de educación matemática, MINEDUC, 1999.
7. Laplace, Pierre-Simon, “Ensayo filosófico sobre las probabilidades”, traducción de Pilar Castillo, Alianza editorial, 1985
8. <http://www.google.es/books?hl=es> (Búsqueda de libros de google)
9. <http://www.google.es/books?vid=OCLC01450686&id=kquzFVmtQ04C&pg=PA1&lpg=PA1&dq=essai+laplace#PPP3,M1>
10. Juan Jesús Ortiz, Nordin Mohamed, Carmen Batanero, Luis Serrano y Jesús Diego Rodríguez “Comparación de probabilidades en maestros en formación”, X Simposio de SEIEM. Huesca, 2006.
11. Gran diccionario de la lengua española.
12. De Faria, “Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Universidad de Costa Rica, 2006.
13. Chevallard, Yves, “Teoría de la transposición didáctica”, 1997.

