UNIVERSIDAD CATOLICA
SILVA HENRIQUEZ

FACULTAD DE EDUCACIÓN
Escuela de Educación en Humanidades y Ciencias
Departamento de Educación Matemática

LA MEDIDA COMO MAGNITUD EN EL AULA CHILENA:
¿Enseñanza o utilización?

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO
EN EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN
MATEMÁTICA E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:
BALBOA REYES, PAMELA C.
NOTARO CÁCERES, DANIELLA A.
CISTERNAS SOTO, DANIELA C.

PROFESOR GUIA:
CARLOS A. GÓMEZ CASTRO

SANTIAGO, CHILE
2011

INDICE

INTRODUCCIÓN GENERAL

En Chile, el ministerio de Educación, en el área de matemática postula en su currículo una subdivisión en cuatro ejes temáticos: números, algebra, geometría y datos y azar. Con la experiencia que da el trabajo en el aula, se han observado diversas dificultades en su enseñanza. Una de estas se presenta en el eje de geometría, siendo de sumo interés por la vinculación que tiene con las situaciones cotidianas. El problema al que se alude es la dificultad que se produce en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la medida como una magnitud. Por ello esta investigación tiene como pretensión comprender el aprendizaje de la medida como magnitud, a través de los modelos mentales que los estudiantes desde séptimo básico hasta tercero medio se elaboran en torno a la longitud, superficie y capacidad.

Para realizar una investigación acabada, se analizará cómo esta noción se enseña en los colegios, así como también, cuál es la percepción que tienen los alumnos sobre la medida como una magnitud.

Al observar la resolución de problemas en la vida cotidiana, a través de objetos matemáticos, se encontró que la medida es un tópico recurrente que permite su implementación en el aula. Es por esto que se puso un mayor énfasis en el cómo se aborda la noción de medida como magnitud por parte del Ministerio de Educación en Chile.

Para hacer un análisis profundo de la enseñanza de la medida se emplearán ciertas técnicas de recolección de información como el análisis de los textos proporcionados por el Ministerio de Educación en el año 2011, la aplicación de instrumento en el aula y la entrevista semiestructurada, que serán aplicadas a estudiantes y profesores de un colegio particular subvencionado de nuestro país.

Con los resultados derivados de esta investigación, se pretenden reconocer los procesos de enseñanza del concepto de medida como magnitud, identificando los modelos mentales que construyen los estudiantes y que podrían convertirse en un obstáculo en la formalización de dicho concepto. Estos modelos se deben tener en cuenta en las actividades que se desarrollan en el aula matemática, que permiten promover un aprendizaje significativo.

Este estudio se enmarca en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se constituyen en el campo de investigación de la Didáctica de la Matemática. Desde el aporte que las ciencias cognitivas le ofrecen al campo de la didáctica que se apoya en la teoría de los modelos mentales (Johnson – Laird), con el fin de comprender las representaciones que han construido los estudiantes alrededor de la medida.

Este tipo de estudio tendrá implicaciones para la Didáctica de la Matemática, debido a que permitirá comprender en algún grado el modelo mental que subyace al concepto de medida y generar instancias de reflexión que permitan caracterizar su enseñanza.

Además, esta investigación permitirá el análisis de algunos textos escolares que se utilizan para la enseñanza de la matemática, ya que algunos de ellos presentan la medida como un producto en donde su sentido se fundamenta en el uso de patrones estandarizados.

CAPÍTULO 1.- SOBRE EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 A manera de introducción

En la vida cotidiana las personas se enfrentan frecuentemente a situaciones que ponen de manifiesto conceptos del área de las matemáticas. Uno de ellos es el concepto de medida que siempre está presente en el entorno, ya que desde que se tiene noción de lo que a uno le rodea, se comienza a medir. Según Godino *medir es la acción de asignar un código identificativo a las distintas modalidades o características de un objeto o fenómeno perceptible, por lo que aquel código puede tener un carácter cuantitativo o cualitativo.* (Godino Juan D, 2004).

Como en la cotidianidad es habitual desenvolverse entre medidas, en al aula también se puede observar, quizás no como una unidad temática de un programa de estudio, pero si como una aplicación de diversas situaciones en las que se requiere de la medida para poder resolver algún problema matemático, o de alguna otra asignatura. Por esta utilización es que es de extrema necesidad que el aprendizaje que adquieran los alumnos sobre la medida deba ser lo más significativo posible. Sin embargo, surgen varios obstáculos que provienen de distintas aristas, al momento de poder trabajar con la medida en el aula.

En los estudios realizados por Chamorro (2001), acerca del tratamiento de la medida en la edad escolar, se exponen las dificultades de los alumnos y profesores frente a la medida, y sostiene que ellas siguen siendo las mismas de una generación tras otra:

"*Las prácticas escolares siguen siendo muy homogéneas, se centran en las actividades de tipo formal, dedicando mucho tiempo a solucionar problemas derivados de la escritura correcta de una medida y a las conversiones de unidades, en las que paradójicamente se encuentra mucha dificultad. Por el contrario, las actividades de estimación, aproximación de medidas, que serian de gran utilidad en la vida corriente, son las menos frecuentes"*.

Estos estudios realizados por Chamorro en la escuela mexicana hacen pensar que quizás en Chile se podrían manifestar obstáculos similares, es por ello que se debe analizar si esta situación se refleja en las escuelas chilenas. Para ello se debe saber cuál es el discurso del profesor, cuáles son los modelos mentales que poseen o crean los alumnos para representar la medida, y también cuál es la incorporación curricular que propone el Ministerio de Educación chileno respecto de la medida.

1.2 Un primer acercamiento a la problemática.

Diariamente, y en diversos contextos, se enfrentan situaciones donde se presentan problemas relativos a la medida. Estos se hacen patentes en el aula cuando a los estudiantes se les presentan situaciones en las que deban reconocer y trabajar con distintas magnitudes referidas a longitud, superficie y capacidad. Es aquí donde surge la raíz de nuestra investigación.

La medida se observa en distintos niveles educativos, por ende los aprendizajes que los alumnos van adquiriendo, irán de lo más simple a lo más complejo. Sin embargo, es frecuente que los docentes al enfrentar en su enseñanza situaciones que impliquen la utilización de magnitudes de medida, deban recordar aspectos que tendrían que estar asimilados por los estudiantes. Esto debido a que el aprendizaje que los alumnos poseen de la medida como una magnitud es, generalmente, memorístico, por ende al año siguiente se olvidan. El encontrar un aprendizaje memorístico se puede deber a diversos factores. Uno de ellos es que los alumnos no logran distinguir claramente la diferencia entre longitud, superficie y capacidad.

Al desglosar este factor bajo la perspectiva que proporciona la experiencia en el aula se pueden distinguir:

a. Que los alumnos no logran diferenciar visualmente dentro de las figuras geométricas y cuerpos geométricos, que es el área, el perímetro y el volumen.

b. Los alumnos suelen crear una relación simplista de la magnitud de medida con su unidad de medida respectiva, ya sea área, perímetro o volumen. Puesto que ellos establecen una relación aritmética de la magnitud con la unidad, usualmente memorizan la longitud con una unidad de exponente 1, la superficie con una unidad de exponente 2, y finalmente, la capacidad con una unidad de exponente 3.

c. Al trabajar con algoritmos el cálculo de una medida, los alumnos únicamente operan los valores numéricos, sin trabajar además las unidades de medida como potencias.

d. La equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud, solo se resuelve como una transformación a través de productos y divisiones de potencias de 10, debido a que el sistema de medida más utilizado es el decimal.

e. Los docentes proponen muy pocas situaciones en las cuales los alumnos deban distinguir entre área, perímetro y volumen. Es común que trabajen estas distintas magnitudes de medida por separado, en pocas ocasiones utilizan problemas en los que se vea involucrada más de alguna magnitud de medida que les permitiría visualizar la relación entre ellas.

La importancia de la investigación, dado esta problemática, radica en el currículo de la matemática debido a lo transversal de sus contenidos, ya que en las distintas unidades de los programas de estudio, desde temprana edad hasta el fin de la enseñanza media, se refieren a la medida como herramienta para la adquisición de diversos contenidos, tanto en el área de la matemática, como también en otras disciplinas relacionadas. Además, por su aplicabilidad y uso extendido en actividades de la vida diaria, la medida pasa a ser un conocimiento de extrema necesidad y se visualiza, por ejemplo: cuando se desea hacer la repartición de algún líquido, cuando se desea cercar un terreno, cuando se desea pintar una superficie, entre otras.

1.3 Antecedentes de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje

En el aprendizaje y en la enseñanza de la medida se involucran varios elementos, que pueden formar parte del desarrollo del alumno, de la metodología de enseñanza del profesor y también de la complejidad del propio concepto.

Los alumnos al momento de verse enfrentados a situaciones que involucren la medida como una magnitud, deben tener asimilado el principio de conservación, este se refiere a que ellos sean capaces de abstraerse de la forma que tiene un objeto y distinguir que puede existir una misma cantidad en diferentes formas, cuando se trata de longitud, superficie y capacidad. Sin embargo, este es el primer obstáculo con el que se topan en el camino hacia el aprendizaje de la medida.

La autora María del Carmen Curtí (2005) plantea como evidencia de la poca aceptación que tienen los alumnos e inclusive los adultos acerca del principio de conservación[1], que muchas veces *"les cuesta comprender que puede haber una equivalencia entre su estatura y tres veces la medida del contorno de sus cabezas".* De esto se infiere que los alumnos no logran asimilar que puede existir la misma medida pero en objetos diferentes, a pesar de que se esté utilizando la misma unidad o referente de medida para ambos objetos.

En las situaciones de enseñanza que se observan en el aula, la mayoría de las complicaciones que se producen en la enseñanza de la medida vienen dadas por la complejidad del concepto, se refuerzan aun más cuando se está enseñando en el aula, esto debido a que las situaciones que el docente presenta son de poco análisis, y no promueven el pensamiento en los estudiantes. Por ejemplo, en relación a la longitud, el docente suele mostrar problemas con figuras rectilíneas, por lo cual se produce una confusión cuando el alumno debe medir longitud en objetos curvilíneos, pues no logra asumir que dos figuras con distinta forma puedan tener el mismo perímetro, ya que para él esas figuras son distintas.

Para poder realizar una comparación de la medida del contorno en diferentes figuras, no es necesario memorizar las fórmulas del perímetro de ellas, ya que podría bastar con solo tener una cuerda que permita formar los contornos de las figuras que se desea medir, para que luego, simplemente, se extienda la cuerda y se le pueda medir con un instrumento o herramienta de medición. Por lo que la relación se puede establecer sin la necesidad de conocer algoritmos que permitan calcular el perímetro.

Otra barrera que se observa que tiene estrecha relación con lo anterior, es que las unidades que se utilizan para medir son bastante estandarizadas y repetitivas. Por lo

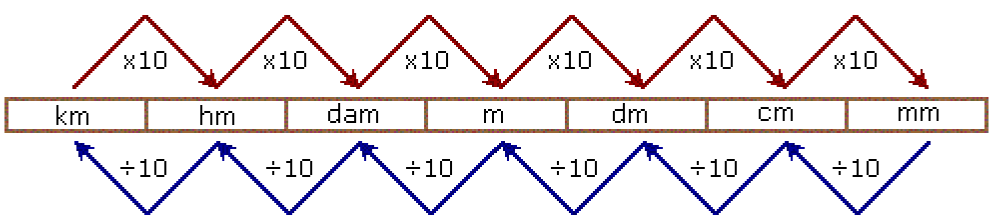
[1] La conservación es el termino con que Piaget designa la conciencia de que la cantidad física permanece constante a pesar de los cambio de su forma o apariencia. Psicología temas y variaciones de Wayne weiten. Sexta edición año 2006 pág.442.

que al momento de trabajar con varias unidades de medida de una cierta magnitud, estas solo se operan aritméticamente para transformar una unidad en otra, sin encontrar el sentido y la utilidad del por qué medir con determinada unidad.

Si se les diera a los alumnos varias situaciones en las que se deba medir un objeto, donde ellos tengan que discernir cuál será la unidad de medida más adecuada para hacerlo, podrían darle un sentido de funcionalidad a la unidad de medida y así comprenderían por qué existen distintas unidades de medida para una misma magnitud. El alumno debe discriminar, por ejemplo, que para medir la longitud de una cancha de fútbol es más práctico utilizar como unidad de medida los metros que los centímetros o kilómetros, pese a que las tres que se mencionan son útiles para medir longitud.

Otra gran dificultad que se presenta en la enseñanza de la medida como magnitud, al observar el trabajo en aula, es que los alumnos sólo memorizan las transformaciones de unidad de medida de diversas magnitudes. Es decir, ellos simplemente aprenden por cuánto multiplicar o dividir (potencia de 10), para poder transformar una unidad de medida en otra. Debido a esto es que no se puede afirmar que dicho aprendizaje sea significativo, ya que a medida que transcurren los años y se vuelve a utilizar la transformación de unidades de medida los alumnos deben volver a memorizar dicho procedimiento o en el caso que lo recuerden ellos simplemente lo utilizan

Esta situación se reitera en el aula, puesto que los profesores suelen utilizar siempre las mismas unidades de medida, y cuando piden a los alumnos transformar de una unidad de medida a otra, ellos solo cuentan con una noción mecanisista del procedimiento, lo que les dificulta la comprensión de equivalencia entre unidades como la graduación de los referentes de las unidades de medida. Para facilitarles el problema a los alumnos, es común observar en el aula o en los cuadernos, cuadros como el siguiente:



(Contenidos Ematemáticos)

Si se observa la enseñanza de la medida curricularmente en Chile, esta no está incorporada en los planes y programas de estudio como una unidad estructurada perteneciente a algún eje, como lo es por ejemplo, potencias en el eje de números. Más bien, se hace referencia a ella cuando se necesita, es decir, es una herramienta, por lo cual no se puede asegurar que dichas referencias sigan una misma estructura. Esta situación podría causar ciertas confusiones en las estructuras mentales que poseen los alumnos, ya que las van modificando a medida de lo que van aprendiendo. Sin embargo, si ese aprendizaje no posee una secuencia lógica, podría producir que los alumnos realicen estructuras mentales que no tengan la representación adecuada de lo que están aprendiendo.

Al observar en el aula cuando se lleva a cabo el proceso enseñanza - aprendizaje del concepto de medida, se presentan dificultades que para poder ser distinguidas, es necesario acercarse a los modelos internos de los estudiantes, bajo los estándares educativos entregados en aulas chilenas. De esto se desprende que toda información entregada en el aula se procesa, y por ende se debe comprender.

Para cumplir con esto se tendrá que explicar y predecir en algún grado qué es lo que ocurre internamente con los alumnos a través de la psicología de la cognición. Por esta razón en esta investigación el alero en el aprendizaje de los alumnos será la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson - Laird (1983)

Como se ha mencionado, los alumnos se encuentran rodeados de la medida desde muy pequeños, por lo mismo, cuando se comienza a trabajar en la escuela con este concepto, ellos ya cuentan con ciertas nociones que les proporciona su relación con el entorno, como por ejemplo: saber su estatura, su peso y por ende conocer las unidades con las que se miden dichas características.

Si se piensa que los alumnos cuentan con ideas previas del concepto de medida, uno se puede guiar por lo que expone Ausubel[2] acerca de que los alumnos reestructuran las ideas que tienen en sus mentes sobre la medida con el conocimiento nuevo que se les entrega. Sin embargo, para que eso suceda, debe existir una secuencia guiada y coordinada por parte del docente, que le permita al alumno desestructurar lo que conoce para así poder remodelarlo con lo nuevo que se le está enseñando. Siguiendo esta idea del aprendizaje para Ausubel, un aprendizaje significativo será aquel que le permita al alumno relacionar dicho aprendizaje de manera directa y no arbitraria con lo que él ya sabe, por lo que podrá incorporarse, adquiriendo significado para el alumno. Ausubel, señala que para asegurarse de que un aprendizaje sea significativo debe haber ciertas condiciones y una de ellas es que el alumno cuente con capacidad cognitiva que le permita asimilar. Por ello es que su desarrollo cognitivo debe ser acorde al contenido entregado por el docente que facilite el relacionar los nuevos conocimientos con hechos, experiencias y conocimientos previos.

[2] Ausubel, Novak y Hanesian, 1978; citado en Pozo, 1997

Los autores Chamorro (2001) y Godino (2004)[3] diagnostican como dificultades del concepto de medida -en Didáctica de la Matemática-, a las siguientes situaciones:

1) *La relación medida - número tiene un fuerte vínculo, sin embargo en el colegio esta, se presenta como un obstáculo para el aprendizaje de la medida y sus magnitudes.*

2) *La enseñanza se ha olvidado del proceso histórico prestando atención solo a medidas convencionales, dejando de lado la construcción y comprensión sobre el concepto de medida por parte del alumno.*

3) *La medición en la escuela es, casi siempre, ostensiva.*

4) *Las prácticas docentes usuales son productoras de obstáculos didácticos que a menudo refuerzan los obstáculos epistemológicos.*

Respecto a las dificultades del proceso de enseñanza aprendizaje sobre el concepto de medida se encuentra un estudio expuesto por Brousseau (Brousseau, 1991-92) donde concluye:

1) En el aula la relación entre la teoría y la práctica no está plasmada como objetivo de enseñanza.

2) Los estudiantes utilizan el modelo de medida sin plantearse ni sobre el problema a resolver, ni sobre la estructura matemática construida.

Parte de la enseñanza de la medida tiene vínculo con la estimación. Se alude a estimación como la capacidad de dar un valor aproximado antes de realizar la operación de medir.

Los autores hablan sobre la estimación como *"juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite*", (Segovia & Castro, 2009). A partir de esto se desprenden dos tipos de estimación según estos autores: El primero, sobre la estimación del cálculo, referido a operaciones aritméticas y a los juicios establecidos sobre los resultados; El segundo, sobre la estimación de la medida, referida al valor de una determinada cantidad o sobre la valoración que puede hacerse sobre el resultado de una medida, distinguiendo magnitudes discretas y continuas.

Aquí se puede enlazar otra dificultad planteada por Brousseau, que consiste en que los alumnos no enlazan el concepto de medida en sus respuestas acorde a la situación propuesta, debido a que al dar su respuesta final a un determinado

[3] Chamorro, 2001 y Godino, 2004 citado en (García Castro & Osorio Cárdenas, 2008)

problema, deben discriminar según el contexto, con magnitudes cuantitativas o cualitativas.

Un estudio realizado por Chamorro (Dificultades del Aprendizaje de la Matemática) comprueba, a través de instrumentos, que el punto de vista predominante sobre las magnitudes multidimensionales superficie y volumen, es el de producto de medidas, por lo que no hay una verdadera evaluación de la comprensión que los alumnos tienen de la bidimensionalidad y tridimensionalidad, ya que todo lo que se pide en los ejercicios es la aplicación de una fórmula. Este procedimiento en un principio hace suponer que hay algún progreso de aprendizaje por parte de los alumnos, pero luego se ve derrumbado, debido a que la estructura mental no está relacionada con la comprensión de lo que es bidimensional o tridimensional, sino con estructuras mentales básicas que no permiten crear una red compleja de conceptos. *"Respecto a la graduación de los instrumentos de medida, ningún manual escolar la plantea por tanto su comprensión y lectura está limitada a un aprendizaje social, ya que su enseñanza no está bajo la responsabilidad de la escuela*", (Chamorro, 2001).

Todos estos aspectos permitirán comprender los diferentes obstáculos que se han encontrado alrededor de la enseñanza de la medida. Además de ello, aportarán información para la elaboración de los instrumentos y el planteamiento de unas categorías iníciales, relacionadas con los elementos conceptuales de la medida como son la unidad, la magnitud, la selección de instrumentos, entre otros.

1.4 Objetivos de la Investigación

Objetivo General

Conocer qué nociones tienen los alumnos del concepto de medida como magnitud, a través de los modelos mentales que se elaboran sobre longitud, superficie y capacidad, los alumnos de séptimo básico, octavo básico y tercero medio.

Pregunta de Investigación

¿Cómo son los modelos mentales que los alumnos manifiestan sobre el concepto de la medida como magnitud, a través de la resolución de problemas que involucren longitud, superficie y capacidad en estudiantes de séptimo básico, octavo básico y tercero medio?

Objetivos Específicos

a. Caracterizar qué noción respecto longitud, superficie y capacidad se estructuran los alumnos pertenecientes a séptimo básico, octavo básico y tercero medio.

b. Verificar si los estudiantes de séptimo básico, octavo básico y tercero medio, trabajan la medida como magnitud, es decir, si no manifiestan disociación entre el número y su unidad medida.

c. Conocer la propuesta del ministerio de educación sobre la enseñanza de magnitudes, para relacionarla con los modelos mentales que los alumnos poseen sobre longitud, superficie y capacidad.

d. Estudiar como entienden los alumnos las magnitudes y sus unidades de medida, en situaciones de la vida cotidiana.

CAPÍTULO 2. - ACERCA DEL MARCO TEÓRICO

2.1 A manera de introducción

Para resolver las interrogantes planteadas en la problemática de esta investigación, se recurrirá a diversos teóricos que se refieren al aprendizaje a través de los modelos mentales.

Esta investigación se basará en la teoría de los modelos mentales propuesta por Jonhson-Laird para poder observar y distinguir claramente los modelos mentales que sobre el concepto de medida tienen los alumnos. Se complementarán aspectos de la teoría con autores que han realizado estudios sobre los modelos mentales de los estudiantes basándose en Johnson – Laird. Además se abordarán ciertos factores que influyen en la enseñanza de la medida, relacionados con la teoría, como son los modelos conceptuales y la modelización.

Con el fin de explicar qué modelos conceptuales se pueden encontrar dentro del aula, se recurrirá a los programas de estudio, mapas de progreso y textos escolares que tiene vigente el Ministerio de Educación este año 2011 en Chile. Esto proporcionará una visión de cómo se aborda la medida desde séptimo básico en adelante, teniendo presente que si no se menciona un determinado nivel, es porque luego de observarlo se concluye que no propone una manifestación explícita sobre la medida.

Para poder contextualizar las nociones que se han elaborado las personas sobre la medida, se podrán observar los modelos explicativos diseñados a partir de la teoría de los modelos mentales de Johnson-Laird. Ellos manifiestan los diversos cambios culturales que ha ido sufriendo la concepción de la medida, teniendo como gran influencia el entorno cultural en el cual se aborda.

La metodología de la enseñanza de la medida que se presentará en esta investigación, es la propuesta por Juan D. Godino, en su libro Didáctica para Maestros. Se resaltarán aspectos que permitirán relacionarla con el aprendizaje de la medida a través de los modelos mentales.

2.2 Conceptos utilizados en la investigación

Para un mayor entendimiento de esta investigación se debe tener clara la relación que se establece entre número, unidad de medida y magnitud. La RAE [4](Real Academia Española), permite explicar dos de los tres conceptos en las siguientes definiciones:

Para magnitud (Del lat. *magnitūdo*).

1. f. Tamaño de un cuerpo.

2. f. Grandeza, excelencia o importancia de algo.

3. f. *Astr.* Medida logarítmica de la intensidad relativa del brillo de los objetos celestes, medida que es mayor cuanto menor es su luminosidad.

4. f. *Fís.* Propiedad física que puede ser medida; p. ej., la temperatura, el peso, etc.

Para número (Del lat. *numĕrus*).

1. m. *Mat.* Expresión de una cantidad con relación a su unidad.

2. m. Signo o conjunto de signos con que se representa el número.

3. m. Cantidad de personas o cosas de determinada especie.

4. m. Condición, categoría, situación o clase de personas o cosas.

5. m. En una publicación periódica, cada una de las hojas o cuadernos correspondientes a distinta fecha de edición, en la serie cronológica respectiva.

6. m. Cada una de las partes, actos o ejercicios del programa de un espectáculo u otra función destinada al público.

7. m. Billete de lotería o de una rifa. *Tengo un número para el sorteo del viernes.*

Para medida (De *medir*).

1. f. Acción y efecto de medir.

2. f. Expresión del resultado de una medición.

3. f. Cada una de las unidades que se emplean para medir longitudes, áreas o volúmenes de líquidos o áridos.

4. f. Número o clase de sílabas de un verso.

5. f. Proporción o correspondencia de algo con otra cosa.*Se paga el jornal a medida del trabajo.*

6. f. Disposición, prevención. U. m. en pl. *Tomar, adoptar medidas.*

---

[4] www.rae.es

7. f. Grado, intensidad. *Ignoramos en qué medida puede favorecernos esto.*

Para unidad de medida: El autor Ledanois plantea que "*una unidad de medida es una cantidad estandarizada de una determinada magnitud física"* (Ledanois, 1996), en el caso específico de esta investigación, longitud, superficie y capacidad. Cada unidad de medida posee subunidades.; por ejemplo, la unidad de medida **metro** posee algunas subunidades como el kilómetro, el centímetro y el milímetro, entre otras.

El que las unidades de medida sean estandarizadas permite una comunicación universal para poder expresar medidas en diversos lugares del mundo.

Por consiguiente, se puede entender como número al símbolo que representa una determinada cantidad; como magnitud, a la grandeza o tamaño de un número junto a su unidad de medida; como unidad de medida, la cantidad estandarizada que me permite expresar una medida y la medida, será la expresión del resultado de una medición o a cada una de las unidades que se emplean para medir.

Respondiendo a: ¿De dónde provienen estos conceptos? O dicho de otro modo, ¿cuál es la historia que hay detrás de estos términos?, se encuentra que la forma de definir y medir una longitud ha cambiado a través de la historia: una de las primeras unidades de longitud utilizadas era el "codo real egipcio", de la que se construyó un patrón de granito. Los griegos y romanos utilizaron "el codo" pero con diferentes longitudes. Posteriormente para medir se utilizaban otras unidades como la vara, y según el lugar geográfico presentaban diferencias.

Debido a esta falta de uniformidad el 19 de marzo de 1791, la Academia de Ciencias de París, propuso la diezmillonésima parte del meridiano terrestre (específico entre Dunkerque, cerca del mar del Norte, y Barcelona) como la unidad fundamental o metro como referencia de unidad de longitud. Una ley de 19 frimario[5] del año ocho de la República Francesa (10 de diciembre de 1799) firmada por el primer cónsul Napoleón Bonaparte, lo estableció para siempre con el lema: "Para todos los pueblos y para todos los tiempos". Había nacido el metro definitivo y el nuevo sistema métrico decimal. Luego, en mayo de 1793, la Comisión de Pesos y Medidas propone los prefijos griegos; deci, centi, kilo… para los múltiplos y divisor de metro.

En tanto la noción de número y la habilidad de contar ha acompañado a la humanidad a lo largo de toda la historia, surgiendo como una necesidad del hombre primitivo, para poder adaptarse al medioambiente, proteger sus bienes y distinguir ciclos de la naturaleza, que poseen una estrecha relación con las oportunidades de alimentación y sobrevivencia.

[5] Frimario: nombre del tercer mes del calendario republicano francés, correspondiente desde el 22 de noviembre al 20 de diciembre.

Actualmente se utilice un sistema decimal, el cual se deriva principalmente de que el ser humano necesitó hacer una representación simbólica del conteo con su propio cuerpo, y para ello se valió básicamente de los 10 dedos de las manos y aunque este no fue el único sistema utilizado por la humanidad sí fue el más difundido.

Egipcios	Sistema decimal.
Sumerios y Babilonios	Sistema decimal y sexagesimal. Quienes comenzaron a medir el tiempo como actualmente lo conocemos -60 minutos, 60 segundos-, y la partición del círculo en 360º.
Mayas, Aztecas y Celtas	Sistema vigesimal. Ellos contaban los dedos de las manos y los pies.
Romanos	Inicialmente tenían un sistema de 5 elementos, es decir que solo se contaba con una mano. Luego pasaron al sistema decimal, gracias a la influencia que tuvo Egipto en la cultura romana.

De lo presentado anteriormente se puede deducir que desde los inicios de las civilizaciones humanas se ha presentado el concepto de magnitud, pues se alude a ella como la unidad de medida con un valor determinado. Sin embargo, se debe destacar que lo más probable es que la más antigua sea la magnitud de longitud, ya que por la necesidad del entorno se comenzó midiendo en una dimensión. Por lo que se podrá aludir a magnitud cuando se hablaba de un codo real egipcio, el número es 1 y la unidad de medida sería el codo real, que en conjunto forman la magnitud. Luego, en años posteriores, se expresaron las magnitudes de medida en una especie de lenguaje universal, por ello es que se propusieron magnitudes estandarizadas.

2.3 Desarrollo conceptual bajo la Teoría de los Modelos Mentales.

Como ya se ha mencionado en la introducción, esta investigación tendrá su centro en la teoría de los Modelos Mentales de Johnson - Laird, que se basa en la cognición de los alumnos, permitiendo explicar qué es lo que se procesa de lo que se entrega en el aula, para luego comprender cuáles son las representaciones que se hacen los alumnos, sobre la medida como magnitud.

"…las personas razonan por desarrollo de experimentos de pensamiento en modelos internos, la idea pareció peligrosamente heterodoxa. Ahora el rango de fenómenos en los que se usa modelos mentales para explicar es rápidamente creciente" (Johnson - Laird, 1983)

La teoría de Johnson- Laird se funda en el supuesto de que la mente construye modelos internos del mundo externo, los cuales utiliza para razonar y tomar decisiones. Cada uno de estos modelos le va a dar al individuo la opción de la comprensión y razonamiento de situaciones y/o procesos. A su vez, estas estructuras las reproduce absorbiendo elementos y características esenciales de tales situaciones. Es decir, cuando el sujeto toma conciencia de las características fundamentales de un concepto o situación, podrá generar sus propios modelos y, a partir de éstos, podrá establecer un razonamiento basado en sus propias estructuras establecidas desde su comprensión, dándole pie al razonamiento y extrapolación a otras situaciones en contextos parecidos.

"*La teoría de los modelos mentales se ha pensado para explicar los procesos superiores de la cognición y, en particular, la comprensión y la inferencia. Sugiere un inventario simple de tres partes para el contenido de la mente: hay procedimientos recursivos, representaciones proposicionales y modelos. Los procedimientos son indecibles, llevan a cabo tareas como el mapeamiento de las representaciones proposicionales dentro de los modelos. También proyectan un modelo subyacente dentro de otras formas especiales de modelos -una visión bidimensional o imagen. Hay presumiblemente algunas otras formas de procedimiento que juegan una parte en el pensamiento. Prototipos y otros esquemas, por ejemplo, son procedimientos que especifican por defecto valores de ciertas variables en modelos mentales*" (Johnson - Laird, 1983).

Según este extracto, Jhonson- Laird, sugiere que las estructuras mentales se pueden desglosar en tres partes esenciales: procedimientos recursivos, representaciones proposicionales y modelos. Si se aborda esta explicación, de lo general a lo particular, entonces un modelo se puede establecer desde un suceso u objeto determinado, donde el sujeto absorbe las características más esenciales, autoconstruyéndose un modelo, único para cada sujeto. Compuesto así por una cantidad limitada de descripciones, explicaciones y características de dicho suceso.

Todas las relaciones establecidas entre estas descripciones, explicaciones y características, serán enlazadas por las llamadas "representaciones proposicionales", las cuales tendrán una concordancia determinada, o sea, una cierta relación direccionada, "procedimiento" o mapeamiento. Sin embargo, los modelos mentales no tienen esta estructura sintáctica sino son representaciones que reproducen de manera semejante las estructuras de lo que se quiere representar del mundo. De esto se deduce que los modelos mentales pueden representar relaciones abstractas, pueden ser estáticos o dinámicos, dependiendo de la maleabilidad del individuo. Y a su vez, pueden servir de base a imágenes, aunque muchos componentes de los modelos no sean visibles.

"Su objetivo es simplemente establecer la viabilidad de una teoría basada en el presupuesto de que los significados de las palabras son procedimientos de descomposición que relacionan los modelos mentales con el mundo y, en particular, en el uso de procedimientos léxicos que interactúan con procedimientos generales para construir, manipular y evaluar modelos mentales" (Johnson - Laird, 1983).

El vocablo dominado por el individuo va a limitar la cantidad de conexiones, que se puedan establecer entre sus propios constructos de modelos. De esto se puede advertir que mientras mayor sea el nivel que esté cursando el individuo, su vocabulario será más extenso. Deduciendo que sus estructuras mentales serán más complejas y abstractas.

"Hay presumiblemente algunas otras formas de procedimiento que juegan una parte en el pensamiento. Prototipos y otros esquemas, por ejemplo, son procedimientos que especifican por defecto valores de ciertas variables en modelos mentales". (Johnson - Laird, 1983).

Según esta teoría, la mente opera computacionalmente con proposiciones, modelos mentales e imágenes; que lo hace trabajando a distintos niveles a través de una organización funcional; y que se sustenta físicamente en una estructura real cuyo conocimiento actual, cuanto menos, puede soportar un funcionamiento semejante. (Rodriguez Palmero, Marrero Acosta, & Moreira, 2001).

En la enseñanza de la medida se observarán modelos mentales que los propios alumnos hacen en base a sus concepciones, a través de los conocimientos previos. Estos modelos se forman realizando una estructura mental de lo que perciben del entorno y luego lo traducen a un esquema mental, es allí donde se realizan ciertas conexiones funcionales que les permitirán, cuando necesiten ese modelo, evocarlo y así utilizarlo e inclusive reestructurarlo. Esto posibilita que los alumnos expliquen y predigan un determinado fenómeno. Teniendo en cuenta que el dominio del lenguaje que posean en ese momento puede ser una ventaja como también una limitante.

Johnson – Laird asigna ciertos principios que permiten comprender que son los modelos mentales. A continuación se adjunta la tabla.

1.- "Principio de la computabilidad: los modelos mentales y la maquinaria para construirlos e interpretarlos son computables" (Johnson-Laird, 1983, pág. 398).
2.- "Principio de lo finito: un modelo mental debe ser finito en tamaño y no puede representar directamente un dominio infinito" (ibid.).
3.- "Principio de constructivismo: un modelo mental es construido por elementos (tokens) dispuestos a una estructura particular para representar un estado de cosas" (ibid.).
4.- Principio de economía en los modelos: una descripción de un estado simple de cosas se representa por un modelo mental simple, incluso si la descripción es incompleta o indeterminada" (op. cit., pág. 408).
5.- "Los modelos mentales pueden representar directamente indeterminaciones si y sólo si su uso no es computacionalmente intratable, i.e., no hay un crecimiento exponencial en complejidad" (op. Cit., pág. 409).
6.- "Principio de predicabilidad: un predicado puede aplicarse a todos los términos a los que otro se aplica, pero no puede tener intersección en el alcance de la aplicación" (op. Cit., pág. 411).
7.- "Principio de innatismo: todos los primitivos conceptuales son innatos" (ibid).
8.- "Hay un conjunto finito de primitivos conceptuales que aumentan el correspondiente conjunto de campos semánticos, y hay un posterior conjunto finito de conceptos, u "operadores semánticos", que se encuentran en cualquier campo semántico sirviendo para construir conceptos más complejos más allá de los primitivos subyacentes" (op. cit., pág. 413).
9.- "Principio de la identidad estructural: las estructuras de los modelos mentales son idénticas a las estructuras de los estados de cosas tanto percibidas como concebidas, que los modelos representan" (op. Cit., pág. 419).
10.- "Principio de la formación de conjuntos: si un conjunto ha sido formado de conjuntos, entonces los miembros de esos conjuntos deben especificarse primero" (op. cit., pág. 429).

Teniendo presente que los modelos mentales son construidos y manipulados en base a las representaciones, la tabla que se acaba de presentar permite entender cuáles son los beneficios y limitaciones de comprender las representaciones en base a esta teoría.

2.3.1 Perspectiva teórica de los modelos mentales.

“De acuerdo con esta perspectiva teórica, un modelo mental es un estado de cosas que desempeña un papel representacional o análogo directo; su estructura refleja aspectos relevantes del estado de cosas correspondientes con el mundo. En la construcción de los modelos mentales influye la percepción visual, la comprensión del discurso, el razonamiento, la representación del conocimiento y la experticia que se tenga en relación al objeto representado”. (García Castro & Osorio Cárdenas, 2008)

En los modelos mentales que permitan el aprendizaje de la medida se deberá tener en cuenta cuál es el discurso que utiliza el profesor para presentarlo en el aula. Además, se deben tener presentes las estructuras mentales que posee el alumno, respecto de dicho concepto. Esto le dará al estudiante un grado de experticia en relación a la medida. Otro criterio que se debe tener presente es la influencia del contexto escolar en la formación de los modelos mentales de los estudiantes, ya que ellos han recibido formación matemática y se encuentran en un proceso educativo. Por ello debieran tener ciertas nociones formales sobre la medida.

De acuerdo a la autora García Castro, son tres los elementos que constituyen los modelos mentales: los modelos explicativos, el contexto y las representaciones semióticas que emplean los estudiantes sobre el concepto de medida. Los modelos explicativos que los estudiantes han construido durante su vida, tanto en contextos escolares como extraescolares, suelen ser estáticos, aislados, se basan en causalidad simple y son deterministas.

2.3.2 Análisis de la teoría de los modelos mentales

En el análisis teórico de esta investigación se abordarán las construcciones mentales creadas por los alumnos respecto al concepto medida y magnitudes. A la luz de esto se propone el análisis sobre cómo son los modelos mentales que se construyen los alumnos, teniendo presente varios factores que influyen en él, como lo es la percepción visual, comprensión del discurso, representación del conocimiento y la experticia.

Asimismo, se destaca que los modelos mentales pueden ser modificados, secuenciados, complejizados y reestructurados por los estudiantes. Por lo que un modelo que en un comienzo pudo ser elaborado para explicar un determinado fenómeno, puede utilizarse luego para explicar otro, con su correspondiente complejización si lo amerita, o ya sea habiendo realizado nuevas relaciones dentro de las estructuras mentales.

Otro aspecto importante que se abordará en las construcciones mentales, es la característica funcional que tienen los modelos mentales, ya que la idea es que le permita al sujeto que lo crea, facilitar la comprensión de lo reestructurado, por tanto hacer de su aprendizaje un aprendizaje significativo. Es decir, que cada sujeto puede determinar una distinta funcionalidad para su estructura mental al momento de generar las redes con los demás esquemas que ya posea. De esto se desprende que la cantidad de estructuras mentales que posea un sujeto no está limitada en la cantidad, sino optimizada en su calidad de enlaces realizados con conceptos ya enraizados en sus estructuras. Esto afirma nuevamente una estructuración de aprendizajes significativos para el alumno.

2.3.2.1 Construcciones mentales:

Para Moreira, "*cuando se indaga en los modelos mentales, la intención es explorar cómo los estudiantes generan un modelo basado en sus representaciones mentales o internas, por tal motivo, indagarlos supone un ejercicio de análisis el cual debe inferirse del discurso, de las acciones y manifestaciones de los sujetos y de la reconstrucción del modelo que haremos a partir de sus afirmaciones, acciones, explicaciones y justificaciones que hace frente a situaciones relacionadas con el concepto de medida"* (Citado en García Castro & Osorio Cárdenas, 2008).

Según (Moreira, Greca, & Rodriguez, 2002) no se aprende directamente de lo que se percibe, más bien se aprende de las representaciones que se hace sobre el entorno, es decir, de cada uno construye el conocimiento en su mente. Es por esto que los alumnos más que aprender el discurso que el profesor entrega, aprenden de la representación que se hacen de él, que dependerá de lo que a ellos les llame la atención. Se podría decir que las representaciones son un espejo de lo que perciben, pero influenciado por lo que para ellos es relevante.

Dentro de estas representaciones, Moreira y Greca *distingue dos tipos, las representaciones analógicas y las proposicionales* (Moreira, Greca, & Rodriguez, 2002). Las primeras se relacionan con las imágenes, y tienen que ver con los detalles relevantes que se han captado de lo que se desea representar, son concretas. Las representaciones proposicionales, tienen que ver con un tipo de lenguaje de la mente, que traduce todo lo que pensamos, comprendemos, explicamos o recordamos.

Además, de estos dos conceptos, Johnson-Laird propone otra alternativa, que son los modelos mentales. Según él, esta herramienta permitiría darse cuenta de cómo las personas aprenden, ya que al estudiar sus modelos mentales, se está estudiando la estructura que forman en sus mentes, para poder explicarse fenómenos o situaciones del entorno.

Según Johnson-Laird, los modelos pueden basarse solo en representaciones analógicas, solo en representaciones proposicionales, pero también, en ambas a la vez. Además, los modelos son modificables, como se forman a base del discurso, cada vez que es necesario se vuelve a revisar y se mejora.

La teoría de los modelos mentales permite explicar el aprendizaje de la medida, ya que esta se debiera ir conociendo gradualmente en lo que al currículo se refiere, en él se encuentran nociones de medida desde que los alumnos son muy pequeños y luego se van complejizando en años posteriores. Es por ello, que si los alumnos se crean una estructura mental sobre la medida, como esta puede ser modificable, deberían ir mejorándola, a medida que la van trabajando de manera más técnica y específica. Como Johnson-Laird señala que los modelos se estructuran a partir de las representaciones, se podría asumir entonces que mientras más concreto sea el trabajo que se realice con la medida, mejor será la representación y posteriormente el modelo mental que se haga de ella.

Además, Kleer y Brown mencionan que la estructura que tienen los modelos mentales debe ser idéntica a la estructura que se percibe de los fenómenos que se representan (Citado en Moreira, Greca, & Rodriguez, 2002). Por ejemplo, si se quisiera ir midiendo la capacidad de ciertos recipientes, vaciando su contenido a alguna vasija que esté graduada (como las pipetas), el modelo mental que representa esa situación tendrá algún elemento que represente los distintos recipientes, así como también tendrá otro elemento que represente a la vasija graduada en la cual mediremos los contenidos.

Lo esencial de la creación de un modelo mental, es la funcionalidad que este posee para la persona que lo crea, ya que más que si el modelo es una fiel estructura de la situación o fenómeno que representa, debe ofrecer una utilidad que permita comprender la situación representada, a pesar de que el modelo que se haya creado no tenga un ciento por ciento de realidad científica.

También se propone que una persona puede tener un modelo mental que utilice poco, y cuando quiera representar algo similar, lo tome, agregue elementos y haga nuevas relaciones. Para Johnson-Laird esto permite decir que "*hay modelos primitivos conceptuales y primitivos procedimentales que se tienen desde que se nace"* (Moreira, Greca, & Rodriguez, 2002). De alguna manera se propone esto porque la estructura de los modelos mentales debe partir de algún lado, ya que como se basa en la construcción de los modelos, no pueden comenzar de la nada.

Greca y Moreira plantean que la creación y construcción de los modelos mentales dependerá netamente de la estructura de lo que se está representando, del conocimiento anterior que se tenga sobre el fenómeno y, además, de no producir contradicciones relacionadas con el modelo que se está elaborando.

Para poder comprender los modelos mentales Greca y Moreira también se refieren a los modelos conceptuales, que vendrían siendo los modelos construidos por el profesor, se manifiestan como una herramienta para el entendimiento. Los modelos conceptuales son representaciones externas compartidas por una comunidad y algunas de ellas pueden materializarse en formulaciones matemáticas, por ejemplo, el volumen de un determinado cuerpo geométrico posee una formulación matemática conocida por la mayoría y que pasa a ser externa.

La construcción que realiza el alumno, que le permite explicar esa formulación matemática externa, vendría siendo el modelo mental que los alumnos se hacen sobre ella. Como ya se ha mencionado, los modelos mentales van evolucionando debido a la interacción con el entorno que muchas veces hace que se agreguen nuevos elementos para así poder tener una mejor representación del fenómeno u objeto. Esto le permite que el fenómeno tenga una funcionalidad que lo satisface.

“Se señala que la gran diferencia entre los modelos conceptuales y los modelos mentales, es que el primero es una representación externa bien delimitada y definida, mientras que el segundo es una representación interna que posee como principal objetivo la funcionalidad para el sujeto que lo crea, porque debe permitirle explicarse e inclusive poder predecir cambios que podría tener la situación representada” (….) Sin embargo ”Por más que se enseñen modelos conceptuales, el aprendizaje significativo implica la construcción de modelos mentales” (Moreira, Greca, & Rodriguez, 2002).

De lo dicho por Greca y Moreira se desprende que el modelo conceptual se entiende como una herramienta externa, objetiva y elaborada por el profesor para la enseñanza, mientras que el modelo mental se entiende como una herramienta interna y subjetiva del sujeto para su propio aprendizaje. A pesar de que ellos poseen grandes diferencias se relacionan causalmente uno con el otro, ya que el aprendizaje significativo vendría al momento de construir un modelo mental que debe tener correspondencia con el modelo conceptual que permitió su elaboración. En la matemática, un modelo conceptual puede dar pie a un sinfín de situaciones, algunas de ellas son: que el alumno no revise sus modelos mentales, porque no considere que haya una relación con lo que ya tiene; también puede crear modelos mentales que representen solo en algún aspecto y no por completo a los modelos conceptuales, y por último, también puede suceder que solo se memorice mecánicamente lo que manifiesta el modelo conceptual, sin realmente entenderlo.

Un nuevo concepto que propone Greca y Moreira responde a la interrogante de cómo construir representaciones internas coherentes con los modelos conceptuales. Responden a esto con la palabra “modelización” siendo la principal actividad de los docentes para entregar conocimiento (Greca & Moreira, 1998). Se entiende como proceso de modelización al aprendizaje de una serie de pasos para identificar elementos sobresalientes, en nuestro caso de algún objeto matemático que se desee representar, permitiendo así evaluar aspectos relevantes para la creación de un modelo mental escogido.

Los autores, además coinciden en que el proceso de modelación es semántico, los modelos mentales producidos serían *“Interpretaciones que deben satisfacer las restricciones derivadas del texto, ecuaciones, diagramas y cualquier otra fuente de información saliente en el medio externo y en las representaciones mentales de quien resuelve los problemas”* (Nersessian citado en Greca & Moreira, 1998). Hay que destacar que para que exista modelación el proceso de aprendizaje debe ser explícitamente constructivo, así el alumno podrá construir su modelo mental en base a lo que él entiende de los modelos conceptuales enseñados por el profesor.

2.3.2.2 Rastreo antropológico de la medida.

Haciendo un rastreo antropológico de la medida, se puede reconocer varios modelos explicativos de la medición que el ser humano le ha asignado, entendiendo que son representaciones que se ha elaborado el sujeto de dicho fenómeno y que ellas dependen del contexto en el cual se desenvuelve; esa familia de modelos permitirá comprender qué es lo que ha significado para el hombre la medición y su sistema de construcción. Los modelos explicativos del concepto de medida que presenta García Castro y Osorio Cárdenas, elaborados en base a la teoria de los modelos mentales de Johnson – Laird, son los siguientes:

MODELO EXPLICATIVO	APROXIMACIÓN TEÓRICA
ANTROPOCÉNTRICO	En este se tienen ideas de algunos exponentes como Protágoras (citado en Kula, 1999): “El hombre medida del universo”, o “el mundo fue cortado a la medida del hombre”. Se puede ver cómo, bajo este modelo el hombre medía el mundo consigo mismo por ser el centro del universo donde se encontraba incorporado.

MÍTICO	En este modo de ver la medida, se le tiene miedo a medir elementos del cuerpo, porque se cree que no se va a crecer más.
RELIGIOSO	En esta comprensión de la medida se confunde ella con la estafa, es simbólico de la pérdida de la felicidad, proviene directamente del pecado original. Contar y medir equivalen a pecar. El mismo Kula lo dice en su libro en forma jocosa: el que inventó las medidas fue Caín; y hay pasajes bíblicos que hacen referencia a esa medida, o culturas donde se cree que si se miden las cosas recaerán sobre ellos las plagas más fuertes, es decir los castigos del gran Dios.
JUSTICIA	De esta concepción eran partidarios los mercantiles, ganaderos y comerciantes que estaban de acuerdo con la medida, efecto contrario al significado anterior, porque para ellos la medida y el pesaje eran cosas normales, siempre que ambas fueran "justas". Este modelo está permeado un poco por el anterior, porque para ellos obrar de mala fe, era símbolo de perderse en el purgatorio.
PODER	La medida es atributo de poder en todas las sociedades civilizadas, es símbolo de soberanía, de dominación. En la historia proporciona innumerables ejemplos de litigios entre ciudades y esto se origina en la lucha por el derecho de establecer y controlar no sólo las medidas, sino los reinos, ya que entre dos regiones que estuvieran luchando por su soberanía, quien ganase ejercía su poderío imponiendo sus medidas, buscando con ellas la unificación.
PERFECTIBILIDAD	La medida es un proceso racional, perfecto en su racional claridad, obra de la mente humana, libre de prejuicios y tradiciones, "bueno" para todos, es decir, la medida como símbolo de "prosaica pedantería".

Se hace uso de modelos explicativos para dar cuenta de las distintas concepciones que han existido sobre el concepto de medida, que han ido evolucionando según las culturas y su pasar en el tiempo. De esta manera cada modelo presenta características específicas que los distingue de los demás.

El contexto escolar ha sido un obstáculo para la construcción de la medida como una magnitud, debido a que en algunas de las explicaciones de los estudiantes se observa el carácter instrumental de ella, donde lo que prima en la medición es la asignación numérica a una cualidad medible del objeto.

En lo que se refiere al uso de las representaciones semióticas, los estudiantes hacen uso de cuantificadores indefinidos y números de contar, en el tipo de unidad hacen uso de representaciones para la unidad concreta, y el sistema de medida utilizado es el sistema convencional.

2.3.3 Enseñanza: la metodología de enseñanza

Para plantear una metodología de la enseñanza en base a los modelos mentales, esta investigación se referirá a Juan D. Godino, quien propone ciertos parámetros de enseñanza que permiten relacionarla con los modelos mentales.

"Los alumnos al obtener los modelos conceptuales del profesor en el estudio de la medición en la escuela, pasan por un proceso de facetas y etapas que se tratan de una mezcla de importantes destrezas sensoriales y perceptivas con aspectos de geometría y aritmética" (Godino Juan D. 2004). También implica al área afectiva, la cual proporciona al niño la oportunidad de alcanzar un sentido de realización, así como apreciar la utilidad básica de nuestro sistema de medición. El proceso es secuencial desde la percepción a la comparación y después a la aplicación de un estándar de medida (o referente) y seguirá ciertas etapas:

- La medición debe comenzar con la percepción de lo que debe ser medido, explicar escalas de medición no tiene sentido sin dicha percepción, por ello hay que primero dar significado a la medición, por ejemplo en la longitud ver la altura del niño.
- La comparación sigue a la percepción ya que las personas de un modo natural comparan ciertos patrones o cualidades que vayan encontrando en objetos, con otros objetos que tengan la misma propiedad.
- La comparación de dos cosas es adecuada cuando se desea hacer enunciados de equivalencia y no equivalencia. "Tú eres más alta que yo", "yo soy más alto que mi hermana". Esto sirve para comparaciones iniciales, pero luego se necesitará algún estándar de medida, un referente que pueda ser utilizado sucesivamente. En un principio no necesariamente debe ser estándar, o ser utilizado en todo el mundo.

"El desarrollo de fórmulas para calcular la medida de magnitudes geométricas de manera indirecta es de gran utilidad práctica, ya que es recomendable que los niños

no usen nunca las fórmulas sin que hayan participado de su desarrollo" (Godino Juan D. 2004). Aquí se muestra claramente que los niños, al tan solo utilizar fórmulas para la resolución de problemas del cálculo de medidas, se producirá un aprendizaje poco significativo, ya que se basa solo en "introducir" números y no en el completo entendimiento de por qué se hace eso, o conseguir que asocien la medida al número.

Construir instrumentos sencillos o las mismas estrategias personales crea una actividad mucho más significativa, que formarían parte de la creación de un modelo mental. Dentro de este tipo de estrategias hay diversos ejemplos de la vida cotidiana: medir con cuadros del cuaderno, medir con clips, palitos de fósforos etc. Es por ello que la obtención de algoritmos matemáticos juega un rol importante, ya que asociaran la cantidad o número que obtengan, a la medida que se esté utilizando.

Las metodologías de enseñanza que se utilizan en la educación chilena para la medida son simples. Se puede observar en las aulas que desde los primeros años se trabaja con distintas técnicas para incorporar la noción de medir, antes de que los niños puedan entender el concepto en sí. Una de estas técnicas es, medir con distintos patrones como lápices, cuartas, clips entre otros. Luego se enseñan las distintas utilizaciones que se le da a la medida, incluyendo la conversión de unidades, desde allí la medida tan sólo se trabaja para resolver problemas que impliquen su utilización.

Juan D. Godino habla sobre la metodología que se debiera llevar a cabo en la enseñanza de la medida, cuando un curriculum nacional la posee instaurada como eje temático y unidad, como lo es en España.

Primero se debe considerar que: *"La medida de magnitudes nos obliga a reflexionar sobre el difícil problema de las relaciones entre las matemáticas y la realidad"* (Godino Juan D. 2004). El profesor debe tener en cuenta que existen diferentes contextos sociales donde se encuentra inmerso y que su enseñanza y sus modelos conceptuales deben ir de acuerdo a la realidad que está viviendo.

Entre más concreta y contextualizada sea su enseñanza, más significativo será el aprendizaje del alumno, y esto va de la mano con las situaciones didácticas que utilice, así las representaciones mentales de los alumnos tendrán una mayor conexión con sus preconcepciones. Para que la metodología establecida sea más significativa, se debe considerar la complejidad del discurso del docente. Si el docente en su discurso utiliza un vocabulario más amplio y familiar para referirse a los distintos conceptos que se asocian a las magnitudes, como por ejemplo volumen = capacidad = espacio, no daría oportunidad a que los alumnos duden cuando se les pregunte por dos conceptos que se refieren a lo mismo.

Los alumnos, como se sabe, ya poseen ciertos criterios o aprendizaje de lo que es medir, porque deben hacerlo diariamente en distintas situaciones que conllevan el día a día, por ende el profesor, además de conocer los usos del discurso y las prácticas en distintos contextos institucionales en el que se estudia la medida, como son la vida cotidiana, las ciencias y la matemática pura, debe saber cómo enseñarlos y por qué enseñarlos en los diferentes niveles educativos. Debe tener experticia para seleccionar las tareas a proponer, debe entender su papel como profesor y el papel de los alumnos, buscar patrones de interacción, saber qué tipos de situaciones didácticas implementará, y qué instrumentos de evaluación ocupará.

Se debe enseñar la medida de acuerdo a un parámetro mundial, como por ejemplo el sistema oficial que es usado en Chile, ya que nos permite reconocer y estudiar la medida en las condiciones que se establecieron para todo el mundo. El sistema oficial es el sistema métrico decimal, que como su palabra lo dice, los cambios se realizan de 10 en 10, o en potencias de 10 según la unidad. Este es el nombre adoptado por la XI Conferencia General de Pesos y Medidas (celebrada en Paris en 1960) para establecer un sistema universal, unificado y coherente de unidades para todos.

La enseñanza y el estudio de las magnitudes y la medida son esenciales dentro del sistema escolar, e inclusive dentro del currículo, por su gran utilización y aplicabilidad en cualquier situación o año escolar, debido a que es visto tanto en actividades de la vida diaria, así como también en la escuela.

A pesar de que en la escuela se aborda el estudio de las magnitudes y de la medida, al observar las aulas frecuentemente se encuentran alumnos que confunden las unidades de medida en las que se expresan los resultados de situaciones que la involucren. En estos alumnos se observa concretamente la disociación que existe entre el número y la medida, ya que es muy común ver resultados donde la unidad de medida no está expresada en el exponente que corresponde, es decir, si el problema que se aborda es de área, la unidad de medida debiera tener exponente 2.

A su vez, también se observa la confusión que existe entre una unidad de medida y otra dentro de una misma magnitud, es decir equivalencia de unidades. Esto da a entender que los alumnos no poseen un entendimiento de la unidad de medida, por lo mismo al tener diversas unidades de medida y poca comprensión de ellas, las disocian del número para obtener cálculos.

En relación a lo expuesto anteriormente Juan D. Godino en su libro "Matemática y Didáctica para Maestros" se refiere a distintas metodologías y prácticas que se deben utilizar en la enseñanza de la medida. Define medir (en un sentido amplio) como "*la acción de asignar un código identificativo a las distintas modalidades o* *grados de una característica de un objeto o fenómeno perceptible, que puede variar de un objeto a otro, o ser coincidente en dos o más objetos*" (Godino Juan D. 2004).

Los alumnos no solo necesitan las unidades de medidas convencionales y cuantitativas para poder medir, también se pueden utilizar rasgos cualitativos, como lo son las características de cierto objeto. Si se aterriza al plano de la magnitud, "*medir una cantidad consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad que se toma como referencia"* (Godino Juan D. 2004).

Para entender más a cabalidad esto, se debe mencionar que magnitud es la expresión de una medida (el valor numérico junto con la unidad de medida) eso quiere decir que al querer medir algo, se observa cuantas veces cae un patrón de medida, dentro de lo que se está midiendo. Las magnitudes son cuantitativas, por tanto, medibles mediante números.

"Se deben clarificar los tipos de situaciones o tareas, que en la enseñanza de la medida, han llevado al hombre a realizar la actividad de medir ciertas características de los objetos perceptibles. Si se quiere que los alumnos entiendan la razón de ser de la medida, se deben enfrentar a dichas situaciones para que puedan dominar los procedimientos de medida y atribuir un sentido práctico al lenguaje y normas que regulan la actividad de medir. La situación de comunicaciones, se refiere a la imposibilidad de trasladar el objeto en cuestión en el espacio o tiempo, debido al tamaño o la naturaleza, esto lleva a tomar un objeto o varios de referencia que si se puedan trasladar, estos son llamados unidades de medidas o patrones de medida. La situación de comparación y cambio es la que vemos en la búsqueda de relaciones entre cantidades de dos o más magnitudes". (Godino Juan D. 2004)

Como ya se manifestó, en Chile tan solo se utiliza la medida cuando se requiere de ella para algún cálculo o problema. Juan D. Godino aborda ciertos problemas donde para un aprendizaje eficaz, los alumnos deben construir la medida, y además deducir fórmulas para llegar a un correcto resultado. Uno de esos problemas es el que se presenta a continuación.

"Se preguntó a un alumno que encontrara una fórmula para calcular el área de un círculo. Sugirió poner una cuerda alrededor del círculo y después formar con la cuerda un cuadrado. Por ejemplo, un círculo con una circunferencia de 8 unidades se puede transformar en un cuadrado de lado 2 unidades.

a) Si c = la longitud la circunferencia y l = lado del cuadrado, escribe una fórmula para l en función de c.

b) ¿Cuál sería la fórmula para calcular el área del círculo que se deduciría si fuera correcto el método propuesto por el alumno?

c) ¿Es correcta la fórmula? ¿Por qué no?" (Godino Juan D., 2004)

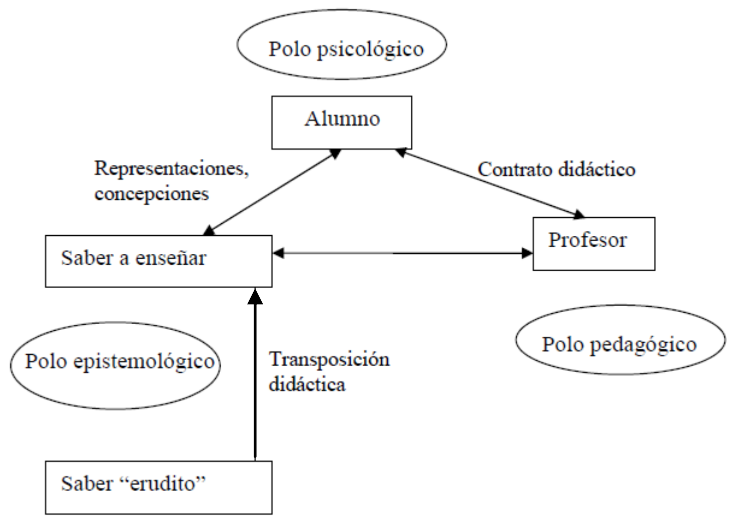
En este ejemplo propuesto por Godino, se refuerza la teoría que sustenta esta investigación, que es la teoría de los modelos mentales de Johnson-Laird, ya que se propone que el alumno construya un objeto matemático que le permita responder, a un problema determinado. Esto favorecerá a que el alumno construya el modelo mental adecuado para él, a través de las representaciones que se elabora de lo que percibe. No se puede olvidar que el alumno tomará aspectos relevantes en base a la inclusión que ha tenido en su entorno social y en su entorno escolar le permiten reconocer algo familiar para él.

Dentro de la teoría de los modelos mentales, se han mencionado los modelos conceptuales que se relacionan con la enseñanza, es decir es lo que el docente lleva al aula para presentar a los alumnos, por ello para tener una idea de cuáles son los aspectos que el profesor utiliza como modelos conceptuales, es que se observaran los programas de estudio, los mapas de progreso y textos escolares, desde séptimo básico en adelante, utilizados el 2011, en donde se tomará como aspectos relevantes referencias a la medida como concepto o utilización de ella. Estos permitirá tener una noción más clara de cuáles deberían ser los modelos conceptuales con los que se trabaja la medida.

2.3.4 Transposición Didáctica: una herramienta para los modelos mentales.

Para que los modelos conceptuales que entrega el profesor, sean un objeto de enseñanza, es decir, que los alumnos con estos modelos conceptuales puedan generar sus modelos mentales, el docente debe primero transformar los contenidos a tratar para generar los modelos conceptuales, esta transformación es la llamada transposición didáctica.

Antes de generarse la transposición didáctica desde el saber sabio al saber enseñando, existen ciertas etapas que sigue el contenido a enseñar. Primero está el proyecto social, del cual una comunidad educativa designa contenidos de saberes a enseñar, en esta investigación: unidades de geometría, específicamente magnitudes, para los distintos niveles de escolaridad. Seguido de esto, los docentes utilizan los programas para ver dichos contenidos de saberes a enseñar, los cuales se denominan como "*creaciones didácticas*" (Chevallard, 1997) que se realizan por la "*necesidad de enseñanza*" (Chevallard, 1997). Luego el trabajo que transforma el saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es la transposición didáctica, que puede ser de un contenido de saber preciso, a una versión didáctica de ese objeto. A continuación, se muestra un esquema donde se refleja la transposición didáctica.



Se puede inferir visualmente del triángulo que se genera partiendo de los alumnos con el saber a enseñar y el profesor, que el saber "erudito" que es el conocimiento bruto de algún contenido, se transforma, y esta transposición didáctica se vuelve un saber a enseñar, para luego el profesor poder cerrar su contrato didáctico con el alumno al entregar este "objeto de enseñanza". El alumno adquirirá dicho contenido según sus representaciones y concepciones.

Para esta investigación, es importante vislumbrar que una unidad de geometría, en la que se requiera la medida, por el proceso de transposición didáctica, se vuelve enseñable, es decir, se enseñará lo que el profesor destaque de este contenido, lo que crea importante para enseñar, para que se vuelva un objeto de enseñanza, y se cierre el contrato didáctico, de acuerdo a las relaciones pedagógicas que se establezcan. Entonces, se puede hipotetizar que si el docente cree importante enseñar la medida como una magnitud, esta se transformará con la transposición didáctica, y será un objeto de enseñanza, pero si un profesor no lo cree necesario, y tan solo para él es importante los algoritmos, el objeto matemático será otro.

2.3.5 Aportes y limitaciones de la teoría a la investigación.

Al referirse a los aportes que refleja la teoría de los modelos mentales de Johnson-Laird, se debe tomar como eje central, el hecho que se centra en la cognición, por lo que debe permitir explicar el aprendizaje de los alumnos en relación a la medida. Además, el hecho de que los modelos mentales se expliquen como las representaciones de lo que los alumnos perciben, teniendo en cuenta sus preferencias, permite asegurar que será significativo para cada individuo. Se puede decir que esta teoría se centra en la construcción, por lo que el mismo alumno forma parte de ella, haciéndolo un creador de su propio aprendizaje.

Sin embargo, Norman (citado en Greca & Moreira, 1998) señala que los modelos mentales tienen ciertas características.

1. Son incompletos.
2. La capacidad de las personas para probar sus modelos es limitada.
3. Además, son inestables: las personas olvidan detalles del sistema modelado, más si esos detalles no son utilizados en un cierto periodo.
4. Los modelos mentales no tienen fronteras bien definidas, es común confundirse con unos u otros.
5. Los modelos mentales no son científicos, reflejan las creencias y supersticiones de las personas sobre el sistema que se va representar.
6. Los modelos mentales son simples y ahorrativos, ya que las personas prefieren disminuir todo el trabajo mental que sea posible, aunque eso signifique tener gran trabajo físico.

Algunas de estas características específicas de los modelos mentales reflejan ciertas desventajas, una de las más relevantes es que, como se pueden crear una gran cantidad de modelos mentales, existen momentos en los que ellos no se utilizan, lo que produce cierto olvido por parte del alumno.

Además, el que los modelos mentales se sustenten en base a las creencias de los alumnos, produce que existan diversos modelos mentales de un mismo concepto matemático, lo que podría dificultar una formalización hacia todos los alumnos por parte del profesor.

2.4 Currículum nacional.

El ministerio de Educación (MINEDUC), en sus programas de estudio y en su marco curricular, dado para los niveles NB5, NB6, NM1, NM2, NM3 y NM4 (NB, nivel básico; NM, nivel medio), postula cuatro ejes temáticos: números, álgebra, geometría y datos y azar, para el sector de matemática.

En el eje de geometría se encuentra al concepto de medida como "*la capacidad de comparar, medir y estimar magnitudes de formas una, dos y tres dimensiones. Progresa desde el uso de unidades arbitrarias a estandarizadas para responder preguntas como: cuál es más larga, cómo copiar esa longitud; o estimar cuántos pasos o cuadras mide una determinada longitud. En el nivel1, hasta la medición y determinación de perímetros, áreas y volúmenes de figuras tridimensionales en diversos contextos, en niveles superiores*" (UCE, 2010).

Dado todo lo expuesto con anterioridad, en este escrito se encontró una estrecha relación con lo presentado por el MINEDUC, en los programas de estudio y mapas de progreso, por lo que se desprende que la medición es un componente esencial para la geometría de polígonos y poliedros, dándole así un determinado enfoque para el tratamiento de situaciones que involucran forma, tamaño y posición. Además, de la formación del pensamiento espacial, que permite así que el estudiante relacione lo visto en el aula con su entorno.

En los programas de estudio del MINEDUC se destaca que la demostración se introduce en los primeros niveles como verificación en casos particulares, luego como justificación de construcciones o de relaciones entre objetos geométricos, para luego avanzar en formalidad de acuerdo con la madurez de los estudiantes.

En estos programas se observan preguntas de tipo ¿cómo lo hiciste?, ¿se puede hacer de otro modo?, ¿se puede aplicar este procedimiento en otros casos? Estas ayudarán al docente en su labor de promover en sus estudiantes la reestructuración de sus modelos mentales referentes a la magnitud desde los modelos conceptuales.

Sin embargo, en el eje de geometría no se observan unidades específicas de la medida, sino que esta se desprende en la medición de perímetros, áreas, volúmenes. Aunque se observa una mayor cantidad de relaciones, respecto a la medida, en los ejes y unidades propuestas por el Ministerio, estas no se abordarán, porque el tratamiento que se le hace a la medida no requiere de un mayor análisis. Por ejemplo: al calcular un lado en un triángulo rectángulo, en trigonometría o en el cálculo de una longitud.

2.4.1 Programas de estudio, Mineduc.

Al abordar los programas de estudio, propuestos por el Ministerio de Educación, se encuentra que no en todos los niveles está presente el trabajo de la medida y magnitud.

Se examinó los programas de estudio y se discriminó la presencia del trabajo de medida y magnitud en los niveles NB5, séptimo básico, NB6, octavo básico. NM1, primero de enseñanza media, NM2, segundo de enseñanza media, NM3, tercero enseñanza media y NM4, cuarto enseñanza media. En los siguientes cuadros sinópticos se pueden visualizar solo los programas de estudio que arrojaron tratamiento de la medida y/o magnitud.

NB5	
Unidad	Utilizar estrategias para obtener el volumen en prismas rectos y pirámides contextos diversos, y expresar los resultados en las unidades de medida correspondiente. Formular y verificar conjeturas, en casos particulares, relativas a cambios en el perímetro de polígonos al variar uno o más de sus elementos lineales. Formular y verificar conjeturas, en casos particulares, relativas a cambios en el volumen de prismas rectos y pirámides al variar uno o más de sus elementos lineales.
NÚMERO Y GEOMETRÍA	
GEOMETRÍA	Construir triángulos a partir de la medida de sus lados y/o ángulos, usando instrumentos manuales o procesadores geométricos.

NB6	
Unidad	Calcular el perímetro de circunferencias y de arcos de ellas. Calcular el área del círculo y de sectores de él. Calcular medidas de superficies de cilindros, conos y pirámides, utilizando fórmulas. Calcular volúmenes de cilindros y conos, utilizando fórmulas. Resolver problemas en contextos diversos relativos a cálculos de:
GEOMETRÍA	

	-perímetros de circunferencias y áreas de círculos. -áreas de superficies de cilindros, conos y pirámides. -volúmenes de cilindros y conos.

NM1
En NM1 no se observa el trabajo con medidas y magnitudes. Solo se hace alusión a trazos longitudinales. NM1, está enfocado al trabajo con racionales e irracionales, función lineal, transformaciones isométricas y tablas de frecuencia.

NM2
En NM2 no se observa el trabajo con medidas y magnitudes. Solo se hace alusión a trazos longitudinales. NM2 está enfocado al trabajo con racionales e irracionales, teorema de Euclides, teorema de Thales.

NM3
En NM3 no se observa el trabajo con medidas y magnitudes. Solo se hace alusión a trazos longitudinales. NM3 está enfocado al trabajo en función cuadrática, inecuaciones lineales, trigonometría, función raíz cuadrada, tríos pitagóricos.

NM4	
Unidad	Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas. Resolución de problemas que plantean diversas relaciones entre cuerpos geométricos; por ejemplo, uno inscrito en otro.
GEOMETRIA	

De la observación realizada a los programas propuestos por el MINEDUC se desprende que en los cursos 7º básico, 8º básico y 4º medio, el uso de la medida como magnitud está evidenciado por el cálculo de medidas uni, bi y tridimensionales. A su vez los cursos 1º, 2º y 3º medio no realizan un trabajo de la medida como magnitud.

2.4.2 Mapas de progreso, Mineduc.

En los mapas de progreso se distinguen siete niveles, los que están presentados en orden decreciente, pero su lectura debe ser del nivel menor al mayor ya que representan los progresos de aprendizajes obtenidos por los alumnos, de lo simple a lo complejo.

Los mapas marcan las directrices de los conocimientos, aptitudes y habilidades esperadas en los estudiantes. El primer nivel, concierne a NB1, el segundo nivel a NB2, el tercero a NB3 y NB4, el cuarto nivel a NB5 y NB6, nivel número cinco a NM1 y NM2 y el nivel seis NM3 y NM4. El séptimo nivel del mapa representa un nivel cognitivo superior, por lo que solo se alcanza cuando los alumnos han logrado completar los niveles anteriores. De esto se desprende que no todos los colegios llegan a él. Por esta razón no se contemplará en el análisis de esta investigación.

El análisis de los mapas de progreso, en esta investigación, estará determinado por el abordaje de la medida como una enseñanza del concepto o su utilización como magnitud contextualizada.

Los niveles de escolaridad que se examinaron fueron los correspondientes a séptimo y octavo básico, primero, segundo, tercero y cuarto de educación media. Por esto, los niveles 1,2 y 3, de los mapas de progreso, no estarán presentes en el cuadro sinóptico de a continuación.

Mapas de Progreso, Geometría, MINEDUC. Donde se hace referencia a magnitud.

Nivel 4
Reconoce la circunferencia y el círculo como lugares geométricos identificando sus elementos, y caracteriza elementos secundarios de triángulos. Comprende el teorema de Pitágoras y el concepto de volumen. Calcula longitudes de figuras bi y tridimensionales, el área del círculo y obtiene el volumen de distintos cuerpos geométricos. Construye ángulos, triángulos y sus elementos secundarios, y polígonos regulares. Comprende el concepto de transformación isométrica y aplica estas transformaciones a figuras planas. Formula conjeturas relativas a cambios en el perímetro de polígonos y al volumen de cuerpos geométricos al variar elementos lineales y resuelve problemas relacionados con estas variaciones.

¿CÓMO SE PUEDE RECONOCER ÉSTE NIVEL DE APRENDIZAJE? • Calcula el área de figuras que pueden ser descompuestas en rectángulos, triángulos y círculos, expresando el resultado en las unidades de medidas correspondientes • Formula y verifica conjeturas acerca de cambios en el volumen de cuerpos al variar las medidas de sus elementos lineales. Por ejemplo: conjetura respecto al cambio de volumen de un cilindro al variar su altura y el radio de su base, verifica la conjetura formulada, empleando un procesador geométrico. • Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular longitudes en figuras bi y tridimensionales. Por ejemplo: calcula el volumen de un cono utilizando el teorema de Pitágoras para determinar su altura.
Nivel 5
En este nivel no se observa el trabajo con medidas y magnitudes; solo se hace alusión a trazos longitudinales. Caracterizándose ángulos entre elementos lineales asociados a la circunferencia, teoremas de congruencia y semejanza de triángulos.
Nivel 6
Relaciona la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen. Caracteriza puntos, rectas y planos en el espacio, describe cuerpos generados por traslaciones y rotaciones de figuras planas. Determina el módulo de un vector en dos o tres dimensiones y el área y volumen de cuerpos generados por traslaciones y rotaciones. Describe la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar. Formula conjeturas en relación a la forma de los cuerpos generados a partir de rotaciones y traslaciones de figuras planas en el espacio. Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando métodos analíticos y gráficos. ¿CÓMO SE PUEDE RECONOCER ESTE NIVEL DE APRENDIZAJE? • Determina la distancia entre dos puntos en dos y tres dimensiones en contextos geométricos. Por ejemplo: determina el perímetro de una figura dada las coordenadas de sus vértices. • Resuelve problemas relativos a volúmenes de cuerpos generados por rotación de figuras planas. Por ejemplo, calcula el lado de un triángulo equilátero dado el volumen del cono que se genera al girar el triángulo en torno a su altura.

En la observación de los mapas de progreso, el trabajo de la medida como magnitud queda evidenciado de la misma manera que en los programas de estudio. Un ejemplo de esto es que el quinto nivel que corresponde a primero y segundo medio, no se encuentra trabajo de magnitudes al igual que los programas de estudio que corresponden a esos cursos.

2.4.3 Textos escolares

Luego de una extensa observación de los textos escolares, a continuación se muestra un ejemplo extraído de cada unidad en los distintos niveles, NB5 hasta NM4. Se debe tener en cuenta que cada unidad posee distintos tópicos, de los cuales solo se ejemplificará uno. Los niveles donde no se contextualiza la medida, no aparecerán señalados en el recuadro, ya que en ellos solo se abordan tópicos en los cuales se debe dar la respuesta de un problema con una magnitud, como por ejemplo el contenido perteneciente a NM3, segmentos proporcionales, en donde se determina el valor de un segmento desconocido, por ende, lo que se aborda es el resultado del segmento en una unidad de medida de longitud, esto se observa en Teorema de Thales, Teorema de Euclides y Segmentos Proporcionales en la Circunferencia.

Dicha recolección se realiza para la visualización de los contenidos que se entregan en clases, y además, considerando de qué manera se abordan. Entendiendo que la mayoría de los docentes se guían por el libro de texto del estudiante, se podrá observar cuáles son las estrategias que utilizan para la enseñanza de la medida.

NB5

- Unidad 3: geometría.

✓ Medida de los lados de un triángulo; construcción de triángulos dadas las medidas. Estrategias de comprensión dadas las variaciones de medidas.

Medidas de los lados de un triángulo

Marcelo quiere construir triángulos con las medidas que se muestran a continuación:

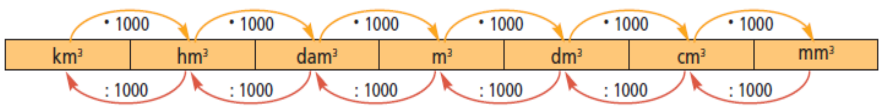
Lado a	Lado b	Lado c
5 cm	4 cm	6 cm
3 cm	5 cm	8 cm
2 cm	4 cm	8 cm
5 cm	4 cm	3 cm
2 cm	1 cm	7 cm
3 cm	4 cm	3 cm
3 cm	6 cm	9 cm

- Unidad 6: volumen de prismas rectos y pirámides

✓ Volumen: unidades de medida; se trabaja los principios de conservación. Se define volumen y capacidad. Se trabaja la transformación de unidades de medida de volumen a través de tabla de equivalencia.

ESTRATEGIA MENTAL

Si te fijas, las unidades de volumen aumentan o disminuyen de 1000 en 1000, como se muestra en el siguiente diagrama.



Observa las siguientes equivalencias entre unidades de medida.

$5000\ mm^3 = (5000 : 1000 : 1000 : 1000)\ m^3 = 0{,}000005\ m^3$
$8{,}16\ m^3 = (8{,}16 \cdot 1000 \cdot 1000)\ cm^3 = 8\ 160\ 000\ cm^3$

Calcula las siguientes equivalencias.

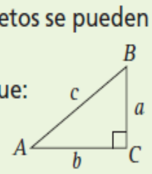
a) $160\ 000\ cm^3$ = ________ m^3 c) $0{,}000125\ m^3$ = ________ cm^3
b) $32\ mm^3$ = ________ cm^3 d) $75\ cm^3$ = ________ mm^3

NB6

- Unidad 3: geometría y medición

✓ La medida se aborda como una utilización para determinar áreas y perímetros, es decir, es el resultado del cálculo obtenido por un algoritmo matemático.

- El **perímetro** de un polígono es la medida de la longitud de su frontera o contorno, expresada en la misma unidad de longitud.
- El **área** es la medida de la superficie de una figura.
- Para calcular el área de un cuadrado de lado a, se puede utilizar la fórmula a^2.
- Para calcular el área de un rectángulo de lados a y b, se puede utilizar la fórmula $a \cdot b$.
- Para calcular el área de un triángulo de base b y altura h, se puede utilizar la fórmula $\frac{b \cdot h}{2}$.
- En un triángulo rectángulo, las medidas de los catetos se pueden considerar como su base y su altura, ya que son perpendiculares entre sí.
- En un triángulo ABC rectángulo en C se cumple que:



$a^2 + b^2 = c^2$
(Teorema de Pitágoras)

Existen más ejemplos referidos a la utilización de la medida desde la página 78 a la 92

NM4

- Unidad 4: áreas y volúmenes

Área y Volumen; encontramos recordatorios de cómo utilizar los algoritmos matemáticos y sobre la conversión de medidas.

- El **perímetro** y el **área** de un círculo de radio r se pueden calcular mediante las expresiones $P = 2\pi r$ y $A = \pi r^2$, respectivamente.
- Algunas equivalencias en las unidades de medida son:
  - 1 m = 10 dm = 100 cm
  - 1 m^2 = 100 dm^2 = 10 000 cm^2
  - 1 m^3 = 1000 dm^3 = 1 000 000 cm^3

✓ La medida se aborda como una utilización para determinar áreas y volúmenes de cuerpos, es decir, es el mero resultado del cálculo obtenido por un algoritmo matemático.

Más ejemplos de la página 158 a la 190.

Tras la observación realizada en los “textos escolares”, con el fin de complementar y abordar con mayor profundidad la respuesta a la problemática planteada, nos encontramos con los contenidos estipulados en los programas de estudio y en los mapas de progreso, los que se ven reflejados a cabalidad en los textos escolares de cada nivel.

- Algunos de los ejercicios planteados en el cálculo de longitud, superficie y capacidad, en los libros de textos, permiten un análisis de comparación de los resultados cuando varía la longitud de los lados de una misma figura.
- La mayoría de los ejercicios relativos a volumen y área presentes en los libros escolares de los niveles NB6 y NM4, utilizan la medida con la finalidad de realizar cálculos a través del uso de algoritmos matemáticos.
- Los problemas que involucran transformación de unidades de medida en los niveles NB5 y NM4 se trabajan solo con el uso de tablas de equivalencia.

Enlazando todas estas observaciones con la problemática de la investigación, se puede decir, que los modelos conceptuales establecidos en los textos escolares, proporcionados por el mineduc, conllevan a los estudiantes a establecer modelos mentales estrechamente ligados con el uso de algoritmos, en el caso de las unidades de medida y en el cálculo de longitudes, superficies y capacidades, ya que el trabajo con la medida es utilizado solo como medio para su cálculo.

Además, el concepto de magnitud no es sugerido por los textos escolares en ninguno de los niveles observados. Por ende, la graduación de instrumentos de medida como huinchas, balanza, pipetas, entre otras, no son abordadas, por lo que se puede inferir que los modelos mentales elaborados por los alumnos serán construidos bajo el alero del algoritmo y no de la comprensión de las subunidades de medida.

Por otro lado, el hecho de que los textos den énfasis en el cálculo de medidas y no se haga hincapié en la unidad de medida (ya que viene explicito en el texto) podría desembocar en una disociación entre el número y su unidad de medida, y a su vez la no comprensión del cambio de magnitud en el resultado. Por ejemplo, cuando se les da a los estudiantes un ejercicio con un cubo de lado 2 cm y se les pide calcular el área de sus caras, puede suceder que a ellos les cueste estructurar el concepto del cambio de una dimensión (longitud del lado) a dos dimensiones (área de la cara del cubo), no comprendiendo a cabalidad que la magnitud que se desea expresar será el resultado del área con su unidad en centímetros cuadrados. Lo mismo puede ocurrir cuando se les solicite el cálculo del volumen del cubo.

CAPÍTULO 3.- METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Metodología de investigación

En base a la literatura observada se puede señalar, que a pesar de haber cuantiosos estudios sobre la medida, estos son de otras localidades, por ende en Chile no se encuentran investigaciones que estén centradas en la enseñanza de la medida.

Como nos dice Sampieri en su libro "Metodología de la Investigación", "*Los estudios exploratorios se efectúan, normalmente, cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado o que no ha sido abordado anteriormente"* (Hernández Sampieri, 1991). Con ésta definición más lo expuesto anteriormente se asegura que la metodología de la investigación a utilizar será de tipo exploratoria. Así se podrá, con este tipo de investigación, aumentar el grado de familiaridad con fenómenos relativamente desconocidos y obtener información sobre la posibilidad de llevar a cabo una investigación más completa sobre un contexto particular de la vida real, como en este caso lo es la enseñanza de la medida como magnitud.

En primera instancia se desea explorar cómo se aborda la enseñanza de la medida como magnitud en el aula, y por ende, cuáles son los aprendizajes que adquieren los alumnos sobre ella durante su escolaridad, basándose en la teoría de los modelos mentales de Johnson-Laird. Para ello se necesita indagar dichos aprendizajes, lo cual se realizará a través de tres instrumentos que nos permitan recoger lo planteado, es decir se explorará como son los aprendizajes que poseen alumnos, específicamente de séptimo básico, octavo básico y tercero medio.

Es probable que está investigación tenga características de otros estudios, ya que el estudio exploratorio trasciende, al ser más flexible permite que se pueda dar pie a estudios más rigurosos luego de él, como lo es el estudio correlacional, que se describe de la siguiente manera "*Los estudios correlacionales miden dos o más variables que se pretende ver sí están o no relacionadas en los mismos sujetos y después se analiza la correlación"* (Hernández Sampieri, 1991). En esta investigación se verá reflejado el estudio correlacional en la relación que se desea evidenciar entre los modelos conceptuales entregados por el docente, y los modelos mentales que se crean a partir de estos los alumnos, es decir, podría llegar a ser una relación completamente causal, ya que lo que aprende el alumno quizás dependa de cómo se le enseña.

Además, se podrían observar características del estudio explicativo ya que este "*se centra en explicar por qué ocurre un fenómeno y en qué condiciones se da éste, o por qué dos o más variables están relacionadas"* (Hernández Sampieri, 1991). La diferencia entre un estudio correlacional y uno explicativo es que el correlacional relaciona una variable con otra, como por ejemplo cómo la enseñanza está ligada al aprendizaje, mientras que el estudio explicativo quiere determinar por qué ocurre dicho fenómeno y cómo ocurre. Dentro de esta investigación, esto se vería reflejado en si se quiere indagar más en la relación que se produce con la enseñanza de la medida, y lo que se aprende de ella, es decir indagar en cómo se adquieren dichos modelos mentales y según las conclusiones, por qué ocurre eso.

Por último, esta investigación será de carácter cualitativa y cuantitativa, siendo predominante el carácter cualitativo, ya que la mayoría de la información que se recolectará tiene el propósito de explorar los modelos conceptuales y modelos mentales, que se observarán en las preguntas de desarrollo y dentro de todo el análisis de la investigación, ya que se espera obtener conclusiones que permitan explicar cómo son los modelos mentales de los alumnos. Para lograr esto, se aplicarán instrumentos donde su análisis será de carácter cuantitativo, ya que este se realizará en base al número de respuestas buenas, malas u omitidas, es decir, se expresará una cantidad de cada una de ellas, para poder cuantificar cuál es el grado de logro de los objetivos de cada pregunta.

Definido todo esto, se puede resumir que principalmente tenemos una investigación exploratoria, donde lo que se desea es conocer los modelos mentales que se forman los alumnos de acuerdo al modelo conceptual que es entregado por el profesor y cómo ellos favorecen el aprendizaje de la medida como magnitud.

3.2 Diseño de la investigación.

Como ya se ha mencionado esta investigación tienen bastante de un estudio exploratorio, debido a que en Chile no se vislumbran estudios que tengan como objeto la enseñanza de la medida. Sin embargo, en otras localidades si se ha abordado dicha problemática, lo que nos permite tener ciertos parámetros de qué es lo que se puede indagar.

El interés de esta investigación es observar cómo se aborda la enseñanza de la medida, como una magnitud, en colegios particulares subvencionados, con alumnos de clase media con jornada escolar completa. De esta manera se podrá contrastar cuáles son los aprendizajes de los alumnos en relación a la medida, respecto de las propuestas que hace el ministerio de Educación para su enseñanza. Dicha situación, dependerá de la forma en la que el docente se guíe por los documentos entregados por el ministerio de Educación (programas de estudio, mapas de progreso y textos escolares).

El objetivo del diseño metodológico, es observar en distintos niveles de escolaridad (séptimo básico, octavo básico y tercero medio) qué es lo que saben los alumnos sobre medida y cómo es que aplican ese aprendizaje. Así se podrá establecer si existe o no una relación entre las propuestas realizadas por el Ministerio y los aprendizajes que ellos logran adquirir.

Para lograr visualizar los aprendizajes y las nociones que los alumnos adquieren sobre la medida, como una magnitud, se elaborarán tres pruebas distintas: una para séptimo básico, otra para octavo básico, y una última, para tercero medio. El instrumento que se aplicará en séptimo y octavo básico, tiene como fin observar cómo es el aprendizaje de la medida en esos dos niveles, debido a que los contenidos propuestos en los programas de estudio del MINEDUC, hacen una referencia directa de la medida, a través de su utilización. Mientras que el instrumento aplicado a tercero medio, será utilizado como control, para que permita reconocer qué tan profundos son los aprendizajes adquiridos por los alumnos en los años anteriores.

Teniendo presente que toda la enseñanza que manifiestan los docentes en el aula, se debe basar en los programas de estudio propuestos por el Mineduc, es que se aplicará un instrumento que permita observar de qué manera ellos abordan la medida. Este será una entrevista semiestructurada que dilucidará cuál es la práctica que ellos realizan para enseñar la medida en los niveles específicos, que fueron destacados anteriormente, en los cuales se observa la inclusión de la medida de forma directa.

Para poder recoger la mayor cantidad de información, que permita llegar a visualizar cuál es el trabajo que se le da a la medida, como una magnitud en el aula, es que se desea utilizar la "ingeniería didáctica". "*Este término se utiliza en Didáctica de las Matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje"* (De Faria Campos, 2006). En este caso específico se utilizará la ingeniería didáctica como una metodología de la investigación que permitirá hacer un análisis y posterior comparación de las producciones estudiantiles (análisis Aposteriori), respecto de los análisis preliminares, a priori.

El autor (De Faria Campos, 2006) *señala que como metodología de investigación la ingeniería didáctica se caracteriza:*

1. Por ser un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

2. Por el registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

La metodología de la investigación que se utilizará será en base al segundo punto mencionado, con el fin de contrastar ciertas conjeturas que se especificarán a continuación, versus la información que se podrá recoger y analizar de las producciones estudiantiles. Siguiendo la estructura de la ingeniera didáctica, se describirán las fases de ella, aplicadas en esta investigación.

3.2.1 Análisis preliminar.

Según Artigue (1995) *en una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. Los más frecuentes son:*

• *El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.*

• *El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.*

• *El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.*

• *El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.*

• *Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.*

Bajo la premisa de que en esta investigación se pretende observar cómo es el aprendizaje de la medida como magnitud, en los alumnos de séptimo básico, octavo básico y tercero medio, es que se deben tener presentes las áreas de análisis presentadas, pero especificadas en esta investigación.

a. Análisis epistemológico.

En el análisis epistemológico, se debe mencionar que la medida se ha abordado a lo largo de la historia, partiendo de las grandes civilizaciones antiguas que comenzaron con la noción de número que les permitió contar, lo que favoreció para luego pasarán a la medida. Lo complicado del concepto magnitud, es que en toda su trayectoria, ha existido una heterogeneidad en sus unidades de medida.

Sabiendo que las primeras medidas fueron lineales (longitud), en un principio las unidades de medida, eran referentes relacionados con partes del cuerpo, como el codo o la vara. Sin embargo ya en el 1791, se estableció como referente de longitud, el metro. Años más tarde se establecieron los sub múltiplos del metro que permiten que la sensibilidad de la medida sea mayor, es decir que con una determinada unidad de medida se pueda medir de manera más adecuada un objeto, por ejemplo, si deseo medir mi altura, se determinará en metros o en centímetros.

Por otro lado *la noción de área, que es la medida que proporciona el tamaño de la región encerrada en una* figura geométrica*, proviene de la antigüedad. En Egipto, tras la crecida anual de río* Nilo*, que inundaba los campos, surge la necesidad de calcular el área de cada parcela agrícola para restablecer sus límites. Con el fin de solucionar dicha situación, los egipcios inventaron la* geometría*, según* Heródoto (Álvarez, 2010). A pesar de que esta noción ha acompañado al ser humano a lo largo de la historia, la dificultad que se produce en su comprensión, viene dada por el cambio de dimensión (1D a 2D), es decir, se produce un cambio conceptual que requiere de una mayor abstracción del sujeto.

El volumen era una medida que se asociaba con la capacidad del recipiente y el peso de este con su contenido. Las primeras medidas de capacidad eran reconocidas en objetos naturales, como la capacidad de una calabaza, conchilla o cáscara de huevo. Los babilónicos presentaron la primera medida exacta de capacidad que se conoce. Era un cubo hueco de un palmo de arista. Este cubo lleno de agua era la unidad de capacidad de agua que contenía. El peso de ese cubo lleno fue su unidad de peso. El galón fue otra medida de capacidad; volumen y peso a la vez. Nadie sabe bien dónde se originó, pero se la conocía como medida líquida y su uso aún prevalece en los pueblos anglosajones. Junto a las medidas líquidas existían *otras que se llamaban medidas áridas que se usaban con elementos secos como frutos y granos* (Álvarez, 2010*).*

Observando que la noción de longitud, superficie y capacidad han acompañado al hombre desde las primeras civilizaciones, por un tema de necesidad que fue lo que promovió su desarrollo. Es necesario mencionar que el mayor cambio que se ha producido en ellas es un tema de estandarización de sus unidades de medida, que permite una transversalidad en la comunicación de ellas, por lo mismo es que el cambio más trascendental es la creación del sistema métrico decimal que permite una comprensión de las medida en distintas comunidades y no como era anteriormente, que cada civilización contaba con su propio sistema de medida.

b. Análisis de la Enseñanza.

Al realizar un análisis de la enseñanza de la medida y sus efectos, se observa que curricularmente en Chile, se aborda el cálculo de áreas, perímetros y volúmenes, en cuerpos y figuras geométricas, fomentando para ello, el uso de algoritmos, es decir, se basan en el cálculo una determinada medida, más que comprender cabalmente a que nos referimos cuando hablamos de área, perímetro y volumen. Además, es común que en las prácticas docentes exista una especie de visión simplista, ya que la mayoría de las situaciones para la enseñanza que propone el docente, no tiene una gran dificultad de análisis, su sentido principal es reconocer la fórmula adecuada para un determinado problema geométrico que permite obtener el valor específico que representa la medida que se anda buscando.

En los programas de estudio, propuestos por el MINEDUC, desde séptimo básico hasta cuarto medio, se encuentra que la medida solo se aborda en los niveles NB5, NB6 y NM4, de esto se desprende que hay tres años en los que no se observa su trabajo, por lo mismo se produce un vacio que promueve que los alumnos olviden lo que han aprendido en años anteriores sobre la medida, más aun si el aprendizaje que tuvieron en los primeros años fue memorístico.

En los libros de textos proporcionados por el ministerio de Educación se observa que la equivalencia de unidades dentro de la enseñanza de la medida, se aborda en el aula esencialmente como múltiplos y submúltiplos de unidades determinadas. Sin embargo, lo que realmente sucede es una graduación de los diferentes referentes de unidades de medida. El trabajo con múltiplos y submúltiplos, no es un error ya que como nuestro sistema de medida es decimal, al realizar la equivalencia de unidades de medida, es necesario multiplicar o dividir por potencias de 10 para llegar a la equivalencia adecuada, Lo cuestionable es que los alumnos no reconocen el por qué deben realizar ese procedimiento. El hecho de no lograr comprender la finalidad de la equivalencia de unidades, hace que los alumnos olviden muy rápido el cuándo y por qué multiplicar y dividir, se puede escuchar en las aulas: profesor: "¿tengo que multiplicar o dividir para pasar de centímetro a metro?"

Además, se observa que en los programas de estudio hay 3 años (primero, segundo y tercero medio) en los que el ministerio no plantea el trabajo de la medida como magnitud. Esta situación, hace hipotetizar dos opciones, la primera es que los estudiantes podrían olvidar los conceptos de magnitud aprendidos en séptimo y octavo básico. Mientras que la segunda opción es que aunque los alumnos no trabajen la medida durante esos tres años, ellos igual reflejen mejoras con el paso de los años en sus conceptos adquiridos, debido a que están en una constante interacción con su medio escolar y también social, enriqueciendo así sus estructuras mentales.

c. Análisis de las concepciones de los estudiantes.

Al realizar un análisis de las concepciones, las dificultades y los obstáculos de los estudiantes respecto del aprendizaje de la medida como magnitud, se puede visualizar varios aspectos que merecen ser mencionados.

El primero, es que curricularmente en séptimo básico se aborda la medida en el cálculo de áreas y volúmenes de prismas y pirámides. Al trabajar esta unidad en el aula se observa la primera complejidad respecto de la noción de unidad de medida, ya que a los alumnos les cuesta distinguir con qué unidad de medida deben expresar la respuesta de un determinada situación, debido a que ellos no comprenden la diferencia entre superficie y capacidad, solo se aprenden de memoria que la respuesta de un área es en centímetros, metros, etc. es al cuadrado, mientras que el volumen se responde con centímetros, metros, etc. al cubo. Bajo este contexto es común observar como aprendizaje, la memorización de fórmulas y luego un buen trabajo matemático con ellas, pero si se analiza a fondo el aprendizaje que adquieren los alumnos no respondería a la finalidad del trabajo con la medida. Tiene un sentido más operacional que de adquisición de las nociones de área y volumen.

Un gran obstáculo que tienen los alumnos viene dado por la complejidad de los conceptos de área y volumen, ya que la enseñanza de la medida es bastante concreta y como lo más frecuente es enseñarla en pizarra, los alumnos requieren de cierto grado de abstracción que les permita ir estructurando en sus mentes a qué se refieren con área y especialmente volumen.

3.2.2 Concepción y análisis a priori.

Para lograr visualizar si los análisis mencionados se encuentran presentes en la enseñanza de la medida en la educación chilena, tomaremos como muestra un colegio de la Región Metropolitana, de clase social media, que tiene cinco cursos por nivel aproximadamente.

Para responder las consideraciones mencionadas anteriormente, se elaboraron cuatro instrumentos que permitirán recoger información en alumnos de séptimo básico, octavo básico y tercero medio, además de uno dirigido a los docentes. El fin de esto, es lograr percibir qué nociones tienen los alumnos sobre la medida, cuáles son los errores más frecuentes que ellos comenten, y además lograr observar si el aprendizaje que ellos adquieren en séptimo y octavo, trasciende a tercero medio.

La estructura de los instrumentos para los alumnos consiste en preguntas de alternativa y desarrollo, con el estilo de una prueba, que en los casos de séptimo y octavo están elaboradas en base a los contenidos propuestos en los programas de estudio, y en los aprendizajes que los alumnos debiesen tener según los mapas de progreso.

Como el sentido que tiene la prueba de tercero medio es observar si el aprendizaje de años anteriores trasciende, es que ella está elaborada con una mezcla de preguntas de las dos pruebas anteriores. Esta situación permite tener un control directo de la trascendencia de los contenidos y no se presta para subjetividades.

El instrumento aplicado a los profesores, consiste en una entrevista semiestructurada en donde se espera reconocer qué nociones tienen ellos sobre la medida como una magnitud, además de plasmar cómo ellos las plantean en el aula al momento de enseñarlas.

A continuación, se detallan las preguntas presentes en los instrumentos, especificando los niveles en los cuales se aplicarán, además de destacar el objetivo que ellas tienen, el programa de estudio en el cual se hace referencia al contenido y finalmente, el nivel del mapa de progreso en el cual debieran encontrarse los alumnos.

Preguntas de los instrumentos para los estudiantes.

1. Cuando se menciona $20m^3$, se están refiriendo a:

a. La capacidad de un determinado objeto.
b. El perímetro de una figura.
c. La superficie de un cuerpo.
d. La cantidad de material que se ocupe para armar un objeto.
e. Ninguna de las anteriores (solo prueba de tercero medio).

Niveles de aplicación.	Séptimo básico, octavo básico y tercero medio.
Objetivo.	Relacionar la capacidad con la unidad de medida que la representa.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5, NB6 y NM4.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4 y nivel 6.

2. Relaciona cada enunciado anteponiendo la letra que corresponda,

   L=longitud; C=capacidad; S=superficie

   ____la cantidad de una cinta que se necesita para el borde de un mantel.
   ____la cantidad de agua que contiene una piscina.
   ____la medida del rayo de la rueda de una bicicleta.
   ____el papel necesario para envolver una caja.
   ____la cantidad de helado que contiene un barquillo.
   ____la cantidad de cartón para construir una maqueta.

Niveles de aplicación.	Séptimo básico, octavo básico, tercero medio.
Objetivo.	Diferenciar los conceptos de longitud, superficie y capacidad, en situaciones cotidianas.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5 y NB6.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4 y nivel 6.

3. Juan desea saber cuánto alambre, aproximadamente, necesita para cercar el terreno de su casa, para ello dispone de pocas herramientas, ayúdale a decidir la mejor

   I.- una cuerda de 10 metros.

II.- una regla de 100 centímetros.
III.- una huincha de 5 metros.

a. con la cuerda de 10m o la regla de 100cm.
b. con la regla de 100cm o la huincha de 5m.
c. con la huincha de 5m o con la cuerda de 10m.
d. ninguna de las herramientas que tiene le ayuda.

Niveles de aplicación.	Séptimo básico y octavo básico.
Objetivo.	Discriminar cuál (es) es (son) el (los) instrumento (s) de medida más adecuado (s), para dar respuesta a un determinado problema.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5 y NB6.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4.

4. Al calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 6 cm. La unidad de medida de tu respuesta será:

I.- cm   II.- cm^2 III.- cm^3

a. Solo I
b. Solo II
c. Solo III
d. I y II
e. I, II y III (solo para tercero medio).

Niveles de aplicación.	Octavo básico y tercero medio.
Objetivo.	Relacionar el área con la unidad de medida que la representa.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5 y NB6.
Nivel del mapa de progreso	Nivel 4.

correspondiente.	

5. Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.

a. 500 baldosas.
b. 30 baldosas.
c. 300 baldosas.
d. 50 baldosas.
e. Ninguna de las anteriores.

Niveles de aplicación.	Octavo básico y tercero medio.
Objetivo.	Calcular áreas y distinguir las diferentes unidades de medida.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5 y NB6.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4.

6. Cuando mides la capacidad de un cono, lo que calculas es:

a. la cantidad de material que se utilizó para construir el cono.
b. la cantidad de líquido que contiene el cono.
c. la superficie que tiene el cono.
d. la altura del cono.
e. el diámetro de su base (solo para tercero medio).

Niveles de aplicación.	Octavo básico y tercero medio.
Objetivo.	Reconocer el concepto de capacidad.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB6 y NM4.
Nivel del mapa de progreso	Nivel 4 y nivel 6.

correspondiente.	

7. El área de un cuadrado es 169 cm^2. Al calcular el perímetro de ese cuadrado quedaría:

a. 26cm^2.
b. 52cm.
c. 52cm^2
d. 26cm.
e. 169cm (solo para tercero medio).

Niveles de aplicación.	Octavo básico y tercero medio.
Objetivo.	Calcular el área del cuadrado y reconocer la unidad de medida correspondiente.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5 y NB6.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4 y nivel 6.

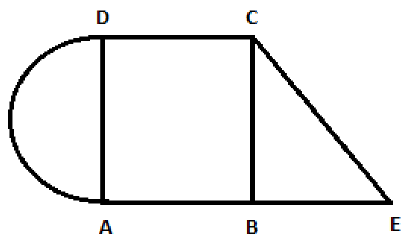
8. Astrid necesita calcular la altura de una mesa, ¿Cuál de los siguientes objetos le sería más útil para medirla?
   I.-una cuarta II.- un paso III.- un clip IV.- Una huincha

a. I y II
b. II y III
c. II y IV
d. I y IV

Niveles de aplicación.	Séptimo básico.
Objetivo.	Decidir qué elemento permite medir de manera más efectiva una determinada situación.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5.

Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4.

9. Calcula el perímetro de la siguiente figura compuesta. Donde ABCD es un cuadrado, AD es el diámetro de una semicircunferencia de radio 2cm y BE = 3cm, utiliza π=3.



a. $22cm^2$
b. 22cm
c. $28cm^2$
d. 28cm

Niveles de aplicación.	Séptimo básico.
Objetivo.	Determinar el perímetro de una figura compuesta.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4.

10. Un estudiante desea pintar las paredes de su pieza que tiene las siguientes dimensiones: 2,2 m de alto, 3m de ancho y 3m de largo, con una ventana de 2 m^2. Si un litro de pintura rinde $8m^2$. ¿Cuántos litros de pintura necesitará?

a. 2,23 litros
b. 2,73 litros
c. 3,05 litros
d. 3,55 litros

Niveles de aplicación.	Octavo básico.
Objetivo.	Calcular el área de rectángulos.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB6.

Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4.

11. Cuando te hablan de kilómetros, metros, centímetros y milímetros. ¿qué entiendes?

Niveles de aplicación.	Séptimo básico, octavo básico y tercero medio
Objetivo.	Reconocer las unidades de medida mencionadas, como una longitud.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5 y NB6.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4.

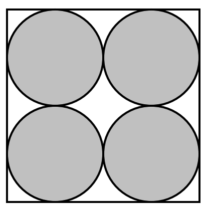
12. ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda, si no tengo la medida de su radio? Indica algún procedimiento.

Niveles de aplicación.	Séptimo básico, octavo básico y tercero medio.
Objetivo.	Establecer algún procedimiento para medir una rueda, sin tener información para que no utilicen algoritmos.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5 y NB6.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4.

13. La pirámide de Keops, es la mayor pirámide construida en Egipto, tiene base cuadrada, cuyos lados miden 230m, su altura 146m. Si esta pirámide fue construida con cubos de 2m de lado. ¿Cuántos cubos se utilizaron para la construcción de la pirámide?

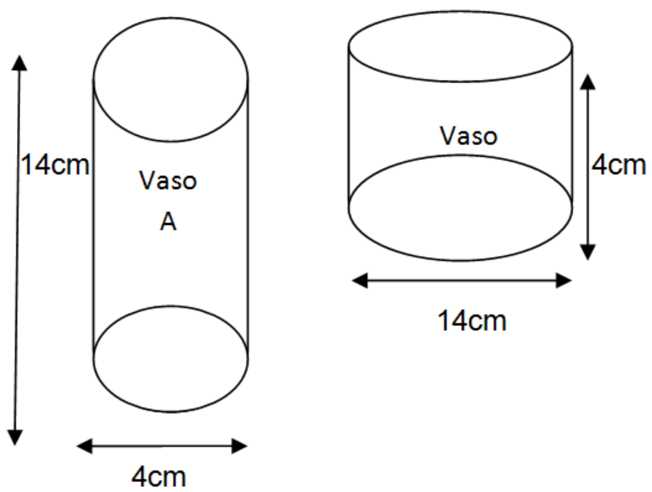
Niveles de aplicación.	Séptimo básico y tercero medio.
Objetivo.	Reconocer cómo la resolución del problema, el cálculo de un volumen y que lo realicen.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4 y nivel 6.

14. Si el área de los platos que están en la bandeja cuadrada que se presenta en el dibujo es de 314 cm^2 , señale ¿cómo podríamos saber la longitud de los lados de la bandeja?



Niveles de aplicación.	Séptimo básico.
Objetivo.	Describir a través de algoritmos, un procedimiento que permita dar respuesta al problema planteado.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB5 y NB6.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4.

15. Tengo mucha sed, necesito elegir un vaso. Ayúdame a decidir, ¿Cuál es el vaso con el que puedo tomar mayor cantidad de agua de una vez? (π = 3)



Vaso A, ¿por qué? ____

Vaso B, ¿por qué?____

Vaso A = vaso B ____

Niveles de aplicación.	Tercero Medio.
Objetivo.	Determinar el volumen de cada vaso para reconocer diferencias cuando hay cambio en los cuerpos geométricos.
Programa de estudio al cual pertenece.	NB6
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4 y nivel 6.

Para observar en concreto la estructura de cada uno de los instrumentos, observar anexos.

Prueba de séptimo básico.	**Anexo 1**
Prueba de octavo básico.	**Anexo 2**
Prueba de tercero medio.	**Anexo 3**
Entrevista para docentes.	**Anexo 4**

Preguntas de los instrumentos para los docentes.

A continuación se describirán los objetivos de cada una de las preguntas que están presentes en el instrumento dirigido a los docentes. Estos instrumentos se aplicaron a una docente de enseñanza básica con mención en matemática y a otra docente de enseñanza matemática.

1.- Cuando usted enseña los siguientes conceptos, con qué idea los asocia en el aula.

Número; Medida; Longitud; Superficie; Capacidad; Magnitud:

Objetivo de la pregunta.	Describir los conceptos mencionados, logrando de esta manera tener una visión de cuáles son sus modelos conceptuales, que según lo propuesto por Johnson-Laird, debieran ser mucho más formales y objetivos que los modelos mentales de los alumnos. Además, el descubrir con que idea asocian dichos conceptos en el aula, permitirá tener una visión de qué nociones son las que se les enseñan a los alumnos.

2.- ¿Qué elementos considera importantes de destacar previo al momento de enseñar volumen de prismas rectos en 7° básico? ¿Qué ejemplificaciones o situaciones utiliza dentro del aula matemática para abordarlos?

Objetivo de la pregunta.	Que los docentes logren expresar los aprendizajes que bajo su consideración deben estar adquiridos, si se desea enseñar volúmenes de prismas rectos. Con ello se podrá destacar qué aspectos, para los docentes, son de mayor importancia y cómo estos debieran presentarse en el aula.

3.- ¿Qué elementos considera importantes de destacar previo al momento de enseñar volumen de conos y cilindros en octavo básico? ¿Qué ejemplificaciones o situaciones utiliza en el aula matemática para abordarlos?

Objetivo de la pregunta.	Que los docentes logren expresar los aprendizajes que bajo su consideración deben estar adquiridos, si

	se desea enseñar volúmenes de conos y cilindros. Con ello se podrá destacar que aspectos, para los docentes, son de mayor importancia y cómo estos debieran presentarse en el aula.

4.- ¿Cuáles son los principales obstáculos que se presentan al momento de enseñar los tópicos de las preguntas 2 y 3?

Objetivo de la pregunta.	Que los profesores logren reconocer dentro de su experiencia en el aula, cuáles son las dificultades que se presentan al momento de enseñar conceptos relacionados con la superficie, el perímetro y el volumen. De esta manera se podría analizar cuáles son las nociones que complican el aprendizaje de los alumnos.

5.- Sobre medida de magnitudes, ¿cómo cree usted que es la propuesta que entrega el Ministerio de Educación en los programas de estudio para su enseñanza?

Objetivo de la pregunta.	Emitir un juicio, al referirse a la propuesta del Ministerio respecto de medida de magnitudes, debido a que los docentes forman parte del contexto educativo, por lo mismo, son una fuente directa de información.

6.- Cuando requiere la conversión de unidades de medida dentro del aula, ¿cómo lo aborda?

Objetivo de la pregunta.	Describir situaciones que los docentes realicen en el aula al momento de referirse a la conversión de unidad de medida. De esta manera se podrá observar de que manera son los modelos mentales que crean los alumnos para representar esta situación.

7.- ¿Identifica usted que los contenidos relativos a magnitud y medida se utilizan en otras asignaturas? Si su respuesta es afirmativa, por favor indique cuales.

Objetivo de la pregunta.	Describir que otras actividades curriculares se pueden relacionar con la magnitud y la medida, de esta manera se logrará establecer una relación con otras áreas con las que trabajan los alumnos.

3.2.3 Experimentación.

Los instrumentos que se aplicarán en esta etapa fueron validados por la magister en didáctica de las matemáticas, Tamara Del Valle (Ver anexo 5).

Para tener una muestra confiable las pruebas se aplicarán en un colegio particular subvencionado de la Región Metropolitana, dicho colegio tiene 5 cursos por nivel aproximadamente, de ellos se tomarán a dos que cuenten con un rendimiento diferente, para así observar si dicha situación influye en los aprendizajes que los alumnos tienen respecto de la medida como magnitud.

El colegio en el cual se llevó a cabo la realización didáctica, pertenece a la comuna de Maipú. El establecimiento tiene una matrícula de 3274 alumnos, lo que da un promedio de 38 alumnos por curso.

Desde sexto básico el colegio tiene una modalidad que consiste en dividir las horas de Matemática en dos, así realizan clases de Matemática separado de Geometría y Estadística. Debido a esta situación los cursos poseen dos profesores de Matemática por nivel, uno que realiza Geometría y Estadística, y otro Algebra y Número.

La aplicación del instrumento en el caso de los alumnos, será bajo las misma condiciones de una prueba, de esta manera se promoverá que ellos trabajen individualmente, lo que permitirá recoger la información de manera más objetiva.

La indicación que dio la dirección del colegio fue que se tomaran los instrumentos en la hora de Matemática, por lo que se conversó con los profesores que realizan la asignatura de Matemática en séptimo básico, octavo básico y tercero medio. En cada uno de esos cursos se utilizaron 45 minutos.

3.2.4 Análisis a posteriori

Teniendo presente que Artigue señala que la fase de análisis a posteriori *“se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos* *momentos de la enseñanza o durante su transcurso. Y, como ya lo habíamos indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación"* (Artigue, 1995).

Lo que se realizará a continuación es señalar los resultados obtenidos de los instrumentos de los alumnos y docentes, con el fin de contrastarlos con el análisis a priori, de esta manera se podrán validar las hipótesis propuestas en esta investigación. La idea es lograr responder interrogantes como:

- ¿Cuáles son las confusiones más frecuentes en los estudiantes, al momento de ver medida de magnitudes?
- ¿Existe un aprendizaje significativo de la medida como magnitud desde séptimo básico hasta cuarto medio?
- ¿Los alumnos distinguen los conceptos de longitud, superficie y capacidad?
- Al medir una magnitud, ¿es común que los estudiantes prefieran trabajar con algoritmos, en vez de desarrollar algún procedimiento propio?
- ¿Las situaciones que los docentes proponen en el aula para enseñar magnitudes son significativas?
- ¿las propuestas que entrega el ministerio sobre la enseñanza de las magnitudes es completamente utilizada por los docentes?

Además de ir respondiendo a todas las preguntas señaladas, el análisis a posteriori, proporcionará otros detalles dentro de las variables que seguramente no han sido considerados aún. Estos, permitirán emitir ciertos juicos que faciliten la validación o refutación de las hipótesis mencionadas en el análisis a priori.

Para lograr organizar la síntesis de la recolección de información, se dispondrán tablas en las que se organizarán las preguntas de los instrumentos tanto de los alumnos como del profesor. Se expondrán las respuestas correctas e incorrectas en cada uno de los niveles que pertenezca cada pregunta, destacando cuál es el error más frecuente que comenten los alumnos, así como también cuál era la respuesta ideal esperada. Luego, se expondrá un análisis que se puede extraer de la información expresada en cada tabla. Además, para una mejor comprensión se adjuntarán imágenes de los instrumentos, que corroborarán aspectos que se deseen destacar dentro del desarrollo de las respuestas.

ANALISIS DE PREGUNTAS TRANSVERSALES DE ALTERNATIVA.

- **Cuando se menciona 20m^3. Se están refiriendo a:**
    - La capacidad de un determinado objeto.

- El perímetro de una figura.
- La superficie de un cuerpo.
- La cantidad de material que se ocupe para armar un objeto.
- Ninguna de las anteriores.

	7º básico	8º básico	3º medio
Buenas	28%	53%	77%
Malas	68%	47%	23%
Omitidas	4%	0%	0%
Errores más frecuentes	La cantidad de material que se ocupa para armar un objeto.	La superficie de un cuerpo.	La superficie de un cuerpo.
Respuesta Ideal	La capacidad de un determinado objeto	La capacidad de un determinado objeto	La la capacidad de un determinado objeto
Análisis	En una primera instancia, se puede observar que las repuestas correctas van en forma creciente a medida que avanzan los cursos, deduciendo que se va adquiriendo el concepto de capacidad. Objetivo a cumplir: “relacionar la capacidad con la unidad de medida que la representa”. Los porcentajes de logro presente en los tres niveles fueron: séptimo básico 28%, octavo básico, 53% y tercero medio, 77% en sus logros. En séptimo básico es el primer año donde los estudiantes adquieren el concepto de volumen de un cuerpo. Es por esto que ellos debieran tener arraigado dentro de su vocablo este concepto. Sin embargo, los resultados reflejan lo contrario.		

- **Relaciona cada enunciado anteponiendo la letra que corresponda;**
  S: superficie, L: longitud o C: capacidad.
  - ___ **La cantidad de una cinta que se necesita para el borde de un mantel.**

	7º básico	8º básico	3º medio
Buenas	75%	88%	88%
Malas	18%	12%	11%
Omitidas	7%	0%	1%
Errores más frecuentes	S= superficie	S= superficie	S= superficie
Respuesta Ideal	L= longitud	L= longitud	L= longitud
Análisis	Objetivo a cumplir: “diferenciar los conceptos de longitud, superficie y capacidad, en situaciones cotidianas”. Los porcentajes de logro de este objetivo presente en los tres niveles fueron: séptimo básico, 75%, octavo básico, 88% y tercero medio, 88% en sus logros. De esto se deduce que la adquisición del concepto de longitud que tienen los estudiantes hasta octavo básico se mantiene constantes a lo largo del tiempo, puesto que un punto de distancia entre los niveles octavo básico y tercero medio, no hace la diferencia.		

- _____ **La cantidad de agua que contiene una piscina.**

	7º básico	8º básico	3º medio
Buenas	69%	92%	93%
Malas	24%	8%	7%
Omitidas	7%	0%	0%
Errores más frecuentes	S= superficie	S= superficie	S= superficie
Respuesta Ideal	C= capacidad	C= capacidad	C= capacidad

Análisis	Objetivo a cumplir: “diferenciar los conceptos de longitud, superficie y capacidad, en situaciones cotidianas”. Los porcentajes de logro de este objetivo presente en los tres niveles fueron: séptimo básico, 69%, octavo básico, 92% y tercero medio, 93% en sus logros. De esto se deduce que la adquisición del concepto de capacidad que tienen los estudiantes hasta octavo básico se mantiene constantes a lo largo del tiempo, puesto que un punto de distancia entre los niveles octavo básico y tercero medio, no hace la diferencia. Por otro lado, se logra visualizar que los tres niveles tienen el mismo error frecuente, confunden capacidad con superficie, esto se podría deber a que hay ejemplos típicos que se utilizan en las aulas. Este ejemplo consiste en una piscina donde, el líquido dentro de la piscina es la capacidad y la pintura que se utiliza para pintarla es la superficie.

- ____ **La medida del rayo de la rueda de una bicicleta.**

	7º básico	8º básico	3º medio
Buenas	59%	88%	88%
Malas	32%	12%	11%
Omitidas	9%	0%	1%
Errores más frecuentes	S= superficie	S= superficie	S= superficie
Respuesta Ideal	L= longitud	L= longitud	L= longitud
Análisis	En el análisis, respecto al concepto de longitud expresado en el contexto de la vida cotidiana. Las respuestas incorrectas, arrojan los siguientes porcentajes, referidos a la cantidad total de alumnos por nivel. 32% en séptimo básico, 12% en octavo básico y 11% en tercero medio. Según el objetivo a cumplir: “diferenciar los conceptos de longitud, superficie y capacidad,		

	en situaciones cotidianas". Los porcentajes de logro de este objetivo, presente en los tres niveles fueron: séptimo básico, 59%, octavo básico, 88% y tercero medio, 88%. Los alumnos de octavo básico y tercero medio, no poseen diferencias significativas en la cantidad de errores, donde se deduce, que la adquisición del concepto de longitud que tienen los estudiantes hasta octavo básico se mantiene constantes a lo largo del tiempo.

- ____ **El papel necesario para envolver una caja.**

	7º básico	8º básico	3º medio
Buenas	45%	82%	77%
Malas	48%	18%	22%
Omitidas	7%	0%	1%
Errores más frecuentes	C= capacidad	C= capacidad	L= longitud
Respuesta Ideal	S= superficie	S= superficie	S= superficie
Análisis	Objetivo a cumplir: "diferenciar los conceptos de longitud, superficie y capacidad, en situaciones cotidianas". Cuando se expresa el área, en un contexto de la vida cotidiana. El porcentaje de logro del objetivo estipulado para esta pregunta, en séptimo básico fue 45%, en octavo básico 82% y tercero medio 77%. Notándose un leve descenso en tercero medio. Esto permite pensar que las superficie a pesar de ser la medida más familiar por ser en 1-D, causa cierto conflicto, puesto que en una pregunta anterior la superficie fue un error bastante frecuente, cuando se preguntaba por capacidad		

- ____ **La cantidad de helado que contiene un barquillo.**

	7º básico	8º básico	3º medio
Buenas	69%	86%	91%
Malas	24%	14%	8%
Omitidas	7%	0%	1%
Errores más frecuentes	S= superficie	S= superficie	S= superficie
Respuesta Ideal	C= capacidad	C= capacidad	C= capacidad
Análisis	Objetivo a cumplir: “diferenciar los conceptos de longitud, superficie y capacidad, en situaciones cotidianas”. Los porcentajes de logro de este objetivo, presente en los tres niveles fueron: séptimo básico, 69%, octavo básico, 86% y tercero medio, 91% en sus logros. Se observa la misma tendencia que en la pregunta anterior referida a capacidad, donde los logros del objetivo son mayores a medida que suben de nivel. Además se vuelve a corroborar que el error frecuente sigue siendo la superficie.		

- ___ **La cantidad de cartón para construir una maqueta.**

	7º básico	8º básico	3º medio
Buenas	48%	63%	77%
Malas	45%	37%	21%
Omitidas	7%	0%	2%
Errores más frecuentes	L= longitud	C= capacidad	L= longitud

Respuesta Ideal	S= superficie	S= superficie	S= superficie
Análisis	Objetivo a cumplir: “diferenciar los conceptos de longitud, superficie y capacidad, en situaciones cotidianas”. Los porcentajes de logro de este objetivo presente en los tres niveles fueron: séptimo básico, 48%, octavo básico, 63% y tercero medio, 77% en sus logros. En el análisis de estos logros, la tendencia se acentúa aún más a medida que van incrementando los niveles. Siendo los alumnos de séptimo básico, los únicos que no logran un porcentaje de logro adecuado, sobre la mayoría. Respecto de este ítem, esta pregunta fue una de las que tuvo menores logros en relación al resto.		

- **Juan desea saber cuánto alambre, aproximadamente, necesita para cercar el terreno de su casa, para ello dispone de pocas herramientas, ayúdale a decidir la mejor:**

  I.- una cuerda de 10 metros.
  II.- una regla de 100 centímetros.
  III.- una huincha de 5 metros.

  - Con la cuerda de 10m o la regla de 100cm.
  - Con la regla de 100cm o la huincha de 5m.
  - Con la huincha de 5m o con la cuerda de 10m.
  - Ninguna de las herramientas que tiene le ayuda.

	7º básico	8º básico
Buenas	59%	76%
Malas	39%	24%
Omitidas	2%	0%
Errores más frecuentes	Una regla de 100 centímetros o una huincha de 5 metros.	Con la cuerda de 10 m o la regla de 100 cm.

Respuesta Ideal	Una cuerda de 10 metros o una huincha de 5 metros.	Con la huincha de 5 m o con la cuerda de 10 m.
Análisis	Objetivo a cumplir: “discriminar cuál (es) es (son) el (los) instrumento (s) de medida más adecuado (s), para dar respuesta a un determinado problema”. Los porcentajes de logro de este objetivo en séptimo y octavo básico fueron 59% y 76%, respectivamente. Esto da a conocer que la mayoría de los estudiantes pueden designar una herramienta de medida acorde a la situación que se les expone.	

- **Al calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 6 cm. La unidad de medida de tu respuesta será expresada en:**

I. cm II. cm^2 III. cm^3

- Solo I
- Solo II
- Solo III
- I y II
- I, II y III.

	8º básico	3º medio
Buenas	70%	90%
Malas	30%	7%
Omitidas	0%	3%
Errores más frecuentes	cm. cm^3.	cm.
Respuesta Ideal	cm^2.	cm^2.
Análisis	Objetivo a evaluar: “relacionar el área con la unidad de medida que la representa”. El logro de este objetivo queda evidenciado tras sus	

	porcentajes, respecto al total de instrumentos aplicados por nivel, en octavo básico, 70% y en tercero medio, 90%. Gran cantidad de los alumnos logra relacionar la superficie con su unidad de medida respectiva, además el porcentaje de logro aumento entre el transcurso de 8° básico a 3° medio.

- **Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.**

  - 500 baldosas.
  - 30 baldosas.
  - 300 baldosas.
  - 50 baldosas.
  - Ninguna de las anteriores

	8º básico	3º medio
Buenas	22%	43%
Malas	74%	52%
Omitidas	4%	5%
Errores más frecuentes	No realizan equivalencia de unidades en las respuestas que tienen desarrollo.	No realizan equivalencia de unidades en las respuestas que tienen desarrollo.
Respuesta Ideal	300 baldosas.	300 baldosas.
Análisis	Objetivo a lograr: “calcular áreas y distinguir las diferentes unidades de medida”. El porcentaje de logro para octavo básico y tercero medio fue del 22% y 43%, respectivamente. Dando a conocer el incumplimiento de este objetivo. Sin embargo, aunque no se cumplió el objetivo, dentro de las respuestas correctas se encontraron distintas formas de resolución del problema. Algunas de ellas se adjuntaran a continuación	

La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a octavo básico.

7.- Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.

A) 500 baldosas.
B) 30 baldosas.
C) 300 baldosas
D) 50 baldosas

$450 : 30 = 15$ $\quad 600 : 30 = 20$ $\quad 20 \times 15 = 300$

7.- Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.

A) 500 baldosas.
B) 30 baldosas.
C) 300 baldosas
D) 50 baldosas

$2700 : 9 = 300$ $\quad$ 4,5m $\quad$ 600m $\quad$ 27m $\quad$ 30cm $\quad 27 : 009$

7.- Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.

A) 500 baldosas.
B) 30 baldosas. x
C) 300 baldosas
D) 50 baldosas x

$6 = 600 : 30 = 20$ $\quad 450 : 30 = 15$ $\quad$ 4,5 $\quad$ 15 $\quad$ 20

La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a tercero medio.

7.- Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.

A) 500 baldosas.
B) 30 baldosas.
C) 300 baldosas
D) 50 baldosas
E) Ninguna de las anteriores.

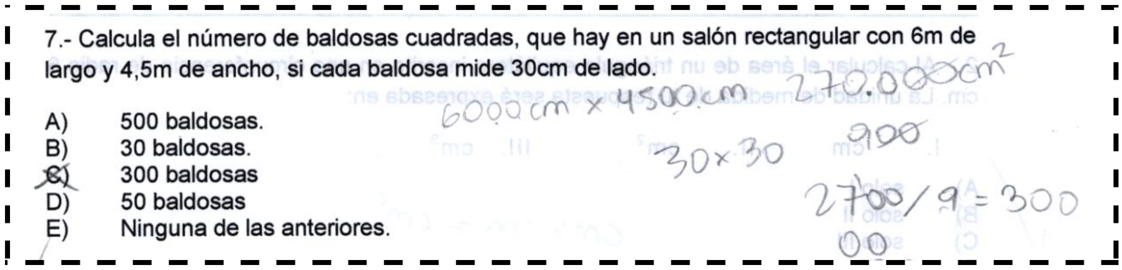
$4,5 \cdot 6 = 27,0\ m^2$ $\quad 0,3 \cdot 0,3 = 0,09\ m^2$

$27 : 0,09 = 2700 : 9 = 300$

7.- Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.

A) 500 baldosas.
B) 30 baldosas.
C) 300 baldosas
D) 50 baldosas
E) Ninguna de las anteriores.

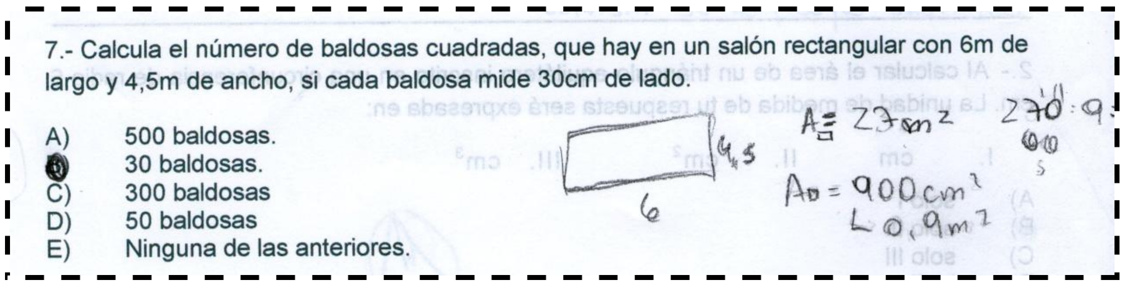
$600 : 30 = 20$ $\quad 450 : 30 = 15$



7.- Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.

A) 500 baldosas.
B) 30 baldosas.
C) 300 baldosas
D) 50 baldosas
E) Ninguna de las anteriores.

6000 cm x 4500 cm 270.000 cm²
30 x 30 900
2700 / 9 = 300
00



7.- Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.

A) 500 baldosas.
B) 30 baldosas.
C) 300 baldosas
D) 50 baldosas
E) Ninguna de las anteriores.

4,5
6
A = 27m²
270 : 9
00
Ao = 900 cm²
0,9 m²

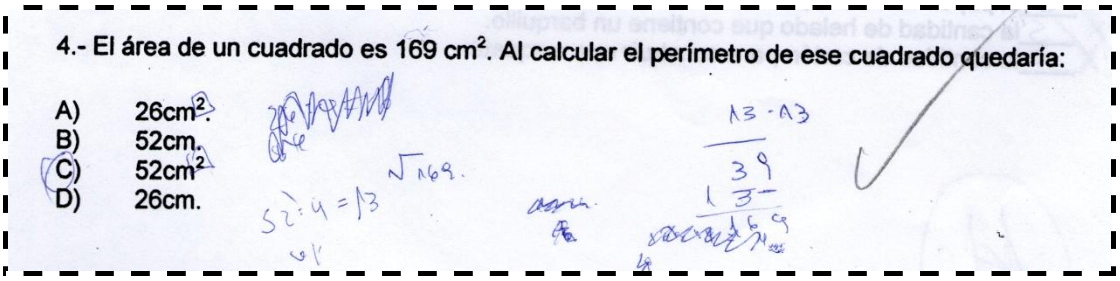
- **Cuando mides la capacidad de un cono. Lo que calculas es:**
  - la cantidad de material que se utilizó para construir el cono.
  - la cantidad de líquido que contiene el cono.
  - la superficie que tiene el cono.
  - la altura del cono
  - el diámetro de su base.

	8º básico	3º medio
Buenas	42%	79%
Malas	58%	21%
Omitidas	0%	0%
Errores más frecuentes	La superficie que contiene el cono.	La superficie que contiene el cono.
Respuesta Ideal	La cantidad de líquido que contiene el cono.	La cantidad de líquido que contiene el cono.
Análisis	El objetivo a lograr tras esta pregunta es: “reconocer el concepto de capacidad”. Los alumnos de tercero medio tienen un porcentaje de logro de un 79% siendo éste muy bueno, sin embargo en octavo básico tuvo un porcentaje de logro muy inferior a lo esperado, con un 42%, a pesar de que es en ese nivel cuando ven éste concepto en un cono.	

- **Si el área de un cuadrado es 169 cm^2. El perímetro de ese mismo cuadrado sería:**
  - 169cm.
  - 26cm^2
  - 52cm
  - 52cm^2
  - 26cm.

	8º básico	3º medio
Buenas	26%	70%
Malas	67%	22%
Omitidas	7%	8%
Errores más frecuentes	52 cm^2. 26 cm.	26 cm.
Respuesta Ideal	52 cm.	52 cm.
Análisis	Objetivo a cumplir en ésta pregunta: "calcular el área del cuadrado y reconocer la unidad de medida correspondiente" En ésta pregunta el porcentaje de aprobación en octavo básico fue del 26%. De esto surgió la pregunta, por qué tan bajo el porcentaje de logro; Al volver a analizar las respuestas incorrectas de éste ítem, se manifestó que el 24% de los alumnos, no hicieron la distinción en la unidad de medida. Es decir, desarrollaron el procedimiento para encontrar el valor numérico que representa al perímetro pero al marcar la alternativa respondieron con la unidad de medida del área. En tercero medio fue mucho mayor el porcentaje de logro, aunque tampoco fue el esperado.	

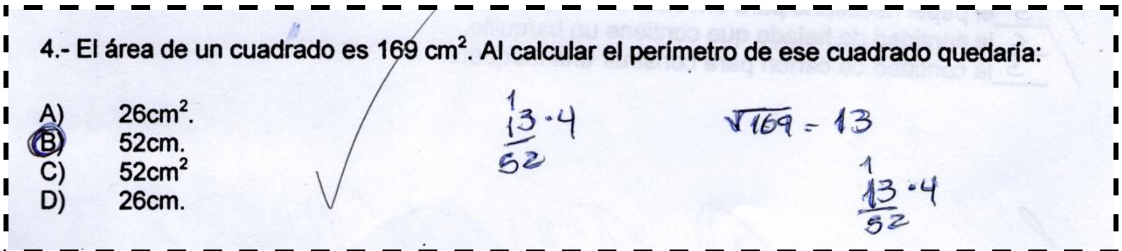
La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a octavo básico.


4.- El área de un cuadrado es 169 cm^2. Al calcular el perímetro de ese cuadrado quedaría:

A) 26cm^2.
B) 52cm.
C) 52cm^2
D) 26cm.

$\sqrt{169}$.

52 : 4 = 13


4.- El área de un cuadrado es 169 cm^2. Al calcular el perímetro de ese cuadrado quedaría:

A) 26cm^2.
B) 52cm.
C) 52cm^2
D) 26cm.

13 · 4 = 52

$\sqrt{169}$ = 13

13 · 4 = 52

ANALISIS DE PREGUNTAS POR NIVEL DE ALTERNATIVAS.

- **Astrid necesita calcular la altura de una mesa, ¿Cuál de los siguientes objetos le sería más útil para medirla?**

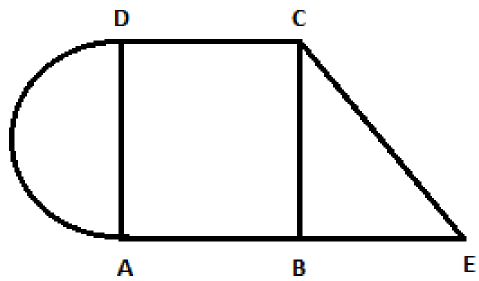
I.-una cuarta   II.- un paso   III.- un clip   IV.- Una huincha

- I y II
- II y III
- II y IV
- I y IV

	7º básico
Buenas	79%
Malas	20%
Omitidas	1%
Errores más frecuentes	Un paso y una huincha.
Respuesta Ideal	Una cuarta y una huincha.

Análisis	Objetivo a cumplir: “decidir qué elemento permite medir de manera más efectiva una determinada situación”. La aprobación del séptimo fue del 79%, logrando cumplir con el objetivo. Es decir, ellos pueden discriminar entre varios elementos cual le sería más práctico, para utilizarlo en una situación donde se requiera medir algo.

- **Calcula el perímetro de la siguiente figura compuesta. Donde ABCD es un cuadrado, AD es el diámetro de una semicircunferencia de radio 2cm y BE = 3 cm, utiliza π=3.**



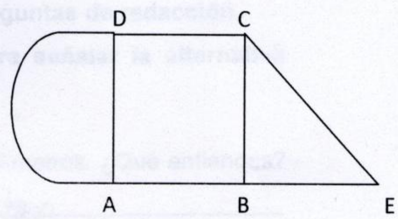
  - $22cm^2$
  - 22cm
  - $28cm^2$
  - 28cm

	7º básico
Buenas	0%
Malas	83%
Omitidas	17%
Errores más frecuentes	No se observan errores, ya que ninguna de las respuestas presenta desarrollo.
Respuesta Ideal	22 cm.
Análisis	Objetivo a cumplir: “determinar el perímetro de una figura compuesta”. El porcentaje de logro de esta pregunta es nulo, haciendo suscitar el por qué de esto. Al revisar nuevamente ésta pregunta se encontró que las alternativas marcadas como correctas no fueron contabilizadas, ya que se solicitó, al momento de realizar la prueba, que los desarrollos se escribieran cuando se necesitaran. Como ninguna prueba contaba con algún tipo de desarrollo, entonces se anularon. Lo

	que permite concluir que las preguntas que tenían marcada alguna alternativa fueron contestadas al azar.

La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a séptimo básico.

7.- Calcula el perímetro de la siguiente figura compuesta Donde ABCD es un cuadrado, AD es el diámetro de una semicircunferencia de radio 2cm y BE = 3cm, utiliza π=3.



A) $22cm^2$
B) 22cm
C) $28cm^2$
D) 28cm

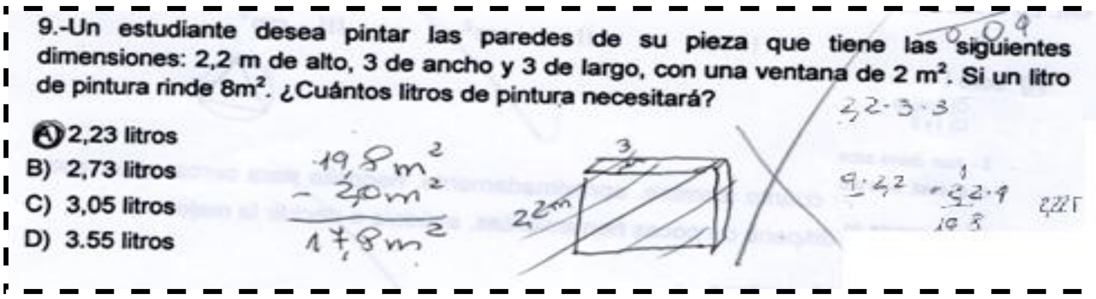
- **Un estudiante desea pintar las paredes de su pieza que tiene las siguientes dimensiones: 2,2m de alto, 3m de ancho y 3m de largo, con una ventana de $2m^2$. Si un litro de pintura rinde $8m^2$. ¿Cuántos litros de pintura necesitará?**

  - 2,23 litros
  - 2,73 litros
  - 3,05 litros
  - 3.55 litros

	8º básico
Buenas	1%
Malas	86%
Omitidas	13%
Errores más frecuentes	2,23 litros. 3,55 litros.
Respuesta Ideal	3,05 litros.
Análisis	El objetivo que se está evaluando en ésta pregunta es: “calcular

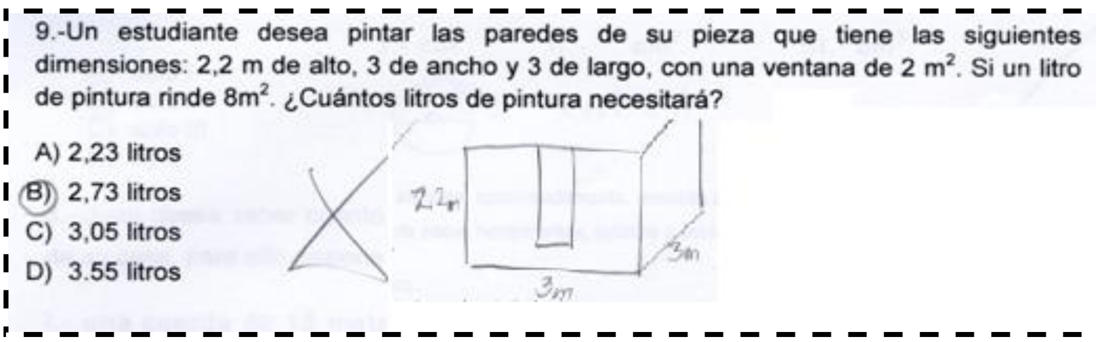
	el área de rectángulos”. El porcentaje de logro en esta pregunta es de un 1%, esto se debe a que cuando se les presenta a los alumnos reconocer el área en una determinada situación y a la vez tener que realizar más operaciones para concretar la respuesta, ellos se confunden y no son capaces de reestructurarla. Otros estudiante, se confundieron en la estructura semántica de la situación y calcularon el volumen de la pieza.

La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a octavo básico.



9.-Un estudiante desea pintar las paredes de su pieza que tiene las siguientes dimensiones: 2,2 m de alto, 3 de ancho y 3 de largo, con una ventana de 2 m². Si un litro de pintura rinde 8m². ¿Cuántos litros de pintura necesitará?

A) 2,23 litros
B) 2,73 litros
C) 3,05 litros
D) 3.55 litros



9.-Un estudiante desea pintar las paredes de su pieza que tiene las siguientes dimensiones: 2,2 m de alto, 3 de ancho y 3 de largo, con una ventana de 2 m². Si un litro de pintura rinde 8m². ¿Cuántos litros de pintura necesitará?

A) 2,23 litros
B) 2,73 litros
C) 3,05 litros
D) 3.55 litros

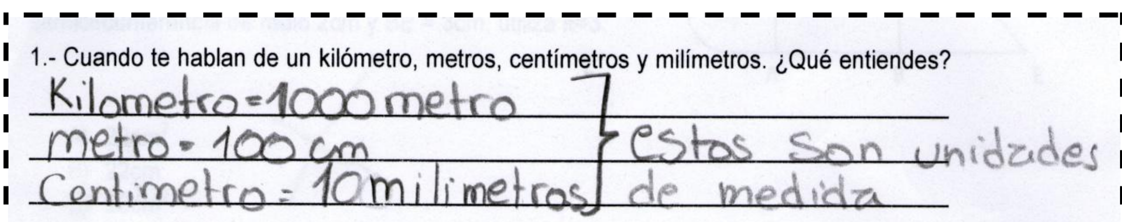
ANALISIS DE PREGUNTAS TRANSVERSALES DE DESARROLLO.

- **Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?**

	7º básico	8º básico	3º medio
Respuesta mínima esperada	-Asociar el enunciado a unidades de medida de	-Asociar el enunciado a unidades de medida de	-Asociar el enunciado a unidades de medida de

	longitud. -Dar una definición o un ejemplo.	longitud. -Dar una definición o un ejemplo.	longitud. -Dar una definición o un ejemplo.
Respuesta más frecuente	- Tipo de medida. - Distancia.	- Son unidades de medida. - Dan ejemplos de longitudes (entre lugares, objetos, etc.)	- Son unidades de medida de longitud. -Dan ejemplos de equivalencia entre las unidades de medida.
Análisis	La mayoría de los alumnos respondió esta pregunta, de ello se puede observar que sus respuestas son más complejas a medida que van avanzando en los cursos. En tercero medio elaboran respuestas donde enlazan un lenguaje más completo, es decir, las conexiones proposicionales son mayores dentro de sus estructuras mentales. Un ejemplo de esto, es que los alumnos de tercero medio distinguen las equivalencias que se dan entre distintas unidades de medida de longitud. A diferencia, en séptimo básico los alumnos cuentan con menos abstracción y léxico, por ello sus respuesta son menos articuladas y con menor cantidad de elementos, donde la idea central que desean transmitir, es "distancia" o "medida", sin un mayor contexto.		

La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a séptimo básico.


1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

Kilometro=1000 metro
metro= 100 cm
Centimetro= 10 milimetros
estos son unidades de medida

La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a octavo básico.

1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

UNIDADES DE MEDIDA Y DE CAPACIDAD

1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

Entiendo que son Unidades de medida de superficie(?

1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

Medidas de longitud.

La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a tercero medio.

1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

Son unidades de medida y cada una conlleva a la otra como por ejemplo 1 Km son 1000 metros y 100000 cm, etc...

1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

CUANDO ME HABLAN DE UN KILÓMETRO, METRO, CENTIMETRO O MILIMETRO ENTIENDO QUE SON UNIDADES DE MEDIDAS QUE PERTENECEN AL SISTEMA INTERNACIONAL Y QUE ESTAS MEDIDAS ESTAN PRESENTE SIEMPRE EN NUESTRAS VIDAS.

1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

Se entiende como la medida de un objeto o la distancia de una superficie.

1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

Que los más pequeños como el milímetro están contenidos en los demás

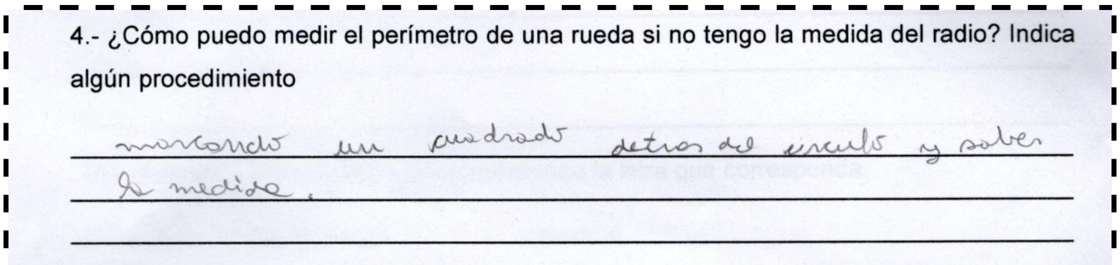
- **¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento.**

<table>
<tr><td></td><td>7º básico</td><td>8º básico</td><td>3º medio</td></tr>
<tr><td>Respuesta ideal</td><td>Indicar algún procedimiento o un elemento que permita medir una longitud (huincha, cuerda, etc.).</td><td>Indicar algún procedimiento o un elemento que permita medir una longitud (huincha, cuerda, etc.).</td><td>Indicar algún procedimiento o un elemento que permita medir una longitud (huincha, cuerda, etc.).</td></tr>
<tr><td>Respuesta más frecuente</td><td>Señalan en sus respuestas que “no saben”</td><td>Señalan que se debe determinar el valor del radio para utilizar la fórmula.</td><td>Podrían dar el diámetro, y así dividir en 2 para obtener el radio.</td></tr>
<tr><td>Análisis</td><td colspan="3">Al observar las respuestas, se visualiza una clara tendencia por parte de los alumnos a utilizar algoritmos matemáticos, especialmente en séptimo y octavo básico, en este caso especifico, la fórmula para determinar el perímetro de la circunferencia. Se podría decir que más de la mitad de los alumnos no asocia directamente el concepto de perímetro con el contorno de una figura, ya que en varias de las respuestas ellos medirían con un instrumento el diámetro o el radio, en vez de medir con el mismo instrumento, directamente el contorno de la figura.

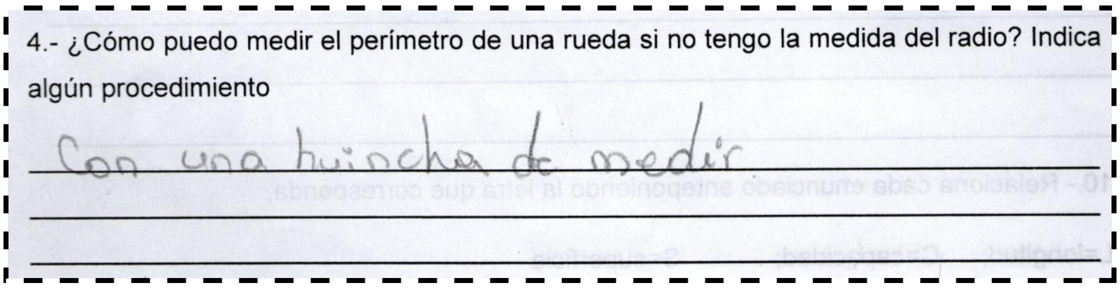
En los terceros medios se observaron 11 pruebas, que corresponde al 15% del nivel, con respuestas que plantean un procedimiento, muy llamativo, para medir el perímetro de la rueda; aquí proponen marcar un punto en la rueda, hacer la rodar</td></tr>
</table>

	exactamente una vuelta y medir lo recorrido por ella. De esto se deduce, que los alumnos determinan longitudes preferentemente de forma rectilínea. Además, su capacidad de abstracción es mayor.

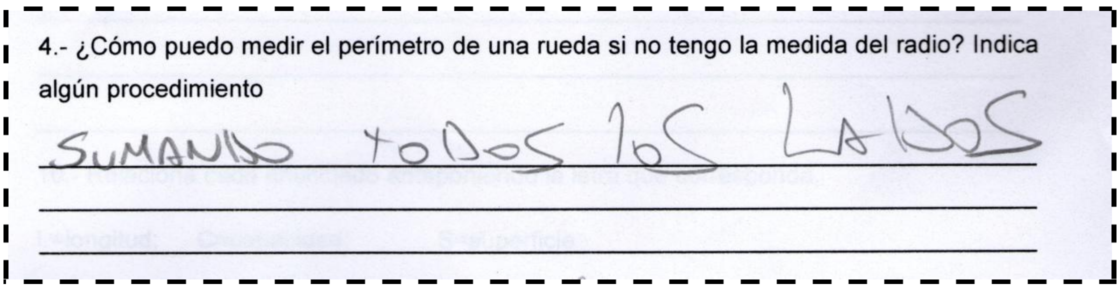
La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a séptimo básico.


4.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

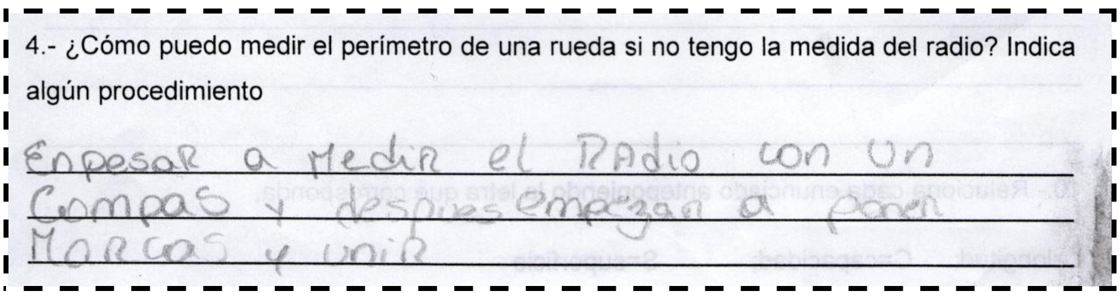
marcando un cuadrado detras del circulo y saber la medida.


4.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

Con una huincha de medir

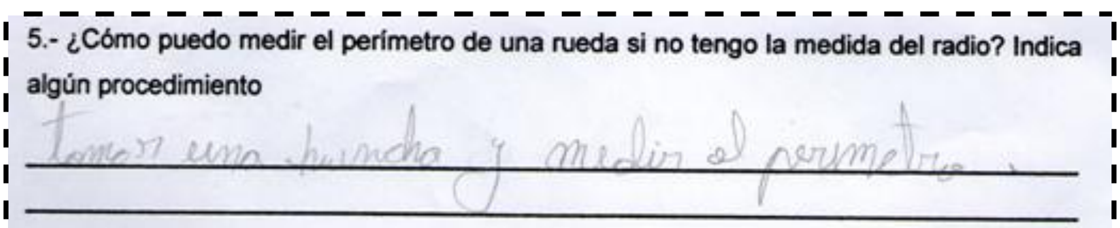

4.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

SUMANDO TODOS LOS LADOS


4.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

Enpesar a medir el Radio con un Compas y despues empezar a poner Marcas y unir

La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a octavo básico.


5.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

tomar una huincha y medir el perimetro.

5.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

sacando la superficie y luego el radio y sumar todo para que de el perimetro

5.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

~~la co~~ medirlo con una huincha por fuera de la rueda

5.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

puedo medir el diametro y dividirlo en dos, para saber el radio y luego hago los procedimientos normales

5.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

El diametro se debe dividir en dos y nos dará la medida del radio. Para saber el perimetro se multiplica radio al cuadrado por π (3,14).

La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a tercero medio.

5.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

Con el diametro y luego dividirlo a la mitad

5.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

haciendo que la rueda gire en una superficie de un punto al mismo punto

5.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

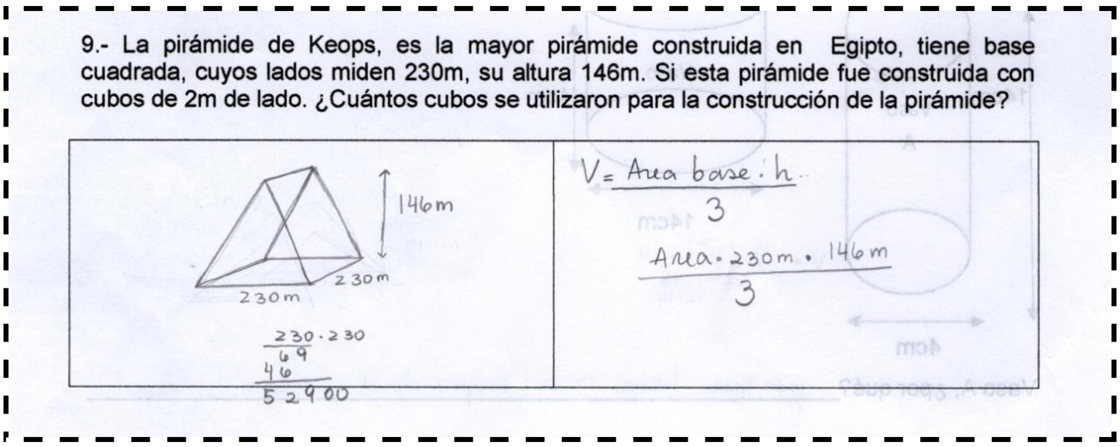
Sumando la medida de todos sus lados.

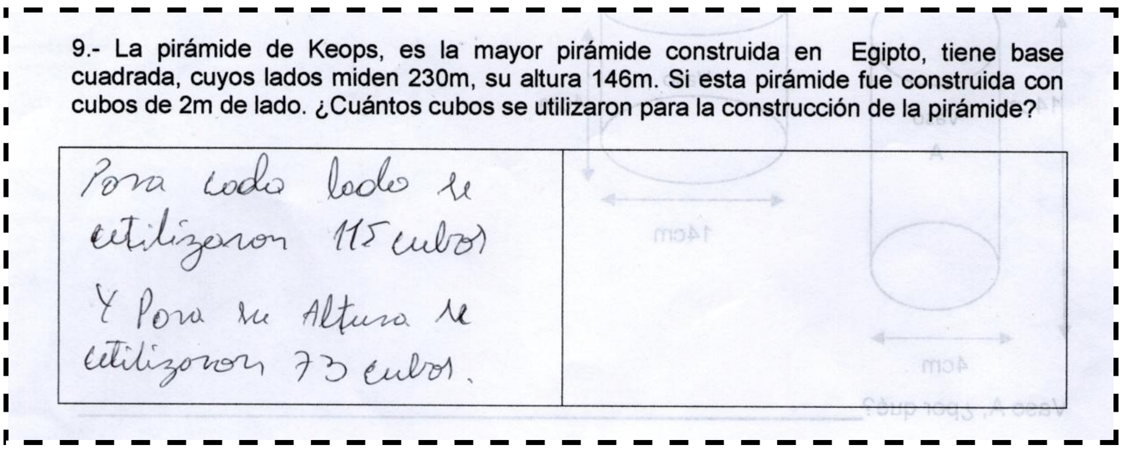
- **La pirámide de Keops, es la mayor pirámide construida en Egipto, tiene base cuadrada, cuyos lados miden 230m, su altura 146m. Si esta pirámide fue construida con cubos de 2m de lado. ¿Cuántos cubos se utilizaron para la construcción de la pirámide?**

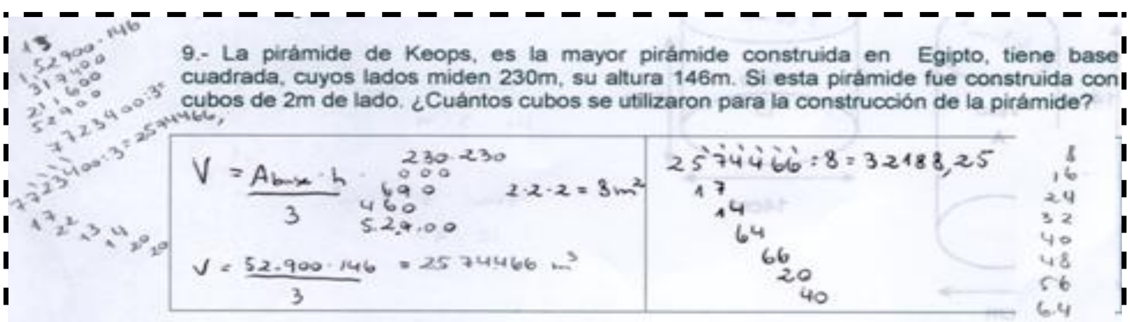
	7º básico	3º medio
Respuesta ideal	321.808 cubos aprox.	321.808 cubos aprox.
Respuesta más Frecuente	$\frac{230}{2}+\frac{146}{2}$ $\frac{230}{2}$	Seis alumnos realizaron el siguiente procedimiento. $\frac{230^2 \times 146}{3} \times \frac{1}{8}$
Análisis	Para que los estudiantes pudieran responder esta pregunta requerían de una secuencia de pasos a seguir. Entre ellos tienen que reconocer: cálculo de volumen en pirámide, cálculo de volumen en cubo y entre sus estructuras mentales, visión espacial para lograr establecer la cantidad de cubos que caben en la pirámide. En séptimo básico solo el 36.6% de los alumnos respondieron parte de la pregunta donde se advierte confusión en los procesos a seguir, no logrando concretar la visión espacial de la introducción de los cubos en la pirámide. En éste nivel 0% de los estudiantes tuvo correcta la respuesta. La mayoría de los alumnos de tercero medio, asocian la respuesta del problema en base al cálculo del volumen de la pirámide. Para ello utilizan la formula, que les permite calcularlo. En séptimo básico nadie logro responder correctamente, inclusive gran cantidad de alumnos la omitió. Por esto se puede decir, que existe un cambio radical en las	

	estructuras mentales de los alumnos ya que con el transcurso de los años de estudio, ellos adquieren mayor cantidad de nociones que les permiten establecer la relación entre problemas cotidianos y objetos matemáticos que dan respuesta a ellos.

La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a tercero medio.

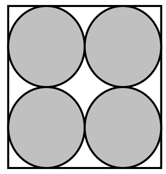

9.- La pirámide de Keops, es la mayor pirámide construida en Egipto, tiene base cuadrada, cuyos lados miden 230m, su altura 146m. Si esta pirámide fue construida con cubos de 2m de lado. ¿Cuántos cubos se utilizaron para la construcción de la pirámide?


9.- La pirámide de Keops, es la mayor pirámide construida en Egipto, tiene base cuadrada, cuyos lados miden 230m, su altura 146m. Si esta pirámide fue construida con cubos de 2m de lado. ¿Cuántos cubos se utilizaron para la construcción de la pirámide?


9.- La pirámide de Keops, es la mayor pirámide construida en Egipto, tiene base cuadrada, cuyos lados miden 230m, su altura 146m. Si esta pirámide fue construida con cubos de 2m de lado. ¿Cuántos cubos se utilizaron para la construcción de la pirámide?

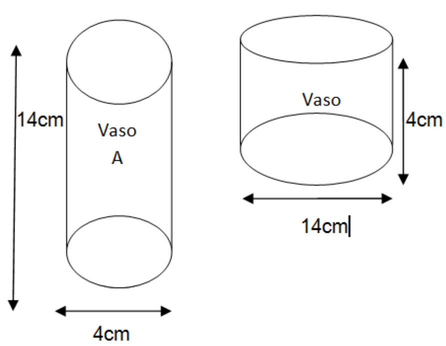
ANALISIS DE PREGUNTAS POR NIVEL DE DESARROLLO

- **Si el área de los platos que están en la bandeja cuadrada que se presenta en el dibujo es de 314 cm^2 , señale ¿cómo podríamos saber la longitud de los lados de la bandeja?**



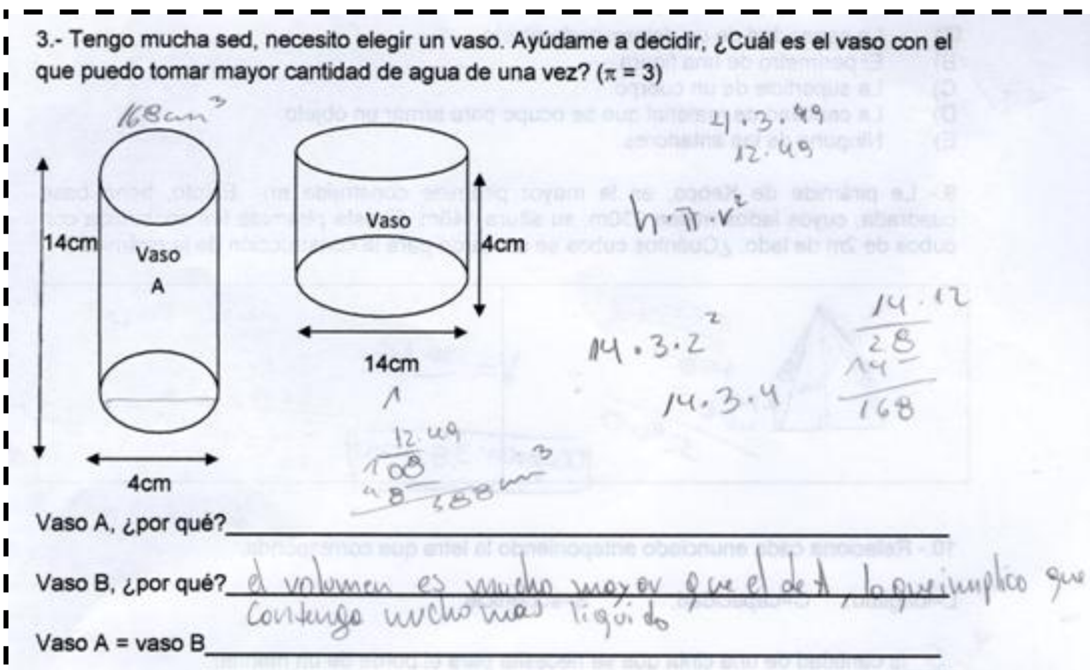
	7º básico
Respuesta ideal	Se calcula el cociente entre 314 y 4 para conocer el área de cada plato. Luego éste valor se introduce en la fórmula: $\pi r^2 = 78{,}5$, de donde se despeja el radio y luego se multiplica por 4, para encontrar el valor del lado del cuadrado.
Respuesta más Frecuente	314 : 4 La mayoría no respondió nada.
Análisis	Objetivo de la pregunta, para su evaluación: “describir a través de algoritmos, un procedimiento que permita dar respuesta al problema planteado”. Del 21% de alumnos que respondieron esta pregunta. Ninguno logró establecer la secuencia de pasos a seguir estipulada en “respuesta esperada”. De los alumnos que propusieron algún procedimiento 10% de ellos lograron establecer la división por 4. El 3% propuso calcular el radio para luego multiplicarlo por cuatro. El 4% multiplicó el área de la circunferencia por cuatro.

- **Tengo mucha sed, necesito elegir un vaso. Ayúdame a decidir, ¿Cuál es el vaso con el que puedo tomar mayor cantidad de agua de una vez? (π = 3).**



	3º medio
Respuesta ideal	Con el que puedo tomar mayor cantidad de agua de una vez, es el vaso más ancho, es decir, el de 14 cm de diámetro.
Respuesta más frecuente	Vaso B, ya que al calcular su volumen, es mayor que el del vaso A, por lo tanto tiene mayor líquido.
Análisis	Objetivo a lograr: "determinar el volumen de cada vaso para reconocer diferencias cuando hay cambio en los cuerpos geométricos". El logro de éste objetivo fue del 63%. Del porcentaje restante sus respuestas fueron incorrectas por el no realizar los cálculos pertinentes, los alumnos sólo se basaron en especulaciones. En esta pregunta se sigue corroborando que mientras más se desarrolla la mente de los alumnos a través de los años, ellos pueden ir complejizando los análisis para responder a determinados problemas.

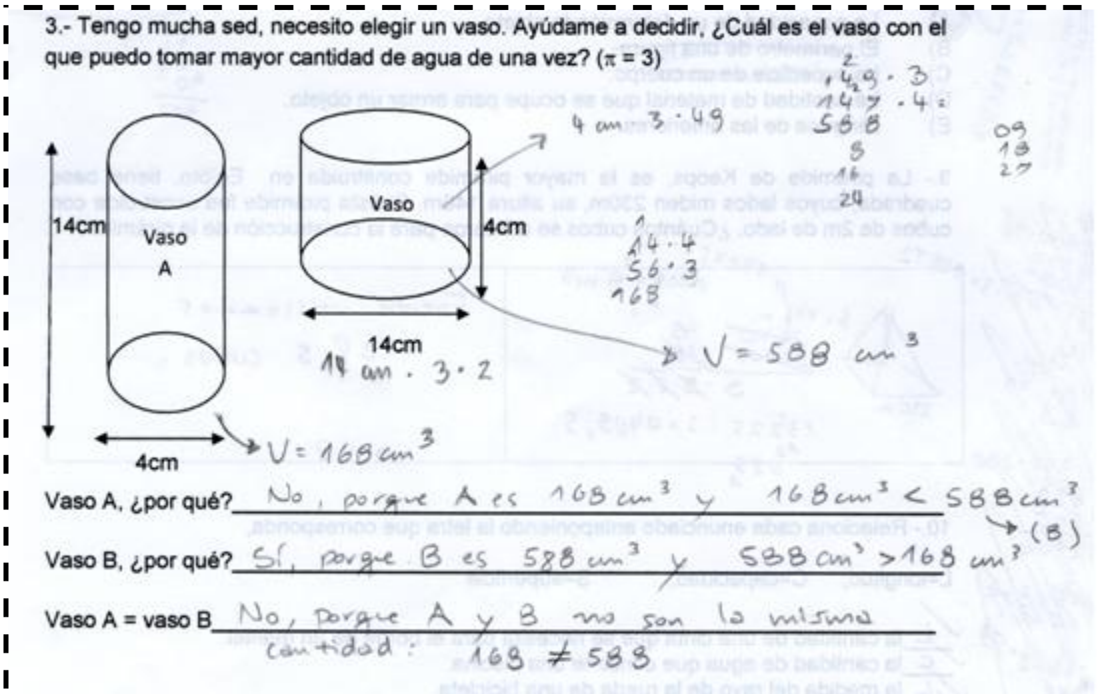
La siguiente imagen muestra parte de los instrumentos pertenecientes a tercero medio.


3.- Tengo mucha sed, necesito elegir un vaso. Ayúdame a decidir, ¿Cuál es el vaso con el que puedo tomar mayor cantidad de agua de una vez? ($\pi = 3$)

Vaso A, ¿por qué?

Vaso B, ¿por qué? el volumen es mucho mayor que el de A, lo que implica que contengo mucho mas líquido

Vaso A = vaso B



Al realizar un análisis general de las respuestas proporcionadas por los alumnos, se logran distinguir varios aspectos que permiten dar respuestas a los objetivos de esta investigación.

En primer lugar, las nociones que los alumnos poseen sobre longitud, superficie y capacidad van mejorando con el paso de los años, a pesar de que hay tres años en los que ellos no trabajan con la medida como una magnitud.

Se tiende a pensar que como en séptimo y octavo básico se presentan, explícitamente en el curriculum, las nociones de longitud, superficie y capacidad los alumnos debieran tener, en esos niveles, un porcentaje de logro por sobre el 50% en sus respuestas. Sin embargo, las respuestas referidas a las nociones mencionadas anteriormente, no logran llegar al 50% de logro, por lo que se puede deducir que es necesario, además de presentarles las nociones de longitud, superficie y capacidad en el aula, que ellos debieran tener cierto tiempo que les permita asimilar dichos conceptos. Esto se ve reflejado en varias preguntas transversales, donde los porcentajes de logros aumentan considerablemente desde séptimo básico hasta tercero medio. Durante aquel tiempo, los alumnos, aunque no ven la medida explícitamente en el aula, si la observan en su vida cotidiana, lo que les permite adquirir un mejor manejo.

En segundo lugar, se observa que los alumnos de séptimo y octavo básico tienden a usar algoritmos, lo que promueve que ellos disocien el número de la unidad de medida, ya que más que analizar las nociones de longitud, superficie y capacidad, ellos realizan el cálculo de medidas utilizando un algoritmo determinado que simplemente permite reemplazar valores, para así obtener el resultado numérico de una medida. Es frecuente observar en las respuestas de los instrumentos aplicados, que los alumnos realizan bien los cálculos, pero al contestar la alternativa ellos responden al problema con una unidad de medida incorrecta, lo que manifiesta claramente la disociación entre el número y medida. Esto corrobora el primer punto señalado, que indica que el aprendizaje de estas nociones en los primeros años consiste principalmente en la utilización de algoritmos, por ende, a medida que pasa el tiempo, los alumnos reestructuran y mejoran los conceptos mencionados.

En tercer lugar, se deduce de la pregunta transversal, donde se solicita que los alumnos midan el perímetro de una rueda sin conocer su radio, que los alumnos de séptimo y octavo básico responden de tal manera que insisten en la utilización de algoritmos, mientras que ya en tercero medio se observan respuestas más elaboradas, porque quizás los alumnos han comprendido claramente cuál es la noción de un perímetro.

De lo dicho en estos tres puntos, se infiere que los modelos mentales que los alumnos se elaboran sobre las nociones de longitud, superficie y capacidad en séptimo básico poseen una estructura, que con el pasar del tiempo van complejizando, con los aspectos que les proporciona la interacción con el medio.

ANALISIS DE LAS PREGUNTAS DE LAS DOCENTES

Para realizar un análisis de los instrumentos aplicados a las profesoras se trabajará con tablas, una por cada pregunta realizada. Allí se observarán las repuestas entregadas por ambas docentes lo que permitirá visualizar al mismo tiempo las visiones que ellas tienen sobre los aspectos consultados. En el **anexo 6.1 y 6.2** se podrán observar los instrumentos originales respondidos por las profesoras.

La idea de ir observando ambas respuestas de las docentes consultadas, permite notar las diferencias que se producen por el hecho de que una de ellas sea profesora básica con mención en matemática mientras que la otra sea profesora de matemática en enseñanza media. Esto permitirá analizar si dicha variable influye en las nociones que ellas tienen sobre los contenidos a enseñar.

Por otro lado, lo que se espera es que las respuestas de las docentes permitan ayudar a dilucidar como son los modelos conceptuales que ellas manifiestan en la enseñanza, para así comprender como podrían ser los modelos mentales que los alumnos se elaboran en base a las representaciones que se realizan de los modelos conceptuales proporcionados por las docentes.

1. Cuando Ud. Enseña los siguientes conceptos, con qué idea los asocia en el aula.

a) Número:

Profesora de educación básica con mención en matemática.	*"Problemas de vida cotidiana, ej: comercio, sacar cuentas de la casa, etc.".*
Profesora de educación media.	*"Con la pre-historia y la necesidad del ser humano de contar para poder sobrevivir".*
Análisis	Aquí se puede observar que ambas docentes relacionan la noción de número con su utilidad. La primera docente se refiere principalmente a ejemplos de la vida cotidiana que utiliza con sus alumnos, mientras que la segunda se refiere a la historia del número. De esto se puede deducir que hay una relación con los modelos mentales, ya que se señala que una de las características primordiales de ellos es que sean de utilidad para el sujeto que los elabora.

b) Medida:

Profesora de educación básica con mención en matemática.	*"A unidades de media, resolución de problemas relacionados con distancia entre ciudades, lectura e interpretación de planos, mapas, etc."*
Profesora de educación media.	*"Con la necesidad del ser humano, de tener medidas de su territorio o de algo más simple como cocinar o hacer la leche a los más pequeños".*
Análisis	En este concepto se sigue la misma tendencia que la pregunta anterior, ya que ambas respuestas presentan la misma diferencia, una de las profesoras da una respuesta más cotidiana, mientras que en la segunda se habla la medida como una herramienta elaborada por la necesidad del ser humano. Otro aspecto destacable se desprende de la

	respuesta de la profesora de enseñanza básica, ya que ella responde con una noción lineal de la medida, es decir, le es más familiar una magnitud de longitud que las otras como superficie o capacidad.

c) **Magnitud:**

Profesora de educación básica con mención en matemática.	*"Se asocia con el tamaño".*
Profesora de educación media.	*"Vector, al sentido de una calle, a la cantidad de pesos".*
Análisis	Aquí podemos observar que la primera docente responde de una manera muy similar al significado de la RAE que se menciono en capítulos anteriores respecto de la magnitud. Allí se menciona que la magnitud tiene que ver con la grandeza de algo, por lo que esa grandeza podría ser el tamaño. La segunda docente da una respuesta relacionada con la Física. Se logra visualizar que existe un cambio conceptual entre ambas docentes, ya que la segunda docente asocia la magnitud a un vector. Una situación similar se observa entre los alumnos de séptimo y octavo básico frente a los alumnos de tercero medio, ya que a medida que pasan los años los alumnos cuentan con mayor capacidad conceptual lo que permite que ellos den respuestas con una mayor cantidad de elementos al contrario de los alumnos de séptimo y octavo básico que dan respuestas más sencillas.

d) Superficie:

Profesora de educación básica con mención en matemática.	*"Se asocia al cálculo del área, en la vida cotidiana, relacionada con la cerámica que se necesita para colocar en una pieza, etc.".*
Profesora de educación media.	*"Terreno, plantación, parcela".*
Análisis	Aquí ambas profesoras dan ejemplos cotidianos que se utilizan en el aula para abordar la noción de superficie. Sin embargo, solo la primera (además de dar ejemplos) relaciona la superficie con el área. Esta situación es esencial en el aula, ya que al observar los instrumentos de los estudiantes se desprende que ellos no siempre asocian longitud, superficie y capacidad con perímetro, área y volumen. Lo que hace quedar en manifiesto que si el docente no hace tangible esa relación es más difícil que los alumnos la representen en sus mentes.

e) **Capacidad:**

Profesora de educación básica con mención en matemática.	*"Volumen, asociado a la capacidad de litros de agua que se alcanza a llenar a una botella, capacidad de llenar una caja con mercadería, etc.".*
Profesora de educación media.	*"Líquido, una botella de coca cola y arena en un recipiente".*
Análisis	Aquí se puede observar una situación similar a la de la pregunta anterior, ya que la primera docente relaciona capacidad con volumen, lo que permite una mejor comprensión matemática hacia los alumnos. Luego, ella plantea ejemplos de la vida cotidiana con los cuales se puede relacionar la capacidad. Dentro de la respuesta de la primera docente se

	plantea un aspecto bastante llamativo, que consiste en que ella se haya referido a capacidad con un ejemplo de llenar una caja mercadería. Matemáticamente ese ejemplo no correspondería a la definición de volumen en geometría, ya que allí capacidad solo se refiere a la capacidad de líquidos y áridos.

f) Longitud:

Profesora de educación básica con mención en matemática.	*"Se asocia con el perímetro, ej. En la circunferencia, enfocada a ruedas, reloj, etc.".*
Profesora de educación media.	*"Distancia (entre el colegio y la plaza), y una hormiga".*
Análisis	En este caso, la profesora de educación básica, nuevamente menciona una relación, en este caso, de longitud con perímetro. Lo destacable es que ella se refiere solo a objetos curvilíneos, figuras que suelen ser más difíciles para los alumnos, ya que en el caso del perímetro, para calcularlo matemáticamente solo se puede realizar a través del algoritmo $\boldsymbol{P = 2\pi r}$, a diferencia de los objetos rectilíneos en los que se puede calcular el perímetro como la suma de todos sus lados. Por otro lado, la segunda docente, responde a la longitud con un ejemplo de distancia. Situación bastante similar a las respuestas de los alumnos cuando se les daban distintas unidades de medida de longitud y se les preguntaba qué era los que se entendía. Muchos de ellos daban de respuesta que ellas eran una distancia. Aquí, nuevamente, podemos concluir que muchas de las nociones que tienen los alumnos, es decir, sus modelos mentales están directamente relacionados con los modelos conceptuales de los docentes.

2. **¿Qué elementos considera importantes de destacar, previo al momento de enseñar volumen de prismas rectos en 7º básico? ¿Qué implicaciones o situaciones utiliza dentro del aula matemática para abordarlos?**

	Conocimientos previos	Ejemplo o situación
Profesora de educación básica con mención en matemática.	• *"Identificar cuerpos geométricos y diferenciarlos".*	• *"Primero identifican los prismas rectos mirando elementos en el aula.* • *Utilización de cubos didácticos, arman prismas rectos.* • *Diferencian perímetro y área.* • *Identifican el volumen contando los cubos que forman los prismas".*
Profesora de educación media.	• *"El área de figuras planas".*	• *"Ver libro: Pedirles que saquen el área de una hoja y luego preguntarles ¿Cómo puedo sacar el volumen del libro?".*
Análisis	El análisis de esta pregunta y la siguiente es fundamental, ya que al hablar de aprendizajes previos, se hace una relación con las preconcepciones que tiene los alumnos antes de elaborar un modelo mental, ya que de esas preconcepciones dependerán las conexiones que establezca el estudiante para la construcción adecuada de su modelo. Ambas profesoras mencionan conceptos anteriores al cálculo de volúmenes, sin embargo la profesora de enseñanza media señala como aprendizaje previo uno anterior al que propone la profesora de enseñanza básica. Respecto de los ejemplos o situaciones que proponen las docentes, existe una diferencia considerable, ya que la docente de enseñanza básica en sus situaciones desarrolla	

	una secuencia didáctica bastante elaborada, pasando por distintas etapas que permitan al alumno llegar finalmente a la noción de volumen de un prisma.

3.- ¿Qué elementos considera importantes de destacar previo al momento de enseñar Volumen de conos y cilindros en 8° básico? ¿Qué ejemplificaciones o situaciones utiliza en el aula matemática para abordarlos?

	Conocimientos previos	Ejemplo o situación
Profesora de educación básica con mención en matemática.	• *"Identificar las redes del cono y cilindro.* • *Conocer cuerpos geométricos y figuras geométricas.* • *Recuerdan como se calcula el área y el perímetro de lo anterior".*	• *"De las redes de los cuerpos geométricos, identifican las figuras que las componen, una vez identificadas, recuerdan como calcular el área de estos cuerpos.* • *Nombran objetos de la vida cotidiana que tengan la forma de un cono y un cilindro.* • *Identifican formulas para calcular el volumen, teniendo presente el concepto de capacidad".*
Profesora de educación media.	• *"Área de figuras planas y el perímetro de figuras planas".*	• *"Un rollo de confort, lo corta y muestro un rectángulo".*
Análisis	Aquí se observa una diferencia sustancial ya que en las situaciones que las docentes proponen para abordar volúmenes de cilindro y cono, son completamente distintas, una se refiere claramente a capacidad pero la otra da un ejemplo del área de un cilindro, al manifestar con el ejemplo, que el cilindro está construido en base a un rectángulo. La docente de enseñanza básica sigue manifestando que	

	se debe relacionar el volumen con la capacidad, situación que no se ve reflejada por parte de todos los estudiantes.

4.- ¿Cuáles son los principales obstáculos que se presentan al momento de enseñar?

	Volumen de prismas rectos	Área y volumen de cono y cilindro
Profesora de educación básica con mención en matemática.	*"En general los niños les costó mucho geometría en general, la utilización de formulas costo que las entendieran, pero aun más el porqué de ellas. Con material concreto logran entender, pero sin él, por ejemplo en una prueba le es muy dificultoso".*	*"La utilización de formulas costó mucho que entendieran él porque, además, existe un rechazo contra los contenidos de este tipo, según los niños comentaban que no les gustaba porque ellos en la realidad no lo ocupaban tanto como los otros contenidos".*
Profesora de educación media.	*"Que se enseñe en la pizarra en 2D y este es un cuerpo en 3D".*	*"Que se enseñe en la pizarra o en el libro en 2D y esta es en 3D".*
Análisis	Varias de las dificultades que manifiestan las docentes han sido mencionadas en la investigación. Hay una dificultad que planteó la profesora de enseñanza básica que es corroborada por los instrumentos aplicados a los estudiantes. La dificultad que ella plantea es que a los alumnos les cueste encontrarle sentido a los algoritmos y por ende tardan en aprenderlos. A pesar de que sucede eso luego se aferran demasiado a ellos ya que tienen utilizar dichos algoritmos de manera innata. La otra dificultad que propone la profesora de enseñanza media también se ha señalado en esta investigación. La que consiste en que el objeto para calcular un volumen	

	cuesta ser representado en la pizarra por lo que los alumnos requieren de una habilidad mayor para representar esos cuerpos en sus mentes.

5.- Sobre medida de magnitudes, ¿Cómo cree usted que es la propuesta que entrega el Ministerio de Educación en los Programas de Estudio para su enseñanza?

Profesora de educación básica con mención en matemática.	*"Es demasiado resumido y encontré que propone pasar inmediatamente los contenidos con una retroalimentación de poco tiempo, pero en la realidad se necesita de mucho repaso previo a los contenidos vistos en el nivel".*
Profesora de educación media.	*"Buena, pero puede ser mejorable. Lo malo es que no se utiliza".*
Análisis	En esta pregunta tenemos dos realidades completamente distintas. Una profesora utiliza la propuesta realizada por el ministerio sin embargo, encuentra que se requiere recabar bastantes los aprendizajes previos, situación que no es suficientemente contemplada en la propuesta del ministerio. Por otro lado la docente de enseñanza media manifiesta "*que la propuesta es buena, sin embargo mejorable, pero además que no se utiliza"*. Esto hace pensar que existe gran cantidad de docentes que solo se guía con las propuestas del ministerio para saber cuáles son los contenidos mínimos obligatorios y no utilizan las situaciones que en ellas se manifiestan.

6.- Cuando requiere la conversión de unidades de medida dentro del aula, ¿cómo lo aborda?

Profesora de educación básica con mención en matemática.	*"Siempre utilizando problemas de la vida cotidiana, señalando que es importante identificar las diferentes formas de reconocer las unidades de medida".*

Profesora de educación media.	*"Con equivalencias".*
Análisis	La docente de enseñanza básica propone que se deben reconocer las diferentes unidades de medida, sin embargo no explicita las subunidades de los referentes de medida. La docente de enseñanza media establece como conversión de unidades la equivalencia, que hace suponer el uso de la transformación de unidades a través de algoritmos

7.- ¿Identifica Usted que los contenidos relativos a magnitud y medida se utilizan en otras asignaturas? Si su respuesta es afirmativa, por favor indique cuales.

Profesora de educación básica con mención en matemática.	*"Sí, se ve en planos y mapas en historia y ciencias sociales".*
Profesora de educación media.	*"Física, Química, Artes, Historia, Biología, Lenguaje (en menor medida), Tecnología".*
Análisis	Aquí la respuesta más significativa es la de la profesora de enseñanza básica ya que ella da un ejemplo concreto para una asignatura en la que se puede relacionar las magnitudes y la medida. Sin embargo, se observa que ambas reconocen una relación de la magnitud con tópicos de otras asignaturas y más concreto aún, de la vida cotidiana.

Como se ha mencionado durante esta investigación los modelos mentales que los alumnos se generan, se elaboran a partir de modelos conceptuales que son entregados en el aula por el profesor.

En primera instancia, se observa que las docentes relacionan los conceptos de número, medida, magnitud, superficie, capacidad y longitud con la vida cotidiana, que para efectos de generar modelos mentales es esencial. Al llegar al plano de la magnitud, una de las respuestas no es la más optima ya que la profesora lo explica a través de vectores, concepto que está ligado al área de la Física, donde el vector posee una magnitud, sentido y dirección, representando por ejemplo, una fuerza. Para efectos de ésta investigación su definición no está en concordancia con la acepción de medición. Así también, se da como ejemplo de capacidad el llenar una caja con mercadería, que está lejos de ser el concepto de volumen.

Si los modelos conceptuales esenciales no son manejados correctamente por los docentes, los modelos mentales que se generan los alumnos serán inexactos, por lo que al pasar el tiempo, tras una reestructuración de éste, el modelo generado por el estudiante será débil.

Sobre el concepto de magnitud propuesto por el Ministerio de Educación, las profesoras dan a conocer su descontento, ya que si se expresa que se propone pasar inmediatamente los contenidos con poca retroalimentación, se está observando una completa algoritmización de la medida. Esta algoritmización también se manifiesta cuando las profesoras exponen su modelo conceptual de la conversión de unidades con equivalencias, donde existe un proceso rutinario.

En algunas de las respuestas se observan procesos incompletos, ya que al manifestar ciertas situaciones didácticas se explica solo parte de ellas. Una de estas fue, cuando se les solicitó expresar los conceptos y/o elementos que deben tener en cuenta antes de explicar el concepto de volumen de un cono o cilindro, la docente responde que tomaría un tubo de confort y lo cortaría para esbozar un rectángulo, esto nos pone en evidencia que el proceso expuesto está incompleto, puesto que para la explicación del cilindro faltarían las dos circunferencias de sus bases, además falta el enlace que se debe establecer al momento de abordar el volumen. Esta situación podría influir en que los alumnos se elaboren un modelo mental sobre el volumen de un cilindro de manera inconclusa, ya que no hay una recuperación de aprendizajes previos, que permita enlazar sus representaciones proposicionales.

CAPITULO 4.- CONCLUSIONES

En la siguiente tabla se expresa el promedio de los porcentajes de logro por nivel de las preguntas de alternativa, presentes en los instrumentos de los alumnos de séptimo básico, octavo básico y tercero medio, para los conceptos de capacidad, superficie y longitud. Su clasificación se expresa según los problemas que involucren noción del concepto de magnitudes y unidades de medida.

Los porcentajes destacados en color rojo, son los que no alcanzan un porcentaje mínimo de logro (mayor a 50%). Cada promedio contempla entre una y tres preguntas estipuladas para cada clasificación.

		Capacidad	**Superficie**	**Longitud**
Unidad de medida	**7º**	28%	-	69%
	8º	53%	47%	76%
	IIIº	77%	66%	-
Noción de concepto	**7º**	69%	47%	67%
	8º	73%	73%	88%
	IIIº	88%	77%	88%

A medida que pasan los años, los alumnos van complejizando las nociones que tienen de una determinada magnitud, sin embargo, en el caso especifico de la noción de longitud, los estudiantes, entre séptimo básico, octavo básico y tercero medio, no reflejan cambios significativos en sus estructuras mentales, ya que como el trabajo de dicha magnitud se realiza en 1D ellos logran comprenderla al trabajar en el aula solo con la pizarra. Además, relacionan de manera mucho más directa problemas de la vida cotidiana que la contextualicen. Esto se ve reflejado en la pregunta del instrumento de los estudiantes, en donde tienen que relacionar cada enunciado que representa un situación de la vida cotidiana, con la magnitud que corresponde, allí la mayoría de los alumnos responde correctamente a los enunciados que se refieren a longitud, ya que el porcentaje de variación desde séptimo básico hasta tercero medio va desde un 67% de logro a un 88%.

Como se ha manifestado a lo largo del estudio, hay 3 años durante los que no se observa la magnitud de manera directa en los programas de estudio, de aquí se podría hipotetizar que los estudiantes pierden la habilidad de trabajar con magnitudes. Sin embargo, en tercero medio se observan nociones más claras y con mejoras respecto de las nociones de medida. La diferencia radica en que ellos expresan sus conocimientos con una mayor semántica y por ende una articulación más completa para elaborar sus respuestas.

La magnitud de capacidad, representa bastante conflicto en la mayoría de los estudiantes, especialmente en los de séptimo básico, ya que a pesar de que ellos ven directamente, según los programas de estudios, el concepto de volumen en prismas y pirámides, lo que les permite tener adquirida la noción del concepto, no logran relacionar la unidad de medida correspondiente con su magnitud, esto se observa en la pregunta: “Cuando se menciona 20 m^3 se están refiriendo a”, aquí los alumnos de séptimo básico alcanzan un porcentaje de logro de 28%, siendo este insuficiente.

Los porcentajes de logro en las preguntas que se refieren a capacidad van aumentando a medida que los alumnos pasan de nivel. Específicamente, se observa en las preguntas que se relacionan con ejemplos de la vida cotidiana con el concepto de capacidad, que los alumnos de tercero medio en su mayoría logran estructurar la relación, al contrario de los alumnos de séptimo básico. De aquí se podría deducir que hay un aprendizaje social, ya que los alumnos no han recibido ninguna intervención académica respecto de la medida durante 3 años, pese a esto mejoran sus nociones del concepto, es decir, la interacción del estudiante con el medio, favorece dicha optimización.

Una de las dificultades de la noción de capacidad vienen dada por la complejidad del concepto, que viene dada por su estructura, la cual es un cuerpo que posee 3D, siendo difícil su expresión en pizarra, por lo que los estudiantes requieren de mayor abstracción para estructurar en sus mentes a lo que se refieren con volumen. Esta dificultad es corroborada por una de las docentes.

Johnson – Laird señala que mientras más concreto sea el trabajo que se establezca con la medida mayor será su significancia, y por ende, mejor será su representación. Además, las representaciones mentales que se elaboran los alumnos son a partir del entorno social y escolar, ya que el modelo mental que los alumnos elaborarán, será en base a las preconcepciones e imágenes proporcionadas por los modelos conceptuales entregados por el profesor.

Cada magnitud mencionada en esta investigación posee una unidad de medida correspondiente. Sin embargo, es común que alumnos no relacionen de manera correcta la unidad de medida con la magnitud correspondiente, más si el problema que involucra dicha relación posee elementos adicionales. Un ejemplo de esto se observa en la pregunta número 4 de los instrumentos de los alumnos de octavo básico, en donde dada el área de un cuadrado se les solicitaba calcular el perímetro. Muchos de los que tuvieron incorrecta la pregunta realizaron correctamente el cálculo, llegando al valor numérico que representa el perímetro, sin embargo respondieron al problema con la unidad de medida del área.

De esto, se desprende que los alumnos en muchos casos, disocian el número de la unidad de medida, lo que hace deducir que ellos relacionan memorísticamente con que unidad de medida se debe responder un determinado problema. Es decir, ellos se manejan con el trabajo de algoritmos que permiten calcular la medida de magnitudes, pero no comprenden lo que representa esa determinada magnitud. Un ejemplo de ello se presenta en una de las preguntas de los instrumentos de los estudiantes, en donde se pedía que propusieran algún procedimiento para medir el perímetro de una rueda sin conocer el radio.

Son pocos los estudiantes que plantean un procedimiento distinto al de calcular el perímetro con el algoritmo que se utiliza para ello, inclusive, señalaban que si no se tenía el radio podrían dar el diámetro para dividir en 2 y así conseguir el radio que les permitiría usar el algoritmo. Solo 11 alumnos de los 73 de tercero medio pudieron dar un procedimiento adecuado. Pudiéndose deducir que, al existir una disociación entre el número y la unidad de medida, la medida no es considera como una magnitud, especialmente en séptimo y octavo básico. Este divorcio de la magnitud también se ve reflejado en los textos entregados por el Ministerio de educación y en los modelos conceptuales expresados por los profesores, porque ellos promueven el uso de algoritmos, no haciendo evidente la unidad de medida correspondiente del resultado del algoritmo.

El trabajo que realizan los alumnos de séptimo básico respecto de la utilización de elementos para medir, es bastante completo. A pesar de que esta situación no se ve reflejada en los textos que utilizan los alumnos en el aula. En los instrumentos aplicados a los estudiantes, se refleja que la mayoría de ellos responde correctamente cuando debe escoger cual es el elemento más adecuado para medir una determinada magnitud, en distintas situaciones de la vida cotidiana. Por lo tanto, si los modelos mentales dependieran netamente del aula, los alumnos no podrían haber respondido a esta interrogante correctamente, ya que no existe ninguna evidencia concreta (programa de estudio, libro de texto) en donde se haga referencia al trabajo con instrumentos de medida, lo que permitiría que los alumnos se elaboraran el modelo mental que representara la situación descrita.

El trabajo que se realiza en el aula con unidades de medida es reiterativo y estandarizado. El primero es debido al uso indiscriminado del metro y del centímetro esto se ve reflejado en los textos donde se expresan las longitudes de los lados de las figuras, en medidas poco coherentes con el tamaño real de la imagen, produciendo un conflicto en la creación de las representaciones mentales de las subunidades del metro, en los estudiantes. El segundo, se presenta al utilizar, generalmente, el mismo procedimiento para realizar conversiones de unidades, lo que no favorece la comprensión de equivalencia entre unidades de medida a través de la graduación. Entonces, al trabajar con ellas solo se transforman de manera aritmética.

Al caracterizar la relación que se establece entre los modelos conceptuales establecidos por el profesor en el aula y los modelos mentales estructurados por los alumnos, se encuentra que mientras menos familiares y concretos sean abordados los modelos conceptuales, menor será la significancia que tengan para el estudiante. Entonces, si los aprendizajes fueran basados en una mayor cantidad de imágenes, de modo que las representaciones proposicionales que enlacen los alumnos estén cargadas de significados, se podrán establecer modelos mentales más duraderos y con una mayor cantidad de enlaces entre sí.

Al revisar, el análisis de los textos, mapas de progreso y programas de estudio propuestos por el MINEDUC en conjunto con los instrumentos aplicados, permiten establecer otra relación entre modelos conceptuales (profesor) y modelos mentales (estudiante). Si los textos, programas, mapas de progreso y profesores esbozan en las descripciones de los modelos conceptuales la utilización de fórmulas para la resolución de problemas de perímetro, área y/o volumen, mayor será la tendencia de sus educandos de no relacionar el número arrojado por el cálculo, con su unidad de medida correspondiente, debido a que se tiende a utilizar algoritmos con éstas magnitudes y no comprender las subunidades de medidas, conllevando que su respuesta sea mecánica. Por ejemplo, cuando se hable de perímetro sea en centímetros o si es de área de centímetros cuadrados, sin lograr ahondar en el significado concreto de sí.

De los resultados obtenidos de la investigación, se puede concluir que las nociones que tienen los estudiantes de la medida, como una magnitud, no son las mejores, ya que es común solo observar la medida y no ella como una magnitud. Esto se puede señalar a partir de que los modelos mentales que crean los alumnos respecto de las magnitudes (longitud, superficie, capacidad) no son lo suficientemente potentes en un principio. Sin embargo, con la ayuda de la interacción con el entorno social, ellos van mejorando sus estructuras mentales. Por lo mismo, se puede decir que ya en tercero medio una gran cantidad de alumnos si puede trabajar la medida como magnitud y el modelo mental que tienen sobre esta noción es mucho más estructurado que el que tenían en séptimo u octavo básico, ya que con el paso de los años los estudiantes logran ir incorporando una mayor cantidad de elementos a sus estructuras mentales, lo que permite que ellas sean más certeras en la representación del objeto que se desea expresar.

RECOMENDACIONES

1. **Algunos aspectos para considerar en la enseñanza de la medida como magnitud.**

Luego de haber realizado la investigación, se pueden señalar ciertos aspectos que permiten realizar una propuesta para la enseñanza de la medida como magnitud.

Para que los alumnos puedan crear sus modelos mentales, en donde la medida sea vista como una magnitud, deben recibir por parte de los docentes conceptos claros, concretos y esenciales. Esto permite que los alumnos capten las ideas centrales y directas de la magnitud que desean representar en sus mentes.

No se puede dejar de mencionar que los modelos mentales que se elaboran los alumnos están estrechamente ligados a sus intereses. Por lo mismo, los modelos mentales pueden ir variando entre los distintos alumnos. Para que esa variación no sea demasiado significativa es que el docente tiene que ser certero al momento de escoger la estrategia que le permita lograr captar la atención del alumno.

Para una mejor construcción de los modelos mentales por parte de los alumnos, es recomendable que el docente exprese los conceptos que desea abordar con una fuerte base en la explicación de sus características y aspectos fundamentales, promoviendo un cimiento en la estructura mental del alumno, que le permitirá asimilar de mejor manera la aplicación de dicho concepto en otras circunstancias.

2. **Lineamientos para la continuación de futuras investigaciones.**

El grupo de investigación sugiere tres lineamientos que permiten la continuación de este estudio. El primero de ellos enfocado a la creación de una propuesta concreta de situaciones didácticas, en donde se promueva la enseñanza de la medida como una magnitud.

El segundo lineamiento, un poco más ambicioso, tiene relación con una propuesta de enseñanza que pueda intervenir los programas de estudio del ministerio de Educación Chilenos. Donde, desde séptimo básico hasta cuarto medio, se contemple como eje transversal el uso de la medida como una magnitud.

Como tercero y último lineamiento, es que un profesor de educación matemática realizara un estudio de caso, tomando como base esta investigación, para así lograr destacar cuales serían las mejores estrategias didácticas que permitirán un aprendizaje seguro de la medida como una magnitud.

BIBLIOGRAFÍA.

(s.f.). Recuperado el 12 de octubre de 2011, de Real Academia Española: www.rae.es

Álvarez, D. (2010). Concepto de área, Historia del área. En D. Álvarez, *Didáctica de las Matemáticas: Una experiencia pedagógica* (pág. 56). Elizcom.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, & L. Moreno, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* (págs. 33 - 61). Bogotá: Iberoaméricana.

Brousseau, G. (1991-92). En *El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM* (págs. 65-87). Paris.

Chamorro, M. C. (2001). Las Dificultades en la Enseñanza - Aprendizaje de las Magnitudes en Educación primaria E.S.O. En M. C. Chamorro, *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas.* (págs. 79 - 117). Madrid: Secretaría General Técnica.

Chamorro, M. C. (2001). Las dificultades en la enseñanza aprendizaje de las magnitudes en educación primaria y E.S.O. En *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas* (págs. 79 - 122). España: Ministerio de Educación.

Curtí, M. d. (3 de Junio de 2005). Dificultades en la enseñanza de la medida. *Revista de Primaria* .

De Faria Campos, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática , 1* (2), 1- 9.

García Castro, L. I., & Osorio Cárdenas, A. M. (2008). Modelo Mentales Sobre El Concepto de Medida. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos , 4* (2), 135 - 150.

Godino Juan D. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros.* Granada.

Greca, I., & Moreira, M. (1998). Modelos Mentales, Modelos Conceptuales y Modelización. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências , 15* (2), 107 - 120.

Hernández Sampieri, R. (1991). Capítulo cuatro. Definición del tipo de investigación a realizar: Básicamente exploratoria, descriptiva, correlacional o explicativa. En H. S. Roberto, *Metodología de la Investigación* (págs. 69-77). México: McGraw- Hill.

Johnson - Laird, P. (1983). Towards a Cognitive Science of Language, Inference, and Consciousness. En *Mental Models* (págs. 446 - 447). Massachusetts: Harvard University Press.

Ledanois, J.-M. (1996). Sistemas de Unidades. En J.-M. Ledanois, *Magnitudes, Dimensiones y Conversión de Unidades* (pág. 7). Equinoccio.

Moreira, M., Greca, I., & Rodriguez, P. (2002). Modelos Mentales y Modelos Conceptuales en la Enseñanza & Aprendizaje de las Ciencias. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências , 2* (3), 37 - 57.

Pozo, J. (1997). *Teorías Cognitivas del Aprendizaje.* Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology , 7* (17), 499-536.

Unidad de curriculum, UCE (2010). Mapa de progreso del apredinzaje, Geometria, 3-4.

Anexos

ANEXO 1

PRUEBA 7º BÁSICO

Nombre:________________________ Curso:__________. Fecha: ______

Instrucciones:

- **El tiempo estipulado será de 45 min.**
- **El desarrollo de cada pregunta, cuando lo requiera, debe ser escrito en la hoja.**
- **Una vez comenzada la prueba, solo se responderán preguntas de redacción.**
- **Deberás utilizar lápiz grafito para el desarrollo y para señalar la alternativa correcta.**

1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

____

____

____

____

2.- Juan desea saber cuánto alambre, aproximadamente, necesita para cercar el terreno de su casa, para ello dispone de pocas herramientas, ayúdale a decidir la mejor:

I.- una cuerda de 10 metros.
II.- una regla de 100 centímetros.
III.- una huincha de 5 metros.

A) con la cuerda de 10m o la regla de 100cm.
B) con la regla de 100cm o la huincha de 5m.
C) con la huincha de 5m o con la cuerda de 10m.
D) ninguna de las herramientas que tiene le ayuda.

3.- Astrid necesita calcular la altura de una mesa, ¿Cuál de los siguientes objetos le sería más útil para medirla?

I.-una cuarta II.- un paso III.- un clip IV.- Una huincha

A) I y II
B) II y III
C) II y IV
D) I y IV

4.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

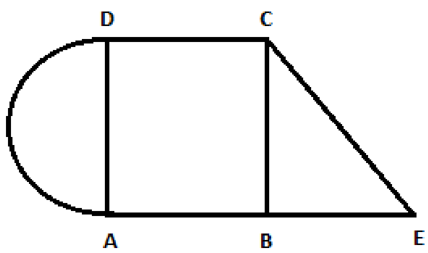
5.- Cuando se menciona $20m^3$.Se están refiriendo a:

A) La capacidad de un determinado objeto.
B) El perímetro de una figura.
C) La superficie de un cuerpo.
D) La cantidad de material que se ocupe para armar un objeto.

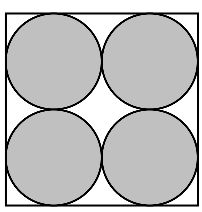
6.- La pirámide de Keops, es la mayor pirámide construida en Egipto, tiene base cuadrada, cuyos lados miden 230m, su altura 146m. Si esta pirámide fue construida con cubos de 2m de lado. ¿Cuántos cubos se utilizaron para la construcción de la pirámide?

7.- Calcula el perímetro de la siguiente figura compuesta. Donde ABCD es un cuadrado, AD es el diámetro de una semicircunferencia de radio 2cm y BE = 3cm, utiliza π=3.

A) $22cm^2$
B) 22cm
C) $28cm^2$
D) 28cm



8.-Si el área de los platos que están en la bandeja cuadrada que se presenta en el dibujo es de 314 cm^2 , señale ¿cómo podríamos saber la longitud de los lados de la bandeja?



9.- Relaciona cada enunciado anteponiendo la letra que corresponda,

L=longitud; C=capacidad; S=superficie

____la cantidad de una cinta que se necesita para el borde de un mantel.
____la cantidad de agua que contiene una piscina.
____la medida del rayo de la rueda de una bicicleta.
____el papel necesario para envolver una caja.
____la cantidad de helado que contiene un barquillo.
____la cantidad de cartón para construir una maqueta.

ANEXO 2

PRUEBA 8º BÁSICO

Nombre:_________________________ Curso:__________. Fecha:____________.

Instrucciones:

- **El tiempo estipulado será de 45 min.**
- **El desarrollo de cada pregunta, cuando lo requiera, debe ser escrito en la hoja.**
- **Una vez comenzada la prueba, solo se responderán preguntas de redacción.**
- **Deberás utilizar lápiz grafito para el desarrollo y para señalar la alternativa correcta.**

1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

____

____

____

2.- Al calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 6 cm. La unidad de medida de tu respuesta será:

I.- cm II.- cm^2 III.- cm^3

A) solo I
B) solo II
C) solo III
D) I y II

3.- Juan desea saber cuánto alambre, aproximadamente, necesita para cercar el terreno de su casa, para ello dispone de pocas herramientas, ayúdale a decidir la mejor

I.- una cuerda de 10 metros.
II.- una regla de 100 centímetros.
III.- una huincha de 5 metros.

A) con la cuerda de 10m o la regla de 100cm.
B) con la regla de 100cm o la huincha de 5m.
C) con la huincha de 5m o con la cuerda de 10m.
D) ninguna de las herramientas que tiene le ayuda.

4.- El área de un cuadrado es 169 cm^2. Al calcular el perímetro de ese cuadrado quedaría:

A) 26cm^2.
B) 52cm.
C) 52cm^2
D) 26cm.

5.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

____

____

____

____

6.- Cuando mides la capacidad de un cono. Lo que calculas es:

A) la cantidad de material que se utilizó para construir el cono.
B) la cantidad de líquido que contiene el cono.
C) la superficie que tiene el cono.
D) La altura del cono

7.- Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.

A) 500 baldosas.
B) 30 baldosas.
C) 300 baldosas
D) 50 baldosas

8- Cuando se menciona 20m^3. Se están refiriendo a:

A) La capacidad de un determinado objeto.
B) El perímetro de una figura.
C) La superficie de un cuerpo.
D) La cantidad de material que se ocupe para armar un objeto.

9.-Un estudiante desea pintar las paredes de su pieza que tiene las siguientes dimensiones: 2,2 m de alto, 3 de ancho y 3 de largo, con una ventana de 2 m^2. Si un litro de pintura rinde 8m^2. ¿Cuántos litros de pintura necesitará?

A) 2,23 litros
B) 2,73 litros
C) 3,05 litros
D) 3.55 litros

10.- Relaciona cada enunciado anteponiendo la letra que corresponda,

L=longitud; C=capacidad; S=superficie

____la cantidad de una cinta que se necesita para el borde de un mantel.
____la cantidad de agua que contiene una piscina.
____la medida del rayo de la rueda de una bicicleta.
____el papel necesario para envolver una caja.
____la cantidad de helado que contiene un barquillo.
____la cantidad de cartón para construir una maqueta.

ANEXO 3

PRUEBA 3º MEDIO

Nombre:_______________________Curso:__________Fecha:___________

Instrucciones:

- **El tiempo estipulado será de 45 min.**
- **El desarrollo de cada pregunta, cuando lo requiera, debe ser escrito en la hoja.**
- **No se aceptarán preguntas una vez comenzada la prueba.**
- **Deberás utilizar lápiz grafito para el desarrollo y para señalar la alternativa correcta.**

1.- Cuando te hablan de un kilómetro, metros, centímetros y milímetros. ¿Qué entiendes?

____

____

____

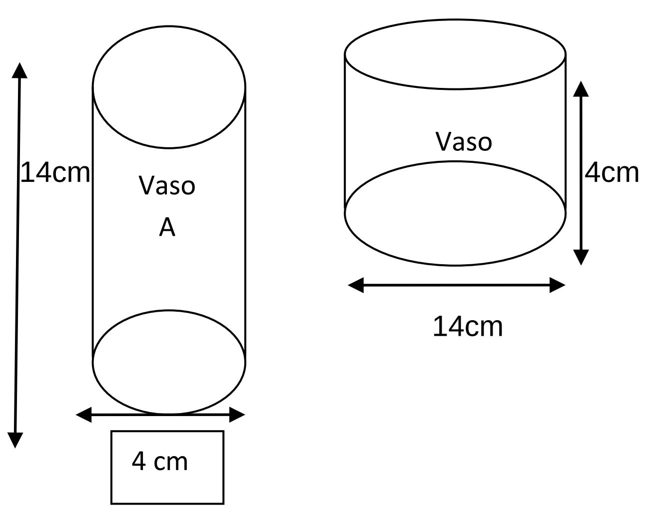
____

2.- Al calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 6 cm. La unidad de medida de tu respuesta será expresada en:

a. cm   II. cm^2 III. cm^3

A) solo I
B) solo II
C) solo III
D) I y II
E) I, II y III.

3.- Tengo mucha sed, necesito elegir un vaso. Ayúdame a decidir, ¿Cuál es el vaso con el que puedo tomar mayor cantidad de agua de una vez? (π = 3)



Vaso A, ¿por qué?____

Vaso B, ¿por qué?____

Vaso A = vaso B____

4.- Si el área de un cuadrado es 169 cm^2. El perímetro de ese mismo cuadrado quedaría:

A) $26cm^2$
B) 52cm
C) $52cm^2$
D) 26cm.
E) 169cm.

5.- ¿Cómo puedo medir el perímetro de una rueda si no tengo la medida del radio? Indica algún procedimiento

____

____

____

6.- Cuando mides la capacidad de un cono. Lo que calculas es:

A) la cantidad de material que se utilizó para construir el cono.
B) la cantidad de líquido que contiene el cono.
C) la superficie que tiene el cono.
D) la altura del cono
E) el diámetro de su base.

7.- Calcula el número de baldosas cuadradas, que hay en un salón rectangular con 6m de largo y 4,5m de ancho, si cada baldosa mide 30cm de lado.

A) 500 baldosas.
B) 30 baldosas.
C) 300 baldosas
D) 50 baldosas
E) Ninguna de las anteriores.

8- Cuando se menciona $20m^3$.Se están refiriendo a:

A) La capacidad de un determinado objeto.
B) El perímetro de una figura.
C) La superficie de un cuerpo.
D) La cantidad de material que se ocupe para armar un objeto.
E) Ninguna de las anteriores.

9.- La pirámide de Keops, es la mayor pirámide construida en Egipto, tiene base cuadrada, cuyos lados miden 230m, su altura 146m. Si esta pirámide fue construida con cubos de 2m de lado. ¿Cuántos cubos se utilizaron para la construcción de la pirámide?

10.- Relaciona cada enunciado anteponiendo la letra que corresponda,

L=longitud; C=capacidad; S=superficie

____la cantidad de una cinta que se necesita para el borde de un mantel.
____la cantidad de agua que contiene una piscina.
____la medida del rayo de la rueda de una bicicleta.
____el papel necesario para envolver una caja.
____la cantidad de helado que contiene un barquillo.
____la cantidad de cartón para construir una maqueta.

ANEXO 4

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

Años de docencia: ________________Niveles a los que imparte clases: ________________

1.- Cuando Ud. enseña los siguientes conceptos, con qué idea los asocia en el aula.

a) Número:

b) Medida:

c) Magnitud:

d) Superficie:

e) Capacidad:

f) Longitud:

2.- ¿Qué elementos considera importantes de destacar previo al momento de enseñar Volumen de prismas rectos en 7° básico? ¿Qué ejemplificaciones o situaciones utiliza dentro en el aula matemática para abordarlos?

Conocimientos Previos	*Ejemplo o Situación*

3.- ¿Qué elementos considera importantes de destacar previo al momento de enseñar Volumen de conos y cilindros en 8° básico?. ¿Qué ejemplificaciones o situaciones utiliza en el aula matemática para abordarlos?

Conocimientos Previos	*Ejemplo o Situación*

4.- ¿Cuáles son los principales obstáculos que se presentan al momento de enseñar?

Volumen de prismas rectos	*Área y volumen de cono y cilindro*

5.- Sobre medida de magnitudes, ¿Cómo cree usted que es la propuesta que entrega el Ministerio de Educación en los Programas de Estudio para su enseñanza?

____
____
____
____

6.- Cuando requiere la conversión de unidades de medida dentro del aula, ¿cómo lo aborda?

____
____
____
____

7.- ¿Identifica Usted que los contenidos relativos a magnitud y medida se utilizan en otras asignaturas? Si su respuesta es afirmativa, por favor indique cuales.

____
____
____
____

ANEXO 5

Solicitud de validación de instrumentos a través de Juicio de Experto(a).

La validación del instrumento elaborado por las alumnas de tesis, se realiza con el propósito de asegurar que su estructura y contenido, permitan recopilar la información requerida para esta investigación.

El presente seminario es para optar al Grado de: Licenciado en Educación, Titulo Profesional: Pedagogía en Educación Matemáticas e Informática Educativa, su titulo es: "La medida de magnitudes: ¿una cantidad estandarizada o un concepto a ser construido en el aula matemática? "

La metodología es la Ingeniería Didáctica a ser aplicada a los profesores del Colegio Alicante del Rosal, Ingeniero Eduardo Domínguez #920; Fono: (2) 8107638

La nomina de alumnas que optan a obtener su título profesional es:

1.- BALBOA REYES , PAMELA CRISTINA
2.- NOTARO CACERES , DANIELLA ALESSANDRA
3.- CISTERNAS SOTO, DANIELA

Resumen:

La medición es una de las nociones que la ciencia ha tomado del sentido común. La presente investigación aborda la noción del significado de la medida como magnitud, utilizada con frecuencia de modo informal en los contenidos matemáticos y ciencias, como un tema central y controvertido en la matemática otras ciencias y tecnologías interesadas en este concepto. El análisis de esta noción desde un punto de vista didáctico puede ayudar a comprender las relaciones entre las distintas formulaciones y formas de enseñanza para permitir estudiar bajo una nueva perspectiva las cuestiones relacionadas con la medición, particularmente las referidas a la enseñanza y utilización del concepto de medida. En este trabajo se aborda el mencionado análisis y se presenta una visión pragmática del significado del objeto medida de magnitudes, en la que se propone para el mismo un análisis institucional (aula) como del profesional docente (profesor de matemática). Se estudian, asimismo, las conexiones entre la noción de significado propuesto y la concepción y relación al objeto en estudio. Esta investigación se plantea como una Ingeniería Didáctica, dentro del enfoque cualitativo, tomando en cuenta conceptos ligados con la transversalidad del concepto de medida en las asignaturas de la Enseñanza Básica y Media .

Se pretende dar cuenta de la importancia del concepto de medida y de su utilización en la matemática como en otras ramas de la ciencia.

Dentro de esta investigación, se han formulado preguntas, objetivos y sistema de supuestos, los cuales deberán ser validados y justificados a partir de registros y aplicación de instrumentos elaborados para este efecto.

Objetivo General

Conocer qué nociones tienen los alumnos del concepto de medida como magnitud, a través de los modelos mentales que se elaboran sobre longitud, superficie y capacidad, los alumnos de séptimo básico, octavo básico y tercero medio

Pregunta de Investigación

¿Cómo son los modelos mentales que los alumnos manifiestan sobre el concepto de la medida como magnitud, a través de la resolución de problemas que involucren longitud, superficie y capacidad en estudiantes de séptimo básico, octavo básico y tercero medio?

Objetivos Específicos

a. Caracterizar qué noción respecto longitud, superficie y capacidad se estructuran los alumnos, pertenecientes a séptimo, octavo básico y tercero medio.

b. Verificar si los estudiantes de séptimo, octavo básico y tercero medio, trabajan la medida como magnitud, es decir, si no manifiestan disociación entre el número y su unidad medida.

c. Conocer la propuesta del ministerio de educación sobre la enseñanza de magnitudes, para relacionarla con los modelos mentales que los alumnos poseen sobre longitud, superficie y capacidad.

d. Estudiar como entienden los alumnos las magnitudes y sus unidades de medida, en situaciones de la vida cotidiana.

Supuestos

Al ser la medida de magnitudes un tema tratado tanto en la Escuela Básica como en la Enseñanza Media, hemos considerado que un estudio profundo y sistemático de su transposición didáctica, permitiría poner en evidencia fenómenos de su enseñanza y aprendizaje, identificando algunos obstáculos didácticos, que no hemos observado que se aborden en algún otro estudio.

Observaciones:

La forma de recopilación de información para el posterior análisis de datos, será a partir de un cuestionario aplicado en profesores de matemática de enseñanza básica y media en ejercicio del Colegio Alicante del Rosal, Ingeniero Eduardo Domínguez #920; Fono: (2) 8107638. Además, de una prueba aplicada a alumnos pertenecientes a séptimo básico, octavo básico y tercero medio. Para luego transcribirlas y analizarlas de acuerdo a las dimensiones propuestas en los objetivos de nuestra investigación.
Les saludan atentamente y agradecen su colaboración:

DANIELA C. CISTERNAS SOTO DANIELLA A. NOTARO CACERES PAMELA C. BALBOA REYES

Datos del Experto(a):

Nombre……………………………………………………………………………………..

Título profesional:………………………………………………………………………

Grado Académico:……………………………………………………………………………….

Cargo:………………………………………………………………………………………

Le rogaríamos consignar si los instrumentos revisados para validar, se ajustan a alguna de las siguientes categorías:

- **Muy bien.**
- **Bien.**
- **Suficiente.**
- **Insuficiente**

Observaciones:

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………….……….

……………………………………………………………………………………….……….

Muchas gracias por su cooperación.

…………………………………………………………….

Nombre y Firma.

Santiago, …../……../……..

ANEXO 6.1

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

Años de docencia: 4 Niveles a los que imparte clases: NB4, NB5, NB6

1.- Cuando Ud. enseña los siguientes conceptos, con qué idea los asocia en el aula.

a) Numero:

Problemas vida cotidiana, ej: comercio, sacar cuentas de la casa, etc.

b) Medida:

a Unidades de medida, resolución de problemas relacionados con distancia entre ciudades, lectura e interpretación de planos y mapas, etc.

c) Magnitud:

Se asocia con el tamaño.

d) Superficie:

Se asocia en el cálculo del área, en la vida cotidiana, relacionado con la cerámica que se necesita para colocar en una pieza, etc.

e) Capacidad:

Volumen, asociado a la capacidad de litros de agua que se alcanza a llenar a una botella, capacidad de llenar una caja con mercadería, etc.

f) Longitud:

Se asocia con el perímetro, ej. en la circunsferencia, enfocada a ruedas, relojes, etc.

2.- ¿Qué elementos considera importantes de destacar, previo al momento de enseñar volumen de prismas rectos en 7° básico?. ¿Qué ejemplificaciones o situaciones utiliza dentro en el aula matemática para abordarlos?.

CONOCIMIENTOS PREVIOS	EJEMPLO O SITUACIÓN
- Identificar cuerpos geométricos y diferenciarlos. -	- Primero identifican los prismas rectos mirando elementos en el aula. - Utilización de cubos didácticos, arman prismas rectos. - Diferencian perímetro y área. - Identifican el volumen contando los cubos que formaron el prisma.

3.- ¿Qué elementos considera importantes de destacar previo al momento de enseñar volumen de cono y cilindro en 8º básico?. ¿Qué ejemplificaciones o situaciones utiliza en el aula matemática para abordarlos?

CONOCIMIENTOS PREVIOS	EJEMPLO O SITUACIÓN
- Identificar las redes del cono y cilindro, - conocer cuerpos geométricos y figuras geométricas. - Recuerdan como se calcula el área y el perímetro de lo anterior.	- De las redes de los cuerpos geométricos, identifican las figuras que las componen y una vez identificadas recuerdan como calcular el área de estos cuerpos. - nombran objetos de la vida cotidiana que tengan la forma de un cono y un cilindro. - Identifican formulas para calcular el volumen, teniendo presente el concepto de capacidad.

4.- ¿Cuáles son los principales obstáculos que se presentan al momento de enseñar?

VOLUMEN DE PRISMAS RECTOS	ÁREA Y VOLUMEN DE CONO Y CILINDRO
- En general los niños les costó mucho geometría en general, la utilización de formulas costó que las entendieran, pero aún más el porqué de ellas, con material concreto logran entender, pero sin el, por ej. en una prueba le es muy dificultoso.	- La utilización de formulas costó mucho que entendieran el porque, además existe un rechazo contra los contenidos de este tipo, según los niños comentaban que no les gustaba porque ellos en la realidad no lo ocupaban tanto como los otros contenidos.

5.- Sobre medida de magnitudes, ¿cómo cree usted que es la propuesta que entrega el Ministerio de Educación en los Programas de Estudio para su enseñanza?

Es demasiado resumido y encontré que propone pasar inmediatamente los contenidos con una retroalimentación de poco tiempo, pero en la realidad se necesita de mucho repaso previo a los contenidos vistos en el nivel.

6.- Cuando requiere la conversión de unidades de medida dentro del aula, ¿cómo lo aborda?

Siempre utilizando problemas de la vida cotidiana, señalando que es importante identificar las diferentes formas de reconocer las unidades de medidas.

7.- ¿Identifica Usted el uso de contenidos relativos a magnitud y medida se utilizan en otras asignaturas? Si su respuesta es afirmativa, por favor indique cuales.

Si, se ve en planos y mapas en Historia y Ciencias Sociales.

ANEXO 6.2

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

Años de docencia: 7 Niveles a los que imparte clases: 8°, II°, III° y IV°

1.- Cuando Ud. enseña los siguientes conceptos, con qué idea los asocia en el aula.

a) Numero:

Con la pre-historia y la necesidad del ser humano ~~para~~ de contar para poder sobrevivir.

b) Medida:

Con la necesidad del ser humano de tomar medidas de su territorio o de algo más simple como caminar o hacer la lechu a los + pequeños.

c) Magnitud:

Vector, el sentido de una calle, o la cantidad de pesos

d) Superficie:

Terreno, plantación, parcela.

e) Capacidad:

Líquido, una botella de coca cola, y arena en un recipiente.

f) Longitud:

Distancia (entre el colegio y la playa), y una hormiga

2.- ¿Qué elementos considera importantes de destacar, previo al momento de enseñar volumen de prismas rectos en 7° básico?. ¿Qué ejemplificaciones o situaciones utiliza dentro en el aula matemática para abordarlos?.

CONOCIMIENTOS PREVIOS	EJEMPLO O SITUACIÓN
El área de figuras planas,	Un libro: Pedirles que saquen el área de una hoja y luegos preguntarles ¿cómo puedo sacar el volumen del libro?

3.- ¿Qué elementos considera importantes de destacar previo al momento de enseñar volumen de cono y cilindro en 8º básico?. ¿Qué ejemplificaciones o situaciones utiliza en el aula matemática para abordarlos?

CONOCIMIENTOS PREVIOS	EJEMPLO O SITUACIÓN
Área de figuras planas y el Perímetro de figuras planas.	Un rollo de confort, lo corto y muestro un rectángulo.

4.- ¿Cuáles son los principales obstáculos que se presentan al momento de enseñar?

VOLUMEN DE PRISMAS RECTOS	ÁREA Y VOLUMEN DE CONO Y CILINDRO
Que se enseña en la pizarra en 2d y esta es un cuerpo en 3d.	Que se enseña en la pizarra o en el libro en 2d y esta es en 3d.

5.- Sobre medida de magnitudes, ¿cómo cree usted que es la propuesta que entrega el Ministerio de Educación en los Programas de Estudio para su enseñanza?

Buena, pero puede ser mejorable. Lo malo es que no se utiliza.

6.- Cuando requiere la conversión de unidades de medida dentro del aula, ¿cómo lo aborda?

Con equivalencias

7.- ¿Identifica Usted el uso de contenidos relativos a magnitud y medida se utilizan en otras asignaturas? Si su respuesta es afirmativa, por favor indique cuales.

Física, Química, Artes, Historia, Biología, Lenguaje (en menor medida), Tecnología