Escuela de Educ. en Humanidades y Ciencias
Departamento de Educación Matemática

EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN LA ENSEÑANZA MEDIA Y SUPERIOR, ACEPTACIÓN DE SOLUCIONES COMPLEJAS: UN ESTUDIO DE CASOS.

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTE:
VARGAS BUSTOS, EDUARDO ALEJANDRO

PROFESOR GUÍA:
FRANCISCO JAVIER GÓMEZ FERNÁNDEZ

SANTIAGO, CHILE
AÑO 2012

"Las Matemáticas pueden ser definidas como aquel tema en el cual ni sabemos nunca lo que decimos ni si lo que decimos es verdadero."

Bertrand Russell (1872-1970)

AGRADECIMIENTOS

Gracias a todas las personas que han contribuido en el desarrollo de este seminario de grado. A los docentes y estudiantes que han ayudado para el desarrollo de la investigación. A mis amigos y amigas que estuvieron presentes dentro de este proceso largo y extenso, apoyando incondicionalmente, por sus ánimos, oraciones y buenos deseos. Al profesor Francisco Gómez por sus conocimientos entregados. A mi familia que han sabido comprender la dedicación que he debido tener para el desarrollo de esta investigación, sabiendo el significado que éste posee para mi futuro profesional. Agradezco también a esa persona que me quiere y ama, por su respeto, comprensión y apoyo incondicional. Sin todo esto, sin toda la ayuda y sin todo lo vivido en el presente año, esta tesis no hubiese sido realizada ni hecha realidad. Por todo lo anterior, gracias.

ÍNDICE

RESUMEN

Esta investigación busca, a través del estudio de casos, determinar el nivel de conocimientos conceptuales y procedimentales que debiesen tener los estudiantes que cursan estudios universitarios y de Educación Media, con respecto al Sistema de Números Complejos, entendiéndolos como un campo numérico con propiedades y operaciones distintas a los otros sistemas previos, considerando que al aplicar estrategias se pueden determinar las raíces complejas de ecuaciones cuadradas, cúbicas y cuarticas (estas últimas no vistas en la enseñanza media). Además se busca ver cuál es la mirada de los docentes en práctica ante el concepto de los números complejos, analizar el conocimiento que tengan de éstos y si han desarrollado la unidad.

Determinar el despliegue que el Ministerio de Educación plantea en sus planes de estudio y cómo trata este contenido de los números complejos, formando parte del eje temático de Números que se desarrolla desde séptimo básico con la reforma educativa que se comenzó a implementar el año 2010.

Se plantea una Encuesta tipo cuestionario con respuestas abiertas, con un total de seis preguntas para estudiantes universitarios y de enseñanza media, y siete preguntas para docentes de establecimientos educativos. Esta séptima pregunta es incluida para los docentes, con el fin de determinar si ha tratado este contenido en la enseñanza media e identifica la importancia que le atribuye a este mismo.

Para finalizar este estudio, en base al análisis de los datos obtenidos se busca definir si los estudiantes de Pedagogía en Matemática están preparados para enfrentar los diversos obstáculos o errores conceptuales que presentan los estudiantes de enseñanza media, para así generar situaciones didácticas o elementos para la modelación del contenido de los números complejos, para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes.

Palabras Clave: Números Complejos, Matematización, Fenomenología de Freudenthal, Matemática Realista

<u>ABSTRACT</u>

This research seeks, through case study, determine the level of conceptual and procedural knowledge slated to have students pursuing undergraduate and Media Education, regarding the complex number system, understanding them as a numeric field with properties and operations different from other previous systems, considering that the strategies can be applied to determine the complex roots of quadratic equations, cubic and quartic (the latter not seen in high school). It also seeks to see what the eyes of teachers to implement the concept of complex numbers, analyze their knowledge of these and if they have developed the unit.

Determine deployment raises the Ministry of Education in their curricula and how this content is complex numbers, part numbers thematic axis that runs from seventh grade with educational reform began to be implemented by 2010.

We propose a survey type questionnaire with open-ended, with a total of six questions for college students and middle schools, and seven questions for teachers of educational institutions. The seventh question is included for teachers, in order to determine if you have tried this in high school content and identifies the importance attributed to the same.

To complete this study, based on analysis of data obtained seeks to define whether students of Pedagogy in Mathematics are prepared to face the various obstacles or misconceptions presented by middle school students, in order to generate teaching situations or elements for content modeling of complex numbers, to develop students' mathematical thinking.

<u>Keywords:</u> Complex Number System, Mathematization, Phenomenology of Freudenthal, Realistic Mathematics.

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia, los conocimientos matemáticos han estado sometidos a diversos cambios, ya que por ser ésta una ciencia, requiere de una constante comprobación. Es por esto que a lo largo del tiempo, han ido emergiendo nuevas y diversas teorías e hipótesis, que han permitido ir mejorando todas aquellas propuestas anteriores.

Estos diversos cambios, a los cuales se han visto sometidos los diferentes conceptos matemáticos, se ha producido por causa de las diferentes problemáticas que se presentan a diario, a lo largo del desarrollo histórico que van sufriendo las diferentes sociedades, las que buscan respuestas rápidas e inmediatas. Es por esto, que el “lenguaje matemático” es utilizado de forma global y cotidiana.

Todas las personas son capaces de aprender y generalmente, en el área de las matemáticas, existe una negación previa al concepto matemático. Sin embargo, este conocimiento, a veces sin saber, es el más utilizado en el diario vivir de las diferentes personas. Es por esto, que como docentes, debemos generar confianza en los estudiantes, para que ellos se sientan capaces de aprender e interiorizar los conocimientos matemáticos.

Es usual, en la actividad docente, que estudiantes afirmen que las matemáticas son muy complicadas y no saben para que realmente les sirvan. Nunca se va a terminar de aprender matemáticas y una de las formas de poder responder a estos estudiantes es contextualizando el quehacer pedagógico en sus actividades diarias, ya que como docentes entregamos herramientas para que los estudiantes se puedan enfrentar cotidianamente a los problemas que les van surgiendo a diario.

El Ministerio de Educación, de la República da Chile, ha ido implementando un ajuste curricular, desde el año 2010, de forma paulatina, en el cual lo que busca es cumplir con los diferentes objetivos fundamentales y trasversales, determinados para todos los niveles educativos, con el fin que el conocimiento obtenido en años anteriores, sea necesario para desarrollar sus capacidades y enfrentar nuevos desafíos. Dentro de estos nuevos desafíos, se encuentra para el nivel de tercer año medio, en el eje temático de números y operaciones, la unidad de los números complejos, propuesto para su implementación a partir del año 2013.

Es por todo lo anterior expuesto, que se considera que los contenidos entregados en la formación como docentes, se necesita de una matemática avanzada, para poder ser capaces, de cubrir a cabalidad con las nuevas propuestas del Ministerio de Educación.

Desde esta perspectiva, se plantea el interés por determinar un análisis de los conceptos que poseen, en cada caso, los futuros docentes, estudiantes de enseñanza media y profesores en actividad, sobre los números complejos. Con esto se busca determinar si se ha matematizado el concepto para la puesta en práctica de los contenidos propuestos.

En los siguientes capítulos se describirá paso a paso, todo lo que fue considerado para realizar esta investigación.

En una primera instancia, en el "Capitulo I", se dará a conocer cuál es la importancia, el por qué de esta investigación, cuáles fueron los motivos y hechos observados que inspiraron a realizar esta investigación y cuáles son las posibles limitaciones que se podrían hacer presente a lo largo del proceso investigativo.

En el "Capitulo II", es de gran importancia lo que se quiere exponer, ya que presenta aquellas hipótesis que se lograron plantear en base a la problemática observada y mencionada en el capitulo anterior, y es en base a esta hipótesis es que se dan a conocer diversas conjeturas que fueron surgiendo en base a las diversas respuestas que puedan ir generando los diferentes sujetos de estudio, los cuales, como ya se mencionaba anteriormente, son los docentes, futuros docentes y estudiantes de enseñanza media.

En el "Capítulo III" se presentan los objetos que tiene esta investigación, en palabras más simples, qué es lo que busca con esta investigación. Se presenta de manera más resumida los pasos que se pretenden seguir para realizar esta investigación, mediante los objetivos específicos.

En el "Capitulo IV" se presenta toda la argumentación teórica, en la cual se ha respaldado esta investigación, en base a las palabras claves que se han hecho presente a lo largo de esta. Principalmente se argumenta en un estudio histórico sobre los números complejos, cuál ha sido su evolución, y cómo se ha desarrollado matemáticamente todo lo que corresponde a los números complejos. A su vez, se menciona un pensamiento didáctico muy importante en el cual se busca respaldar, los diferentes supuestos y conjeturas levantadas en esta investigación, este pensamiento es denominado la “Fenomenología de Freudenthal”. Respaldando esta investigación con el apoyo de otras investigaciones y trabajos que tienen directa relación con los propósitos mencionados en esta investigación.

A continuación de toda esta argumentación teórica, se presenta en el “Capitulo V”, la metodología que se ha seguido para llevar a cabo esta investigación, cuáles han sido los instrumentos que se ha utilizados para el posterior análisis y cuáles han sido los sujetos de estudio que se han escogido para implementar estos instrumentos.

En los dos siguientes capítulos, VI y VII, se presenta el cómo se llevo a cabo la recogida de información, cuáles fueron los diferentes procesos que se tuvieron que llevar a cabo para poder implementar los instrumentos de recogida de información, con esto, poder realizar los análisis pertinentes, en base a los hallazgos e información recopilada.

Para finalizar, en el último capítulo de esta investigación, se presentan las diversas conclusiones que fueron generadas en base a la recopilación de información que se genero mediante las diferentes encuestas que fueron aplicadas.

CAPÍTULO I

Elementos del planteamiento del problema.

1.1 Antecedentes teóricos y/o empíricos observados.

A lo largo de la historia, el investigar la enseñanza de la matemática ha sido un tema muy concurrido, logrando grandes avances y llegando a encontrar nuevas metodologías de enseñanza. En Educación, el proceso de enseñanza-aprendizaje es fundamental para la comprensión de sucesos que afectan a los actores involucrados en el sistema educativo como lo son estudiantes, docentes, investigadores, entre otros.

El sistema de los números complejos es un tema bastante dejado de lado en la educación chilena, donde a lo largo del tiempo lo retiran o incluyen en los contenidos mínimos de la Educación Matemática en enseñanza Media. La historia de los números complejos ha ido evolucionando a medida que se han ido descubriendo y respondiendo inquietudes con respecto, en primera instancia, a las raíces de números negativos.

La familia de los números ha sido un tema bastante estudiado desde tiempos remotos, los que han acompañado a la humanidad para resolver problemas que se les van planteando o que van enfrentando y que cada vez son más realzados. Partiendo por los números Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales, Reales y Complejos, todos ellos en cierta medida acompañan a cada actividad de la humanidad y ayudan a modelar fenómenos de la vida real.

Pero esto no ha sido tan fácil para poder llegar a lo que conocemos hoy en día. Se sufrieron bastantes problemas, obstáculos y diferencias que con el tiempo se han ido respondiendo dichas interrogantes que surgían. Con esto el concepto de los números, centrado en este caso de los números complejos, se fue construyendo poco a poco, dando respuestas a interrogantes que en ese entonces para muchos no tenían sentido, pero que ahora son lógicas y que ayudan y modelan problemas que nos rodean.

Con estos antecedentes previos, se determina que es de gran importancia ver en base a un estudio de casos qué nivel de conocimientos conceptuales y procedimentales han adquirido los futuros docentes de dos universidades: la Universidad Católica Silva Henríquez y la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, estas dos en las carreras de Pedagogía en Matemática. Y los estudiantes de enseñanza media del Liceo Salesiano Camilo Ortúzar Montt, que considerando que el contenido se entrega a estudiantes de NM3, se trabaja con estudiantes de NM4 para obtener resultados que avalen este estudio.

Un análisis histórico realizado sobre los números complejos por Tomas Pardo y Bernardo Gómez en su estudio sobre “La Enseñanza y el Aprendizaje de los Números Complejos: Un estudio en el nivel universitario” resume el avance histórico de los números complejos en cuatro grandes etapas señaladas a continuación:

Algebraica: Raíces cuadradas de cantidades negativas consideradas como “raíces inútiles

Analítica: Análisis infinitesimal, cantidades consideradas imposibles, por esto se denominan imaginarias.

Geométrica: Introducción del eje Imaginario asociando $\sqrt{-1}$ como la unidad perpendicular a 1.

Formal: Formalización de la definición actual de los números complejos como pares ordenados de números reales.

En base a lo manifestado anteriormente surge la siguiente pregunta de investigación, que se centrara en los estudiantes universitarios, siendo los estudiantes de enseñanza media y docentes con años de experiencia encuestados de igual forma para complementar este estudio:

¿Los estudiantes universitarios, futuros docentes de matemáticas, reconocen las soluciones entregadas en el sistema de los números complejos como posibilidades existentes de solución a un problema, utilizando las propiedades ajustadas a este sistema y reconociéndolo como una extensión del campo numérico?

1.2 Justificación e importancia.

El propósito de esta investigación es explorar los conocimientos obtenidos del sistema de los números complejos y la aplicación de éstos por parte de los docentes al momento de enseñar este contenido matemático. Además, es importante para el estudio determinar cómo los estudiantes de Pedagogía en matemática están preparados para enfrentar la unidad temática de “Números Complejos” propuesta por el Ministerio de Educación para Tercero Medio en el eje de “Números”.

Como mencionan Alejandro Fernández Lajusticia y Luis Puig Espinosa de la *Universitat de Valéncua* en su trabajo, publicado el año 2002, “Una actividad Matemática organizada en el marco de los Modelos Teóricos Locales (MTL): Razón y Proporción en la escuela Primaria” en los MTL menciona “…*hemos de considerar también el saber matemático que aprendices y enseñantes desarrollan conjuntamente, así como el uso de los sistemas matemáticos de signos que se utilizan en el intercambio de mensajes…”* (Fernández Lajusticia & Puig Espinoza), esto es que tanto docentes, futuros docentes y estudiantes, además de estar inmersos en la actividad de Enseñanza-Aprendizaje, deben manejar el saber matemático en juego que es de gran importancia y fundamental a la hora de estar en un aula, porque como docentes debemos tener seguridad y confianza de los conocimientos adquiridos en nuestra formación y posteriores perfeccionamientos, para transmitir esa seguridad a los estudiantes y con esto poder generar metodologías que consideren el contexto de los grupos de estudiantes y el contexto de los establecimientos educativos.

Es por esto, que esta investigación busca determinar el nivel de conocimiento de la unidad de Números Complejos de los docentes con experiencia laboral, de futuros docentes y de los estudiantes de enseñanza media, centrándose principalmente en los futuros docentes, para poder determinar posibles falencias en la obtención y apropiación del conocimiento. Cómo utilizan estas herramientas que poseen para desarrollar los problemas que se les presenten, como la utilización de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos), potenciación, raíces complejas y ecuaciones con raíces complejas.

El Mapa de Progreso de Números y Operaciones considera tres dimensiones: comprensión y uso de los números, comprensión y uso de las operaciones, razonamiento matemático. Y sitúa a los números complejos en el nivel 6:

Nivel	Descripción
Nivel 6	Reconoce a los números complejos como una extensión del campo numérico y los utiliza para resolver problemas que no admiten solución en los números reales. Usa las cuatro operaciones con números complejos. Resuelve problemas utilizando un amplio repertorio de estrategias, combinando o modificando estrategias ya utilizadas, formula conjeturas que suponen generalizaciones o predicciones y argumenta la validez de los procedimientos o conjeturas.

(Bórquez Avendaño & Setz Mena, 2010)

No de menos importancia es el tipo de establecimiento seleccionado, ya que, aunque el establecimiento seleccionado para la aplicación de la encuesta, es un liceo que cumple con nuestro perfil de egreso, que pertenece a la congregación salesiana y beca a estudiantes siguiendo las aspiraciones de Don Bosco:

> "*A estos (haciendo alusión a los consagrados salesianos) les diría que el propósito de la Congregación Salesiana era la de buscar la santificación personal y continuar el trabajo en favor de los muchachos, especialmente aquellos más necesitados de instrucción y educación*" (Memorias Bibliográficas)

Por lo que el establecimiento posee una misión y visión para formar "Buenos cristianos y Honestos ciudadanos" lema que se complementa con el del establecimiento que es "Casa Grande que Acoge", que con el legado de Don Bosco busca incluir y dar oportunidad a estudiantes de escasos recursos que no tienen medios para poder pagar una educación más digna.

1.3 Definición del problema.

El problema de la investigación es establecer, en base al estudio de casos, particularizando en estudiantes universitarios, futuros docentes, un análisis de la existencia del concepto de los números complejos y la puesta en ejecución de sus conocimientos al presenciar un problema cuyas soluciones no pertenezcan al sistema de los números reales. A través de la siguiente pregunta de investigación se define el objetivo del problema a investigar:

- Pregunta de Investigación:

¿Los estudiantes universitarios, futuros docentes de matemáticas, reconocen las soluciones entregadas en el sistema de los números complejos como posibilidades existentes de solución a un problema, utilizando las propiedades ajustadas a este sistema y reconociéndolo como una extensión del campo numérico?

Como se mencionó anteriormente, esta pregunta está planteada buscando llegar a establecer un análisis concreto del estudio de casos para determinar el nivel de conocimientos conceptuales y procedimentales de estudiantes universitarios, apoyando este estudio realizando encuestas a los estudiantes de enseñanza media y docentes de matemática.

- Preguntas secundarias:

¿Los estudiantes universitarios, futuros docentes de matemática, presentan un conocimiento conceptual desarrollado de las operaciones y propiedades existentes en el sistema de los números complejos y ecuaciones polinómicas?

¿Los estudiantes universitarios, futuros docentes de matemática, aplican los conceptos del sistema de los números complejos en problemas, aceptando y considerando las soluciones pertenecientes a los números complejos?

¿Los estudiantes universitarios, futuros docentes de matemática, reconocen que las propiedades y operaciones aplicadas en el sistema de los números complejos no pueden ser utilizadas en otro campo numérico y viceversa?

¿El docente presenta conocimientos conceptuales y procedimentales del sistema de los números complejos?

¿Los estudiantes de enseñanza media desarrollan un análisis de los problemas que lo lleve a dar indicios de soluciones que sean parte de los números complejos?

Estas preguntas ayudan a complementar la Pregunta de Investigación, descomponiéndolas para determinar motivos primordiales y ayudar a responder la pregunta principal. Están centradas en el actor fundamental de esta investigación que son los futuros docentes de matemática, se enfoca en analizar el nivel de conocimiento poseído para resolver y plantarse frente a los problemas que involucren soluciones contenidas en los números complejos, aceptando la posibilidad de estas soluciones.

Las últimas dos preguntas secundarias están enfocadas en determinar un análisis posterior de las encuestas realizadas por docentes y estudiantes de enseñanza media. Para determinar el nivel de conocimiento que poseen y complementar este estudio

1.4 Limitaciones.

El problema puede ser abordado de mejor forma con más tiempo para la realización de encuestas a estudiantes de otras casas de estudio con distintas realidades sociales y/o poder tomar una muestra mayor de la población de los estudiantes de la universidad privada y la universidad tradicional.

También para realizar las encuestas a los estudiantes de enseñanza media, ya que al realizar el estudio durante el segundo semestre trae problemas, debido a que los estudiantes son de cuarto año medio y están preocupados de tener que dejar todo terminado para cerrar el ciclo educativo y rendir correctamente la Prueba de Selección Universitaria.

Por otro lado, el número de docentes encuestados debiesen ser mayores, para conocer las diferentes realidades en que se encuentran inmersos dentro de la región metropolitana y poder llegar a conclusiones mucho más específicas.

Otra limitación es el hecho que el Ministerio de Educación en la actualidad no tiene incluida la Unidad de Números Complejos, el motivo de esto es que la actualización curricular del 2009, la cual menciona que el 2012 debía haber implementado en el nivel de tercer año medio, aplazó la fecha de implementación a contar de este 2013,

"***ARTÍCULO 2º:*** *Los nuevos planes y programas de estudio que se elaboren de acuerdo a los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios señalados en el artículo precedente, deberán aplicarse gradualmente a partir del año 2010, según el siguiente calendario:*

- *Año escolar 2010: 1er. año de Educación Media, Formación General.*
- *Año escolar 2011: 2do. año de Enseñanza Media, Formación General y 3er. año de Enseñanza Media, Formación Diferenciada Técnico-Profesional de las 21 especialidades ajustadas.*
- *Año escolar 2012: 3er. año de Enseñanza Media, Formación General y 4to. año de Enseñanza Media, Formación Diferenciada Técnico-Profesional de las 21 especialidades ajustadas.*
- *Año escolar 2013: 4to. año de Enseñanza Media de Formación General."*

(Ministerio de Educación, República de Chile, 2009)

Pero, al realizar consultas en tres establecimientos educativos, los docentes que tienen a cargo el nivel de tercero medio pasan este contenido ya que son docentes que llevan años de labor y en palabras de ellos creen que es de importancia el tratar esta unidad para que los estudiantes desarrollen un pensamiento más amplio y no se queden solo con las limitaciones de los números reales.

CAPÍTULO II

Sistema de hipótesis o supuestos.

Para determinar el sistema de hipótesis o supuestos se plantea la definición de cada una de ellas para que al estipular las hipótesis o supuestos de esta investigación quede claro el lineamiento de éstas.

Las hipótesis son postulados y posibles ilustraciones de los fenómenos a estudiar que deben ser demostradas o probadas con consecuencias positivas o negativas. En la investigación, es una solución provisoria que debe ser verificada de acuerdo al análisis obtenido en el trabajo de campo, esta hipótesis tendrá un mayor o menor grado de veracidad.

Las hipótesis son de gran importancia, porque dan el rumbo a la investigación para sugerir pasos e ideas para su comprobación. Cuando esta es bien elaborada, determinando claramente una relación entre dos o más variables, se puede elaborar claramente el objetivo, un tipo de diseño, métodos y técnicas de investigación, y seleccionar recursos tanto humanos como materiales para ayudar a la finalización de la investigación en curso.

Los supuestos deben ser comprobados empíricamente, ya que este supuesto o premisa se plantea como una posibilidad verdadera de la investigación, aunque no se haya demostrado, donde trae consecuencias y conclusiones positivas o negativas. Éstas se pueden formular en tono de preguntas o afirmaciones y su validación no requiere de una estadística que la avale, ya que puede ser solo cualitativa, no cuantitativa.

Para esta investigación se plantea el siguiente sistema de hipótesis y supuestos que darán la forma a esta investigación, éste nos ayudará a estructurar concretamente el desarrollo establecido para lograr los resultados esperados.

- **Hipótesis de Investigación:** *El conocimiento conceptual y procedimental de los estudiantes de enseñanza superior de las universidades en estudio, una universidad privada y otra tradicional, presentan diferencias en el manejo del contenido del Sistema de los Números complejos, lo que afecta al llegar a interiorizar este concepto y por consecuencia, según Freudenthal, no desarrolla una matemática realista.*

Para verificar esta hipótesis por medio de un estudio y a través de encuestas de respuestas abiertas, el nivel de conocimiento sobre los Números Complejos que poseen los futuros docentes de matemática, analizando las respuestas entregadas por cada grupo de estudiantes y realizando un contraste entre las dos universidades, con esto determinar si han interiorizado el concepto. Que Según Hans Freudenthal en 1973 menciona que “el quehacer matemático es una actividad estructurada u organizadora, que desarrolla el pensamiento lógico matemático, y a la cual denomina matematización, que está al alcance de cualquier persona.”

- **Primer Supuesto:** *Los estudiantes de la universidad privada presentan más falencias con respecto al conocimiento que poseen del concepto de números complejos al enfrentarse a problemas cuyas soluciones están dentro de este sistema numérico, en comparación con los estudiantes de una universidad tradicional, de la cual se infiere que poseen un mayor manejo conceptual de los números complejos. Debido a los estudiantes de la universidad privada ven el contenido en niveles terminales de la carrera, y los estudiantes de la universidad tradicional ven este contenido en niveles iniciales de su carrera, desarrollando así este contenido con más detención y preparación.*

- **Segundo Supuesto:** *Los docentes de matemáticas presentan pocas dificultades para desarrollar este contenido en sus clases en el nivel de NM3 y expresan el deseo que esté incluido en los planes y programas de enseñanza media.*

- **Tercer Supuesto:** *Una parte menor de los estudiantes de enseñanza media logran realizar algunos ejercicios ya que no poseen todo el conocimiento necesario para desarrollar el contenido de los números complejos y la mayoría no posee nociones y propiedades de los números complejos.*

Estos tres supuestos de la investigación están conformados en conjunto para dar base a la investigación, para conceder un análisis de estos y llegar a responder concretamente la hipótesis de investigación planteada con anterioridad.

CAPÍTULO III

Objetivos generales y específicos.

OBJETIVO GENERAL:

Establecer, en base al estudio de casos, un análisis de la existencia del concepto de los números complejos principalmente en estudiantes de pedagogía en matemática, estableciendo un análisis complementario para estudiantes de enseñanza media y docentes, presentando problemas cuyas soluciones no pertenezcan a los números reales y donde deban utilizar nociones de los números complejos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Determinar el nivel de conocimientos conceptuales y procedimentales de los estudiantes de la universidad tradicional y la universidad privada utilizados para dar solución a problemas introducidos en el sistema de los números complejos.

2. Realizar una comparación de los conocimientos procedimentales entregados en las respuestas a las problemáticas planteadas, entregadas por los futuros docentes de la universidad tradicional y la universidad privada.

3. Levantar conjeturas respecto de las soluciones entregadas a los problemas de números complejos, por los estudiantes de 4º año medio y por los docentes con experiencia, determinando los conocimientos conceptuales que posee cada uno.

CAPÍTULO IV

Elementos del Marco Referencial.

En esta tesis se tiene por objetivo el análisis matemático y de enseñanza-aprendizaje de los números complejos en estudiantes universitarios, de enseñanza media y docentes.

Se presenta una evolución histórica de los números complejos, determinando como fue evolucionando este conocimiento hasta lo que vemos hoy en día.

Se da referencia a la "Fenomenología de Freudenthal", ya que da hincapié en la matemática realista, donde expone que el conocimiento se debe interiorizar, haciendo esta matemática, que a veces es odiada por muchos, una matemática más familiarizada, donde los estudiantes interiorizan los conocimientos y los van relacionando con los conocimientos previos y el contexto socio-cultural.

3.1 Evolución histórica de los números complejos

> "*Los números complejos es un tema que ha sido muy poco estudiado por los profesores en las distintas etapas de la educación, tanto a nivel básico y diversificado como en la Universidad".* (Aguerrevere, Escalona, & Mendoza, 2009)

Al estudiar los números complejos, nos podemos dar cuenta que este sistema es bastante importante, ya que tiene miles de aplicaciones en otras áreas de la matemática o de la física, entre otros, por lo que se indaga en su historia.

Los números complejos aparecieron en los inicios en las matemáticas, pero fueron ignorados, por ser para la mayoría extraños y difíciles de representar. La primera aparición de los números complejos es entre las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, que generan raíces cuadradas de números negativos. Los matemáticos griegos consideraban estos problemas irresolubles, rechazando el uso de números negativos por la falta de un equivalente dentro de la geometría.

Más adelante, con el surgimiento del álgebra durante la Edad Media, el concepto de número se amplía para manipular ecuaciones, desligadas de la geometría.

En cuanto a lo expuesto en el libro “Ars magna” por Cardano. En el año 1539, Cardano conoce al matemático de Niccolò Fontana, lo cual fue un hecho crucial en su vida, pues desde ese momento comienza a interesarse por las ecuaciones cúbicas. Tartaglia era un matemático de reconocido prestigio, llegó a ser uno de los principales matemáticos del siglo XVI.

Tartaglia desarrolla la fórmula general para resolver las ecuaciones de tercer grado. Por lo que, consigue resolver todas las cuestiones que le plantean.

Tartaglia le enseñó a Cardano sus trucos y técnicas secretas para el manejo de las ecuaciones, en vista de que Tarataglia no publica su fórmula, y que según parece llega a manos de Cardano un escrito inédito de otro matemático fechado con anterioridad al de Tartaglia y en el que independiente se llega al mismo resultado, será finalmente Cardano quien, considerándose libre del juramento, en 1545, publica su obra “Ars Magna” donde expone los métodos para la resolución de la ecuación cúbica.

Fueron, entre las soluciones de la ecuación cúbica en el libro de Cardano, donde se dio el nacimiento de los números complejos.

Bombelli fue el primero que desarrolló el álgebra formal para trabajar con las expresiones de la forma. En la fórmula de Cardano, mejor conocida como la fórmula del Ferro-Tartaglia-Cardano aparecen dos sumandos del tipo, la idea de Bombelli es reducir dicho número a uno del tipo. En el libro “L’Algebra” aparecen por primera vez el cálculo con los números negativos, así como también las reglas para sumar y multiplicar dichos números. El gran aporte de Bombelli al álgebra, fue el de aceptar sin reserva la existencia de *i*, como un número.

Euler intentó comprender qué eran realmente los números complejos y en su "Vollständige Auleitung zur Algebra" (Introducción Completa al Algebra), que apareció primero en Rusia en 1768-69 y en Alemania en 1770, y es el mejor texto de álgebra del siglo XVIII dice que las raíces cuadradas de números negativos no pueden ser incluidas entre los números posibles (reales). En consecuencia debemos decir que son números imposibles, o sea, están en la imaginación.

En 1777 el matemático Leonhar Euler introdujo el símbolo *i* (por imaginario), que después se adoptó de manera general.

En general cualquier raíz cuadrada de un número negativo se puede escribir como la raíz cuadrada del número positivo seguido por la raíz cuadrada de menos uno. Y a esto se denominó, número complejo.

Los números reales, racionales, enteros, naturales e imaginarios son solamente casos especiales de los números complejos.

"Para finalizar debemos mencionar que en 1799 el matemático alemán Carl Gauss dio su primera demostración del teorema fundamental del álgebra, en el que establece que todo polinomio con coeficientes complejos se descompone en factores lineales, es decir, que tiene todas sus raíces en, y puesto que ésta dependía necesariamente del reconocimiento de los números complejos, Gauss consolidó la posición de estos números. En 1831 Gauss publica un trabajo donde expone con toda claridad las propiedades de los números de la forma, llamados ahora Números de Gauss, y la representación geométrica de los mismos. A partir de todas esas investigaciones se inicia un desarrollo sostenido de la teoría de las funciones complejas". (Aguerrevere, Escalona, & Mendoza, 2009)

3.2 Parte matemática de los Números Complejos

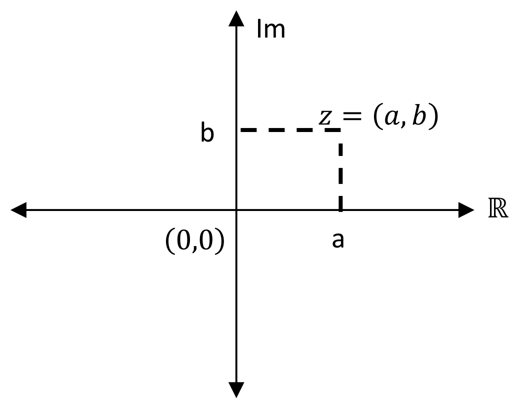
Los números complejos a lo largo de la historia han ido evolucionando en sus estructuras siendo que a cada momento iban complementando y utilizando nuevas formas para dar solución a interrogantes y problemas que les iba surgiendo en el camino.

En un principio los números complejos nacieron de la necesidad de incluir las raíces de números negativos a partir de una obtención de la raíz de una ecuación tan simple como $x^2 + 1 = 0$, donde las raíces de la ecuación son x= $\pm\sqrt{-1}$, no obteniendo una solución real, sino una solución imaginaria donde $\sqrt{-1} = i$, siendo *i* el número imaginario unitario.

La construcción de los números genera la recta real

$$\longleftrightarrow \qquad \mathbb{R}$$

Se define a los números complejos como un conjunto de los pares ordenados de números reales z = (a, b), que pueden ser representados geométricamente mediante el plano $\mathbb{R}^2$



Podemos considerar que los números reales están contenidos en los números complejos puesto que en el plano $\mathbb{R}^2$ el número complejo $(a, 0)$ coincide con el número real a. De este modo tenemos $a = (a, 0)$ cuando $a \epsilon \mathbb{R}$. Los números complejos de la forma $(0, b)$, son llamados **imaginarios puros.**

Para los números complejos de definen las siguientes operaciones y propiedades:

- **Elemento Neutro Aditivo:** 0 = (0, 0)

- **Elemento Inverso aditivo:** Sea Z = (a, b), ∃! Z_1 **=** - Z = (-a, -b)

- **Suma:** $Z_1 + \boldsymbol{Z_2} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b_i}) + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d_i}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})\boldsymbol{i} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})$

- **Resta:** $Z_1 - \boldsymbol{Z_2} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b_i}) - (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d_i}) = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d})\boldsymbol{i} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d})$

- **Elemento unidad:** 1 = (1, 0)

- **Conjugado de un número complejo:** sea Z = (a, b), el conjugado es:

  $$\bar{Z} = (a, -b)$$

- **Elemento inverso multiplicativo:** $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z} * \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$,

  cuando z ≠ 0

- **Multiplicación**: $Z_1 \cdot \boldsymbol{Z_2} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b_i})(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d_i}) = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{adi} + \boldsymbol{bci} + \boldsymbol{bdi^2} =$
$(\boldsymbol{ac} + -\boldsymbol{bd}) + (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc})\boldsymbol{i} \Leftrightarrow (\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bd}, \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc})$

- **División:**

$$
\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{Z_1}}{\boldsymbol{Z_2}} &= \frac{\boldsymbol{a+bi}}{\boldsymbol{c+di}} \cdot \frac{\boldsymbol{c-di}}{\boldsymbol{c-di}} \\
&= \frac{\boldsymbol{ac - adi + bci - bdi^2}}{\boldsymbol{c^2 - (di)^2}} \\
&= \frac{\boldsymbol{ac + bd + bci - adi^2}}{\boldsymbol{c^2 + d^2}} \\
&= \frac{(\boldsymbol{ac + bd, bc - ad})}{\boldsymbol{c^2 + d^2}} \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{ac + bd}}{\boldsymbol{c^2 + d^2}}, \frac{\boldsymbol{bc - ad}}{\boldsymbol{c^2 + d^2}}\right)
\end{aligned}
$$

- El sistema de los números complejos ($\mathbb{C}$**)** no es ordenado $(<)$, solo existiendo un orden modular de los valores obtenidos, formando subconjuntos de los modelos.

  Demostración de lo anterior expuesto:

  Suponiendo que es ordenado

$$
\begin{aligned}
&i < 0 \ / (i) \\
&i^2 > 0 \cdot i \\
&-1 > 0 \\
&\quad \rightarrow\leftarrow contradicción
\end{aligned}
$$

Sea $Z_1 = (a, b) \wedge Z_2 = (c, d)$

Dos propiedades que cumplen los pares de números reales y que se mantienen para los complejos son:

- Igualdad. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \ \wedge b = d$
- Multiplicación por un escalar. $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$

Se demostrará la propiedad de la multiplicación por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

Para eso se escribirá el número real α en la forma $(\alpha, 0)$y aplicaremos la definición de multiplicación de complejos:

$$\alpha(a,b) = (\alpha,0)(a,b) = (\alpha a - 0b, \alpha b + 0a) = (\alpha a, \alpha b)$$

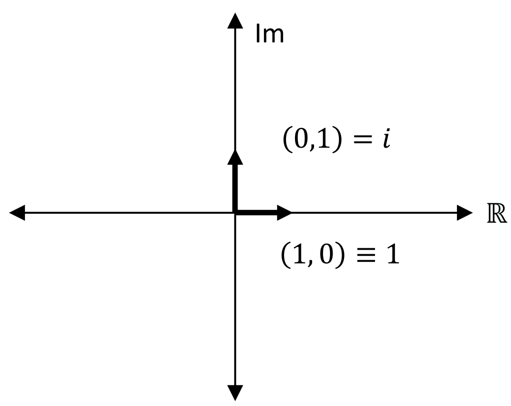
Se denotará el numero complejo (0,1) con la letra i y se le llamara ***unidad imaginaria***. Es fácil demostrar que $i^2 = -1$.

$$i^2 = (0,1)^2 = (0,1)(0,1) = \big(0(0) - 1(1), 0(1) + 1(0)\big) = (-1,0) = -1$$

Ahora estamos en condiciones de resolver la sencilla ecuación $x^2 + 1 = 0$.

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = i^2 \Rightarrow x = \pm i$$

Y para determinar los números imaginarios se genera la recta imaginaria.



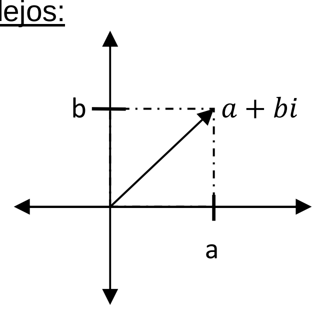
- ***Unidad Imaginaria:*** $i = \sqrt{-1}$
- ***Imaginarios puros:*** Im = (0,b)
- ***Unidad Real:*** (1, 0)
- ***Reales puros:*** Re = (a, 0)

$$(a,b) \epsilon\ \mathbb{R}^2 \Longrightarrow (a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

$$(a,b) = a\underbrace{(1,0)}_{1} + b\underbrace{(0,1)}_{i}$$

Otras formas de representar los números complejos:

- **Forma Binomial:** $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$



$$\therefore \mathbb{C} = \mathbb{R}\boldsymbol{x}\mathbb{R} = \{(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{a} \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R}\}$$

Si $z = a + bi = (a,b)$

$a = Re(z) \longrightarrow parte\ real$

$b = Im(z) \longrightarrow parte\ imagiaria$

Observación:

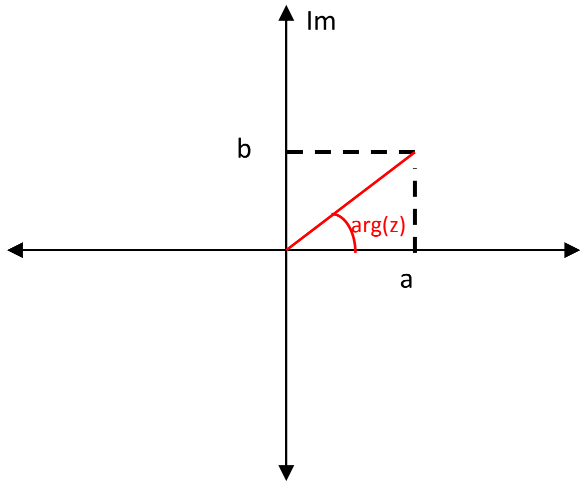
- $Z \cdot \bar{Z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$

Modulo y argumento de un numero complejo

Sea $z = (a,b) = a + bi$ un número complejo cualquiera. Llamaremos *modulo* del numero complejo z, al numero real dado por $\sqrt{a^2 + b^2}$ y lo denotaremos por $|z|$. El modulo se interpreta como la distancia al origen del numero z.

Por otra parte, llamaremos *argumento del numero complejo* $z = a + bi$, al ángulo comprendido entre el eje x y el radio vector que determina a $|z|$. El argumento de z se donota por $\arg(z)$ y se calcula mediante la expresión:

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



- **<u>Forma Polar o Trigonométrica de un Número Complejo</u>**

Considere . La representación cartesiana es:

Para determinar un vector además del ángulo, debo tener el módulo de Z

Ej:

r

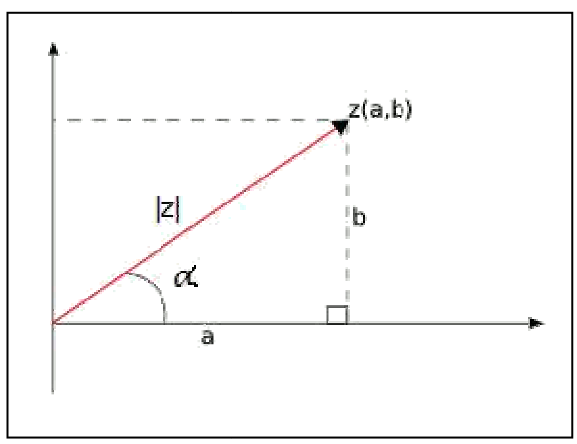
r = |Z| =

–

¿Cómo puedo escribir en coordenadas binomiales?

–

–



Usando el ejemplo anterior:

*∴a=2·*cos*30°=2 ·32=3*

b=2·sen 30°=2 ·12=1

*Z=3,1⇒Z=2*cos*30°+2sen 30°*

–

–

Entonces cuando se tiene:

$$z = a + bi = (a, b) = \left(\sqrt{a^2 + b^2}, \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) = (r, \alpha)$$

Con $a = r\cos(\alpha)$ y $b = r\,sen(\alpha)$ se tiene también:

$$z = \big(r\cos(\alpha), r\,sen(\alpha)\big) = r\cos(\alpha) + \ i\,r\,sen(\alpha) = r\big(\cos(\alpha) + \ i\,sen(\alpha)\big)$$

$$z = r\operatorname{cis}(\alpha)$$

Multiplicación de números complejos:

Sea:

$z_1 = r_1 \operatorname{cis}(\alpha)$

$z_2 = r_2 \operatorname{cis}(\beta)$

$z_1 * z_2 = (r_1 \operatorname{cis}(\alpha))(r_2 \operatorname{cis}(\beta)) = (r_1 * r_2 \operatorname{cis}(\alpha\beta))$

$z_1 * z_1 = (r_1 \operatorname{cis}(\alpha))(r_1 \operatorname{cis}(\alpha)) = (r_1 * r_1 \operatorname{cis}(\alpha+\alpha)) = (r_1^2 \operatorname{cis}(2\alpha))$

Potencia de un número complejo: $Z_1^n = (r_1^n \operatorname{cis}(n\alpha))$

- **Forma Exponencial:** Una variante de la forma polar se tiene considerando la conocida fórmula de Euler:

  $$e^{i\theta} = \cos\theta + \ i\ \sin\theta$$

  Lo que permite escribir cualquier número complejo de la forma:

  $$Z = |Z| * e^{i\theta}$$

  Siendo esta fórmula más cómoda para expresar productos y cocientes.

  Para potencias con exponente entero se tiene: $Z^n = |Z|^n * e^{in\theta}$

Raíz n-ésimas de un número complejo: Para calcular las raíces n-ésimas de un número complejo se estudian las potencias con exponente racional. Dado: $z = |z|\, e^{i\theta}$, sea $\omega = \sqrt[p]{z} = z^{\frac{1}{p}}$, para un número natural p.

Si $\omega = |\omega| e^{i\varphi}$, puesto que $\omega = z^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \omega^p = z$, es decir,

$$\omega^p = |\omega|^p e^{ip\varphi} = |z| e^{i\theta}.$$

Por tanto, $|\omega|^p = |z| \Rightarrow |\omega| = |z|^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{|z|}$,

y además, $p\varphi = \theta + 2k\pi$,

o sea, $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{p}$, para $k \in Z$.

Por lo que un número complejo tiene siempre p raíces p-ésimas diferentes, quedando de forma general:

$$\omega_k = \sqrt[p]{|z|} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{p}}, \text{ para } k = 0,1,2,\ldots, p-1$$

<u>Raíces de ecuaciones:</u>

<u>Ecuación cuadrática o de grado dos:</u>

Ecuación general: $ax^2 + bx + c = 0$, cuyas soluciones vienen dadas por: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde las soluciones dependerán del valor de $b^2 - 4ac$, es aquí donde existen tres casos:

i. Cuando $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales.
ii. Cuando $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos raíces complejas.
iii. Cuando $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos raíces reales e iguales.

Ecuación cúbica o de grado tres:

Ecuación General: $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, de forma particular si a_3=1, entonces:

$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$,

Se realiza un cambio de variable para eliminar el término cuadrático: x = z - $\frac{a_2}{3}$, quedando:

$$z^3 - 3\frac{a_2}{3}z^2 + 3\frac{{a_2}^2}{9}z - \frac{{a_2}^3}{27} + a_2z^2 - 2\frac{{a_2}^2}{3}z + \frac{{a_2}^3}{9} + a_1z - \frac{a_1a_2}{3} + a_0 = 0$$

$$z^3 + \left(\frac{{a_2}^2}{3} - \frac{2{a_2}^2}{3} + a_1\right)z + \left(-\frac{{a_2}^3}{27} + \frac{{a_2}^3}{9} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0\right) = 0$$

$$z^3 + \left(-\frac{{a_2}^2}{3} + a_1\right)z + \left(\frac{2{a_2}^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0\right) = 0$$

Por lo que queda de la forma:

$$z^3 + pz + q = 0$$

Con $p = \left(-\frac{{a_2}^2}{3} + a_1\right)$ y $q = \left(\frac{2{a_2}^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0\right)$

Se realiza el cambio de variable $z = y - \frac{p}{3y}$, tenemos:

$$y^3 - 3\frac{p}{3y}y^2 + 3\frac{p^2}{9y^2}y - \frac{p^3}{27y^3} + py - \frac{p^2}{3y} + q = 0$$

$$y^3 - \frac{p^3}{27y^3} + q = 0$$

Multiplicando por y^3 se obtiene:

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Tomando y^3 = g, nos queda una ecuación cuadrática:

$$g^2 + qg - \frac{p^3}{27} = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$g_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{-\mathrm{q}}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Donde y = $\sqrt[3]{g}$, y

$$\sqrt[3]{\mathrm{g}} = \sqrt[3]{|\mathrm{g}|}\ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{3}}\ \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{k}\pi\mathrm{i}}{3}}$$

$y_k = \sqrt[3]{|\mathrm{g}|}\ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{3}}\ \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{k}\pi\mathrm{i}}{3}}$, para k = 0, 1, 2, 3,…

Para el caso particular k = 0, se tiene:

$$y_{k=0} = \sqrt[3]{|\mathrm{g}|}\ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{3}}$$

$$z_0 = y_0 - \frac{p}{3y_0}$$

$$x_0 = z_0 - \frac{a_2}{3}$$

Encontrando así una de las tres raíces de la ecuación cúbica, luego de esto se divide la ecuación por (x – x_0) obteniendo así una ecuación cuadrática.

Ecuación cuartica o de grado cuatro:

El caso general

Una ecuación de cuarto grado con una incógnita es una ecuación que se puede poner bajo la forma canónica:

$$\mathbf{a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0},$$

donde a_4, a_3, a_2, a_1 y a_0 son números que pertenecen a un cuerpo, usualmente a ***IR*** con $a_4 \neq 0$. Sea K un cuerpo conmutativo, donde se pueden extraer raíces cuadradas y cúbicas (y por lo tanto también de cuarto orden, pues equivale a extraer raíces cuadradas dos veces seguidas). En este cuerpo, es posible factorizar por todo $a_4 \neq 0$, y la identidad siguiente es válida:

$$\mathbf{(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4}.$$

En un cuerpo algebraicamente cerrado, se sabe que todo polinomio de grado 4 tiene cuatro raíces. Es el caso del cuerpo de los complejos, según el Teorema Fundamental del Álgebra.

El método siguiente permite obtener las cuatro raíces al mismo tiempo, eso sí, después de un largo cálculo.

Los pasos de la resolución son:

- Dividir la ecuación inicial por el coeficiente a_4 ($a_4 \neq 0$). Se obtiene:

  $\mathbf{x^4 + a_3'x^3 + a_2'x^2 + a_1'x + a_0' = 0}$, con $\mathbf{a_3'} = a_3/a_4$, $\mathbf{a_2'} = a_2/a_4$, $\mathbf{a_1'} = a_1/a_4$ y $\mathbf{a_0'} = a_0/a_4$

- Proceder al cambio de incógnita $\mathbf{z = x + a_3'/4}$, para suprimir el término cúbico. En efecto, al desarrollar $(z - a_3'/4)^4$ con la identidad precedente, vemos aparecer el término $- a_3'z^3$, compensado exactamente por $a_3'z^3$ que aparece en $a_3'(z - a_3'/4)^3$. Se obtiene:

  $\mathbf{z^4 + pz^2 + qz + r = 0}$, con p, q y r números del cuerpo.

- Y ahora, la idea genial: **factorizar lo anterior en** $\mathbf{(z^2 + 2\alpha z + \beta)(z^2 - 2\alpha z + \gamma)}$, lo que es posible porque no hay z^3 en el polinomio.

Desarrollando la expresión e identificando los dos polinomios, obtenemos las condiciones:

$\beta + \gamma - 4\alpha^2 = p$ (coeficiente de x^2)

$2\alpha(\gamma - \beta) = q$ (coeficiente en x)

$\beta\gamma = r$ (término constante)

Después de algunos cálculos, obtenemos:

$$64\alpha^6 + 32p\alpha^4 + 4(p^2 - 4r)\alpha^2 - q^2 = 0$$

Es una ecuación del sexto grado, pero si miramos bien, α sólo aparece con potencias pares.

Se divide la ecuación por 64 quedando:

$$\alpha^6 + (1/2)p\alpha^4 + (1/16)(p^2 - 4r)\alpha^2 - q^2/64 = 0$$

Pongamos A = α^2. Entonces:

$A^3 + (1/2)pA^2 + (1/16)(p - 4r)A - q^2/64 = 0$, lo que se sabe resolver porque es una ecuación de tercer grado.

Luego se encuentra **α**, **β** y **γ**, y se resuelven las ecuaciones cuadráticas **$z^2 + \alpha z + \beta = 0$** y **$z^2 - \alpha z + \gamma = 0$**, y para rematar, volviendo al cambio de incógnita inicial **$x = z - b'/4$**.

Obteniendo así las cuatro raíces de la ecuación cuartica.

Para Ecuaciones de grado 5 o mayor, según la Teoría de Galois que resuelve el problema luego de varios aportes de otros matemáticos.

> *“Fue Lagrange, alrededor del año 1970, quien hizo el importante descubrimiento, de que las ecuaciones de grado ≤ 4 se podían resolver mediante radicales porque se tenían funciones de las raíces de estas ecuaciones que quedaban invariantes bajo ciertas permutaciones de estas raíces; más aún, Lagrange mostro que este enfoque fallaba cuando se aplicaba a una ecuación de quinto grado. Finalmente, Abel, en 1824, probó que la ecuación de quinto grado no se podía resolver por radicales en general, y posteriormente Galois resolvió el problema general de decidir cuando una ecuación polinomial es soluble por radicales.”* (Zaldivar, 1996)

3.3 La Fenomenología de Freudenthal.

La idea de Fenomenología que nos da a conocer Hans Freudenthal se basa en un pensamiento de éste, ya que no se rige por las definiciones previas de lo que es la Fenomenología para la Filosofía, sino que la relaciona con su escuela de la Matemática Realista. Por lo que se analizan los fenómenos del conocimiento matemático, que, en conjunto a otros fenómenos, se llega a una adquisición del conocimiento determinado por Freudenthal como “Noúmeno”, este noúmero pasa a ser un fenómeno posteriormente, que es utilizado para la adquisición de nuevos Noúmenos, y así que se vaya construyendo un conocimiento más profundo de las matemáticas. Es aquí donde la matemática realista se hace presente, ya que la realidad se va formando matematizando los procesos que gracias a esa matematización podemos ir resolviendo y adquiriendo nuevos conocimientos matemáticos hasta llegar a una matemática más abstracta. En palabras de Juan D. Godino:

“Para Freudenthal los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos —fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas. Por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos; los números organizan el fenómeno de la cantidad. En un nivel superior el fenómeno de la figura geométrica se organiza mediante las construcciones y demostraciones geométricas, el fenómeno “número” se organiza mediante el sistema decimal”. (Godino, 2010, pág. 25)

Actualmente, esta idea está presente en varias metodologías de enseñanza que han dado resultado en el estudiantado, como lo es el “Método Singapur” y “Los Significados de las Fracciones” de Omar Malet, quienes le dan una perspectiva Fenomenológica a sus estudios.

Gracias a las implicaciones que acarrea este pensamiento de Hans Freudenthal se determina una gran importancia al desarrollo matemático de los estudiantes, por lo que a continuación se dará un amplio detalle a todo lo mencionado anteriormente.

El legado de Hans Freudenthal (1905-1990) tanto en su corriente conocida internacionalmente como Educación Matemática Realista (EMR) como en la fenomenología de su mismo nombre. Se centra en 2 ideas principales: una de índole filosófica y otra, didáctica.

La primera, atañe a la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática. Para Freudenthal, los objetos matemáticos se construyen en la práctica matemática como medios de organización de objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones Freudenthal no se sitúa en ninguna de las filosofías de las matemáticas que se han dado en llamar "realistas" o "platónicas", que conciben los objetos matemáticos con una existencia anterior a la actividad de la matemática y ésta como el descubrimiento de la geografía del mundo en el que están esos objetos.

Freudenthal no se limita, ya que para él el "mundo" de los objetos matemáticos no son vistos como medios de organización, sino como objetos, cuyas propiedades (las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones) están pidiendo nuevos medios de organización, que den cuenta de todo aquello.

Para Freudenthal, describir un concepto u objeto matemáticos en su relación con aquello para lo que es un medio de organización, es hacer un ***análisis fenomenológico*** del concepto u objeto matemático. Freudenthal habla de "fenómenos" y de qué conceptos matemáticos son medios de organización de tales fenómenos. Este análisis está hecho con intención didáctica o al servicio de la didáctica, en la medida en que es el análisis previo a todo diseño o desarrollo curricular.

Ahora bien debemos tener en claro que Freudenthal no pretende hacer teoría como las ya conocidas de Brousseau, Chevallar o APOE, sino que es un "modo de ver" la enseñanza de las matemáticas. Dentro de este modo de ver, lo lleva al campo de la filosofía y habla de 2 conceptos importantes de destacar:

- Noúmenos: objeto de pensamiento, es decir, el objeto que debemos aprender, por ejemplo: logaritmo, adición, multiplicación, etc.
- Fenómeno: es la experiencia por la cual emerge un objeto. Esto quiere decir, por ejemplo, que los números organizan el fenómeno de contar.

La segunda idea central de Freudenthal es la constitución de objetos mentales frente a la adquisición de conceptos. Habitualmente se considera que para concebir un cierto objeto **X,** se enseña o se intenta enseñar, el concepto de **X.** Para conocer los números, grupos, espacios vectoriales, relaciones, se inculcan los conceptos de número, grupos, espacios vectoriales, relaciones, o mejor dicho, se intenta inculcar. Es bastante obvio, de hecho que a las edades en que se intenta, esto no sea factible.

Por esta razón, se intenta materializar los conceptos, se trata de concretizar estos conceptos. Sin embargo, algunas concretizaciones son demasiado vagas para reflejar lo esencial de un concepto que tiene que ser "materializado". Por ende, lo que la fenomenología didáctica hace es preparar el enfoque contrario, empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización.

Para este enfoque contrario, Freudenthal evita el término adquisición de concepto. En su lugar habla de la constitución de los objetos mentales.

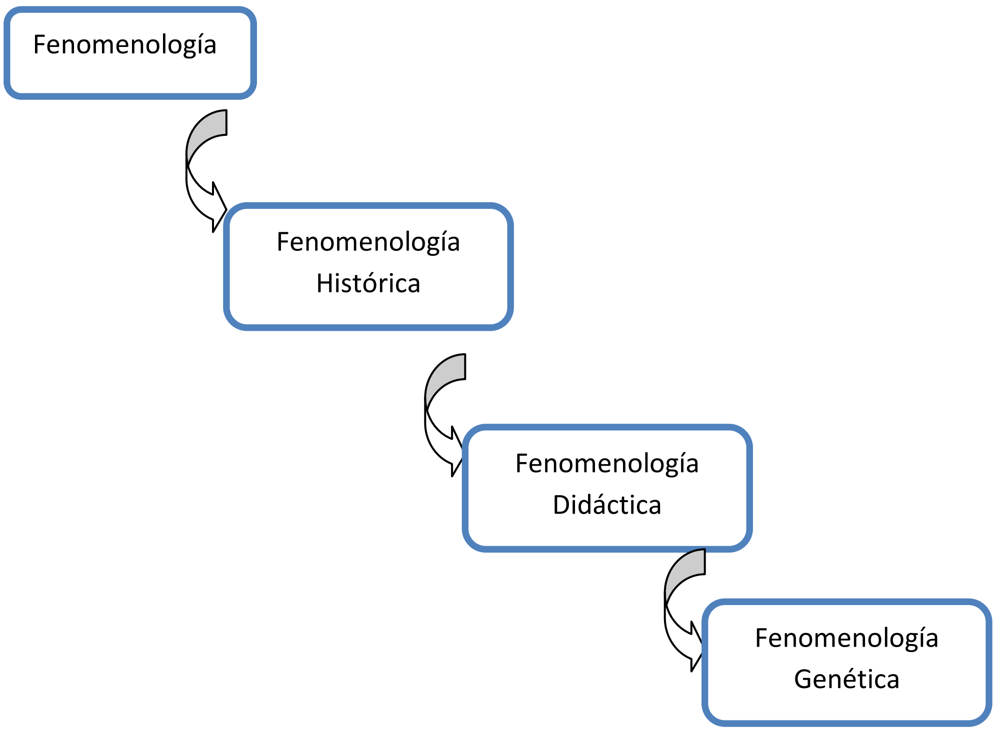
Como hemos visto, el análisis fenomenológico desarrollado por Freudenthal, aunque tome prestado varios términos de la filosofía, está hecho al servicio de la didáctica. Sin embargo, Freudenthal distingue varios tipos de fenomenologías, todos desde el punto de vista de la didáctica, pero solo uno de ellos lleva su nombre. Estos tipos son:

- Fenomenología
- Fenomenología histórica
- Fenomenología didáctica
- Fenomenología genética

Tabla I

Fenomenología	Fenomenología Histórica	Fenomenología Didáctica	Fenomenología Genética
Trata de los fenómenos en las matemáticas tomadas en su estado en el momento actual y considerando su uso actual. *Por ejemplo:* La raíz o radicales hoy en día es una función pero para los griegos, fue la quinta operación de la aritmética, por ende me interesa como docente saber el estado actual de la raíz, es decir, que hoy es considerada una función.	Fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y como se extendió a otros fenómenos. *Por ejemplo:* esta fenomenología es esencialmente del docente, como se organizó dicho objeto, que fenómenos llevaron a ese objeto.	Intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los estudiantes y los que se proponen son las secuencias de enseñanza. *Por ejemplo*: tenemos que enseñar ***X*** concepto y como docente me pregunto. ¿Qué fenómenos organizan ese tema? Veo que fenómenos llevaron a ese concepto ***X.***	Fenómenos que se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los aprendices. *Por ejemplo*: debemos, como docentes, estar atentos al desarrollo cognitivo de los estudiantes, que errores u obstáculos cometen.

El orden que se estructuran estas fenomenologías es el siguiente:



Basado en el análisis fenomenológico de Freudenthal (matemático y educador) que después de ser exiliado a Holanda, funda la corriente conocida **como Educación Matemática Realista** EMR como reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética que se sustentaba en Holanda en los años 70's.

> "*En Holanda, la didáctica está relacionada con la pedagogía fenomenológica de la Geisteswissenschaftliche, como se ve en Langeveld (1965) de la Universidad de Utrech. Esta posición pierde su predominio en los años '60 y '70 y, en consecuencia, el concepto de una didáctica general era (en algunas ampliaciones y gradualmente) reemplazada por los modelos formales de aprendizaje y enseñanza tal como se ve en los trabajos de los psicólogos educacionales de US tales como Robert Glaser, Robert de Cecco, y Benjamín Bloom. Sin embargo, el contenido ((subjectmatter)) de la didáctica como se ha desarrollado en facultades e institutos de matemáticas y ciencias de la educación, no se empantanó totalmente por este movimiento*." (Freudenthal, 1983)

Freudenthal fue un oponente explícito a la "nueva matemática" de los '60, que toma sus puntos de partida como adhesión a las matemáticas modernas, especialmente la teoría de conjuntos. Con esta posición crítica se mostró a sí mismo como un exponente de la pedagogía tradicional en el sentido de que su crítica había nacido de una discusión acerca de lo que debía ser enseñado y cómo. Por lo tanto reconoce generalidad y amplia aplicabilidad como una de las especiales características de las matemáticas, y también reconoce que las matemáticas modernas, son matemáticas abstractas igualmente lejanas mientras al mismo tiempo encarecen flexibilidad. Sin embargo, en esta visión, la abstracción es la fuente del problema pedagógico.

La EMR no pretende ser una teoría general de aprendizaje (como lo es por ejemplo, el constructivismo), sino más bien una teoría global (una “filosofía” según Freudenthal). La idea central es que la matemática debe ser conectada con la realidad, permanecer cercana a los estudiantes y ser relevante para la sociedad en orden a constituir un valor humano.

Los conceptos que representan a la EMR son:

- <u>Principio de Actividad:</u> la matemática es pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y puede ser mejor aprendida haciéndola.

  La formación se inicia con las observaciones que los profesores en formación efectúan en situaciones del aula, en las que participan activamente, poniendo en juego sus pensamientos, sus sentimientos, sus necesidades e intereses. A partir de este planteamiento inductivo, la formación realista pretende establecen una relación de estas experiencias con las representaciones de los futuros profesores.

- <u>Principio de la realidad:</u> la matemática surge como matematización (organización) de la realidad, luego el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad. Esto no significa mantener a esta disciplina solo conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los estudiantes.

  El planteamiento reflexivo parte de la idea que aprender de las experiencias mismas es una evolución casi natural, autónoma, que deja poco margen para un aprendizaje dirigido, (Korthagen, 2001) diferencia en este proceso cinco fases:

  - acción o experiencia.
  - mirar hacia atrás (hacia la acción).

- tomar conciencia y formular los aspectos importantes de la propia actuación.
- buscar y preparar comportamientos alternativos.
- comprobar su eficacia en una nueva situación, lo que ofrece, otra vez, una nueva experiencia y, por lo tanto, es el punto de partida de un nuevo ciclo de reflexión.

❖ <u>Principio de reinvención:</u> como se expresara según Freudenthal, la matemática no es otra cosa que una forma de sentido común solo que mas organizada.

❖ <u>Principio de niveles:</u> Freudenthal completa el proceso de reinvención con lo que se llama la matematización progresiva. Los estudiantes deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego cambiar a analizar su propia actividad matemática.

Se distinguen 3 tipos de niveles:

- *<u>Nivel de representación:</u>* cuando alguien reacciona sin pensarlo mucho, se produce de manera inconsciente. Estas reacciones se basan en las necesidades, los valores, sentimientos y opiniones de la persona (en situaciones espontáneas de aula)

- *<u>Nivel de Esquema:</u>* cuando alguien reflexiona sobre una situación, sobre las discusiones que resultan de ella, lo cual puede ocurrir durante la (inter)acción o inmediatamente después de ella. Sobre situaciones similares se logran desarrollar conceptos, ideas y principios, etc., los cuales sirven para describir la práctica.

- *<u>Nivel de Teoría:</u>* en este nivel se construye un orden lógico con respecto a los conocimientos subjetivos anteriormente surgidos. Se analizan las relaciones conceptuales dentro de un esquema individual o se vinculan numerosos esquemas para obtener una teoría coherente.

❖ <u>Principio de interacción:</u> en la EMR el aprendizaje de la matemática está considerado como una actividad social. La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados. No se piensa en una clase homogénea en sus trayectos de aprendizaje, sino en individuos que siguen senderos propios.

Se parte de la base que es de fundamental importancia que los futuros profesores/as tengan una conciencia de sí mismos, que constituya la base para construir su propio potencial, de modo que puedan consolidarse a sí mismos observando y percibiendo este potencial, para que puedan transferirlo a otras personas. Desde este punto de vista, la búsqueda de una base moral en la formación debería empezar ayudando a los profesores y las profesoras en formación a desarrollar un interés por su propia identidad.

Tomando como referencia los cinco principios anteriores, la perspectiva derivada del aprendizaje realista puede concretarse en los siguientes puntos:

- <u>Co-construcción de conocimiento:</u> el profesor debe partir de los conocimientos o informaciones que aporta la persona en formación, de tal forma que se establezca un diálogo “más simétrico”, gracias al cual los saberes y experiencias de los estudiantes entren en interacción con saberes y competencias nuevas que aporta el profesor, otros compañeros u otras fuentes de recursos.

- <u>Colaboración entre iguales:</u> la interacción ofrece un gran potencial para el fomento y desarrollo de los procesos cognitivos superiores del aprendizaje. A este respecto son de sumo interés las recientes propuestas de los enfoques vygotskyanos orientadas al andamiaje colectivo que hacen referencia a la co-construcción de conocimiento docente práctico a partir del conocimiento que aporta cada miembro y a través de la interacción dentro del grupo de estudiantes o profesores noveles.

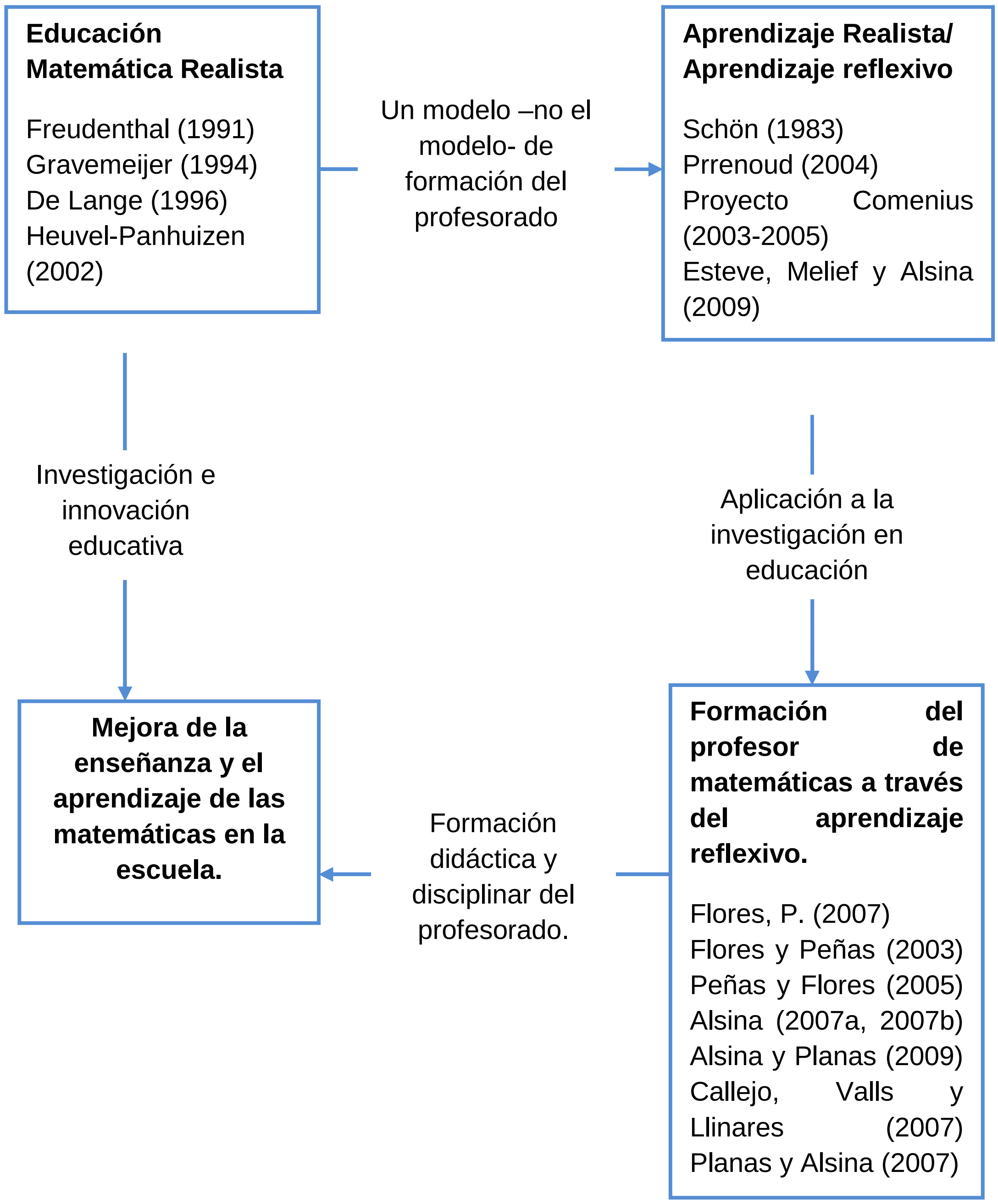
- <u>Reflexión individual y grupal:</u> en el proceso de formación, los docentes noveles deberán disponer de un acompañamiento colaborativo (y no prescriptivo). En este acompañamiento, se trata de ayudar a través de la intervención pedagógica a que el docente en formación siga su propio proceso: hacer emerger inquietudes y necesidades, escuchar, construir sobre lo que aquél ya aporta, guiar, orientar, aconsejar.

- <u>Autorregulación:</u> el estudiante debe aprender a enfrentarse a la propia actuación, a la propia realidad, a los propios problemas y a las propias circunstancias y a llevar a cabo una reflexión continuada de su quehacer diario. El objetivo es que llegue por sí mismo no solamente a descubrir los aspectos que quiere o debe cambiar o mejorar sino a buscar soluciones y a evaluarlas por sí mismo. Entra así en una dimensión autorreguladora, de gran importancia para el aprendizaje autónomo. Esta dimensión se basa en la observación, el análisis crítico y la autoevaluación. Para que el docente en formación llegue a este nivel de autonomía, habrá que dotarlo de los instrumentos necesarios (portafolio, pautas metacognitivas, etc.).

Esta corriente concibe al currículum como un proceso que requiere del diseño de secuencias didácticas que, lejos de ser elaboraciones académicas restringidas a objetivos institucionales, se enmarca dentro de una filosofía que busca explícitamente promover cambios en la enseñanza de las matemáticas en las aulas.

La didáctica realista invita a reemplazar la visión del alumno como receptor pasivo de una matemática prefabricada, por la del sujeto que participa, junto con otros, en la organización de la matemática de fenómenos. (Anexo: Tabla II)

De forma sintética, en el diagrama que se expone a continuación se intenta representar como la EMR ha dado lugar a un prolifero campo de investigación en el ámbito de la educación matemática, centrado en la formación y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas, su finalidad es tratar de mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela.



(Freudenthal, A Mathematician on Didactics and Curriculum Theory. K. Gravemeijer1 y J. Teruel. Traducción: Norma Saggesse, Fernanda Gallego y Ana Bressan(GPDM), 2000)

Matemáticas para todos

Aunque Freudenthal fue educado en Holanda, e influenciado por, la tradición germana de la Bildung en un sistema escolar dual, rechaza una forma exclusiva de Bildung para una elite separada de la escuela para las masas. Aboga fuertemente por "matemáticas para todos" y trata de hacer la matemática accesible para todos. Se condena todas las formas de seguir la corriente y situar con referencia al inevitable "efecto matemático".

Freudenthal está convencido de que los estudiantes con diferentes niveles de habilidad en los primeros años de la educación secundaria (que en el contexto de Holanda corresponde a alumnos de 12-15 años) deben estar no sólo en la misma clase, sino también seguir el mismo currículo. Lo mismo que los otros aspectos de su credo pedagógico. Suplica que se formen grupos de aprendizaje heterogéneos.

Muchos aspectos de las ideas de Freudenthal están todavía sometidos a discusión. Por eso, hay un fuerte movimiento contra las teorías educativas de este tipo por parte de los psicologistas, que ven al aprendizaje desde el punto de vista de un proceso informacional (Anderson, Reder, & Simon, 1996). Pero también, algunas veces hay oposición desde dentro de las comunidades de educación matemática a la idea básica de que los alumnos deben ir desde el mundo real al mundo de las matemáticas. La principal crítica al abordaje de la RME es que a menudo es imposible partir de situaciones de la experiencia real hacia la "matemática". La reinvención, en esta visión, es un desperdicio de tiempo (Verstappen, 1991; Keune, 1998).

Estas críticas deben mencionarse, pero también debe notarse que los que se oponen a las ideas de Freudenthal tienen una breve experiencia empírica para este punto de vista. Mientras varias experiencias de enseñanza muestran el valor del abordaje de RME (De Lange, 1987; Nelissen, 1987; Van Den Brink, 1989; Streefland, 1990), los resultados de muchas estudios de investigación de los efectos del currículum de matemáticas inspirado en las ideas de Freudenthal, muestran claramente que el aprendizaje matemático en contextos de la vida real y en grupos heterogéneos es factible y efectivo (Roelofs & Terwel, 1999; Hoek, 1998).

Hay un amplio soporte para EMR entre los que lo practican (docentes, teóricos y desarrolladores de currículum). Por otra parte, todos los textos Holandeses muestran el impacto de las ideas de Freudenthal. Pero también hay una evidencia práctica y empírica de la factibilidad y eficiencia de RME. El más convincente argumento de Freudenthal para la EMR es que no todos los estudiantes son futuros matemáticos, en cambio, para la mayoría, las matemáticas que usarán serán las que les sirvan para resolver problemas en las situaciones de la visa diaria.

Postura Crítica

La corriente de Hans Freudenthal, nos deja como legado a los futuros profesores, en formación matemática, una riqueza inmensurable, ya que desde la perspectiva realista propone que la matemática posee un valor educativo. En la medida que permite comprender y participar de lo modos en que esta disciplina organiza distintas esferas de nuestro entorno social y cultural.

Sabemos que no todos los estudiantes serán futuros matemáticos, para la mayoría, toda la matemática que usarán por siempre es aquella que les permita resolver situaciones de la vida cotidiana y de su entorno sociocultural. Sin embargo, al familiarizar a los estudiantes con el abordaje matemático de este tipo de resolución de problemas merece ser una de las más altas prioridades para nuestra futura labor, el hecho de que los estudiantes puedan contextualizar un cierto problema, comprender el sentido y el concepto a entregar es una misión que todo docente debiese alcanzar.

Nosotros como futuros docentes debemos saber guiar a los estudiantes para que éstos puedan ir adquiriendo esas experiencias matemáticas, e ir construyendo sus propios conocimientos matemáticos. Además de generar esta preocupación de tomar en cuenta los fenómenos matemáticos previos para llegar a un noúmero, pensando también en los conocimientos posteriores y estructurando una enseñanza/aprendizaje progresivo de los estudiantes para que ellos puedan adquirir un pensamiento más abstracto de la matemática, priorizando la construcción de los objetos mentales.

> *"Según Freudenthal, los objetos matemáticos (más o menos formales) "ordenan" familias de fenómenos, en la medida en que permiten clasificarlos en función de sus regularidades… La fenomenología de un objeto matemático es la descripción del objeto en relación con los fenómenos de los cuales emerge o a los cuales subyace."* (Malet, 2010)

La visión que desarrolla Freudenthal nos entrega a los docentes un marco de referencia para promover nuestras propias decisiones en el actuar de nuestro ejercicio docente, sin dejar de lado la aplicación de los contenidos propuestos por el MINEDUC que en la actualidad, con la nueva reforma del ministerio, diseñada hasta segundo medio, ha ido generando una continuidad de los contenidos vistos desde la educación básica y una estructuración de los conocimientos de forma que los estudiantes vayan generando su aprendizaje. La llamada "matemática para todos" pretende ser una luz de igualdad y equidad en la entrega de aquellos conceptos que para nuestros estudiantes muchas veces son tan abstractos, el hecho de hacer una matemática vista por los estudiantes de forma real, tangible y cercana hace matematizar ese concepto que carece de sentido para nuestro estudiantado. Esto genera un quiebre con la educación matemática tradicionalista.

Esta filosofía de Freudenthal se ve reflejada en variados métodos y propuestas metodológicas como el método APOE, el método Singapur, propuestas para el aprendizaje de las sumas, las fracciones, geometría y los números, con lo que en la actualidad la Fenomenología de Freudenthal ha sido una gran base para el desarrollo pedagógico de los docentes y un apoyo para sus puestas en práctica de los conocimientos adquiridos en su formación, esto en pro a la ayuda para la mejor transposición didáctica de los conocimientos matemáticos y para que los estudiantes puedan ir desarrollando sus conocimientos.

La metodología Singapur en Chile es muy poco utilizada, pero de a poco se ha ido incluyendo en los planes educativos de algunos establecimientos educativos, tomando en consideración los resultados obtenidos en la aplicación de ésta en otros países. Ésta metodología sigue la idea planteada por Freudenthal de la matemática realista.

Para la mejor adecuación a esta postura de la matemática realista, debiésemos ir desarrollando las capacidades previas que en nuestra formación profesional tendrían que estar presentes, alcanzando un nivel matemático superior para tener un punto de vista más amplio y abstracto de las matemáticas tanto en educación básica como en educación media. De este modo, se podría tener la capacidad de enfrentar los diversos obstáculos presentes en las transposiciones didácticas, los cuales como futuros docentes no son problemas, sino que son desafíos a los cuales debemos poder ir superando y esta idea de Freudenthal nos ayuda a tener un buen sustento matemático.

3.4 Otras investigaciones relacionadas.

Dentro de las investigaciones relacionadas a los números complejos se encuentran los trabajos de Tomas Pardo y Bernardo Gómez, publicado el año 2005, “La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: Un estudio en el nivel universitario”, y de Carmen Buhlea y Bernardo Gómez, publicado el año 2007, “La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: Un estudio comparativo España-Rumania”.

Estos dos trabajos realizados en la Universidad de Valencia, basados en una observación experimental y enmarcadas en los Modelos Teóricos Locales , presencian una problemática en la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos, señalando que los problemas que se han tenido, a lo largo de la historia, para la comprensión del concepto de los números complejos, realizando un análisis histórico y epistemológico y recolectando información para sustentar intervenciones en planificaciones de este concepto, por medio del análisis de tareas.

El segundo trabajo comprende, además de lo anterior expuesto, una comparación de libros de texto. Parte del convencimiento de que la enseñanza de los números complejos presenta dificultades que afectan a la concepción conceptual y procedimental de los estudiantes.

Con relación a lo conceptual, determinan que el uso de raíces pares de números negativos no manifiesta correctamente el concepto de número imaginario y que un número complejo está comprendido por la suma de un número real y otro imaginario.

El cambio de noción de raíz cuadrada a la de radical, determinando que los estudiantes no son capaces de percibir las diferencias entre ellas.

Relacionado a lo procedimental, en relación a las inconsistencias que conduce el doble signo ± asociado a raíces cuadradas y la utilización de propiedades, de radicales, de números reales a imaginarios.

Las conclusiones del análisis de tareas, en la primera investigación, establecidas en su estudio, determinan que es una herramienta válida para llevar a cabo la investigación y deja en manifiesto que los alumnos presentan dificultades al responder las tareas, confirmando así la hipótesis teórica inicial.

En la segunda, determina que el estudio histórico-epistemológico y el análisis de textos favorecerán al desarrollo de un cuestionario para estudiantes de ambos países, para poder determinar si las dificultades están favorecidas por un determinado modelo de enseñanza.

Estas dos investigaciones concluyen que el nivel de los conocimientos conceptuales y procedimentales para la resolución de problemas con soluciones contenidas en el sistema de los números complejos con relación al análisis histórico, de este concepto, realizado es fundamental para determinar que los problemas que se presentan son acarreados a través del tiempo por el desarrollo conceptual que ha tenido el sistema de los números complejos, desarrollo que ha ido dejando problemas conceptuales y la no aceptación de soluciones complejas.

CAPÍTULO V

Elementos del Marco Metodológico.

5.1 Paradigma o enfoque de investigación.

El término paradigma puede indicar el concepto de esquema formal de organización que se origina de la palabra griega *παράδειγμα* (parádeigma) que se descompone en "pará" (junto) y "déigma" (modelo), por lo que paradigma es un modelo o esquemas por el cual se basan investigaciones ya que estos modelos o esquemas que influyen en el desarrollo de la organización de la investigación enmarcándolo en las sistematizaciones de este paradigma con el fin de obtener un beneficio para la investigación.

Según el filósofo y científico Tomas Kuhn en su libro *"La estructura de las revoluciones científicas"* define a un paradigma del siguiente modo:

> *"Es aquello que se debe observar y escrutar donde el tipo de interrogantes que se supone hay que formularlas para hallar respuestas en relación al objetivo, es cómo deben estructurarse estas interrogantes, y cómo deben interpretarse los resultados de la investigación científica…Considero a los paradigmas como realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica"* (Kuhn, 1971)

Existen variados tipos de paradigmas para los cuales Felipe Martínez Rizo, en el año 2002, elaboró tres cuadros resumiendo estos paradigmas, presentados a continuación:

CUADRO N° 1. Creencias básicas de paradigmas alternativos de investigación. Versión actualizada.

ASPECTO	PARADIGMAS ALTERNATIVOS				
	Positivismo	Postpositivismo	Teoría crítica et al.	Constructivismo	Participativo
Ontología	Realismo ingenuo; Realidad plenamente cognoscible.	Realismo crítico; realidad cognoscible sólo probabilística e imperfectamente.	Realismo histórico; realidad construida por valores sociales, político-económicos, culturales, étnicos, de género, cristalizados en el tiempo.	Relativismo; Realidades construidas locales y específicas.	Realidad participativa; objetiva y subjetiva, creada en conjunto por la mente y un cosmos dado.
Epistemología	Dualista-objetivista. Hallazgos verdaderos.	Dualista-objetivista con modificaciones. Tradición crítica en comunidad de investigación; hallazgos verdaderos sólo probablemente.	Subjetivista y transaccional. Hallazgos mediados por valores.	Subjetivista y transaccional. Hallazgos creados.	Subjetividad crítica en transacción participativa con el cosmos; epistemología ampliada de conocimiento experiencial, proposicional y práctico; hallazgos cocreados.
Metodología	Experimental manipulativa; verificación de hipótesis; métodos principalmente cuantitativos.	Experimental manipulativa modificada; multiplicidad crítica; falsificación de hipótesis; puede incluir métodos cualitativos.	Dialógica/dialéctica.	Hermenéutica y dialéctica.	Participación política en investigación acción colaborativa; primacía de práctica; lenguaje atterrizado, contexto experiencial compartido.

CUADRO N° 2. Comparación de 4 paradigmas utilizados en las ciencias sociales y de la conducta.

ASPECTO	PARADIGMAS			
	Positivismo	Postpositivismo	Pragmatismo	Constructivismo
Metodología	Cuantitativa.	Principalmente cuantitativa.	Cuantitativa y cualitativa.	Cualitativa.
Lógica	Deductiva.	Principalmente deductiva.	Deductiva e inductiva.	Inductiva.
Epistemología	Punto de vista objetivo. Dualismo cognoscente-conocido.	Dualismo modificado. Verdad de hallazgos objetiva probabilística.	Puntos de vista tanto objetivos como subjetivos.	Puntos de vista subjetivos. Cognoscente y conocido inseparables
Axiología	Investigación libre de valores.	La investigación implica valores, pero esto puede controlarse.	Papel importante de los valores en la interpretación de resultados.	La investigación depende de los valores fundamentalmente.
Ontología	Realismo ingenuo.	Realismo crítico o trascendental.	Acepta la realidad externa. Escoge explicación con resultado deseable.	Relativismo.
Causalidad	Las causas reales preceden o son simultáneas a los efectos.	Relaciones estables, tipo ley, entre fenómenos sociales, conocidas sólo imperfectamente; se identifican de manera probabilística, cambiante.	Tal vez haya relaciones causales, pero nunca las podremos identificar con seguridad.	Imposible distinguir causas y efectos; todos los seres se construyen mutuamente en forma simultánea.

Fuente: Tashakkori y Teddlie, 1998, 23.

CUADRO N° 6. Resumen de aspectos de la polémica cuanti/cuali.

ASPECTOS A ANALIZAR	POSTURAS O PARADIGMAS		
	Positivismo y neopositivismo	Postpositivismo, hermenéutica y constructivismo moderados	Posturas extremas
ONTOLÓGICOS			
El objeto de conocimiento: Naturaleza dela realidad	Monismo; interioridad irrelevante	Monismo o dualismo moderados; Interioridad presente, reductible o no	Dualismo absoluto
El sujeto cognoscente	Pasivo, receptivo	Activo; interpretación omnipresente	Activo
La relación sujeto/objeto	Separación, distancia	Interacción	Confusión
EPISTEMOLÓGICOS			
Naturaleza del conocimiento	Sensaciones puras	Construcción a partir de sensaciones	Construcción pura
Cognoscibilidad de realidad	Total, completa; Realismo ingenuo	Parcial y probabilística; incierta; realismo trascendente	Nula
Causalidad; repetibilidad y Posibilidad de generalizar	Sólo física; completa, ciencias nomotéticas	Física e intencional; parcial; la dupla nomotético/ideográficocruza disciplinas	Intencional; nula, todo es irrepetible
AXIOLÓGICOS-PRAXEOLÓGICOS			
Influencia en investigación y jeraquía de valores	Irrelevante; Verdad valor elevado	Real, no suprimible, controlable; Ciencia y justicia valores en su ámbito	Total, incontrolable; valor supremo justicia transformacion social
Relación ciencia/praxis	Papel rector de la ciencia	La ciencia hace aportación específica; phrónesis conocimiento de la praxis	Ciencia subordinada a transformación
Posición del investigador y postura ética y política	Privilegiada; Irrelevante	No privilegiada, sí específica; relevante en su propio ámbito, distinto	Subordinada; fundamental
METODOLÓGICOS			
Técnicas	"Cuantitativas"	"Cuantitativas" y "cualitativas"	"Cualitativas"
Papel de teoría	Relación simple entre teoría y experiencia, de tipo deductivo	Interacción sistemática y compleja entre teoría y experiencia; proceso deductivo o inductivo según sea el caso	Descartado o confuso; procesos inductivos
Criterios de calidad	Específicos-simples el "método científico"	Específicos-complejos, con variantes en la forma de aplicarse a cuanti o cuali	No específicos, sino ético-políticos

(Martínez Rizo, 2002)

Esta investigación se basa en el Paradigma Postpositivista, donde el conocimiento se considera como el fruto o resultado de una interacción, de un dialogo, entre el conocedor y el objeto conocido. Cada conocimiento seria la resultante de dos factores (sujeto y objeto).

Su metodología es principalmente cuantitativa, aceptando elementos cualitativos

Este paradigma está conformado por un conjunto de corrientes epistémicas-filosóficas, dentro de las cuales dos importantes son el interpretativismo y la teoría critica.

El Interpretativismo se centra en el estudio de los significados de las acciones humanas y de la vida social. Este paradigma plantea las nociones científicas de comprensión, significado y acción. Busca la objetividad en el ámbito de los significados utilizando como criterio de evidencia el acuerdo intersubjetivo en el contexto educativo.

El Sociocrítico o Teoría Crítica surge como respuesta a las tradiciones positivistas e interpretativas y pretenden superar el reduccionismo de la primera y el conservadurismo de la segunda, admitiendo la posibilidad de una ciencia social que no sea ni puramente empírica ni solo interpretativa. El paradigma crítico introduce la ideología de forma explícita y la autorreflexión critica en los procesos del conocimiento. Tiene como finalidad la transformación de la estructura de las relaciones sociales y dar respuesta a determinados problemas generados por éstas. Sus principios son:

- Conocer y comprender la realidad como praxis
- Unir teoría y práctica (conocimiento, acción y valores)
- Orientar el conocimiento a emancipar y liberar al hombre
- Implicar al docente a partir de la autorreflexion

Por lo que, para dar mejores respuestas y lineamientos al objetivo de esta investigación se escoge este paradigma postpositivista centrándose en la Teoría Crítica.

5.2 Escenario y Actores.

El universo de investigación, como se ha mencionado anteriormente, son estudiantes de educación media, de un establecimiento educativo de dependencia particular subvencionado. Estudiantes universitarios de carreras de Pedagogía en Matemática de dos universidades, una privada y otra tradicional y docentes con experiencia laboral. A partir de éste capítulo y para el posterior análisis de datos, el liceo particular subvencionado se nombrará como “establecimiento A”, la universidad privada se denominará “universidad A” y la universidad tradicional denominada como “universidad B”.

El establecimiento A pertenece a la comuna de Macul y es un liceo que posee todos los niveles educativos desde pre-básica hasta cuarto año medio. La universidad A pertenece a la comuna de Santiago Centro, y la universidad B es de la comuna de Ñuñoa, ambas con carreras de Pedagogía en Matemática. Los docentes encuestados trabajaban en diferentes establecimientos educativos.

La cantidad de encuestados en cada caso fueron: en el establecimiento A, se encuestó a 63 estudiantes de Cuarto año Medio, en la universidad A y en la universidad B, se encuestó a 25 estudiantes de cada universidad, y a docentes, se aplicó la encuesta a 4 profesores de matemática con varios años de experiencia en aula.

La muestra de esta investigación es del tipo probabilística, donde el tipo de muestra es un “muestreo aleatorio estratificado”, debido a que es útil cuando el universo a estudiar es muy disperso a lo largo de aéreas geográficas extensas, por lo que es muy difícil construir una base de muestreo. Se producen subconjuntos exhaustivos y excluyentes de la población a través del azar simple.

5.3 Fundamentación y descripción del diseño.

El instrumento para la recogida de información fue diseñado tomando en consideración la metodología utilizada en la Universidad de Valencia por Tomas Pardo y Bernardo Gómez en su artículo *“La Enseñanza y el Aprendizaje de los Números Complejos: Un Estudio en el Nivel Universitario”* en cuatro preguntas que fueron confeccionadas en base a este estudio.

Este instrumento diseñado es tipo cuestionario con preguntas abiertas, considerando los conocimientos que debiesen poseer los encuestados para responder las preguntas y permitiendo que ellos pudiesen desarrollar cada pregunta según los conceptos previamente adquiridos.

5.4 Fundamentación y descripción de Técnicas e Instrumentos.

En la presente investigación, se ha utilizado una técnica de recolección de información, la cual consiste en una encuesta escrita tipo cuestionario, que consta de seis preguntas con respuestas abiertas, utilizado para que los encuestados deban aplicar los conocimientos que posean del contenido de números complejos.

Este instrumento de recolección fue diseñado para analizar si los encuestados han desarrollado ciertos conceptos e ideas sobre los números complejos, es por esto que la confección de las preguntas apunta a que, los encuestados, apliquen sus conocimientos procedimentales relacionados a los números complejos.

Confeccionando un análisis a priori de las posibles respuestas que entreguen los encuestados, considerando el nivel educativo y tomando el supuesto de que manejen el contenido conceptual de los números complejos.

El propósito es analizar las respuestas de forma general en cada universidad y realizar una comparación, determinando el nivel de conocimiento de los encuestados que surge en cada pregunta.

Por otro lado, en el caso de los alumnos de enseñanza media, se busca analizar cuáles fueron las nociones y los conocimientos adquiridos en clases sobre los números complejos.

Y por último, en el caso de los docentes, es de interés analizar las respuestas establecidas por ellos, ya que son los actores principales en la enseñanza-aprendizaje de los números complejos, con respecto a si manejan el contenido y el concepto que acarrea el sistema de los números complejos que se comenzará a implementar oficialmente el año 2013 con la reforma del Ministerio de Educación.

5.5 Modelo de instrumento a emplear.

A continuación se presentará el modelo utilizado para la recolección de datos y posterior análisis comparativo con el análisis a priori. La evaluación que se ha realizado a docentes permite una séptima pregunta, la que considera si el docente a realizado clases a estudiantes de enseñanza media sobre la unidad de los números complejos y si encuentra necesaria su implementación a estudiantes de enseñanza media.

Estimado encuestado:

El presente instrumento de recolección de información es una encuesta escrita, tipo cuestionario con respuestas abiertas. Sus respuestas son relevantes para el estudio realizado en relación a los números complejos, tanto en los estudiantes, docentes y futuros docentes. La encuesta es anónima, por lo que se agradece su disposición a expresarse con toda sinceridad.

Datos iniciales:

SEXO**:** F____ M____ EDAD: _____ años

COLEGIO/LICEO o UNIVERSIDAD ________________________________

Pregunta 1:

Utilizando los símbolos <, >, = ordena de menor a mayor los siguientes números:

a) $\sqrt{-3}\,,\ \sqrt{1}\,,\sqrt{4}\,,0\,,10-\sqrt{-7}$

Explica el desarrollo establecido

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

b) 1 – i; -1 + 3i; -1 - 3i; 1 + i

Explica el desarrollo establecido

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Pregunta 2:

Determina el valor de los siguientes productos:

a) $\sqrt{-7} * \sqrt{-7} =$

Explica tu respuesta

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

b) $\sqrt{-7} * \sqrt{7} * \sqrt{-1} * \sqrt{-4}$

Explica tu respuesta

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Pregunta 3:

Divide el número 14 en otros dos para que el producto resulte ser 64, ¿cuáles son los números?

Explica el desarrollo establecido
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Pregunta 4:

Considerando $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = \frac{1}{5}$, determine:

$(z_2 - z_1)*z_3$

Explica tu desarrollo
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Pregunta 5

Encuentre las raíces de la ecuación:

$$X^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$$

Explica tu respuesta
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Pregunta 6

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$$\log(-x)^2 = \log x^2 \rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x) \rightarrow \mathbf{\log(-x) = \log(x)}.$$

Por lo que “log(-x)” existe y es un número real

En particular para $x = 1$ tenemos, $\ln(-1) = \ln(1)$ que como sabemos, $\ln(1) = 0$

¿Es cierto?, ¿es correcto el razonamiento?, explica tu respuesta

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Pregunta 7 (solo para docentes)

Durante su experiencia como docente, ¿ha implementado los contenidos de los números complejos? Argumente su respuesta.

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

¿Considera usted que es necesaria la implementación de este contenido en la educación media? Argumente su respuesta.

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

5.6 Validez y confiabilidad.

La confiabilidad es siempre un requisito difícil para todo tipo de investigación, debido a la naturaleza de cada una. Caso contrario es la validez, que es la que da un sustento mayor a la investigación, debido a que el estudio puede ser trascendente en medida que el instrumento de recogida de información entregue información relevante a la investigación.

Para que el instrumento utilizado fuese de credibilidad y de concordancia con el estudio, se solicito a un especialista de la Universidad Católica Silva Henríquez que validara el instrumento. La que fue respondida una vez que el instrumento ya fuese aplicado por razones de tiempo. El docente que realizó las observaciones pertinentes para el mejoramiento del instrumento fue Don Alonso Quiroz Meza, profesor de planta del Departamento de Educación Matemática de la universidad.

La carta de Validación del instrumento se encuentra en los “Anexos”, siendo el anexo 1: Carta para la validación de la Encuesta.

CAPÍTULO VI

Trabajo de campo o recogida de información.

Para recolectar la información necesaria para un análisis de la problemática central, se realiza una encuesta tipo cuestionario con respuestas abiertas de desarrollo de forma que se obtenga el análisis realizado por los encuestados al enfrentarse a los problemas de esta encuesta.

Esta encuesta es de carácter mixto, ya que las respuestas se pueden analizar de forma cualitativa y cuantitativa a la vez. Al realizar un análisis previo de las posibles respuestas y ver el cumplimiento de estas se pueden formular gráficos con esta información, detallando las soluciones que no fueron incluidas de forma previa y que al aplicar las encuestas los estudiantes las utilizaron. De forma cualitativa se pueden dar conclusiones al respecto de los métodos de resolución utilizados respondiendo de esta forma a la pregunta de investigación y confirmando o no nuestra hipótesis planteada.

Las etapas llevadas a cabo para la recogida de información fueron las siguientes:

- *Determinación del nivel de las preguntas y confección del instrumento de recolección de información*.

  Se realizó un análisis matemático de la problemática tratada, determinando los procedimientos analíticos, propiedades, operaciones y definiciones del Sistema de los Números Complejos. Luego de esto se analizó el mapa de progreso de Números y Álgebra para determinar que conocimientos debiesen poseer los estudiantes de enseñanza media y universitaria para tratar esta unidad. Finalizando en la confección de las preguntas del instrumento para la recogida de información. De estas preguntas, cuatro fueron hechas en base al estudio realizado a estudiantes en la Universidad de Valencia por Tomas Pardo y Bernardo Gómez en su artículo *"La Enseñanza y el Aprendizaje de los Números Complejos: Un Estudio en el Nivel Universitario"*

- *Definición del día para realizar la encuesta con el Jefe de UTP del establecimiento A, para la puesta en práctica del instrumento.*

Se solicitó una reunión con el jefe de UTP Julio Naranjo León para poder aplicar la encuesta a los estudiantes del nivel NM4, que se aplico sin tener la validación ya que los estudiantes estaban prontos a retirarse de los establecimientos antes de poseer la validación correspondiente de especialistas de la universidad.

- *Recolección de información en las universidades y a docentes de dos establecimientos educativos.*

  Se aplica la encuesta a estudiantes de Pedagogía en Matemática de la Universidad A y de la Universidad B, solicitando en pasillos a cada encuestado que pudiesen realizarla explicando con anticipación los fines que se estimaban pertinentes

- *Validación de la encuesta por especialista de la Universidad Católica Silva Henríquez.*

  La validación del material fue entregado a un especialista en el tema que dicta cursos cuyo contenido es el de Números complejos.

- *Análisis de los datos obtenidos y conclusiones de las respuestas de cada pregunta*

  Los datos fueron agrupados según las respuestas previas que se estimaron para el universo de encuestados y con esto se pudo confeccionar gráficos circulares con la información obtenida y realizar un análisis crítico de las respuestas entregadas por los encuestados.

Para el desarrollo de estas etapas hubo algunos facilitadores y obstáculos para la recolección de la información, siendo estos los siguientes:

- Facilitadores para la aplicación de la encuesta:

  - El establecimiento donde se aplicó la encuesta es donde pude realizar la práctica profesional y donde trabajé ejerciendo mi labor docente en el nivel de NM1 y Electivos de NM4, por lo que los directivos, cuerpo docente y administrativo conocían el trabajo realizado.

   - Al aplicarla a los estudiantes universitarios, fue de gran ayuda poseer contactos con los estudiantes de ambas casas de estudio.

- Obstáculos para la aplicación de la encuesta:

   - Los docentes encuestados se demoraron muchos días en poder responder la encuesta debido a que estaban en el cierre del semestre y finalización del año escolar.

   - El tiempo entregado para aplicar la encuesta a los Cuartos Medios del establecimiento educativo fue muy poco ya que los estudiantes tenían posteriores actividades, de finalización del año escolar, programadas.

   - Varios estudiantes universitarios no entregaron la encuesta, reduciendo el universo muestral.

CAPÍTULO VII

Análisis de los hallazgos de investigación o de la información recopilada.

Para realizar esta encuesta se seleccionó a estudiantes de cuarto medio del establecimiento A, estudiantes de Pedagogía en Matemática de la universidad A y de la universidad B y por último a profesores que tienen varios años de docencia.

De forma previa se realiza el análisis a priori de las posibles respuestas esperadas que entreguen los encuestados.

Pregunta 1:

Utilizando los símbolos <, >, = ordena de menor a mayor los siguientes números:

a) $\sqrt{-3}\,,\ \sqrt{1}\,,\sqrt{4}\,,0\,,10-\sqrt{-7}$
b) 1 – i; -1 + 3i; -1 - 3i; 1 + i

Para esta pregunta se esperan las siguientes respuestas, siendo la primera respuesta la óptica correspondiente al problema.

R1: No se Plantea desarrollo alguno ya que reconoce que en los números complejos no existe un orden.

R2: El encuestado ordena solo los números reales planteando la no existencia de orden en los complejos o señalando que no sabe si se pueden ordenar.

R3: El encuestado ordena todos los números sin importar el conjunto numérico y las propiedades de éste.

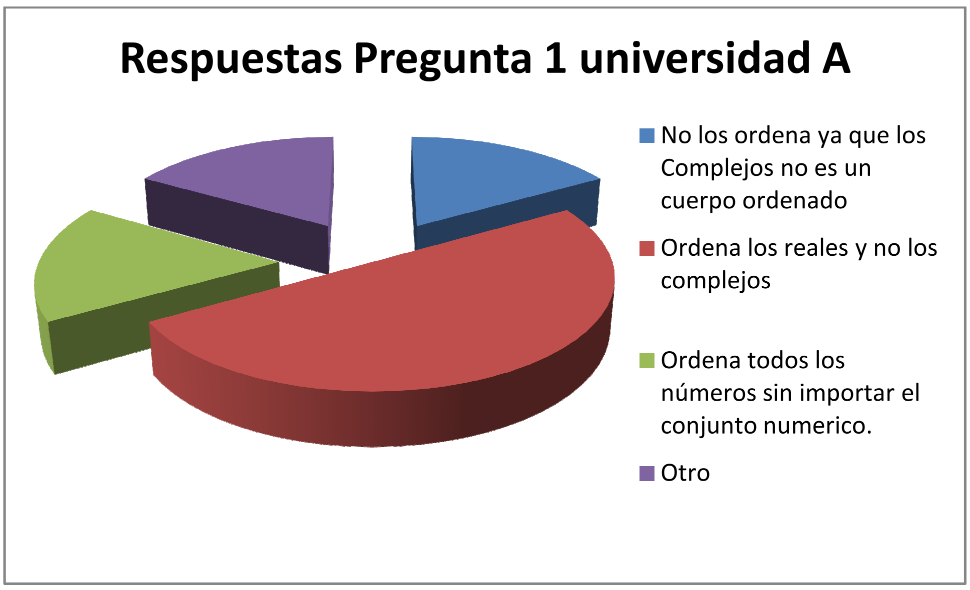
R4: Determina un orden según los valores que están dentro de las raíces

R5: El encuestado no identifica la equivalencia del imaginario unitario *"i = √-1"*

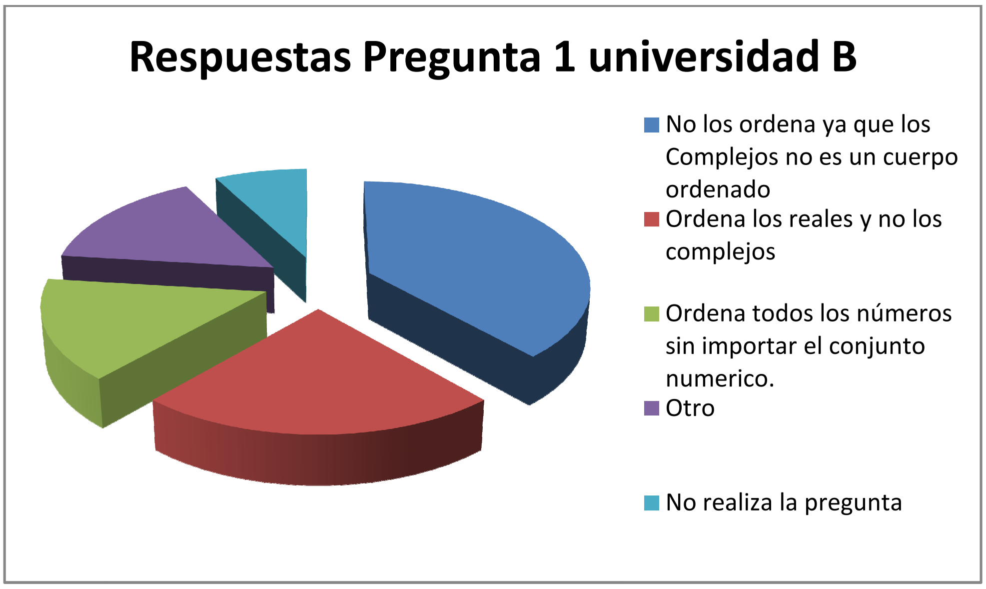
R6: No responde la pregunta.

En la universidad A se aplicó la encuesta en aproximadamente 25 estudiantes, de los cuales solo 12 entregaron la encuesta y el resto no la entregó por falta de tiempo o porque realmente no sabía el contenido. Los números complejos se ven en el nivel 900 de la carrera, pero la mayoría de los encuestados son de nivel 800 y sólo dos personas tienen nivel terminal.

Entonces se realiza una gráfica que representa los resultados considerados en las encuestas, donde los encuestados de la universidad A, la mayoría ordenan los reales declarando no saber cómo ordenar los números complejos, otros que no recuerdan o no saben cómo resolver el problema, otros que los ordenan por recta numérica, otro estudiante que declara la no existencia de raíces cuadradas negativas. Siendo estas últimas respuestas no incluidas dentro de las posibilidades previamente declaradas.



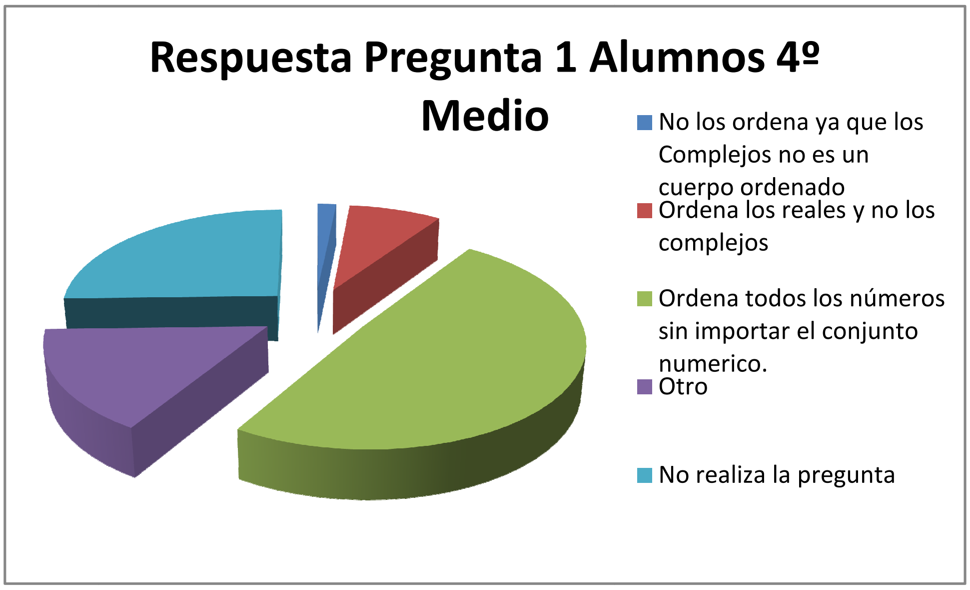
Para los estudiantes de la universidad B fue diferente, ya que a ellos dentro del primer y segundo semestre del primer año de universidad por la malla que poseen, en álgebra I ya les entregan herramientas para desarrollar el pensamiento lógico-abstracto de los números complejos. La mayoria de los encuestados están en segundo semestre de universidad y la encuesta fue aplicada a 20 estudiantes de esa universidad de los cuales 7 no fueron devueltos para su posterior análisis.



La mayor parte de los estudiantes responden correctamente a la pregunta, al realizar la comparación entre los estudiantes de ambas universidades podemos detectar que el desarrollo de este conocimiento, que es necesario para la formación docente, se presencia más en los estudiantes de la universidad B que en los estudiantes de la universidad A.

Gran parte de los encuestados tiende a ordenar los números reales solamente declarando que los complejos no se pueden ordenar. Otra parte de los encuestados ordena todos los números siendo que en el sistema de los números complejos los axiomas de orden no se cumplen. Otro estudiante demuestra que no son ordenados y otro que realiza el orden modular de los números complejos, determinando el módulo de cada raíz para así poder ordenarlos.

Para los estudiantes de 4º Medio del establecimiento A de 63 alumnos solo uno respondió correctamente a la pregunta, la mayoría responde ordenando todos los números, en “Otros” sus respuestas fueron que no sabían, que no se acordaban o los ordenaban en relación al valor numérico que está dentro de la raíz, siendo este último un tipo de respuesta no prevenida en el análisis anterior.



Los cuatro docentes que realizaron esta encuesta respondieron correctamente al enunciado, no ordenando los números ya que en el sistema de los números complejos los axiomas de orden no se cumplen.

Por lo tanto, de todas las respuestas obtenidas tanto como por estudiantes universitarios, por estudiantes de enseñanza media y docentes la mayoria cumple con las espectativas de tipos de respuestas que se analizo previamente.

Las diferentes conjeturas, para los tres casos, toman en cuenta las diversas posibilidades de respuestas que los tres sujetos de estudio podian dar, sin embargo, la inclinación para cada uno de los casos es particular en el caso de los estudiantes que se encontraban cursando cuarto año medio.

Si bien se esperaba alguna nocion sobre el contenido examinado, los análisis a priori no se cumplieron, esto con respecto a las respuestas que nos entregaron. La gran mayoria no manejaba el contenido.

Con los estudiantes de las universidades, vuelve a ocurri lo que se ha conjeturado con enterioridad. Se esperaba que la gran mayoria de los estudiantes que fueron encuestados tengan manejo del contenido, sin embargo, la sorpresa fue notoria como ya se mencionaba anteriormente.

Dificulta juzgar y evaluar este contenido en la universidad A, ya que son contenidos vistos al finalizar la carrera, y una gran mayoria de los encuestados se encontraban cursando niveles inferiores. Sin embargo, se vuelve a mencionar que lo esperado esta a corde con lo que han respondido cada uno de los encuestado.

Para finalizar, la conjetura que se realizo para los docentes que ya se encontraban ejerciendo, era que todos ellos serían capaces de contestar correctamente a la pregunta, cosa que sucedió tal cual como analizó previamente.

Pregunta 2:

Determina el valor de los siguientes productos:

a) $\sqrt{-7} * \sqrt{-7} =$

b) $\sqrt{-7} * \sqrt{7} * \sqrt{-1} * \sqrt{-4}$

Para esta pregunta se esperan las siguientes respuestas, siendo la primera respuesta la correcta al problema.

R1: Para a) $\sqrt{-7} * \sqrt{-7} =$ y para b) $\sqrt{-7} * \sqrt{7} * \sqrt{-1} * \sqrt{-4}$ se determina que al ser raíces cuadradas de números negativos pertenecen a los números complejos y por lo tanto para poder multiplicarlos se determina el imaginario unitario $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -\sqrt{-1}$ y $i^4 = 1$, quedando:

i. Para a) $\sqrt{7} * \sqrt{-1} * \sqrt{7} * \sqrt{-1} = \sqrt{7} * i * \sqrt{7} * i$, donde $\sqrt{7}$ es un número perteneciente al conjunto de los Reales (IR) por lo que puedo asociar

$$\sqrt{7} * \sqrt{7} * i * i.$$

Quedaría $\sqrt{49} * i^2 = 7 * -1 = -7$

ii. Para b) se realiza el mismo procedimiento anterior pero para el caso de $\sqrt{7}$, $\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-4}$, donde se llega a la solución

$$\sqrt{7} * \sqrt{7} * \sqrt{4} * i * i * i = 7 * 2 * -\sqrt{-1} = -14i.$$

R2: El encuestado responde a los problemas utilizando solo propiedades de números reales, no diferenciando el conjunto numérico al que pertenecen, por ende utilizando mal las propiedades y llegando a resultados erróneos.

i. Para a) $\sqrt{(-7 * -7)} = \sqrt{(49)} = 7$

ii. Para b) $\sqrt{-7} * \sqrt{7} * \sqrt{-1} * \sqrt{-4}$, donde se llega a la solución

$$\sqrt{(-7 * 7 * -1 * -4)} = \sqrt{-196} = 14i.$$

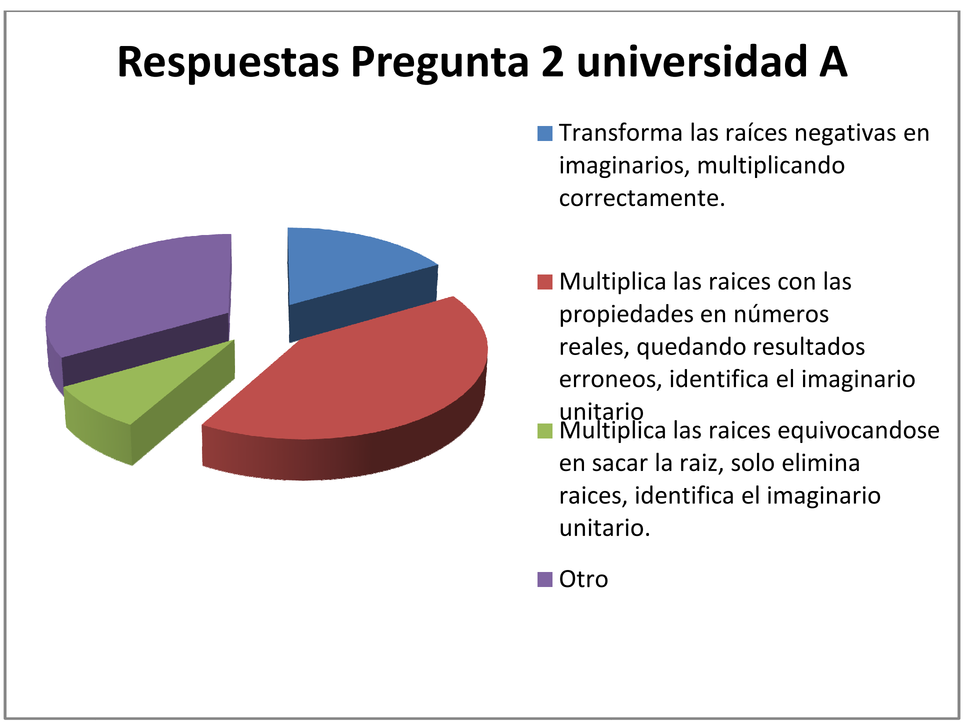
El encuestado puede llegar a cualquiera de las dos soluciones finales, reconociendo o no la raíz imaginaria.

R3: Multiplica raíces teniendo errores algebraicos en el proceso errando los resultados.

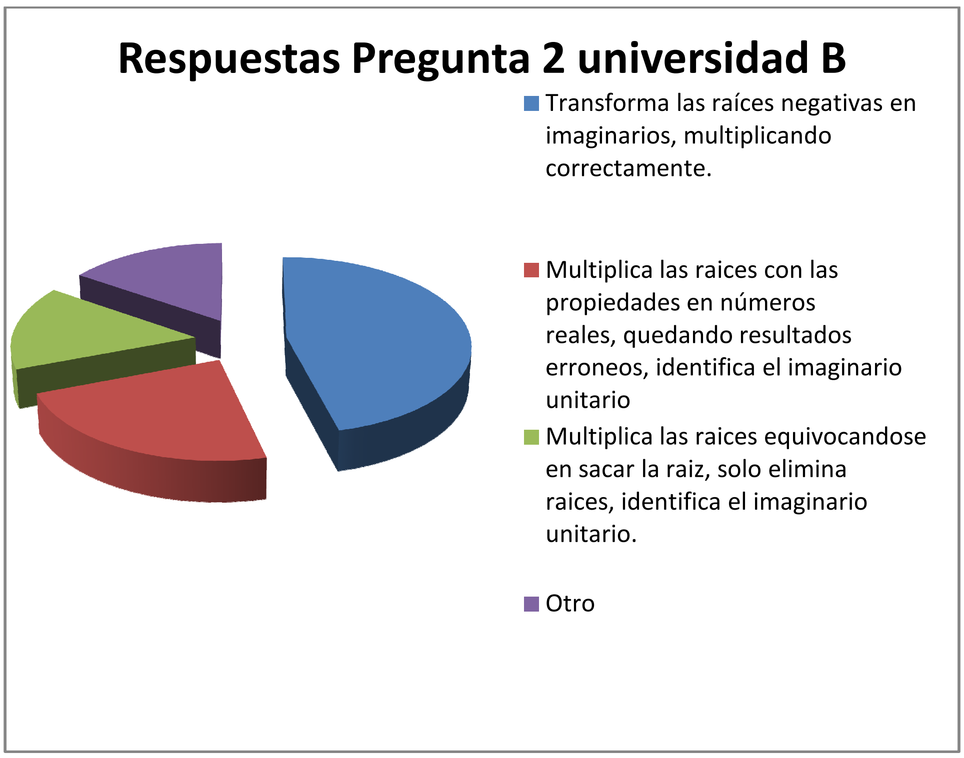
R4: Utiliza propiedades de potencia para la resolución del problema transformando las raíces cuadradas a potencias de exponente ½ y opera utilizando propiedades de números complejos.

R5: No responde la pregunta planteada.

Al representar nuevamente de manera grafica los resultados arrojados a través de las encuestas, podemos notar, que los estudiantes de la universidad A, nuevamente cometen errores en la resolución, del ejercicio propuesto. El 42% de los encuestados operan, aplicando propiedades, que son utilizadas con los números reales. Un porcentaje menor al 20% responde correctamente a la pregunta, transformando correctamente el número que se encuentra dentro de la raíz, en imaginario, resolviendo correctamente el ejercicio. Un porcentaje no menor, 33%, responde que no recuerda como operar la multiplicación de las raíces negativas, o bien ponen énfasis, en que la raíz, puede tener dos soluciones, una positiva y otra negativa, siendo esta propiedad parte de los números reales.

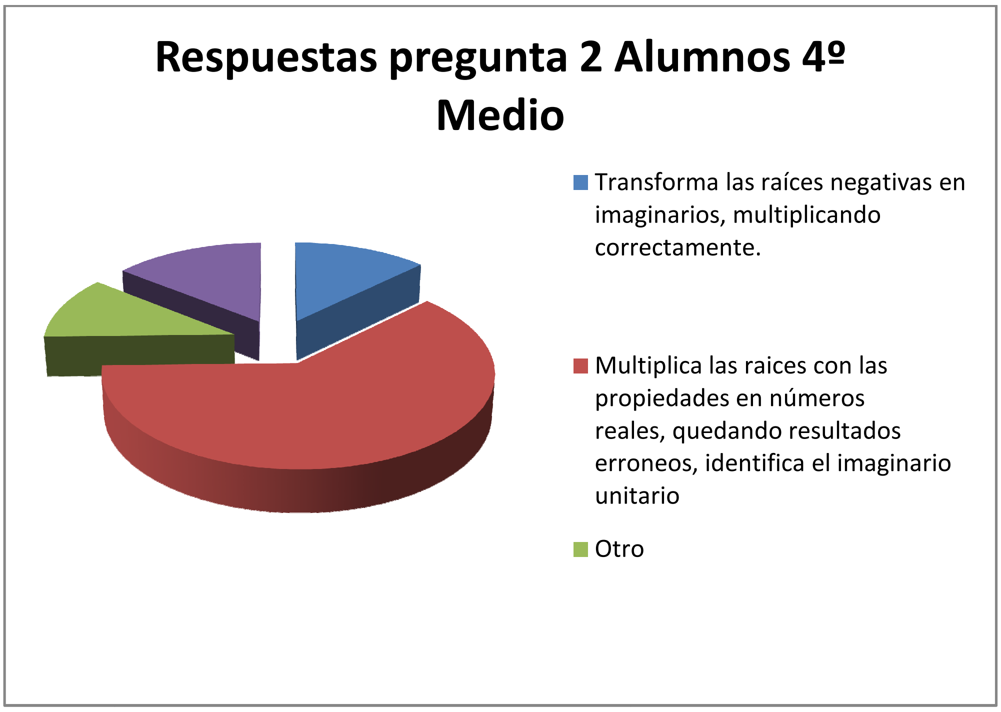


Ahora bien, para los estudiantes de la universidad B, ocurre todo lo contrario, que en la situación de los estudiantes de la universidad A. Alrededor del 46% de los estudiantes, en este caso, responden correctamente a la pregunta, realizando la resolución del ejercicio de manera clara y correcta. Un porcentaje menor, también al igual que los estudiantes de la universidad A, responden de manera errónea el ejercicio. A diferencia de los estudiantes de la universidad B, un 16% de los estudiantes, multiplican las raíces equivocándose, al aplicar las propiedades de raíces, eliminando el símbolo las raíces que se presentan e identifican el imaginario unitario.



Para los estudiantes de 4°año medio, el 62% de los estudiantes, responde a la pregunta operando con propiedades que se ocupan en los números reales, obteniendo respuestas erróneas al realizar la resolución de los ejercicios. Por otra parte es destacable notar, que dentro del total de encuestados, el 13% de los estudiantes contestó correctamente la pregunta. Mucho de los estudiantes, no responde la pregunta o simplemente, realiza algunos “garabato” en el espacio de la respuesta.

Es de importancia mencionar, que dentro del establecimiento, durante tercer año medio, se implementa la unidad de números complejos, pero la gran mayoría de los estudiantes no tiene manejo de estos conocimientos.



Por su parte, los cuatro docentes, a los que se les aplicó la encuesta, tres de ellos respondieron con mucha claridad y correctamente el ejercicio propuesto, no aplicando propiedades de raices utilizadas en los numeros reales, llegando al resultado esperado. Pero uno utilizo propiedades de raices en los numeros reales llegando a un resultado erróneo

Concluyendo con esta pregunta, podemos decir, que las conjeturas realizadas, con los tipos de respuestas, que se esperaba por parte de los diferentes escuestados, fuerón certeras y cumplieron con lo esperado. Cabe mencionar, que dentro de los tres primeros grupos que presentamos, estudiantes universitarios, junto con los estudiantes de 4° Año medio, un alto porcentaje, comete los mismos errores, en su mayoria, el multiplicar la raices con las propiedades em los números reales.

Pregunta 3:

Divide el número 14 en otros dos para que el producto resulte ser 64, ¿cuáles son los números?

Para este problema, el análisis realizado del enunciado lleva a tender al error en el planteamiento de ecuaciones ya que se produce una confusión con el dividir un número en dos sumandos y la división del número de forma algebraica, siendo la segunda errónea.

R1: Se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ xy \quad &= 64 \end{aligned}$$

Es aquí donde los encuestados pueden no encontrar soluciones y dejar solo planteado el sistema de ecuaciones o donde este sistema de ecuaciones lo podemos llevar a una ecuación cuadrática, donde las raíces de la ecuación son la solución del problema planteado o directamente despejando en la primera ecuación una de las variables y reemplazarla en la segunda hasta llegar a una ecuación cuadrática, que por el Teorema de Gauss sabemos que toda ecuación tiene número de raíces igual al del mayor exponente. En este el exponente mayor es 2, por lo tanto tiene dos raíces de solución.

$$X^2 – 14X + 64 = 0$$

La ecuación cuadrática tiene soluciones:

$$X_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 * 64}}{2}$$

$$X_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{-60}}{2}$$

$$x_1 = 7 + \sqrt{15}i \ \wedge \ x_2 = 7 - \sqrt{15}i$$

Siendo x_1 y x_2 las soluciones del problema planteado.

En el otro caso:

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ xy \quad &= 64 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 14 - y \quad (1) \\ xy &= 64 \qquad (2) \end{aligned}$$

Reemplazando (1) en (2):

$$(14 - y)y = 64 \Rightarrow 14y - y^2 = 64 \Rightarrow y^2 - 14y + 64 = 0$$

Obteniendo la misma ecuación cuadrática expuesta anteriormente con la misma solución para el problema planteado.

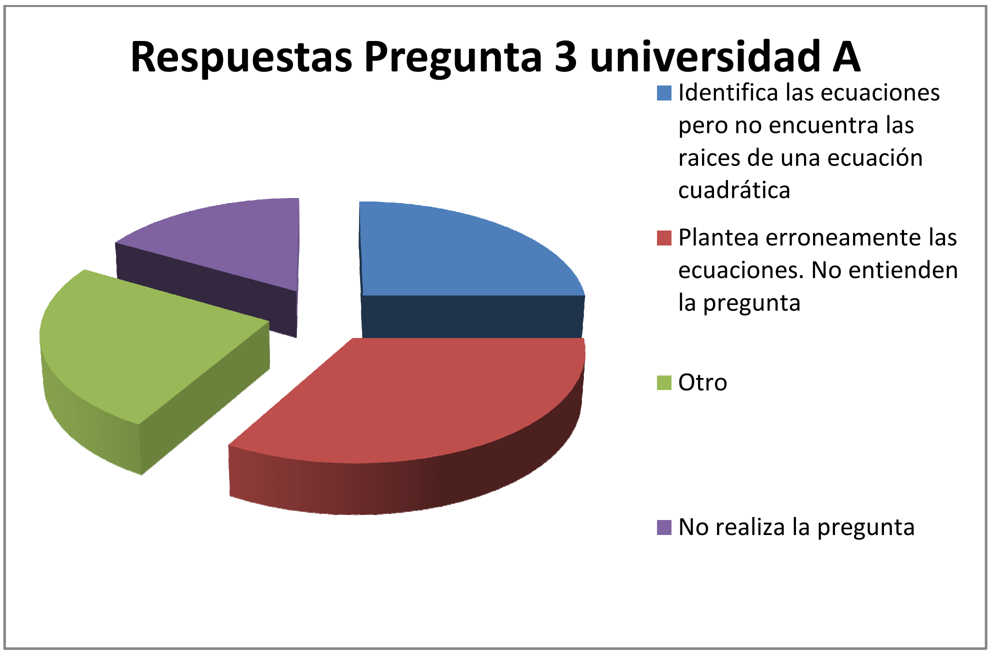
R2: El encuestado interpreta de forma errónea una de las ecuaciones por lo que no llega a la resolución del problema. Planteando un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\frac{14}{a}$$
$$\frac{14}{b}$$
$$a * b = 64 \lor a^b = 64$$

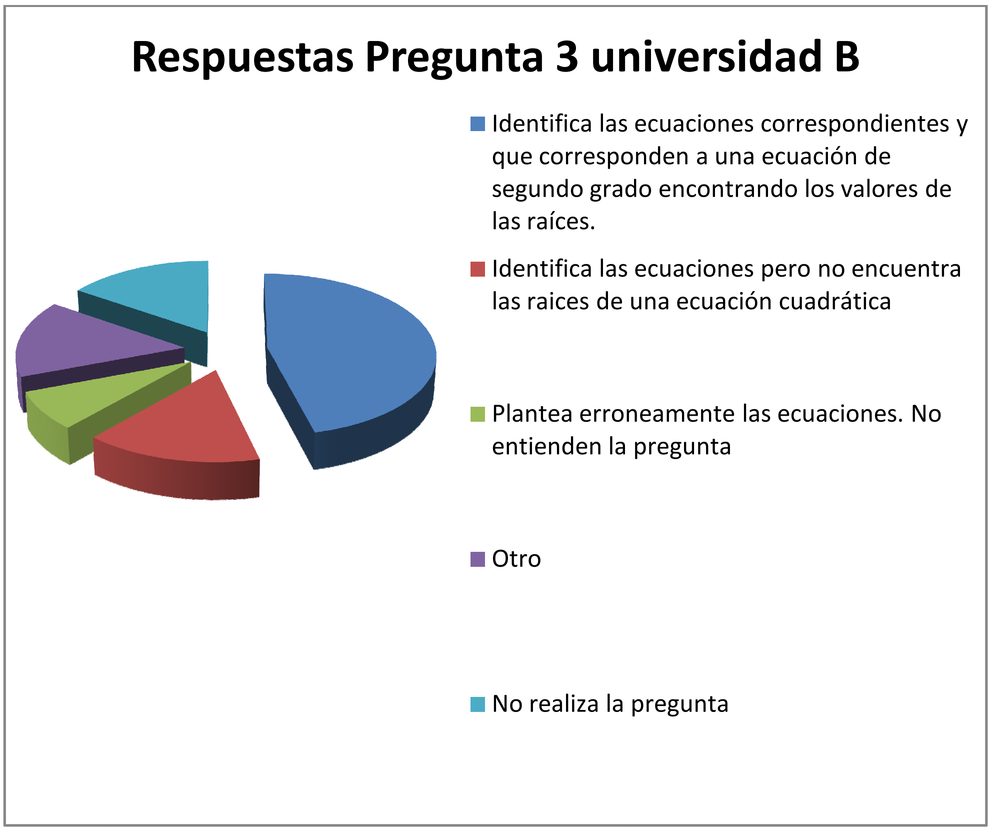
R3: No responde al enunciado.

En esta pregunta, como logramos apreciar anteriormente, era cien por ciento necesario el conocimiento algebraico, y de sistema de ecuaciones. Junto con las conjeturas realizadas anteriormente, se hará el análisis de cada una de las categorías en que fue realizada la pregunta.

En un primer caso, los estudiantes de la universidad A, alrededor de un 33% de los estudiantes, plantea inicialmente de manera erronea las ecuaciones, que les permitira resolver el ejercicio o simplemente no entiende el enunciado planteado, haciendolo saber en el espacio de respuesta. Por otra parte, otro grupo de estudiantes, si logro llegar al planteamiento de las ecuaciones, sin embargo, no fueron capaces de encontrar las soluciones, o raices a estas, siendo esta una ecuación cuadratica.

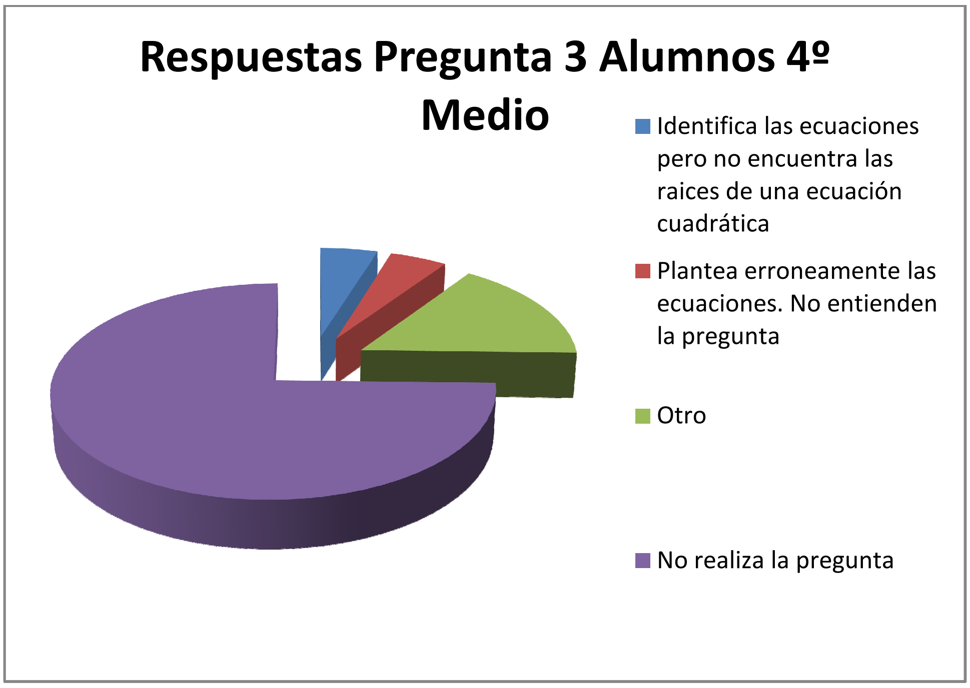


Nuevamente, podemos notar, por medio del grafico, que lo que ocurre en comparación con los estudiantes de la universidad A, es algo diferente. De todos los estudiantes de la universidad B que realizarón la encuesta, alrededor del 50% de estos fue capaz de identificar correctamente las ecuaciones, encontrando sus soluciones, otro 16% plantea de manera correcta de las ecuaciones, pero no llega a resolver el problema, no encontrando las raices, cosa que sucede en gran porcetaje con los estudiantes de la universidad A. En porcentajes totalmente menores, podemos notar que los estudiantes, plantean de manera incorrecta las ecuaciones, o bien manifiestan no entender las preguntas no respondiento a esta.



Ahora que ya hemos analizado las dos situaciones anteriores, analizaremos que sucede con los estudiantes de 4°año medio.

Como logramos notar en el grafico, el 74% de los estudiantes a los cuales fue realizada esta encuentas, no dio respuesta a esta pregunta, dejando una gran cuestionante en nuestro analisis, siendo cual fue el motivo por el cual, estos estudiantes no respondieron a esta pregunta. Podemos notar también, que solo el 5% del alumnado de esté nivel, logro plantear correctamente las ecuaciones, sin emabrgo ninguno de los estudiantes logro encontrar las soluciones correspondientes a estas ecuaciones. Otras de las respuestas, que se lograron recopilar con respecto a esta pregunta, correspondiente también a porcentajes menores de los encuestados, no entendieron el sentido de la pregunta, no llegando a realizar lo que se les pedia, si no bien, hicieron procedimientos numericos, para encontrar la respuesta, como fue el de operar, o aplicar potencias.



Los docentes encuestado en este caso, tuvieron sus diferencias, tres de estos respondieron con mucha claridad y correctamente el ejercicio propuesto, pero uno, planteo erroneamente las ecuaciones, obteniendo resultados no correspondientes a la raices de la ecuación.

Se llega a la conclusión, que mayoritariamente, en todos los niveles, existio como principal dificultad, el planteamiento del problema, haciendo que no se pudiera dar respuestas correctas o simplemente no responder a esta pregunta. Ahora bien, y como se menciono anteriormente, nos queda como gran inquietud, el por qué, los estudiantes no respondieron la pregunta.

Pregunta 4:

Considerando $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = \frac{1}{5}$, determine:

$$(z_2 - z_1)^* z_3$$

Para este problema se plantean las siguientes posibilidades de respuestas por los encuestados:

Observación: Las encuestas entregadas a los estudiantes de la UMCE el valor de $z_3 = \frac{1}{3}$, pero el procedimiento es el mismo para este caso.

R1: Se reemplaza cada valor en el problema quedando

$$[(-5 - i) - (-2 + 3i)]^* \frac{1}{5} = [-3 - 4i] * \frac{1}{5}$$

$$\frac{-3}{5} + \frac{-4}{5} i$$

R2: El encuestado reemplaza correctamente y se equivoca en las operaciones algebraicas de adición, sustracción y/o propiedad distributiva.

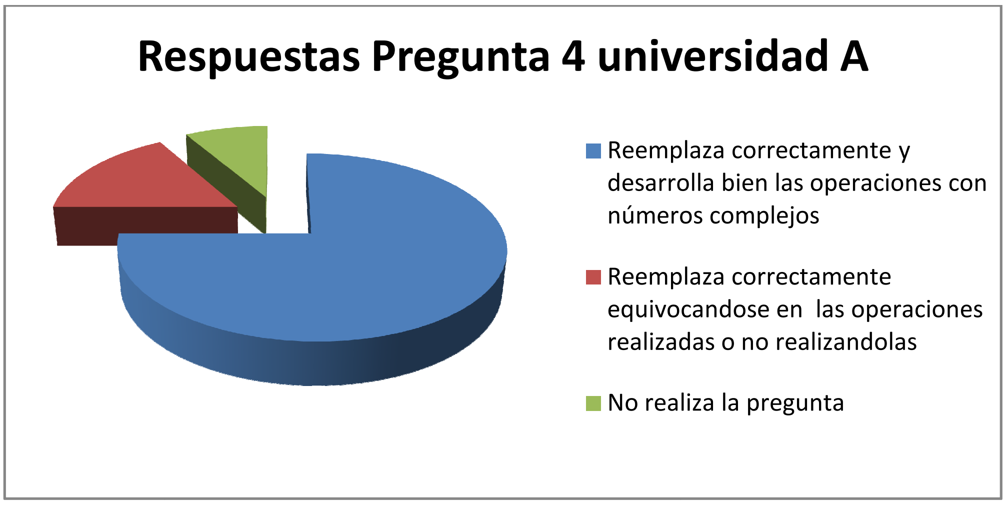
R3: El encuestado reemplaza erróneamente los valores complejos para las incógnitas llegando a una solución errónea del planteo.

$$[(-2 + 3i) - (-5 - i)]^* \frac{1}{5} = [3 + 4i] * \frac{1}{5}$$

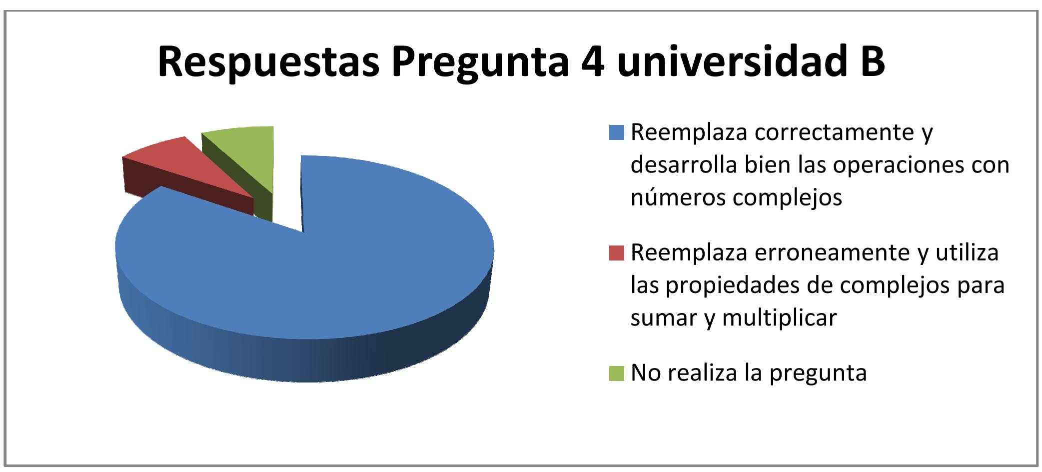
$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} i$$

R4: El encuestado no responde la pregunta.

En el desarrollo y revisión de esta pregunta, se logro llegar a la conclusión de que alrededor del 75% de los estudiantes de la universidad A, lograron resolver y operar correctamente el ejercicio propuesto con números complejos. Dejando en evidacie que el conocimiento del uso algebraico no es menor por parte del estudiantado. Sin embargo, un porcentaje, logro reemplazar y plantear correctamente el ejercicio, sin embargo, durante el desarrollo de este, cometieron perqueñños errores algebraicos y operacionales, no llegando al resultado correcto.

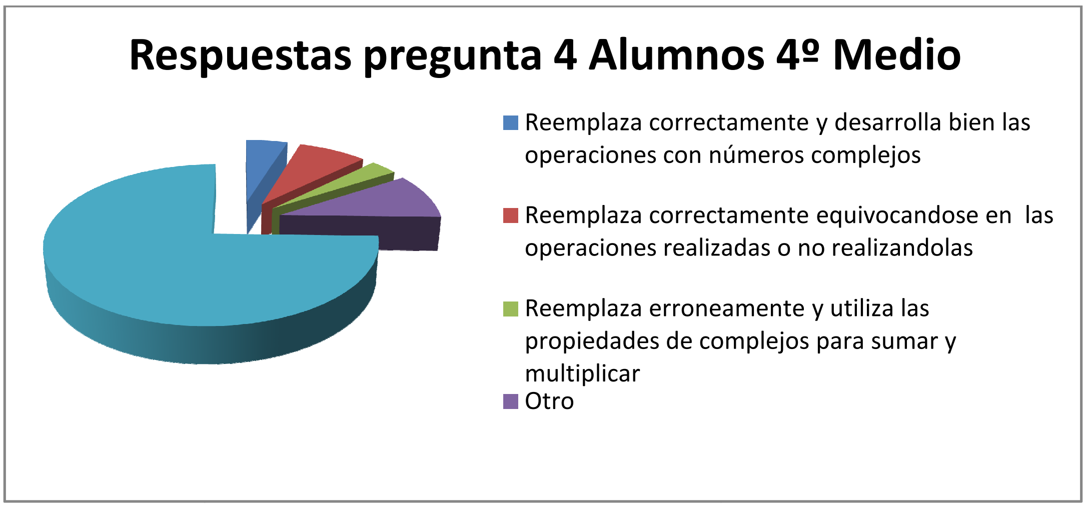


Por su parte, los estudiantes de la universidad B, alrededor del 85% de los enmcuestados respondieron correctamente, realizando un buen plateamiento y reemplazo de las variables involucradas, llegando a los resultados correspondiente. Por otra parte un porcentaje menor, si bien, planteo el problema, no llego al resultado correcto por problemas de operatorias, o bien porque no respondieron a la pregunta.



Nuevamente, para el caso de los estudiantes de 4°año medio, un alto porcentaje de estos no dieron respuesta a esta pregunta, dejando en blanco el espacio de respuesta, dejándonos la misma inquietud, mencionada anteriormente.

Pero por otra parte,en pequeños porcentajes, como podemos notar, algunos estudiantes lograron reemplazar y resolver correctamente, como otros que también lograron reemplazar, pero no lograron resolver correctamente el ejercicio, ya que se equivocaron durante la operatoria.



Por su parte, los docentes que nos colaboraron con la encuesta, no tuvieron mayores dificultades para resolver el ejercicio propuesto, reemplazaron correctamente las variables estipuladas e hicieron una correcta resolución de este, operando con los numeros complejos.

Pregunta 5

Encuentre las raíces de la ecuación:

$$x^3 – x^2 – 7x + 15 = 0$$

Para este problema se espera que los estudiantes puedan encontrar las tres raíces de la ecuación cubica, que al igual que el problema 3, por el Teorema de Gauss determinamos el número de raíces de la ecuación.

R1: Por medio del método algebraico se da solución a la ecuación cúbica:

$$x^3 – x^2 – 7x + 15 = 0 \qquad \text{cambio de variable } x = y + \frac{1}{3}$$

$$y^3 + y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{27} – y^2 – \frac{2}{3}y – \frac{1}{3} – 7y – \frac{7}{3} + 15 = 0$$

$$y^3 – \frac{22}{3}y + \frac{334}{27} = 0 \qquad \text{cambio de variable } y = u + v$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - \frac{22}{3}(u+v) + \frac{334}{27} = 0$$

$$(u^3 + v^3 + \frac{334}{27}) + (u+v)(3uv - \frac{22}{3}) = 0$$

Como u + v es la raíz, se determina que para la ecuación que tenemos sea igual a cero $u^3 + v^3 + \frac{334}{27} = 0$ y $3uv - \frac{22}{3} = 0$

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$u^3 + v^3 = -\frac{334}{27} \qquad (1)$$
$$uv = \frac{22}{9} \qquad (2)$$

En (2) se eleva la igualdad al cubo y al obtener el sistema de ecuaciones, identificamos en él un sistema de ecuaciones cuadráticas.

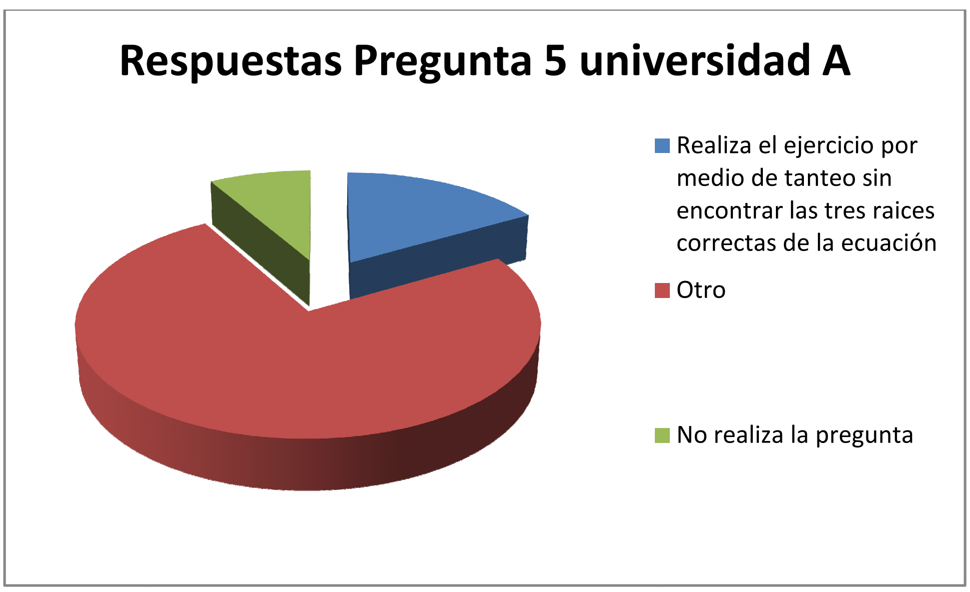
$$u^3 + v^3 = -\frac{334}{27}$$
$$u^3v^3 = \frac{10648}{729}$$

$$Z^2 + \frac{334}{27}Z + \frac{10648}{729} = 0$$

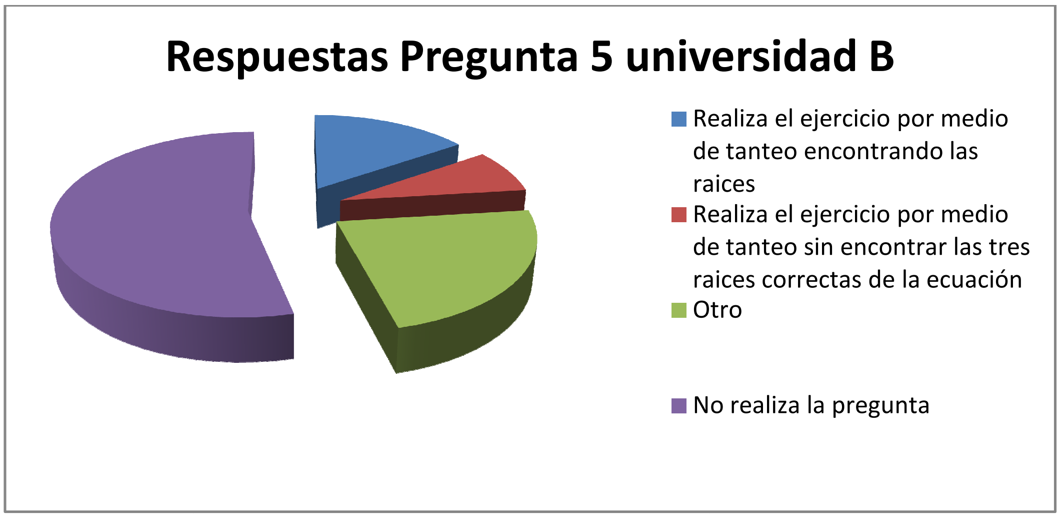
Legando así a encontrar el valor de $y_1 = \frac{8}{3}$

R2: Por medio de la Regla de Ruffini se determina una de las raíces de la ecuación cúbica $x_1 = 3$, luego se dividen los polinomios encontrando una ecuación cuadrática y se encuentran las raíces de la ecuación cuadrática que serán las dos raíces restantes de la ecuación cúbica.

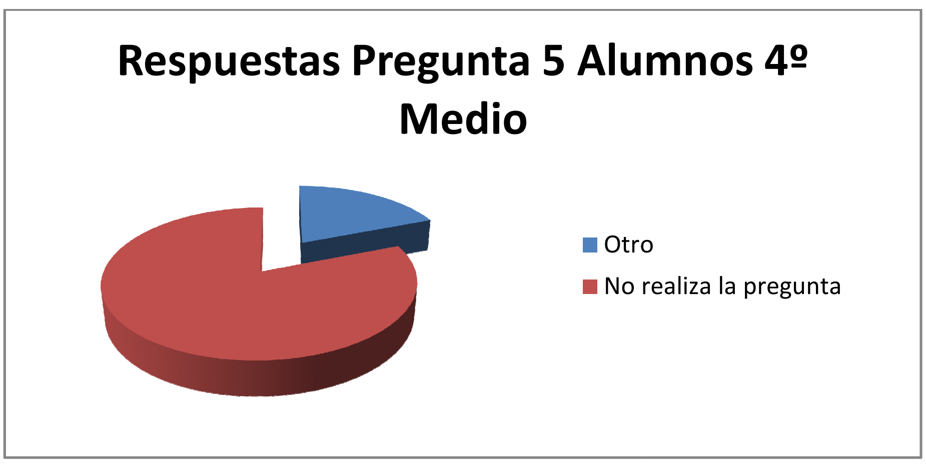
La dificultad de este ejercicio era algo mayor, y por ende se hizo notar en los diferentes resultados que se obtuvieron al revisar las diferentes encuestas realizadas a todos. En este caso en particular, los estudiantes de matemáticas de la universidad A, mayoritariamente realizo algún procedimiento que al final de cuentas no lo hizo llegar a ningún resultado, uno de los casos más recurrentes, fue que los jóvenes realizaron diversas factorizaciones para ver si de alguna forma obtenían las raíces del ejercicio. Otra parte de los jóvenes encuestados, intento ir realizando un tanteo, para así ir probando cuales podían ser la supuestas raíces del ejercicio, pero tampoco ninguno de ellos llego a un resultado correcto. Finalmente solo un estudiante decidió no realizar la encuesta, dejando el espacio correspondiente para responder en blanco.



En esta pregunta, en comparación a todas las otras hubo un gran contraste entre los estudiantes de la universidad B y de la universidad A, ya que en este caso, más del 50% de los estudiantes que fueron encuestados de la UMCE, no respondieron a esta pregunta, en comparación con los estudiantes de la UCSH, que tan solo un 8% no realizo la pregunta. Sin embargo, uno de los métodos que coincidió en los dos grupos, para encontrar las raíces, fue el tanteo, y en este caso, a un 15% de los estudiantes que dieron la encuesta, si les dio resultado, pero a otro 8% de los que utilizaron este método, no obtuvieron los resultados esperados.



Por su parte, con los estudiantes de 4° año medio, vuelve a suceder exactamente lo mismo que en la preguntas anteriores, un alto porcentaje de los estudiantes no realiza la pregunta, dejando todo el espacio de respuesta en blanco, mientras otros estudiantes, solo hacer algunas cosas, como son el ir factor izando por los primeros términos, o bien simplemente escriben en su hoja de respuesta que no saben cómo resolverlo.



Es en el caso de los profesores, que los cuatros encuestados, realizaron el ejercicio mediante tanteo, encontrando una de las raíces y concluyendo las otras.

Se puede concluir, que le método de resolución al que mas recurrieron nuestros encuestados exceptuando a los jóvenes de cuarto año medio, fue le método del tanteo, mediante el cual solo algunos obtuvieron las raíces a esta ecuación, y otros no llegaron a estas.

Pregunta 6

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$$\log(-x)^2 = \log x^2 \rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x) \rightarrow \mathbf{\log(-x) = \log(x)}.$$

Por lo que "log(-x)" existe y es un número real
En particular para x = 1 tenemos, ln(-1) = ln (1) que como sabemos, ln (1) = 0
¿Es cierto?, ¿es correcto el razonamiento?, explica tu respuesta

Posibles soluciones previas para los encuestados:

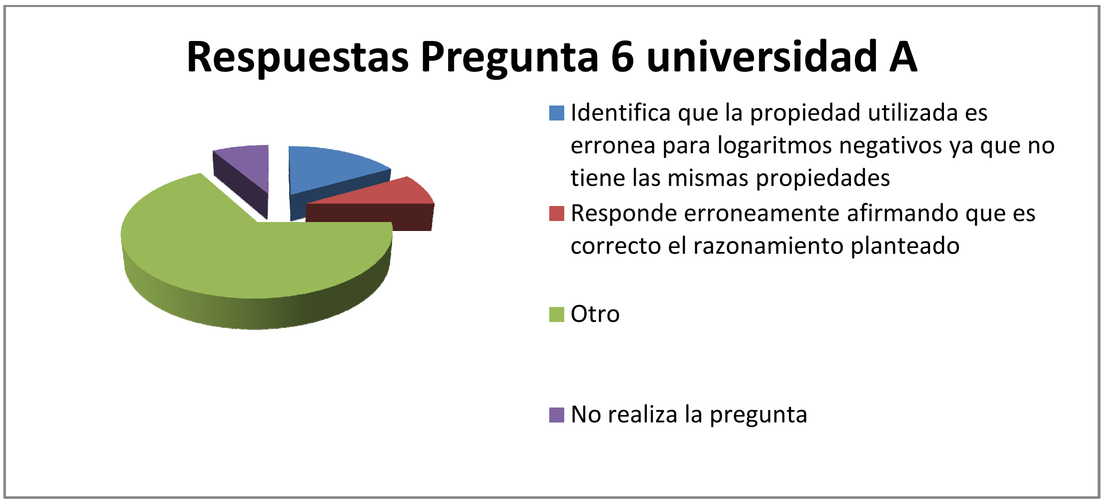
R1: Los encuestados identifican el error en la primera igualdad producido por la no existencia de las propiedades para calcular logaritmos de números negativos

R2: Identifican que no se puede realizar porque esta "mala" la igualdad y determina la no existencia de bases logarítmicas con números negativos

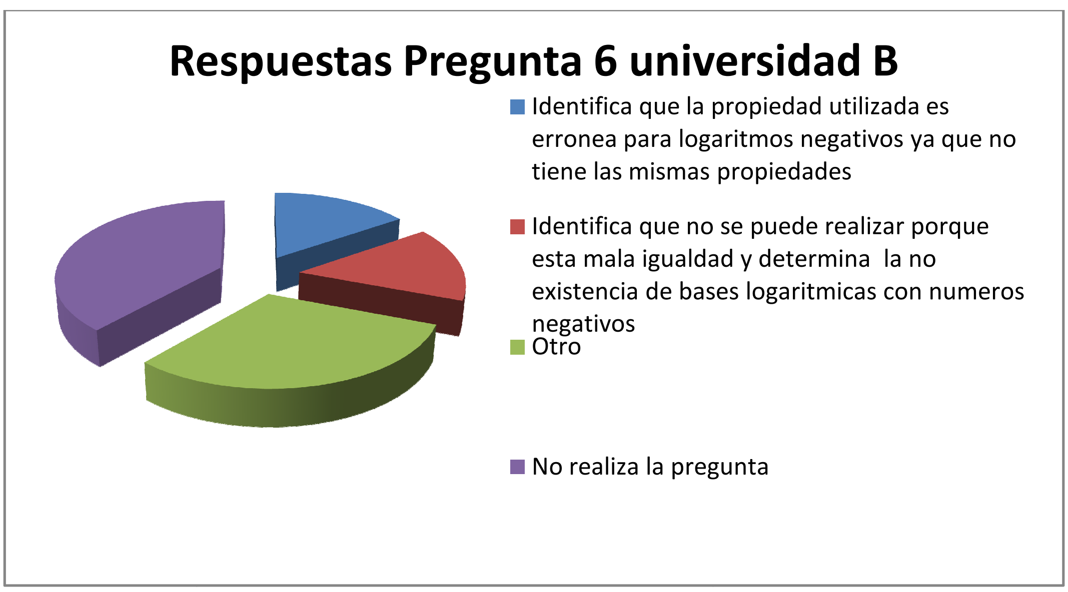
R3: Responde erróneamente afirmando que es correcto el razonamiento planteado

R4: No realiza la pregunta

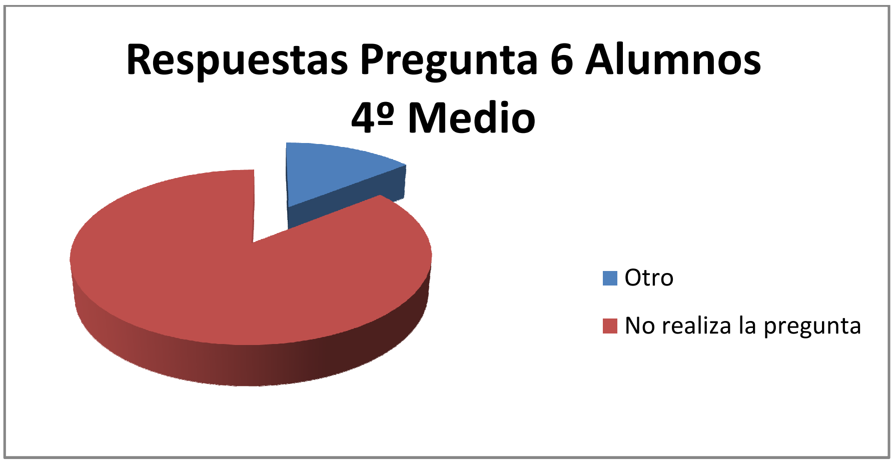
Dentro de esta pregunta, cuando la encuesta fue tomada a los estudiantes de la universidad A, genero gran conflicto visual, ya que caía en la lógica de estos, pero a medida que lo fueron analizando, se dieron cuenta que quizás no tenía tanta lógica, o bien simplemente no respondieron a la pregunta establecida en el ejercicio. Un gran porcentaje de los estudiantes, si bien no responde, otros hacen algunos "garabatos", no llegando a ninguna conclusión, sin embargo, uno de los estudiantes que dieron alguna respuesta, pero que se encontraba errónea, planteo que el argumento del log debe ser siempre positivo, descomponiendo Log (-x) =Log(-1*x)=Log(-1)*Log(x) determinando que Log(-1) no existe.



En el caso de los estudiantes de la universidad B, alrededor de un 40% de los estudiantes no realiza la pregunta y alrededor de un 31% de estos solo escribe algunas ideas, algunos “garabatos”, no llegando a ninguna conclusión o respuesta de lo que se les pedía en la pregunta. Sin embargo un grupo más minoritario, con alrededor de un 15% cada uno de estos, por un lado identifica que la propiedad utilizada es errónea para logaritmo negativo, ya que estos no tienen las mismas propiedades, y por otra parte, otros no realizan el ejercicio ya que declaran que los los logaritmos con base negativa no existen.



En el caso de los estudiantes que se encontraban cursando 4º año medio, sucedió algo más radical al respecto, alrededor del 86% de los estudiantes, no dio respuesta alguna a la pregunta realizada y el otro 14% solo escribió algunas cosas, como que no sabían, o simplemente algunas rayas, no dando una respuesta más bien concreta.



Tres de los cuatro docentes que fueron encuestados, no dieron la respuesta correcta a la preguntan, diciendo que la igualdad presentada si era correcta. Por su parte el profesor restante, dio como respuesta que esta igualdad, no era correcta, sin embargo no argumento de ninguna forma su respuesta, no permitiéndonos ver si existían algún conocimiento más haya que su respuesta.

Como panorama general, concluyo, que la gran mayoría, no decidió responder esta respuesta, por diversos motivos, entre ellos el no conocimiento de aquello, o bien como mencionábamos que fue el caso de los chicos de cuarto año medio, la poca disponibilidad de tiempo para dar respuesta a esta.

Se anexan dos tipos de respuestas de cada preunta entregada por los estudiantes encuestados, siendo respuestas que dan a conocer los aciertos y dificultades presentados con anterioridad en el análisis general de las producciones.

Con relación a la validación anexada, se realiza una propuesta de encuesta para una posterior aplicación considerando las observaciones entregadas, que fueron posteriores a la aplicación de la encuesta inicial.

UNIVERSIDAD CATÓLICA SILVA HENRÍQUEZ

Estimado encuestado:

El presente instrumento de recolección de información es una encuesta escrita, tipo cuestionario con respuestas abiertas. Sus respuestas son relevantes para el estudio realizado en relación a los números complejos, tanto en los estudiantes, docentes y futuros docentes. La encuesta es anónima, por lo que se agradece su disposición a expresarse con toda sinceridad.

Datos iniciales:

SEXO**:** F____ M____ EDAD: _____ años

COLEGIO/LICEO o UNIVERSIDAD _______________________________

Pregunta 1:

Utilizando los símbolos <, >, = ordena, si es posible, de menor a mayor los siguientes números:

c) $1 - i^{27}$; $-1 + 3\sqrt{-3}$; $-1 - 3i^{32}$; $1 + \sqrt{-4}$

Explica el desarrollo establecido

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Pregunta 2:

Determina el valor de los siguientes productos:

a) $\sqrt{-7} * \sqrt{7} * \sqrt{-1} * \sqrt{-4}$

Explica tu respuesta

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Pregunta 3:

Divide el número 14 en otros dos para que el producto resulte ser 64, ¿cuáles son los números?

Explica el desarrollo establecido

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Pregunta 4:

Considerando $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = \frac{1}{5}\sqrt{-3}$, determine:

$(z_2 - z_1)*z_3$

Explica tu desarrollo

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Pregunta 5

Encuentre las raíces de la ecuación:

$$x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$$

Explica tu respuesta

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Pregunta 6

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$$\log(-x)^2 = \log x^2 \rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x) \rightarrow \mathbf{\log(-x) = \log(x)}.$$

Por lo que "log(-x)" existe y es un número real

En particular para x = 1 tenemos, ln(-1) = ln (1) que como sabemos, ln (1) = 0

¿Es cierto?, ¿es correcto el razonamiento?, explica tu respuesta

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Pregunta 7

Escriba en forma binomial, polar y exponencial los siguientes números complejos:

a) $Z_1 = 3 - 2i$
b) $Z_2 = (2, 3)$
c) $Z_3 = \left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

Explica tu respuesta
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Pregunta 8 (solo para docentes)

Durante su experiencia como docente, ¿ha implementado los contenidos de los números complejos? Describa su respuesta.
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

¿Considera usted que es necesaria la implementación de este contenido en la educación media? Describa su respuesta.
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

CAPÍTULO VIII

Conclusiones de la Investigación.

Considerando los resultados obtenidos al aplicar las encuestas en las diferentes categorías expuestas, se puede determinar que los supuestos establecidos fueron certeros y que por lo tanto la hipótesis estaría respaldada en cierta medida. Cabe mencionar, que pese a que en este estudio de casos el universo muestral fue menor al deseado, los resultados que este instrumento entregan, de igual forma, información relevante para determinar un análisis que deja datos muy claros con respecto a la concepción del los números complejos por parte de los docentes, futuros docentes y alumnos de enseñanza media.

Como se puede ver en los anexos y con relación a los supuestos establecidos, los resultados en algunos casos son evidentes. Mucho de los estudiantes universitarios, no tienen grandes conocimientos de los que son los números complejos, sin embargo, las diferencias se presentan entre las dos universidades encuestadas.

Los estudiantes de la universidad privada si presentan más falencias al aplicar el conocimiento conceptual de los números complejos que los estudiantes de la universidad tradicional, determinando así que el desarrollo del pensamiento con relación al mapa de progreso dado por el MINEDUC para enseñanza media no ha sido cumplido a cabalidad para los futuros docentes.

Como se mencionaba con anterioridad, el Ministerio de Educación, se encuentra en la implementación pronta de la unidad de los complejos, para el nivel de tercero medio, por lo cual, si se desea mejorar esta área en los estudiantes, los futuros docentes, debiesen poseer un mayor manejo del concepto, para poder realizar en un futuro situaciones que realmente motiven a los estudiantes y puedan interiorizar este conocimiento que es importante para su desarrollo matemático-analítico.

Esto nos ayuda a apoyarnos para contrastar la hipótesis de investigación planteada aunque no se puede determinar si los futuros docentes lograrán generar situaciones didácticas y a-didácticas para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje.

Lo que si se logró apreciar y evaluar, fue si los docentes encuestados son competentes en este ámbito, manejando los diferentes conceptos, y haciéndonos ver cuál es la importancia y relevancia que le han dado hasta el día de hoy, con respecto a esta unidad. En su mayoría, los docentes respondieron correctamente a la totalidad de los problemas, pero presentaron inconsistencias conceptuales debido a que dos de ellos no habían desarrollado esta unidad en tercero medio, y porque hace años que no tomaban este nivel de estudiantes, y solo recordando algunas nociones sobre el contenido de los números complejos.

Es por esto, y en base a la totalidad de esta investigación, que los docentes pueden tener en consideración las falencias que los encuestados presentaron en las respuestas, como fue el caso de la gran mayoría de los estudiantes que se encontraban cursando cuarto año medio y realizaron la encuesta. Quedó en evidencia, que el contenido conceptual no motivó a los estudiantes para lograr una comprensión e interiorización de éste; que los estudiantes no han generado un mayor análisis de los problemas, que les permita llegar a diferentes indicios sobre los números complejos.

Con esta información de las encuestas emitidas por docentes y estudiantes de enseñanza media, se puede determinar que los estudiantes universitarios deben ir mejorando el conocimiento del sistema de los números complejos, en su manejo de la idea central, propiedades principales y aplicaciones. Ya que como futuros docentes hay que estar preparados con una de las principales herramientas, el conocimiento matemático, que hace una gran diferencia entre un docente bien preparado y otro que no lo esté. Debido a que, el docente preparado podrá enfrentar y defender su postura ya que sus conocimientos lo avalan y esto le dará mayor seguridad en un futuro laboral. Sin olvidar que los estudiantes están constantemente probando al profesor, viendo si realmente conoce la materia.

Es por esto que los docentes y futuros docentes, deberían saber guiar el contenido, determinado una metodología de enseñanza que sea más motivadora para los estudiantes, realizando así una buena transposición didáctica considerando la matemática realista de Freudenthal.

BIBLIOGRAFÍA:

Aguerrevere, S., Escalona, R., & Mendoza, L. (4 de Marzo de 2009). *matematicaupelipb*. Recuperado el Diciembre de 2012, de http://matematicaupelipb.blogspot.com/2009/03/historia-de-los-numeros-complejos.html

Anderson, J. R., Reder, L. M., & Simon, H. A. (1996). *Situated learning and education. Educational Researcher.*

Bórquez Avendaño, E., & Setz Mena, J. (Diciembre de 2010). *www.mineduc.cl.* (M. J. Leiva, Ed.) Recuperado el Diciembre de 2012, de http://w4app.mineduc.cl/catalogo2012/catalogo_2012/pdf/1/12_12_11_2.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires: Libros del Zorzal.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insightand Meaning: Teaching,Learning and Testing of Mathematics for the Life and Social Sciences. Utrecht, The Netherlands: Rijksuniversiteit Utrecht.*

Fernández Lajusticia, A., & Puig Espinoza, L. (s.f.). Una Actividad Matemática organizada en el marco de los Modelos Teóricos Locales: Razón y Proporción en la Escuela Primaria. *SEIEM* , 2.

Guzmán R., I. *Teoría de Situaciones Didácticas.* Universidad Católica de Valparaiso, Fundamentos Teóricos de la Didáctica de la Matemática.

Hoek, D. (1998). *Social and Cognitive Strategies in Co-operative Groups. Doctoral dissertation, Graduate School of Teaching and Learning, University of Amsterdam.*

Keune, F. (1998). *Naarde knoppen, Inaugural lecture, University of Nijmegen.*

Korthagen, F. A. (2001). *Linking Practice and Theory. The Pedagogy of Realistic Teacher Education.*

Kuhn, T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas.* Recuperado el Diciembre de 2012, de http://www.clorenzano.com.ar: http://www.clorenzano.com.ar/bibliografia/kuhn.pdf

Martínez Rizo, F. (19 de Febrero de 2002). *fmrizo.net.* Recuperado el Diciembre de 2012, de http://www.fmrizo.net/fmrizo_pdfs/articulos/A%20077%202002%20La%20disputa%20entre%20paradigmas%20REP.pdf

Memorias Bibliográficas, T. I. (s.f.). *Juan Bosco 33M - Lista*. Recuperado el Diciembre de 2012, de wiksocial: http://33m.lista.cl/wiksocial/Juan_Bosco.html

Ministerio de Educación, República de Chile. (Diciembre de 2009). *educachile.* Recuperado el 30 de Diciembre de 2012, de http://www.educarchile.cl/Userfiles/P0001%5CFile%5CMarco_Curricular_Ed_Basica_y_Media_Actualizacion_2009%20%285%29.pdf

Nelissen, J. M. (1987). *Kinderen leren Wiskunde [Children Learn Mathematics] Gorinchem, The Netherlands: De Ruiter.*

Roelofs, E., & Terwel, J. (1999). *Constructivism and authentic pedagogy: state of the art and recent developments in the Dutch national curriculum in secondary education. Journal of Curriculum Studies.*

Streefland, L. (1990). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research (Dordrecht, The Netherlands:Kluwer.*

Van Den Brink, F. J. (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jongekinderen Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.*

Verstappen, P. (1991). *Easier Theorized Than Done. Enschede, The Netherlands: Dutch National Institute for Curriculum Developmen.*

Zaldivar, F. (1996). *Teoría de Galois.* Iztapalapa, Mexico: Editorial Anthropos.

ANEXOS

Anexo 1: Carta para la validación de la encuesta

Santiago, Diciembre de 2012

Sr. Alonso Quiroz Meza

Docente de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa

Universidad Católica Silva Henríquez

Estimado:

Me dirijo a usted para solicitar su colaboracion en la validacion de tres instrumentos enmarcados en el proyecto de mi seminario de grado, tres encuestas abiertas que están dirigidas a docentes, estudiantes de cuarto año de enseñanza media, y estudiantes de Pedagogía en Matemática de una universidad privada y de una universidad estatal. Los tres instrumentos se complementan y están estructurados de igual forma ya que se quiere llegar a concluir y obtener la perspectiva y mirada del docente, del estudiante y del futuro docente con respecto a propiedades y operaciones con soluciones en el sistema de los números complejos.

El propósito que se persigue es determinar los conocimientos poseídos relacionados al sistema de los números complejos, la aceptación o no de la existencia de las raíces de números negativos como números imaginarios y la unidad imaginaria, que pertenecen al sistema de los números complejos, la inclusión de raíces complejas de ecuaciones cuadráticas y cúbicas, y la determinación de que los números complejos no son ordenados ya que pertenecen a un plano complejo donde las coordenadas complejas no se pueden ordenar y que no cumple las condiciones de orden, solo se define el llamado orden modular que es determinado por el valor del módulo de los números complejos que es un valor perteneciente a los números reales el cual si cumple los axiomas de orden, esto para determinar el nivel de aprendizaje de los estudiantes en este contenido conceptual, si los docentes han incluido en sus planificaciones y objetivos la unidad de los números complejos y si los estudiantes de pedagogía están bien preparados para la enseñanza progresiva de los complejos señalando siempre que los números con raíces negativas o soluciones complejas existen pero no las han trabajado aún en niveles previos a su implementación en aula como conocimiento y que al ser complejos tienen propiedades propias diferentes a las de números reales.

En base a esto generar una metodología, estrategias y reflexiones para la enseñanza-aprendizaje del sistema de los números complejos en la enseñanza media, que según los objetivos de 3º medio se tratan en la unidad 1: Números.

Agradezco su gentileza,

Atentamente.

Eduardo Alejandro Vargas Bustos.
Estudiante de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa.
Universidad Católica Silva Henríquez.

PAUTA PARA VALIDAR ENCUESTA

Nombre del Juez(a): ALONSO QUIROZ MEZA

Especialidad: EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Experiencia como validador: AL MENOS CINCO TRABAJOS SIMILARES

Para el proceso de validación de la entrevista solicitamos identificar:

CRITERIOS	**RESPUESTA**
Preguntas fuera de contexto:	Todas las preguntas están en el contexto del tema
Preguntas ambiguas:	La pregunta 7 para docentes debiera solicitar una descripción y no un argumento.
¿Las preguntas cubren el propósito señalado?	Sólo de un modo parcial, no están las potencias de i, ni las distintas formas de un número complejo.
La cantidad de preguntas es suficiente.	Faltan preguntas relativas a los temas señalados en la respuesta anterior.

Observaciones Generales:

En la pregunta 1 cuando se pide a los estudiantes que ordenen, se les está induciendo a error ¿es así como está pensado?

Debiera especificarse el objetivo de cada pregunta y la respuesta esperada para cada una de ellas.

RESUMEN DE INFORMACIÓN DEL PROYECTO DE TESIS

TÍTULO:

“El sistema de números complejos en la enseñanza media y superior, aceptación de soluciones complejas: un estudio de casos”

PROPÓSITO DE LA TESIS:

El propósito de esta investigación es explorar los conocimientos obtenidos del sistema de los números complejos y la aplicación de éstos por parte de los docentes al momento de enseñar este contenido matemático, si así lo hacen. Y cómo los estudiantes de Pedagogía en matemática están preparados para enfrentar la unidad temática de “Números Complejos” propuesta por el Ministerio de Educación para Tercero Medio en el eje de “Números”.

PREGUNTAS

1. ¿Los estudiantes de enseñanza media y futuros docentes de matemáticas poseen el conocimiento del sistema de los números complejos aceptando las soluciones entregadas como posibilidades existentes de solución utilizando las propiedades ajustadas a este sistema reconociéndolo como una extensión del campo numérico?

2. ¿El docente realiza intervenciones pertinentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula para que el alumno logre construir un conocimiento conceptual y procedimental de la existencia de raíces negativas, logaritmos negativos, raíces cuadradas de números negativos y soluciones de ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado pertenecientes a los números complejos?

3. ¿Los estudiantes de enseñanza media desarrollan un análisis de los problemas que lo lleve a dar indicios de soluciones que sean parte de los números complejos?

4. ¿Los estudiantes universitarios, futuros pedagogos, presentan conocimiento desarrollado de las operaciones y propiedades existentes en el sistema de los números complejos?

OBJETIVO GENERAL:

Establecer, en base al estudio de casos particularizando en el Liceo Salesiano Camilo Ortúzar Montt, un análisis de la existencia dentro de su formación en la enseñanza media del concepto de los números complejos y la puesta en ejecución de sus conocimientos al presentar un problema cuyas soluciones no pertenezcan a los números reales y cómo los docentes pueden ir mejorando la inclusión paulatina de éste.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

4. Levantar conjeturas respecto de la formación que han recibido los estudiantes de 4º medio a lo largo de su formación académica.

5. Realizar análisis de las aptitudes de los futuros docentes de la Universidad Católica Silva Henríquez comparado con la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

6. Realizar análisis de las aptitudes de los profesores que tienen años de experiencia docente para determinar el grado de conocimiento poseído.

7. Presentar una propuesta de mejora de la enseñanza-aprendizaje de la unidad por medio de actividades en aula donde los estudiantes vayan descubriendo y problematizando los conocimientos adquiridos y así que los estudiantes puedan matematizar los conceptos matemáticos, determinando que los números complejos son utilizados y tienen varias aplicaciones matemáticas y físicas como por ejemplo el primero en solución de ecuaciones cuadradas y cúbicas, y el segundo en circuitos eléctricos ha hecho dicha unidad dentro del transcurso de su experiencia como docente.

Anexo 2: Encuestas Universidad Privada

Pregunta 1:

Utilizando los símbolos <, >, = ordena de menor a mayor los siguientes números:

a) $\sqrt{-3}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, 0, $10-\sqrt{-7}$

$0 < \sqrt{1} < \sqrt{4}$

Explica el desarrollo establecido

ordene solo esos 3 números por $\in$ a $\mathbb{R}$ en cambio $\sqrt{-3}$ y $10-\sqrt{-7}$ $\notin \mathbb{R}$ por lo tanto no cumple con los axiomas de orden.

b) 1 – i; -1 + 3i; -1 - 3i; 1 + i

Explica el desarrollo establecido

No los puedo ordenar (aunque podría hacer es calcular la longitud de cada vector pero en este momento no me recuerdo como hacerlo.

Pregunta 1:

Utilizando los símbolos <, >, = ordena de menor a mayor los siguientes números:

$1+0i$ $2+0i$ $0+0i$ $10-\sqrt{7}i$

$10+0i-\sqrt{7}i$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$

$\sqrt{3}\,i$

a) $\sqrt{-3}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, 0, $10-\sqrt{-7}$

, 1 , 2

Explica el desarrollo establecido

NO TENGO DESARROLLO, PORQUE NO SÉ COMO ESTÁ CONSTITUIDO EL ORDEN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS, SÉ QUE SOLO TENGO QUE TRABAJAR EN DICHO CONJUNTO, PERO NO SABRÍA ORDENARLOS DE MENOR A MAYOR

b) 1 – i; -1 + 3i; -1 - 3i; 1 + i

Explica el desarrollo establecido

IGUAL AL ANTERIOR

Pregunta 2:

Determina el valor de los siguientes productos:

a) $\sqrt{-7} * \sqrt{-7} =$ $7i \cdot 7i$

Explica tu respuesta

$49i$ chamullo

b) $\sqrt{-7} * \sqrt{7} * \sqrt{-1} * \sqrt{-4}$

Explica tu respuesta

idem

Pregunta 2:

Determina el valor de los siguientes productos:

a) $\sqrt{-7} * \sqrt{-7} = \sqrt{7}\,i \cdot \sqrt{7}\,i = 7i^2 = -7$

Explica tu respuesta

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS HEREDA LAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES, POR LO TANTO, SE PUEDEN OPERAR COMO REALES. ESTO SE DEBE A QUE LOS COMPLEJOS SON ISOMORFOS A LOS REALES.

b) $\sqrt{-7} * \sqrt{7} * \sqrt{-1} * \sqrt{-4}$

Explica tu respuesta

DADO QUE EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS ES ISOMORFO AL DE LOS NÚMEROS REALES, ENTONCES, LOS COMPLEJOS HEREDAN LAS PROPIEDADES DE LOS REALES, SIENDO OPERADOS COMO TALES.

$\sqrt{7}\,i \cdot \sqrt{7} \cdot i \cdot \sqrt{4}\,i = 7i^2 \cdot 2i$

$= -14i$

Pregunta 3:

Divide el número 14 en otros dos para que el producto resulte ser 64, ¿cuáles son los números?

$14 = X + Y$ $\quad$ $14 - Y = X$ $\quad$ $Y^2 - 14Y = 64$

$64 = X \cdot Y$ $\quad$ $64 = (14 - Y) \cdot Y$ $\quad$ $Y^2 - 14Y - 64 = 0$

$64 = 14Y - Y^2$

Explica el desarrollo establecido

no hay ningun número que al multiplicarlo den -64 y al sumarlo de -14.

Pregunta 3:

Divide el número 14 en otros dos para que el producto resulte ser 64, ¿cuáles son los números?

$\frac{14}{7} = 2$ $\quad$ $\frac{2}{x} = 64$ $\quad$ $\frac{2}{64} = x$ $\quad$ $x = \frac{1}{32}$

$n^o 1 = 2$

$n^o 2 = \frac{1}{32}$

Explica el desarrollo establecido

divide 14 en 7 lo que me dio 2 y luego busque un número que al dividir 2 por el me de 64 a travez de una ecuación

Pregunta 4:

Considerando $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = \frac{1}{5}$, determine:

$(z_2 - z_1)^* z_3$

$$\left[(-5-i) - (-2+3i)\right] \cdot \frac{1}{5}$$
$$\left[-5 - i + 2 - 3i\right] \cdot \frac{1}{5}$$
$$\left[-3 - 4i\right] \cdot \frac{1}{5}$$
$$-\frac{3}{5} - \frac{4i}{5} \quad \boxed{\frac{-3-4i}{5}}$$

Explica tu desarrollo

Pregunta 4:

Considerando $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = \frac{1}{5}$, determine:

$(z_2 - z_1)^* z_3$ $\left[(-5-i) - (-2+3i)\right] \cdot \frac{1}{5}$

$$\left[-5 - i + 2 - 3i\right] \cdot \frac{1}{5}$$
$$\left[-3 - 4i\right] \cdot \frac{1}{5}$$
$$-\frac{3-4i}{5} \;//$$

Explica tu desarrollo

Reemplazo los valores y resolver algebraicamente

Pregunta 5

Encuentre las raíces de la ecuación:

$X^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$ $\quad \boxed{x = \begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases}}$

$(x^2 - x - 7) = 3$

$\cancel{x^2 - x - 10 = 0}$

$(x^2 - x - 7) = 5$

$x^2 - x - 12 = 0$

$x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0 \rightarrow -(x^3 - x^2 - 7x) = 15$

$-15 + 15 = 0$

$x(x^2 - x - 7) = 15$

$x = \begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases}$

$3 \cdot 5 = 15$

$(x^2 - x - 7) = \begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases}$

$(x - 4)(x + 3) = 0$

$\boxed{x = 4 \\ x = -3}$

Explica tu respuesta

No se!!

$\boxed{x = -3} \rightarrow$ uno de las 3 raíces

W

Pregunta 6

Pregunta 5

Encuentre las raices de la ecuación:

$X^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$ $\quad \begin{matrix} 3 \cdot 5 \\ -3 \cdot 5 \end{matrix}$

$(-3)^3 - (-3)^2 - 7(-3) + 15 = 0$

$0 = 0$

$x = -3$

Explica tu respuesta

Se mira el último digito y se ve que numeros multiplicados dan 15 que serían 3·5 y -3·5, se ve cual es solución en este caso X=-3

Pregunta 6

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$$\log(-x)^2 = \log x^2 \rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x) \rightarrow \mathbf{\log(-x) = \log(x)}.$$

Por lo que "log(-x)" existe y es un número real

En particular para x = 1 tenemos, ln(-1) = ln (1) que como sabemos, ln (1) = 0

¿Es cierto?, ¿es correcto el razonamiento?, explica tu respuesta

todo número al cuadrado es un positivo por lo cual se puede ocupar el log en ese caso particular pero, no se puede ocupar propiedades ya que dejaríamos de trabajar en $\mathbb{R}^+$ para trabajar en $\mathbb{R}$ por lo cual no lo podemos hacer con los log.

Pregunta 6

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$$\log(-x)^2 = \log x^2 \rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x) \rightarrow \mathbf{\log(-x) = \log(x)}.$$

Por lo que "log(-x)" existe y es un número real

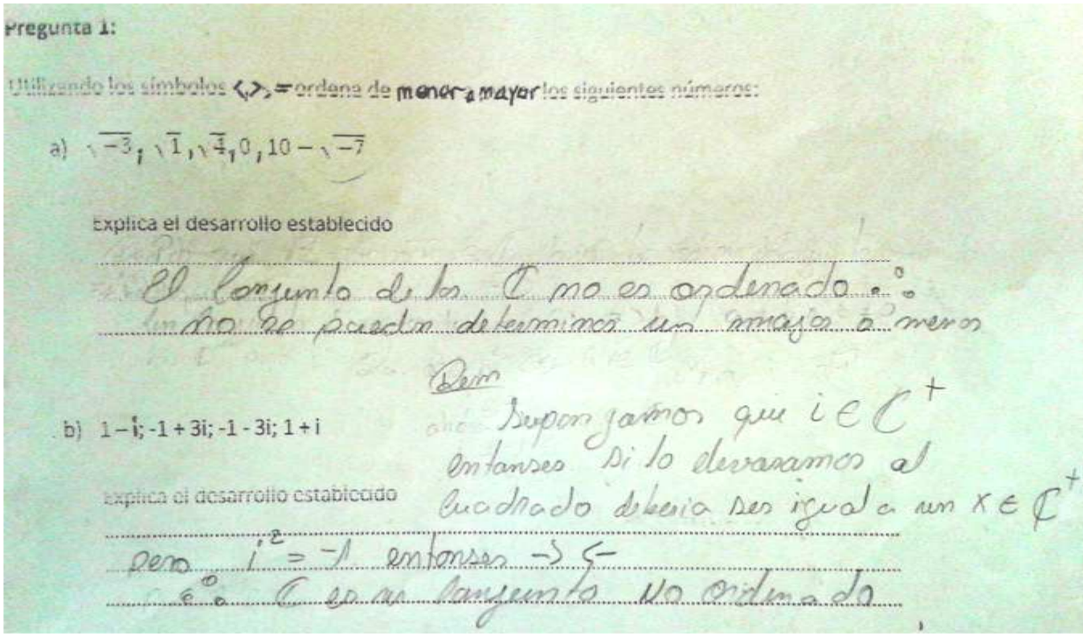
En particular para x = 1 tenemos, ln(-1) = ln (1) que como sabemos, ln (1) = 0

¿Es cierto?, ¿es correcto el razonamiento?, explica tu respuesta

Sí, pues suponiendo que

$$\ln(-1)^2 = \ln(1)^2$$
$$2\ln(-1) = 2\ln(1) \quad / \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$\ln(-1) = \ln(1).$$

Anexo 3: Encuestas Universidad Tradicional



Pregunta 1:

Utilizando los símbolos $<, >, =$ ordena de **menor a mayor** los siguientes números:

a) $\sqrt{-3}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, 0, $10 - \sqrt{-7}$

Explica el desarrollo establecido

El conjunto de los $\mathbb{C}$ no es ordenado $\therefore$ no se pueden determinar un mayor o menor

Dem

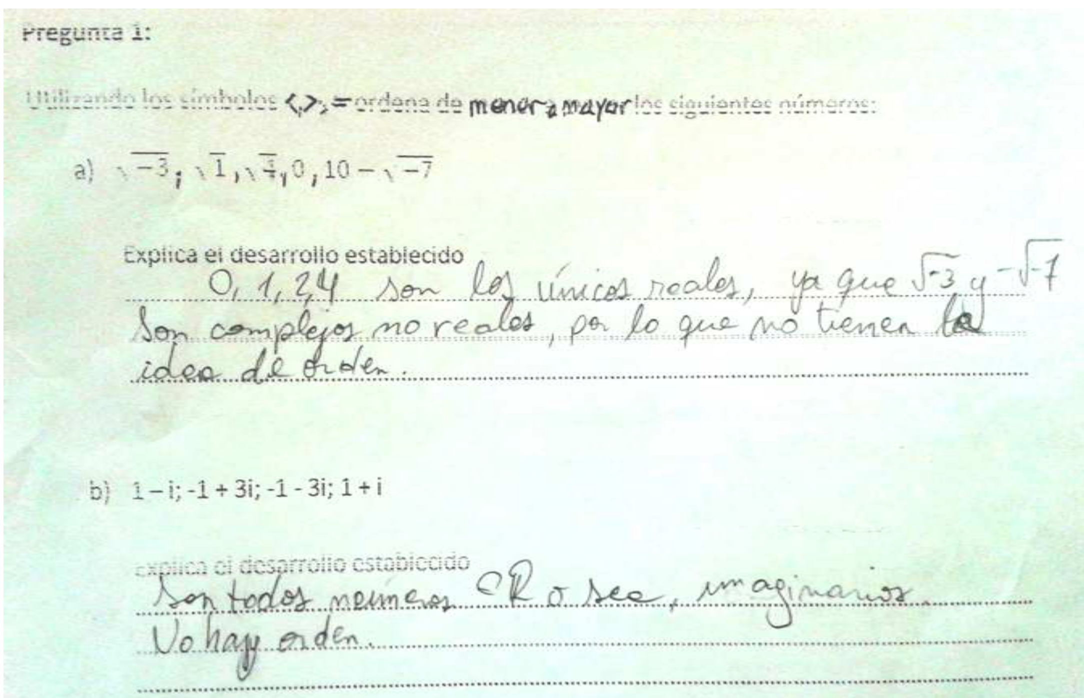
Supongamos que $i \in \mathbb{C}^+$ entonces si lo elevaramos al cuadrado debería ser igual a un $x \in \mathbb{C}^+$

b) $1 - i$; $-1 + 3i$; $-1 - 3i$; $1 + i$

explica el desarrollo establecido

pero $i^2 = -1$ entonces $\rightarrow \Leftarrow$

$\therefore$ $\mathbb{C}$ es un conjunto no ordenado



Pregunta 1:

Utilizando los símbolos $<, >, =$ ordena de **menor a mayor** los siguientes números:

a) $\sqrt{-3}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, 0, $10 - \sqrt{-7}$

Explica el desarrollo establecido

0, 1, 2, 4 son los únicos reales, ya que $\sqrt{-3}$ y $-\sqrt{-7}$ son complejos no reales, por lo que no tienen la idea de orden.

b) $1 - i$; $-1 + 3i$; $-1 - 3i$; $1 + i$

explica el desarrollo establecido

Son todos números $\notin \mathbb{R}$ o sea, imaginarios. No hay orden.

Pregunta 2:

Determina el valor de los siguientes productos:

a) $\sqrt{-7}\cdot\sqrt{-7} = \sqrt{(-7)(-7)} = \sqrt{49} = 7$ $\quad \sqrt{-7}\cdot\sqrt{-7} = i\sqrt{7}\cdot i\sqrt{7} = 7i^2 = -7.$

Explica tu respuesta

1er método: Aplicando prop. de raiz: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{(a)(b)}$ y aplicando prop. de multiplicación $\sqrt{(-a)(b)} = \sqrt{+ab} = \sqrt{ab}$. ~~Como el primer caso.~~

V 2º Método: Aplicando directamente la propiedad $\sqrt{-b} = \sqrt{-1}\sqrt{b} = i\sqrt{b}$ y luego multiplicando $i\sqrt{a}\cdot i\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab} = -i\sqrt{ab}$

b) $\sqrt{-7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4} = -i\sqrt{(7\cdot 7)\cdot(1\cdot 4)} = -i\sqrt{49}\sqrt{4} = -14i$ $\quad \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

Explica tu respuesta Como son productos, aplico la propiedad. ~~cuento~~ los signos negativos, como son ~~[illegible]~~ tres ~~[illegible]~~ es $-i$, luego resuelvo la parte numérica y es 14, finalmente es $-14i$

Pregunta 2:

Determina el valor de los siguientes productos:

a) $\sqrt{-7}\cdot\sqrt{-7} = \sqrt{(-7)(-7)} = \sqrt{49} = 7$, pero $\sqrt{7}i\cdot\sqrt{7}i = \sqrt{7}\cdot i^2 = -\sqrt{7}$.

$\sqrt{(-7)^2} = (-7)^{\frac{2}{2}} = -7$

Respuesta

Explica tu respuesta

Para los nos complejos el trabajo con operaciones definidos en los reales, admite muchas soluciones. Se debería hacer con fórmula. (pero no me acuerdo xD)

b) $\sqrt{-7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4} = \sqrt{7}\cdot i\cdot\sqrt{7}\cdot i\cdot 2i = -14i = -\sqrt{-196}$.

Explica tu respuesta

Ídem.

Pregunta 3:

Divide el número 14 en otros dos para que el producto resulte ser 64, ¿cuáles son los números?

i) $x + y = 14$

ii) $x\cdot y = 64$

Se arma un sistema de ecuaciones, que no tiene soluciones Reales, por lo que se concluye que no existen dichos números.

En $\mathbb{C}$, los números son $(7 + i\sqrt{15})$ y $(7 - i\sqrt{15})$.

Explica el desarrollo establecido

El producto máximo se produce cuando ambos medidos son iguales, es decir 7,5, luego $(7,5)^2 < 64$ por lo que los números no existen en $\mathbb{R}$, más sí en $\mathbb{C}$, que será la solución del sistema.

Pregunta 3:

Divide el número 14 en otros dos para que el producto resulte ser 64, ¿cuáles son los números?

$x + y = 14$

$x \cdot y = 64$

$x = \frac{64}{y}$

$\frac{64}{y} + y = 14$

$\frac{64 + y^2}{y} = 14$

$64 + y^2 = 14y$

$y^2 - 14y + 64 = 0$

$y = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 64}}{2}$

$y = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 256}}{2}$

$y = \frac{14 \pm \sqrt{-60}}{2}$

$y = \frac{14 \pm \sqrt{4 \cdot -15}}{2}$

$y = 14 \pm \sqrt{2 \cdot 2 \cdot -15}$

$y = \frac{14 \pm 2\sqrt{-15}}{2}$

$y_1 = \frac{14 + 2\sqrt{15}\,i}{2}$

$y_2 = \frac{14 - 2\sqrt{15}\,i}{2}$

Explica el desarrollo establecido

Formación de sistema, reemplazar, soluciones de ecuación de 2do grado

Pregunta 4:

Considerando $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = \frac{1}{3}$, determine:

$(z_2 - z_1)^* z_3$

$(-5 - i + 2 - 3i)\frac{1}{3}$

$(-3 - 4i)\frac{1}{3} = -1 - \frac{4i}{3}$

Explica tu desarrollo

Esta claro el desarrollo.

Pregunta 5

Encuentre las raíces de la ecuación:

$$x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$$

$(x+3)$ es múltiplo del polinomio, luego queda la expresión

$(x+3)\underbrace{(x^2 - 4x + 5)}_{(x-(2+i))(x-(2-i))} = 0.$

Explica tu respuesta

Encontré un múltiplo del polinomio y luego resolví la ecuación de grado 2.

Pregunta 5

Encuentre las raíces de la ecuación: $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0 & x+3 \\
\hline
-x^3 - 3x^2 & x^2 - 4x + 5 \\
\hline
-4x^2 - 7x & \\
4x^2 + 12x & \\
5x + 15 & \\
-(5x + 15) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$(x+3)(x^2-4x+5)$

$(x+3)(x-5)(x+1) = 0$

$R = -3 \vee +5 \vee -1$

Explica tu respuesta

Pregunta 6

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$-x \neq x$

$$\log(-x)^2 = \log x^2 \rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x) \rightarrow \log(-x) = \log(x).$$

Por lo que "log(-x)" existe y es un número real

En particular para $x = 1$ tenemos, $\ln(-1) = \ln(1)$ que como sabemos, $\ln(1) = 0$

¿Es cierto?, ¿es correcto el razonamiento?, explica tu respuesta

no, solo los cuadrados son iguales, esto no implica que $-x = x$

$\therefore -x \neq x$

$\log(-x) \neq \log(x)$

$\Downarrow$

$\nexists$

Pregunta 6

$(-x)^2 = x^2$

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$$\log(-x)^2 = \log x^2 \rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x) \rightarrow \log(-x) = \log(x).$$

Por lo que "log(-x)" existe y es un número real

En particular para $x = 1$ tenemos, $\ln(-1) = \ln(1)$ que como sabemos, $\ln(1) = 0$

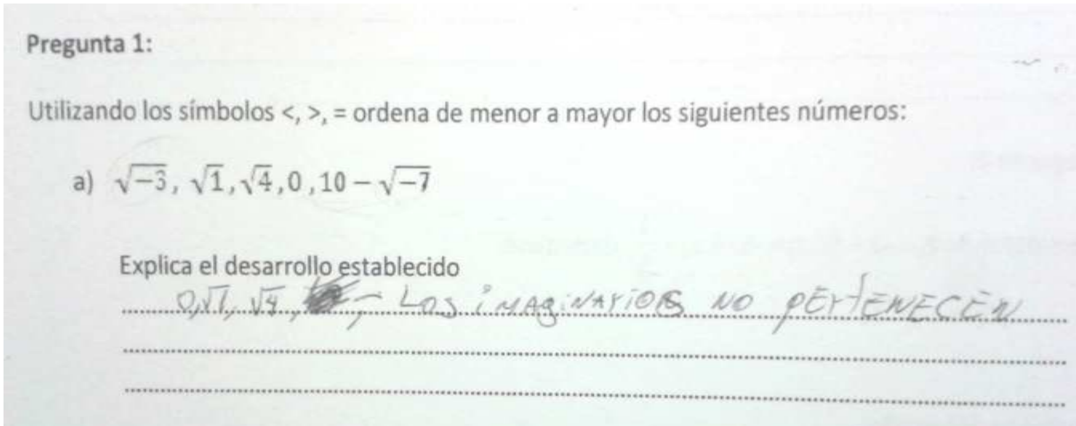
¿Es cierto?, ¿es correcto el razonamiento?, explica tu respuesta

Falso

$\ln_e(-1) = 0$ $e^0 = -1$ = imposible, todo núm. elevado a 0 es 1

las funciones log no están definidas para negativos, ya que las base de log son positivas, imposible que un log ~~esté~~ definido para $\mathbb{R}^-$

Anexo 4: Encuestas Estudiantes Enseñanza Media



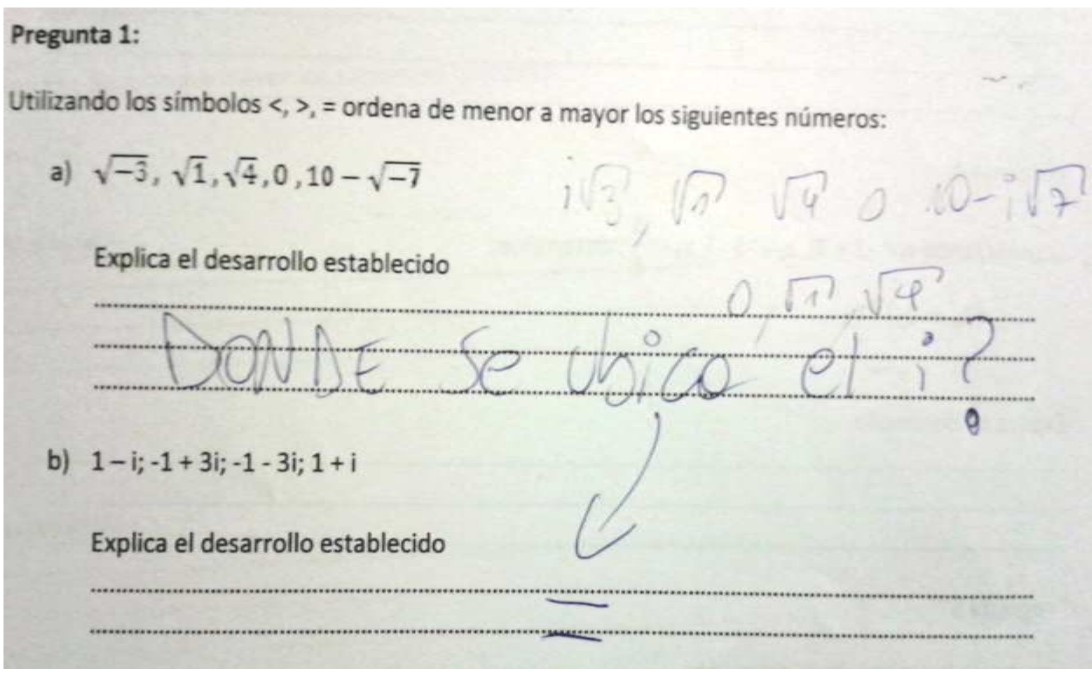
Pregunta 1:

Utilizando los símbolos <, >, = ordena de menor a mayor los siguientes números:

a) $\sqrt{-3}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, 0 , $10-\sqrt{-7}$

Explica el desarrollo establecido

0, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, ; LOS IMAGINARIOS NO PERTENECEN



Pregunta 1:

Utilizando los símbolos <, >, = ordena de menor a mayor los siguientes números:

a) $\sqrt{-3}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, 0 , $10-\sqrt{-7}$

$i\sqrt{3}$, $\sqrt{1}$ $\sqrt{4}$ 0 $10-i\sqrt{7}$

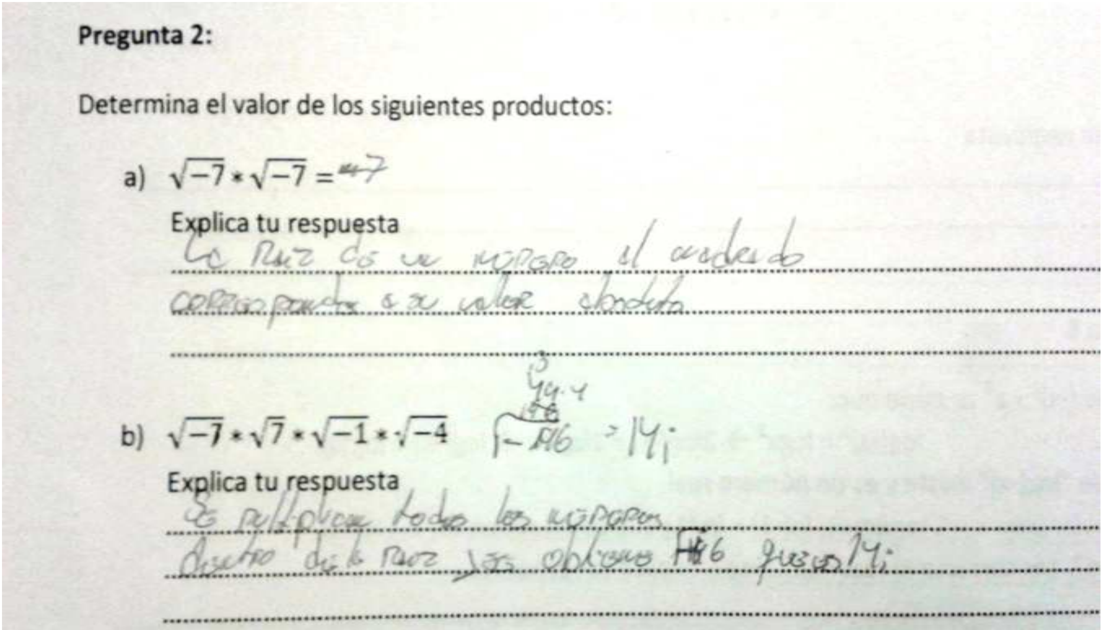
Explica el desarrollo establecido

0, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$

DONDE se ubicó el i?

b) 1 – i; -1 + 3i; -1 - 3i; 1 + i

Explica el desarrollo establecido



Pregunta 2:

Determina el valor de los siguientes productos:

a) $\sqrt{-7} * \sqrt{-7} = \cancel{+}7$

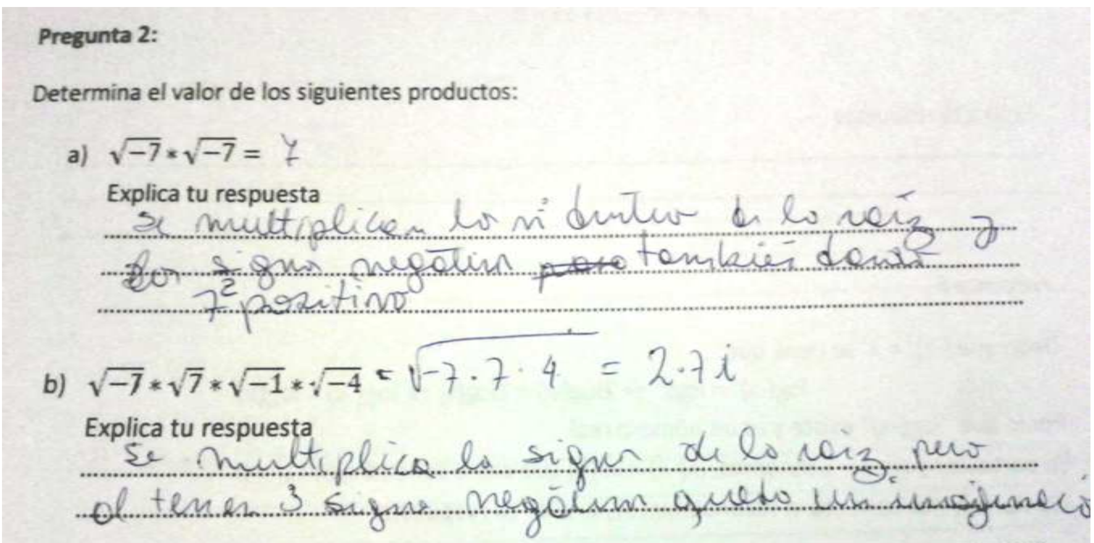
Explica tu respuesta

Lo raiz de un número al cuadrado corresponde a su valor absoluto

b) $\sqrt{-7} * \sqrt{7} * \sqrt{-1} * \sqrt{-4} \quad \sqrt{-196} = 14i$

Explica tu respuesta

Se multiplican todos los números dentro de la raiz los obtiene 196 que es 14i



Pregunta 2:

Determina el valor de los siguientes productos:

a) $\sqrt{-7} * \sqrt{-7} = 7$

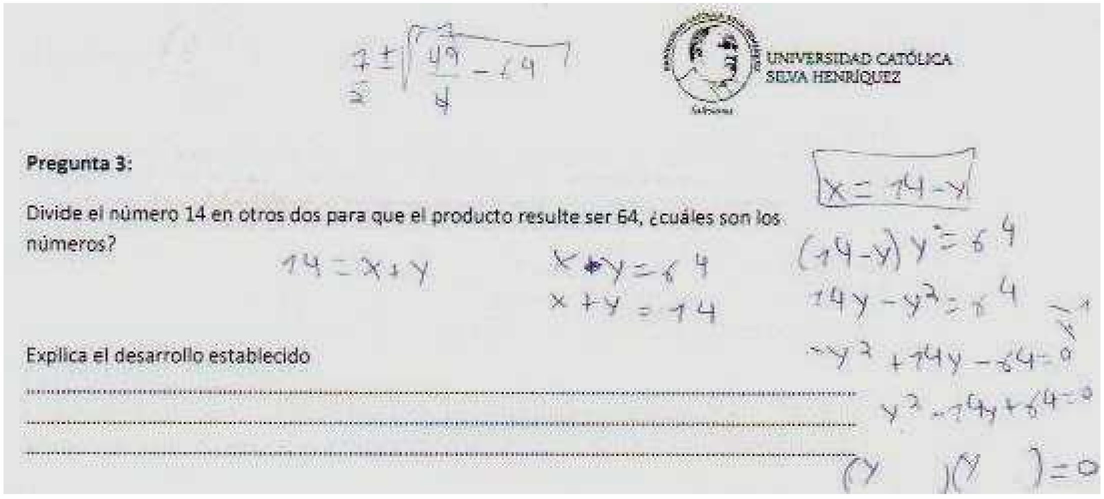
Explica tu respuesta

Se multiplican los nº dentro de la raiz y los signos negativos ~~pero~~ también darán 7^2 positivo

b) $\sqrt{-7} * \sqrt{7} * \sqrt{-1} * \sqrt{-4} = \sqrt{-7 \cdot 7 \cdot 4} = 2 \cdot 7i$

Explica tu respuesta

Se multiplica los signos de la raiz pero al tener 3 signos negativos queda un imaginario



$\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 14}$

UNIVERSIDAD CATÓLICA SILVA HENRÍQUEZ

Pregunta 3:

Divide el número 14 en otros dos para que el producto resulte ser 64, ¿cuáles son los números?

$14 = x + y$ $\quad x * y = 64$ $\quad x + y = 14$

$\boxed{x = 14 - y}$

$(14-y)y = 64$

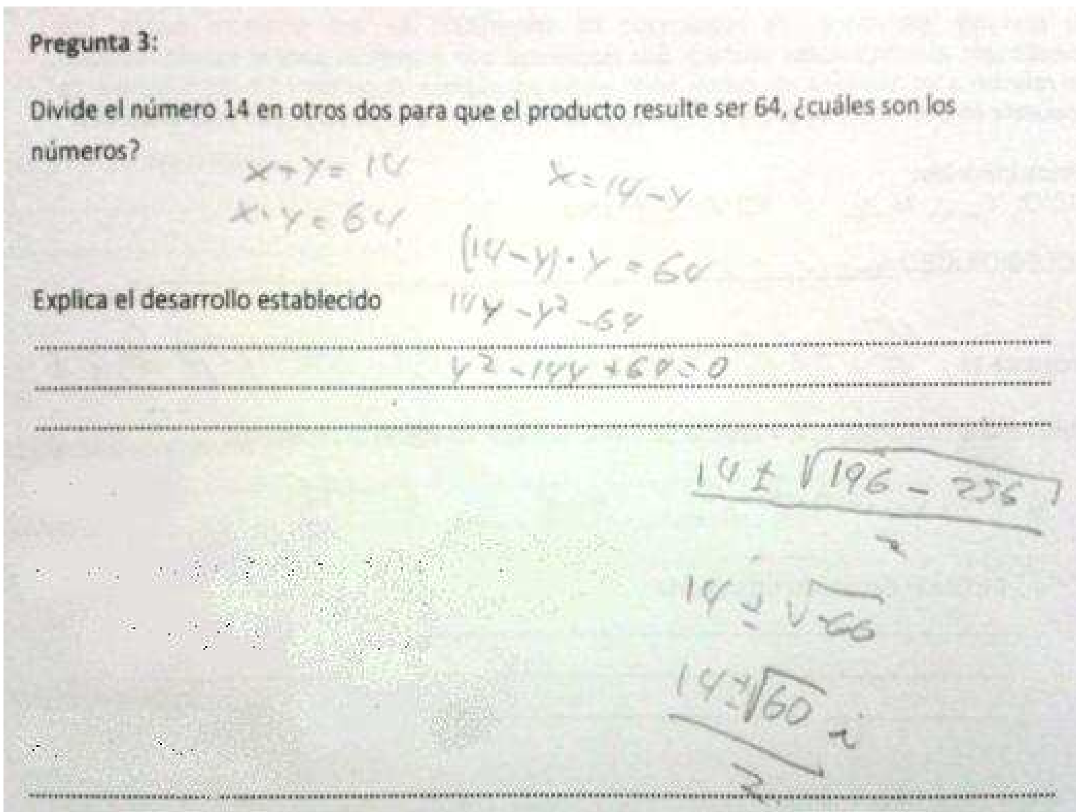
$14y - y^2 = 64$

$-y^2 + 14y - 64 = 0$

$y^2 - 14y + 64 = 0$

$(y \quad)(y \quad) = 0$

Explica el desarrollo establecido



Pregunta 3:

Divide el número 14 en otros dos para que el producto resulte ser 64, ¿cuáles son los números?

$x + y = 14$

$x \cdot y = 64$

$x = 14 - y$

$(14-y) \cdot y = 64$

Explica el desarrollo establecido

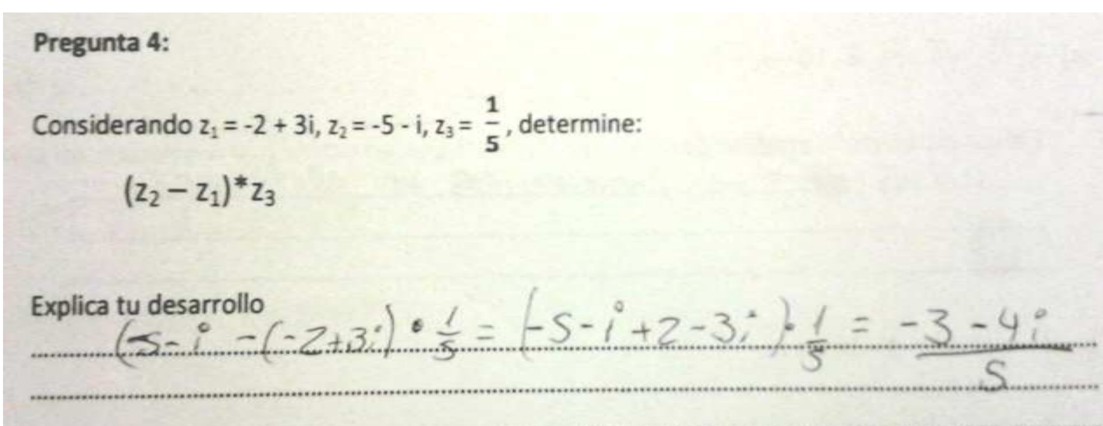
$14y - y^2 - 64$

$y^2 - 14y + 64 = 0$

$\frac{14 \pm \sqrt{196 - 256}}{2}$

$14 \pm \sqrt{-60}$

$\frac{14 \pm \sqrt{60}\, i}{2}$



Pregunta 4:

Considerando $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = \frac{1}{5}$, determine:

$(z_2 - z_1)^* z_3$

Explica tu desarrollo

$(-5 - i - (-2 + 3i)) \cdot \frac{1}{5} = (-5 - i + 2 - 3i) \cdot \frac{1}{5} = \frac{-3 - 4i}{5}$

Pregunta 5

Encuentre las raíces de la ecuación:

$$X^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$$

Explica tu respuesta

$x(x^2 - x - 7) + 15$

$x($

Pregunta 5

Encuentre las raíces de la ecuación:

$$X^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$$

Explica tu respuesta

se reemplaza x = 0 luego si calculo la ecu. de segundo grado
luego se reemplaza 0, y se calculan las raíces.

Pregunta 6

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$$\log(-x)^2 = \log x^2 \rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x) \rightarrow \mathbf{\log(-x) = \log(x)}.$$

Por lo que "log(-x)" existe y es un número real

En particular para x = 1 tenemos, ln(-1) = ln (1) que como sabemos, ln (1) = 0

¿Es cierto?, ¿es correcto el razonamiento?, explica tu respuesta

no sé, y sí, yo creo que sí,

Pregunta 6

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$$\log(-x)^2 = \log x^2 \rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x) \rightarrow \mathbf{\log(-x) = \log(x)}.$$

Por lo que "log(-x)" existe y es un número real

En particular para x = 1 tenemos, ln(-1) = ln (1) que como sabemos, ln (1) = 0

¿Es cierto?, ¿es correcto el razonamiento?, explica tu respuesta

$\log_y x = y^x = 10^x \rightarrow \log_y -x = y^{-x} = 10^{-x}$

$\cancel{\log_y x =}$

Anexo 5: Encuestas de Docentes

Pregunta 1:

Utilizando los símbolos <, >, = ordena de menor a mayor los siguientes números:

a) $1 - i$; $-1 + 3i$; $-1 - 3i$; $1 + i$

Explica el desarrollo establecido NO SE PUEDEN ORDENAR

Pregunta 2:

Determina el valor de los siguientes productos:

a) $\sqrt{-7} \times \sqrt{-7} =$

Explica tu respuesta $\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-7} = (i\sqrt{7})(i\sqrt{7}) = i^2\sqrt{7^2} = (-1)\,7 = -7$

b) $\sqrt{-7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-4}$

Explica tu respuesta $\sqrt{-7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1}\,\sqrt{-4} = i\sqrt{7}\,\sqrt{7} \cdot i \cdot i\sqrt{4}$

$= i^3 \cdot 7 \cdot 2 = 14 i^3 = -14i$

Pregunta 3:

Divide el número 14 en otros dos para que el producto resulte ser 64, ¿cuáles son los números?

$\frac{14}{k} \cdot \frac{14}{2} = 64 \Rightarrow \frac{14}{k} \cdot 7 = 64$

$\frac{14 \cdot 7}{64} = k \rightarrow \boxed{k = \frac{49}{32}}$

Explica el desarrollo establecido

$\therefore \frac{14}{\frac{49}{32}} \cdot \frac{14}{2} = 64$

Pregunta 4:

Considerando $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -5 - i$, $z_3 = \frac{1}{5}$, determine:

$(z_2 - z_1)^* z_3 = \cancel{\ldots} = \left[-5 - i - (-2 + 3i)\right] \cdot \frac{1}{5} =$

$= \left[-5 - i + 2 - 3i\right]\frac{1}{5} = \frac{-3 - 4i}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4i}{5}$

Explica tu desarrollo

Pregunta 5

Encuentre las raíces de la ecuación:

$f(x) = x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$

Posibles Raíces: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

Recorrido.

$f(1) = 1 - 1 - 7 + 15 = 8$

$f(-1) = -1 - 1 + 7 + 15 = 20$

$f(3) = 27 - 9 - 21 + 15 = 6 + 6 = 12$

$f(-3) = -27 - 9 + 21 + 15 = 0$.

$x = -3$ es Raíz $\therefore$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -7 & 15 \\ -3 & \downarrow & -3 & +12 & -15 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

Explica tu respuesta

$f(x) = (x+3)(x^2 - 4x + 5)$ $\therefore$ $x^2 - 4x + 5 = 0$ $\quad x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm 2i$

[illegible] $\neq 0$

$x =$ $\therefore$ $\boxed{x_1 = -3 \quad x_{2,3} = 2 \pm 2i}$

Pregunta 6

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$\log(-x)^2 = \log x^2 \rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x) \rightarrow \mathbf{\log(-x) = \log(x)}$.

Por lo que "log(-x)" existe y es un número real

En particular para $x = 1$ tenemos, $\ln(-1) = \ln(1)$ que como sabemos, $\ln(1) = 0$

¿Es cierto?, ¿es correcto el razonamiento?, explica tu respuesta

logaritmo está definido SÓLO en $(0, +\infty)$ $\therefore$ si $x < 0$ $\log(-x)$ NO ESTÁ DEFINIDO

DE ESTA MANERA QUEDAN INVÁLIDAS LAS PROPIEDADES.

Pregunta 7

Durante su experiencia como docente, ¿ha implementado los contenidos de los números complejos? Argumente su respuesta.

SÍ EN III° MEDIO. COMÚN.

¿Considera usted que es necesaria la implementación de este contenido en la educación media? Argumente su respuesta.

SÍ, ME PARECE FUNDAMENTAL

ENRIQUECE LA FORMACIÓN DE LOS ESTUDIANTES.

Anexo 6: Tabla II, EMR

Tabla II

Principio	¿Qué es?	¿Cómo puede trabajarse?
De actividad	Las matemáticas se consideran una actividad humana. La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problema, pero es una actividad organizadora de un tema.	Matematizar involucra principalmente generalizar y formalizar. Formalizar implica modelizar, simbolizar, esquematizar y definir, y generalizar conlleva reflexión.
De realidad	Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en *contextos reales*. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.	El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser el mundo real, pero esto no es necesariamente siempre así. Es necesario que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos.
De reinvención	Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.	Presentar situaciones problemáticas abiertas que ofrezcan una variedad de Estrategias de solución. Permitir que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. Discutir el grado de eficacia de las estrategias usadas.
De niveles	Los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión: - Situacional: en el contexto de la Situación. - Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc. - General: exploración, reflexión y	Esquematización progresiva (profesor) y reinvención guiada (aprendiz): las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.

	generalización. - Formal: Procedimientos estándares y notación convencional.	
De interacción	La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.	La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.

(Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004)