



Salesiana

*Escuela de Educ. en Humanidades y Ciencias
Departamento de Educación Matemática*

ALGEBRIZACIÓN DE LA ARITMÉTICA: UN TRÁNSITO DE SEGUNDO CICLO BÁSICO A PRIMER CICLO MEDIO

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN
EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN
MATEMÁTICA E INFORMÁTICA EDUCATIVA

INVESTIGADORES:

ACEVEDO SANTIBAÑEZ, KARIN MACARENA
GUTIÉRREZ FAÚNDES, DAVIS ISAÍAS
JARA LAGOS, CARLA ALEJANDRA
MORALES BUSTOS, CONSTANZA MAGDALENA

PROFESOR GUÍA:

CARLOS ALBERTO GÓMEZ CASTRO

SANTIAGO, CHILE
2012

*“Nuestra recompensa se encuentra en el esfuerzo y no en el resultado.
Un esfuerzo total es una victoria completa”.*

Mahatma Gandhi

Agradecimientos

Primero que todo, quiero agradecer a la vida por darme la oportunidad de hacer realidad uno de mis sueños, ser una profesional. Porque ella se encargó de poner en mi camino a bellas personas que hicieron factible cumplir esta gran meta.

A mi querida madre Gloria por su apoyo incondicional, preocupación y paciencia total. Como olvidar sus comentarios como: “pucha hija, tan poco que duerme, acuéstese a descansar mejor” ó “¿hasta qué hora estudiará, le preparo un tecito?”. Agradecer a mi hermanota Jacqueline por las largas conversaciones y sabios consejos, gracias por levantarme cada vez que lo necesité y por tu incondicionalidad para conmigo. A mi querido papo Ricardo, porque gracias a él y su confianza puesta en mí pude estudiar, gracias papo por ser mi aval económico y también moral cuando me decías, a los dos años de carrera, ¡No queda nada mi niña, dale con todo!. Sin duda, agradecer a mi querido viejo Isaías, gracias papi por tus cortas y precisas palabras de aliento, y claramente por tus tallas reiterativas cada fin de semana de estudio.

Y finalmente, a mi amigo, compañero, confidente y pololo Daniel por su infinita paciencia. Estuviste conmigo desde antes que entrara a la U, y ahora que ya estoy afuera quiero agradecerte por aguantar mis días de mal genio, por el estrés que generalmente estaba en mí, y hacía que mi personalidad cambiara un poco, gracias por sostenerme día a día.

Como me gustaría mencionar a muchas personas más, pero cada uno de ellos sabe que están dentro de mi corazón.

Karin Acevedo Santibañez

Quiero agradecer a mi padre, quien me ha apoyado durante estos años en mi trayectoria escolar, a mi madre, quien siempre estuvo conmigo, desde el cielo me ha cuidado y velado por mi estabilidad e integridad. A Nicolás, en quien encontré un amigo y me alentó en las horas difíciles, me apoyó y ayudó.

Gracias Isabel, hermana, quien a pesar de nuestras diferencias, supo orientarme y tolerar todas aquellas veces en las cuales mi carácter nos sobrepasaba, a mi sobrina, mi pequeña Karin, siempre escuchándome y en silencio ayudándome.

Mis queridas compañeras de tesis, muchas gracias por todo amigas, este tiempo hemos fortificado lazos y aprendimos a confiar en nuestras capacidades.

David Gutiérrez Faúndes.

Deseo agradecer a mi madre, por su constancia y perseverancia, que me ha transmitido siempre, por el valor mostrado para vivir y salir adelante y por sobre todo por su profundo amor.

A mi padre, a quien aún siento con nosotras y que aunque nos faltaron muchos momentos por vivir, se que siempre has estado acompañándome, cuidando e iluminando mi camino.

A mi amigo, mi enamorado, mi pareja, porque me ayudó en la elección de mi futuro, por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, por la constante motivación, pero más que todo por su amor.

A mis amigas, que cada vez que las necesite me acompañaron y consolaron. Por sus risas, sus palabras y sus abrazos apretados.

Y a todos aquellos que han cruzado en algún momento por el camino de mi vida, que siguen aún a mi lado o que ya han tomado caminos distintos, pero que sin duda me han ayudado a seguirlo.

Carla Jara Lagos.

Quiero agradecer a todas las personas que me apoyaron y alentaron en este proceso tan importante para mi vida. Fueron años de muchos esfuerzos, tanto personales como económicos.

Quisiera partir por agradecer a mi esposo Isaac, por soportar mis enojos y apoyarme estos cinco años y por aceptar a mi grupo investigador en nuestro hogar, te amo. A mi padre Harry por todo el esfuerzo que hizo para pagar cada año de mi carrera, no tengo maneras de agradecerte lo que hiciste por mí. También quisiera darle gracias a mi mamá Nena, por cuidarme cada día que necesite a mi hijo, sin ti este proceso no lo hubiese terminado, además, hubieron muchas personas que avanzaron conmigo en este camino, mis hermanos Harry y Alejandro, mi tía Mary, mi mami Nena, mi primo Ignacio y mis tíos José y Choche. Además, a dos personas que no creí que pudiesen ayudarme tanto, mi cuñada Kimberly y mi suegra Natalia, no se imaginan lo agradecida que estoy.

Finalmente quiero agradecer a mi hijo Tomy, sin ti no creo que hubiese logrado ser una profesional, tus risas y alegrías cada vez que me veías cansada me alentaron a seguir adelante, te amo hijo y gracias por tu apoyo.

Constanza Morales Bustos.

Resumen

La presente investigación tiene como finalidad identificar los posibles errores, dificultades o falencias que los docentes generan en el tránsito de la aritmética al álgebra. Teniendo en cuenta los procesos cognitivos, representaciones semióticas y los conocimientos ya adquiridos que los estudiantes poseen de la aritmética.

Para ello, se investigará a estudiantes pertenecientes al primer nivel de enseñanza media del Complejo Educacional Alberto Widmer, a los cuales se les aplicó un instrumento de recogida de información, con el propósito de analizar las dificultades que presenta el tránsito del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.

El instrumento de recogida de información constará de tres ítems. El primero corresponde a identificar regularidades en la realización de transformaciones para formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones, el segundo ítem hace alusión a la resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado, finalmente el tercero hace referencia a representar enunciados mediante expresiones algebraicas. Así mismo, dicho instrumento posee una pregunta que busca la opinión de los estudiantes sobre la dificultad que podría haber presentado frente al instrumento.

Además, se realizará un cuestionario a los docentes para visualizar las opiniones que ellos poseen sobre los errores, dificultades, deficiencias y obstáculos de los estudiantes de primer año medio en la solución de situaciones algebraicas.

Esta investigación es cualitativa con carácter cuantitativa en el análisis del instrumento. La metodología de ésta es un estudio descriptivo y su diseño metodológico corresponde a un estudio de caso.

Abstract

The purpose of following investigation is to identify the possible faults, difficulties or mistakes dissidents that may generate in the transition from arithmetic to algebra. Considering cognitive processes, semiotic representations and previously acquired knowledge students may have obtained regarding algebra.

This will be achieved by the observation of students from first senior grade attending Alberto Widmer educational center, who will take a specific test designed to analyze the difficulties that the transition from arithmetic to algebraic thinking may produce.

The test will contain three items. The first one's purpose is to identify regularities in the changes of formulation and verify conjectures in the effects of these changes; the second item refers to the resolution of mathematical problems that involves modeling first grade literal equations; finally the third item is about translating the heading of problems into algebraic expressions. It will also contain a question on which students will be able to give their opinions regarding the difficulty of this test.

We will also question teachers to note their opinions regarding the error, difficulties, deficiencies and obstacles first senior year students may encounter.

This investigation is qualitative with a quantitative focus in the analysis of the test. Its methodology is a descriptive study and its design corresponds to a study of the case.

INDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	11
2. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	12 – 14
2.1. Algunas evidencias.....	12 – 13
2.2. Justificación del estudio.....	14
3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.....	15
3.1. Pregunta principal.....	15
3.2. Preguntas subsidiarias.....	15
3.3. Objetivo general.....	15
3.4. Objetivo específico.....	15
4. MARCO REFERENCIAL.....	16 – 24
4.1. Evolución curricular.....	16 – 17
4.2. Concepto de currículo según diferentes autores.....	17 – 19
4.3. Realidad actual chilena.....	19 – 21
4.3.1. Elementos que integran el currículum.....	20 – 21
4.4. Currículum en Matemática y ajuste curricular.....	21
4.4.1. Organización curricular.....	22
4.4.2. Ejes temáticos.....	23
4.4.3. Planes y programas.....	23 – 24
5. MAPAS DE PROGRESO.....	25 – 30
5.1. ¿Para qué sirven los Mapas de progreso y Niveles de logro?.....	25 – 26
5.2. Mapas de progreso y Niveles de logro en Matemática.....	27 – 28
5.3. Elementos claves del mapa de álgebra.....	28 – 29
5.4. Detalle de Mapas de progreso y Niveles de logro.....	29 – 30

6. MARCO TEÓRICO.....	31 – 38
6.1. Concepciones de la matemática.....	31 – 32
6.2. Concepciones acerca del aprendizaje de la matemática.....	32 – 33
6.3. Teoría de Representaciones Semióticas.....	33 – 38
7. MARCO METODOLÓGICO.....	39 – 76
7.1. Metodología de investigación.....	39
7.2. Diseño metodológico.....	39 – 41
7.2.1. Diseño del caso de estudio.....	41 – 43
a. Preguntas del estudio.....	41
b. Propositiones del estudio.....	42
c. Unidades de análisis.....	42
d. La relación lógica entre las preguntas y las proposiciones.....	42
e. Criterios para interpretar resultados.....	42 – 43
f. Tipo de diseño del caso de estudio.....	43
7.2.2. Conducción del caso de estudio: Preparación de la recolección de datos.....	43 – 45
a. Visión general de la investigación del caso de estudio.....	43 – 44
b. Procedimiento de campo.....	44
c. Preguntas del caso de estudio.....	44 – 44
d. Caso piloto.....	44
7.2.3. Conducción del caso de estudio: Recolección de datos.....	45
7.2.4. Análisis del caso de estudio.....	45 – 76
a. Descripción del instrumento aplicado.....	46 – 51
b. Análisis cuantitativo y cualitativo del instrumento.....	52 – 69

c. Análisis cuantitativo y cualitativo de pregunta abierta.....	69 – 72
d. Cuestionario docente.....	73 – 76
8. CONCLUSIONES.....	77 – 78
9. RECOMENDACIONES.....	79
10. BIBLIOGRAFÍA.....	80 – 81

1. Introducción

Actualmente, la educación chilena en matemática utiliza como fundamento el marco curricular ajustado, el cual se encuentra en un proceso de aplicación gradual desde el año 2010, finalizando dicho proceso el año 2013, momento en que todos los establecimientos del país debiesen regirse por los nuevos planes y programas.

Los ejes centrales, para la investigación, son números y principalmente álgebra, ya que se desea trabajar el tránsito (articulación) del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, el cual presentaría dificultades. Es por ello que los investigadores se apoyarán en el nivel 3 y 4 de los Mapas de Progreso del álgebra, el cual indica que los estudiantes deben poseer la capacidad, al finalizar su enseñanza básica, de traducir expresiones de tipo natural a un lenguaje matemático y viceversa.

Esta investigación nace de la necesidad de develar las formas en que el estudiante concibe la transición entre la aritmética y el álgebra, basándose en procesos cognitivos, representaciones semióticas y obstáculos que se generan frente al ajuste curricular nacional en los ejes de números y álgebra de segundo ciclo básico a primer ciclo medio, de los estudiantes del Complejo Educacional Alberto Widmer ubicado en Avenida Pajaritos #2803 de la comuna de Maipú. El análisis se llevará a cabo en dos etapas fundamentales.

La primera etapa tiene como finalidad contextualizar los planes y programas actuales, enfocados en los ejes de números y álgebra y los textos escolares¹ utilizados en el establecimiento educacional Alberto Widmer, Maipú, de Primer año Medio. El fin de esta primera etapa es encontrar las posibles contradicciones o, por el contrario, aproximaciones que pudiesen tener dichas bases de la investigación.

En la segunda etapa se realizará un instrumento de recogida de información, con la intención de identificar, analizar, comparar y tipificar las producciones de los estudiantes para poder vislumbrar las dificultades que éstos presentan en el aprendizaje del álgebra, siendo su referente los conocimientos ya adquiridos de la aritmética. Sin embargo, dichas falencias pueden ser generadas por varios sucesos, es por ello que se basarán en el marco curricular y planes y programas que afectan las elecciones didácticas realizadas por el docente al momento de impartir su clase. La implementación de dicho instrumento, les servirá, a los investigadores, para poder identificar deficiencias basadas principalmente en las concepciones cognitivas o representaciones que el estudiante posee.

Finalmente, los resultados obtenidos del instrumento son analizados con la intención de determinar cuáles son las posibles dificultades que presentan los estudiantes frente al estudio del álgebra partiendo por la aritmética en segundo ciclo básico.

¹ Primer año Medio –Matemática – McGrawHill y SM – Texto Estudiante

2. El Problema de investigación

El aprendizaje de la matemática genera muchos errores y dificultades a los alumnos y alumnas en la comprensión del álgebra. Algunas tienen su origen en el actual marco curricular, pero en general, su procedencia se concreta en el alumno, textos escolares, profesor e institución escolar. Las dificultades, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas según se ponga énfasis en uno y otro elemento como el desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemática y métodos de enseñanza.

La enseñanza del álgebra en un ambiente formal de un proceso de enseñanza aprendizaje, presenta una serie de contradicciones y dificultades que se han hecho reiterativas a lo largo del tiempo. Por un lado, las propuestas metodológicas, traducidas en las planificaciones que se elaboran para introducir el aprendizaje del álgebra y la didáctica de la enseñanza empleada y, por otro, sus resultados deficientes, nos indican que los alumnos y alumnas presentan dificultades en la adquisición de estos aprendizajes: Skowronek, 1976; Mc Gregor y Stacey, 1997; Kieran, 1980; Harper, 1981; Freudenthal, 1992; Roberg y Spence, 1993; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Palarea, 1998; Socas et Al. 2007; entre muchos otros según cita de Socas (2011).

Como grupo investigador, se ha detectado que éste es un problema común en la labor educativa. Todos coinciden que surgen dificultades y problemas en el tránsito que va del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. En este sentido, esta dificultad se ha constituido en un problema transversal. Específicamente, el problema se agudiza con la profundización que se hace de los contenidos de álgebra en primer año medio, teniendo en cuenta los planes y programas vigentes del MINEDUC. Es en este nivel donde se pone énfasis para que los estudiantes que provienen del segundo ciclo de enseñanza básica inicien la formalización del lenguaje algebraico y por ende del desarrollo del pensamiento algebraico. Este nuevo lenguaje, este nuevo desafío de aprendizaje, supone una variedad de condiciones, aptitudes, capacidades, reinterpretaciones, habilidades, etc., que posibilitarán el tránsito de una forma de pensamiento estructurado (aritmético) a una nueva estructura (el algebraico). Y es en este cambio, donde los investigadores han observado que aparecen las dificultades y problemas.

Debido a lo anterior, la presente investigación tiene como finalidad abordar las dificultades mostradas por los estudiantes sobre el álgebra, aritmética y sus limitaciones.

2.1. Algunas evidencias

La evidencia más inmediata que surge por parte de los investigadores, es la interacción con los alumnos(as) en la sala de clases, al momento de ejercer su práctica profesional. Se puede observar reiteradamente los problemas que éstos presentan para comprender este nuevo lenguaje que se muestra dado por la combinación de letras y

números. Las dificultades para entender, en su contexto, el significado de una secuencia o regularidad; las equivocaciones reiteradas que presentan al reducir términos semejantes o al operar con dichos términos y, más agudo aún, son las dificultades que se enfrentan al traducir un problema o alguna regularidad numérica al lenguaje algebraico. El grupo de investigación menciona, repetitivamente, la gran dificultad que tienen algunos estudiantes al razonar, utilizando este nuevo lenguaje, para llegar a expresar una regularidad como una fórmula. Lo anterior se confirma en las diferentes evaluaciones formales que se aplican en el establecimiento a los alumnos de primer año medio, las cuales señalan, por lo general, resultados regulares a malos. Las excepciones son mínimas.

En observaciones similares, los docentes que han tenido la experiencia de enseñar álgebra en este nivel, hacen referencias a los mismos problemas a los cuales el grupo investigador se ha enfrentado. Del mismo modo, los profesores critican la deficiencia de los aprendizajes en el área del álgebra que poseen los alumnos y alumnas provenientes de la enseñanza básica y que les dificulta el avance más sostenido en estos contenidos.

Por su parte, los propios educandos expresan sus dificultades y, cuando no, su rechazo hacia estos contenidos que para ellos son muy complejos y difíciles de abordar. De ellos(as) se escuchan expresiones y preguntas tales como: “no entiendo”, “¿cómo se hace esto?”, “¿qué significa esta letra?”, “¿cómo escribo el doble de...?”, “¿cuánto vale la letra?”, “¿por qué el signo igual no tiene el mismo significado que antes?”, “¿por qué un número al lado de la letra se multiplica?”, “¿por qué se juntan estos términos?”, “¿cuándo hay que juntar los términos comunes?” y otras muchas más, son habituales en las clases.

A nivel institucional, la evidencia más significativa es el SIMCE de segundo año medio, que en el área de los aprendizajes esperados para álgebra, se muestran año a año, con muy poco avance y más bien en un estado estacionario histórico. En este sentido los Mapas de Progreso, sitúan al grueso del alumnado en el nivel inicial.

La literatura relacionada con el estudio de las dificultades y problemas que surgen en el tránsito del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico es abundante y variada. Los análisis y estudios comprenden la detección de los problemas, su descripción, estudios de casos, monografías, tesis de grado, hasta propuestas metodológicas para solucionar problemas específicos en los aprendizajes del álgebra.

Dada la extensión y diversidad al momento de hacer un análisis de los factores que inciden en esta transición, se hace necesario acotar el objeto de estudio reduciéndolo a una muestra. La selección, es consecuencia de la experiencia inmediata de los investigadores, que como profesores en práctica profesional les corresponde desarrollar un trabajo sistemático con alumnos del primer ciclo medio y en particular con los alumnos de primer año medio, que provienen de distintos establecimientos de enseñanza básica en la comuna de Maipú. Por ello se propusieron hacer un primer acercamiento a los problemas que genera esta transición, focalizándolo en los

primeros años medio del Complejo Educacional Alberto Widmer y para ello se elaboró un instrumento para la recogida de información que se aplicó en los siete (7) primeros medios que tiene el establecimiento. Sin embargo, es necesario resaltar que las características de la población estudiantil evaluada, no es heterogénea ya que corresponden a diversos sectores sociales medios bajos de la comuna de Maipú y atendidos por la educación particular subvencionada.

2.2. Justificación del estudio

El estudio del álgebra, en el contexto formal del establecimiento en estudio, evidencia dificultades y problemas en la adquisición de sus contenidos por parte de los estudiantes de primer ciclo medio. Aún teniendo como orientación el currículo ministerial y la elaboración de las planificaciones didácticas conforme a los planes y programas establecidos.

Los docentes del área de la matemática afirman que existen dificultades y problemas de aprendizaje, los cuales se detectan con mayor fuerza en los inicios de la formalización de la estructura algebraica, es decir, en el paso que se da entre el uso del pensamiento aritmético al algebraico. Por consiguiente, el grupo investigador, los situarán principalmente en el primer ciclo medio y particularmente en primer año medio. Hay una situación ahí que provoca estas dificultades y que hace que este tránsito sea lento, repetitivo y agotador tanto para alumnas y alumnos como para los profesores que tiene la responsabilidad de enseñarlos. Por lo anteriormente mencionado, se cree que se justifica la realización y desarrollo de un estudio que analice estos problemas y dificultades en el contexto de trabajo y al mismo tiempo, al finalizar esta investigación, se propondrán algunas sugerencias metodológicas para su superación.

3. Pregunta de investigación

3.1. Pregunta principal:

¿Qué dificultades presentan los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra dentro de una actividad matemática?

3.2. Preguntas subsidiarias:

- ¿Qué errores, dificultades u obstáculos están presentes en el aprendizaje del álgebra?
- ¿De qué manera afecta el uso de los diversos registros: gráfico, natural, algebraico y numérico; en el desarrollo de actividades algebraicas?
- ¿Cuáles son las transformaciones de representación semiótica que realizan los estudiantes, al efectuar una actividad matemática?

3.3. Objetivo general

Analizar las dificultades que presenta el tránsito del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico en los alumnos de primer año medio en el Complejo Educacional Alberto Widmer.

3.4. Objetivos específicos

- Identificar qué tipo de dificultades y problemas se detectan en el aprendizaje del álgebra en los estudiantes de primer año medio.
- Revelar el uso de diversos registros que emplea el estudiante en el desarrollo de actividades algebraicas.
- Constatar la presencia de tratamiento y/o conversión que efectúan los estudiantes en una actividad matemática.

4. Marco Referencial

4.1. Evolución curricular

Se intentará dar a conocer la historia y evolución que ha tenido el concepto de currículo. El que etimológicamente significa, carrera, caminata y jornada, conteniendo en sí la idea de continuidad y secuencia.

La historia de currículum comienza en la Europa Medieval, época en la cual el significado era ligado a una lista de materiales y contenidos; a éste tenían acceso sólo la elite privilegiada, en el cual comprendía: gramática, aritmética, geometría, música, etc.

Por lo anterior, el currículum era un conjunto de disciplinas o conocimientos a memorizar, concepto que fue utilizado en Europa y las colonias americanas hasta el siglo XIX. A finales de éste, específicamente en el año 1896, John Dewey², intentó demostrar que el alumno aprende a través de experiencias y no por medio de una actitud pasiva, gracias a esto, el currículo cambia de sentido y se posiciona en base a las experiencias, el cual en 1930 tendría amplia aceptación a nivel mundial.

A partir de ese año, en Estados Unidos, el currículum comienza a adquirir una significación más amplia y profunda, producto de una serie de factores sociales y culturales: la explosión industrial tecnológica y las dos Guerras Mundiales. A través de estos cambios socioculturales se vislumbró que los aprendizajes no eran consecuencia de los planes o programas de estudio, es así como en la evolución del sistema social, y el currículum significó una definitiva solución al problema de la educación y enseñanza de la sociedad. Es por ello, que el currículum deja de tener una significancia estática y rígida, siendo redefinida como un proceso en actualización permanente, susceptible de ser perfeccionado y sujeto a revisión continua. No sólo eran importantes los aspectos que ofrecían los planes y programas sistemáticos, sino que todas las actividades realizadas tanto dentro como fuera de la escuela.

En Chile, el término currículum se incorpora en nuestra terminología con la reforma educacional en el año 1964, siendo el profesor P. Siegel quien dilucida el trabajo del investigador norteamericano R. Tyler del año 1950, planteando que el currículum son *“todas las experiencias de aprendizaje planificadas u orientadas por la institución educacional, individuales o grupales dentro o fuera de la escuela, realizadas por los alumnos con fines educativos.”* (Siegel, 1964)

² John Dewey (Burlington, Vermont, 20 de octubre de 1859 – Nueva York, 1 de junio de 1952), filósofo, pedagogo y psicólogo estadounidense.

Actualmente, existen especialistas que se han preocupado de definir el concepto “currículum” de modo claro, comprensible y adaptándolo a nuestra realidad, permitiendo así una labor más eficiente para quienes trabajen con dicho concepto.

A modo de ejemplo, Violeta Soto G. y María Victoria Peralta (1976), curriculistas y educadoras han definido el currículum como:

“es el conjunto consistente de elementos técnicos, materiales y humanos que utiliza la escuela tanto dentro como fuera de sus aulas, para orientar el proceso metódico de encuentro docente-dicente, con la sociedad y el patrimonio cultural en relación a los aprendizajes o cambios culturales deseados en los alumnos.”

Por otro lado, María Victoria Peralta (1986), dice:

“currículum son todas las vivencias y aprendizajes significativos que han sido experimentados por una persona como resultante de la selección y organización de un ambiente total educativo, que ha sido generado por una comunidad educativa.”

En suma, el currículum ha evolucionado a través del tiempo y espacio, a consecuencia de los cambios socio-culturales, desde una visión tradicional estática y estricta que lo planteaba como un grupo de contenidos a una visión más difundida que abarca todas las experiencias del educando bajo la responsabilidad de la escuela, hasta la actualidad que lo precisa como un plan dado, otorgando un enfoque sistemático. Por lo tanto, currículum es un término de uso muy antiguo que hoy en día ha tomado bastante auge a través de la contingencia nacional en nuestro país, en realidad, se emplea como sinónimo de los Planes y Programas de Estudio otorgados por el Ministerio de Educación.

4.2. Concepto de currículum según diferentes autores

A continuación se presentará un listado de conceptos enunciados en diferentes épocas y que visualizan distintas tendencias y corrientes filosóficas de este siglo:

- CURRÍCULUM es aquella serie de cosas que los niños y jóvenes deben hacer y experimentar, a fin de desarrollar sus habilidades que los capaciten para decidir asuntos de la vida adulta (Franklin B, 1918).
- CURRÍCULUM son todas las experiencias, actividades, materiales, métodos de enseñanza y otros medios empleados por el profesor o tenidos en cuenta por él en el sentido de alcanzar los fines de la educación (UNESCO, 1918).
- CURRÍCULUM comprende todas las experiencias del niño bajo la orientación del profesor (Caswell y Campbell, 1935).

- CURRÍCULUM es en realidad el programa íntegro del colegio. Es el medio esencial de la educación, es todo aquello que el profesor y el alumno hacen. De modo que tiene una doble naturaleza: consiste en las actividades, las cosas que se producen y los materiales con que se hacen (Rugg, 1936).
- CURRÍCULUM para elaborarlo se deben responder: ¿qué objetivos educacionales debe tratar de alcanzar la escuela?, ¿cómo seleccionar experiencias de aprendizaje que puedan ser útiles en logro de esos objetivos?, ¿cómo pueden ser organizadas las experiencias de aprendizaje, para una enseñanza eficaz? Y por último; ¿cómo se puede evaluar la eficacia de las experiencias de aprendizaje? (Tyler, 1949).
- CURRÍCULUM debe ser un documento escrito, el principal aspecto del plan es un esquema de las materias que deben ser enseñadas; la materia es el núcleo sustantivo del currículum (Beachamp G, 1968).
- CURRÍCULUM es un proyecto educacional que define: los fines, las metas y los objetivos de una acción educacional así como las formas, los medios y los instrumentos para evaluar en que medida la acción ha producido efecto. (Hainaut L, 1980).
- CURRÍCULUM es considerado al mismo tiempo, como un contrato entre lo que la sociedad espera de la institución educativa y de lo que los responsables admiten que ella ofrece, en término de contenidos de enseñanza, de marco pedagógico y como una herramienta de trabajo en las instituciones educativas y en las aulas. Se trata de un contrato y de una herramienta en permanente evolución (Ferreira Horacio, 2001).

Según señala la Revista Perspectivas:

“En términos educativos, el currículum corresponde a los planes y programas de estudio, o el conjunto de contenidos, en un sentido amplio, que, organizados en una determinada secuencia, el sistema escolar se compromete a comunicar. Al mismo tiempo, el currículum es una selección cultural con propósitos formativos, que organiza la trayectoria de alumnos y alumnas en el tiempo y que, en los contenidos, esquemas mentales, habilidades y valores que contribuye a comunicar, es un regulador mayor de su experiencia futura. El tema esencial sobre el currículum y su necesidad de cambio en el presente, tanto en el sistema escolar como en la educación superior, con independencia de historias y

*de geografías, es el cambio marcado y rápido de la cultura de la cual selecciona sus orientaciones y contenidos”.*³

4.3. Realidad actual chilena

Cabe mencionar los cambios que ha sufrido el currículum escolar en Chile desde los inicios de la democracia hasta la actualidad, puesto que, por consecuencia de ello, se han integrado nuevas competencias con el fin de mejorar la educación, la cual ha sido centrada en el aprendizaje de los educandos.

Para ello, el estado creó a principios de 1990 la **Ley N° 18.962, Orgánica Constitucional de Enseñanza**, que tuvo tres objetivos:

1. Los requisitos mínimos que deben exigirse en cada uno de los niveles de la enseñanza básica y media,
2. las normas objetivas, de general aplicación, que permitan al Estado velar por el cumplimiento de estos requisitos mínimos, y
3. los requisitos para el reconocimiento oficial de los establecimientos educacionales de todo nivel.

En el año 2007, se envía al congreso el proyecto de **Ley General de Educación** que contempla modificaciones importantes en los procesos de admisión, currículum, y reconocimiento oficial de los establecimientos educacionales. Ante todo, limita la facultad que tienen los establecimientos de discriminar a sus alumnos por motivos económicos.

La Ley General de Educación estipula que a comienzos del año 2017, se reducirá la educación básica a seis años y la educación media aumenta en dos años, quedando ambos en seis años. En consecuencia, aumentarán los requisitos que deben cumplir los responsables de un establecimiento para obtener el reconocimiento oficial del Estado.

Respecto al currículum, esta ley menciona tres aspectos:

- Se establecen Objetivos Generales de Aprendizaje que favorecen la educación integral de los jóvenes, es decir, se fomentará tanto la educación formativa (valores, principios) como la cognitiva (contenidos escolares).
- Flexibilidad curricular ampliada: Las bases curriculares que elabore el Ministerio de Educación para los niveles parvulario, básico y medio deberán asegurar que los establecimientos en régimen de Jornada Escolar Completa cuenten con un 30% de tiempo de libre disposición.

³ Cox, C. (2001). El currículum escolar del futuro. *Revista Perspectivas*. (pp. 213-232).

- Se creará un Banco de Planes y Programas Complementarios que estará a disposición de todos los establecimientos para que cuenten con alternativas y puedan enriquecer sus propios planes y programas.

En resumen, actualmente el subsector de matemática utiliza el marco curricular implementado en el año 2012.

4.3.1. Elementos que integran el currículum

Independiente de la fuente bibliográfica referida al currículum, se plantea que éste debe considerar los siguientes elementos: Objetivos Fundamentales Transversales, Aprendizajes Esperados, Contenidos, Estrategias de Enseñanza, Actividades, Recursos Auxiliares e Instrumentos de Evaluación. Estos elementos, que son los que integran cada situación de Enseñanza Aprendizaje, serán cada vez más detallados y complejos, según refieran a una lección, una unidad o curso. Pero en términos generales son constantes, ya que constituyen la estructura del currículum.

- OBJETIVOS FUNDAMENTALES TRANSVERSALES:** Son aprendizajes que tienen un carácter comprensivo y general, y apuntan al desarrollo personal, ético, social e intelectual de los estudiantes. Forman parte constitutiva del currículum nacional y, por lo tanto, los establecimientos deben asumir la tarea de promover su logro. No se logran a través de un sector de aprendizaje en particular; conseguirlos depende del conjunto del currículum. Deben promoverse a través de las diversas disciplinas y en las distintas dimensiones del quehacer educativo (por ejemplo, por medio del proyecto educativo institucional, la práctica docente, el clima organizacional, la disciplina o las ceremonias escolares). No se trata de objetivos que incluyan únicamente actitudes y valores, supone integrar esos aspectos con el desarrollo de conocimientos y habilidades. A partir de la actualización al Marco Curricular realizada el año 2009, estos objetivos se organizaron bajo un esquema común para la Educación Básica y la Educación Media. De acuerdo con este esquema, los Objetivos Fundamentales Transversales se agrupan en cinco ámbitos: crecimiento y autoafirmación personal, desarrollo del pensamiento, formación ética, la persona y su entorno y tecnologías de la información y la comunicación.
- APRENDIZAJES ESPERADOS:** Son los resultados de los aprendizajes que se espera alcanzar en los estudiantes por medio de la ejecución del currículum. Son cambios de conducta que se espera se produzcan después de realizados los procesos de enseñanza aprendizaje. Por otro lado, le dan sentido al currículum y responden a preguntas como: ¿Para qué se elabora el currículum?, ¿Qué se pretende lograr con la aplicación del currículum?
- CONTENIDOS:** Son el cuerpo del conocimiento que emplean los alumnos en el proceso de Enseñanza Aprendizaje. Es el conocimiento seleccionado para el logro de los objetivos del currículum. El contenido tiene un valor funcional por lo

que es valioso como medio para adquirir habilidades y actitudes mentales necesarias para descubrir nuevos conocimientos durante toda la vida.

- d) **ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA:** Son diversas maneras que emplea el educador para orientar la enseñanza. Actualmente se prefieren las estrategias dinámicas, que promueven en el educando el desarrollo de la creatividad, el pensamiento crítico, el uso de técnicas de investigación, etc.
- e) **ACTIVIDADES:** Son las experiencias que realizarán los educadores y alumnos para lograr los objetivos. El alumno aprende a través de sus experiencias personales. Las actividades que integran el currículo se deben seleccionar teniendo en cuenta los objetivos que se desean.
- f) **RECURSOS AUXILIARES:** Son los medios, elementos que emplea el educador para facilitar el proceso de Enseñanza Aprendizaje de los alumnos, tales como: fotografías, láminas, diapositivas, etc.
- g) **INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN:** Son los instrumentos utilizados para juzgar los resultados del aprendizaje obtenido por los alumnos.

4.4. Currículum en Matemática y ajuste curricular

Cabe destacar la relevancia que tiene los planes y programas que el Ministerio de Educación entrega a cada establecimiento, estos han sido ajustados en el sector de matemática, con la finalidad de mejorar la calidad de la educación y al mismo tiempo renovar los contenidos que están en los planes y programas, por consiguiente, se desplazaron algunos contenidos que se presentaban en enseñanza media a sexto año básico; específicamente la unidad de álgebra.

De acuerdo al MINEDUC y al Congreso Nacional:

“el Ajuste Curricular entró en vigencia a través del Marco Curricular u Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos (Decretos 254 y 256 de 2009) y los textos de estudio entregados por el MINEDUC. La gradualidad de la implementación de los nuevos Programas de Estudio se mantiene de acuerdo a lo indicado a inicios de este año, es decir, el año 2011 se inició la aplicación de los programas de estudio de 5° básico a 1° medio, para las asignaturas de Lenguaje y Comunicación, Matemática, Historia, Geografía y Ciencias Sociales, Ciencias Naturales e Inglés.

Durante el año 2011 los 3^{os} y 4^{os} medios deben seguir rigiéndose según los programas derivados del Decreto 220, que está publicado en el sitio web del MINEDUC.

Con respecto al primer ciclo de enseñanza básica y 2° año medio, los establecimientos tienen dos alternativas: continuar aplicando los Programas de Estudio vigentes, del MINEDUC o los propios, o bien iniciar la implementación del ajuste curricular a modo de marcha blanca. Para esta segunda alternativa, pueden usar como referentes el Marco Curricular (Decretos 254 y 256 de 2009) y los textos de estudio⁴”.

Pero por normativa de ley parlamentaria, a contar del año 2012, todos los establecimientos del país debían implementar dicho ajuste que se había planteado el año 2009.

De las orientaciones curriculares de este ajuste, se destacan dos elementos, uno de ellos es que cada establecimiento que utilice los planes y programas del MINEDUC tiene 6 horas de libre disposición para el alumnado, siendo éstas a favor de la educación y complementarias a la visión y misión del establecimiento (pueden ser apoyo a asignaturas que tienen menos horas o los estudiantes han obtenido resultados deficientes, en pro de la vida sana, etc.) y en segundo, el incremento de las horas de lenguaje y matemática; siendo ya visible el aumento de esta última en una hora pedagógica en algunos establecimientos. Esta sección está focalizada en el ajuste curricular realizado a los planes y programas de primer año medio en el subsector de matemática, específicamente en la unidad de números y álgebra.

En una mirada global, las bases del ajuste curricular en matemática implementadas en el año 2012 se refiere a que dicha asignatura tiene como propósito enriquecer la comprensión de la realidad, desarrollar una mirada crítica y racional para la resolución de problemas; así también, para la formación de ciudadanos críticos y adaptables, capaces de analizar situaciones, obtener variables, seleccionar y discernir objetivamente.

4.4.1. Organización curricular

La educación básica está enfocada al desarrollo de cuatro habilidades, la resolución de problemas (es el estudiante quien debe emplear diferentes estrategias para la resolución de ejercicios sin que se le muestre la forma adecuada); argumentar y comunicar (convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos en una discusión colectiva); modelar (es aplicar, modificar y levantar modelos matemáticos, con el fin de construir una versión simplificada y abstracta de la realidad), y por último; representar (el estudiante representa para comprender mejor y asocia conceptos y objetos ya construidos en su beneficio).

⁴ Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación. Mayo del 2011, Chile.

4.4.2. Ejes temáticos

Los autores de las bases curriculares han dividido en cinco los temas o ejes, entendiéndose estos como: números y operaciones; patrones y álgebra; geometría; medición y datos y azar. Para esta investigación se han de destacar sólo dos, que son los relevantes; números y operaciones; y patrones y álgebra.

Números y operaciones: Este eje abarca tanto el desarrollo del concepto de número como la destreza en el cálculo mental y el uso de algoritmos. Una vez que los estudiantes asimilan y construyen los conceptos básicos, con ayuda de metáforas y representaciones, aprenden los algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división, incluyendo el sistema posicional de escritura de los números. Se espera que desarrollen las estrategias de cálculo mental, comenzando con ámbitos numéricos pequeños y ampliando estos en los cursos superiores, y que se aproximen a los números racionales (como fracciones, decimales y porcentajes) y sus operaciones.

En todos los ejes, y en especial el de Números, el aprendizaje debe iniciarse haciendo que los escolares manipulen material concreto o didáctico y pasen luego a una representación pictórica que, finalmente, se reemplaza por símbolos.

Patrones y álgebra: En este eje se pretende que los estudiantes expliquen y describan relaciones de todo tipo, como parte del estudio de la matemática. Los estudiantes buscarán relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, lo que los facultará para investigar las formas, las cantidades y el cambio de una cantidad en relación con otra. Los patrones (observables en secuencias de objetos, imágenes o números que presentan regularidades) pueden ser representados en forma concreta, pictórica y simbólica, y los estudiantes deben ser capaces de transportarlos de una forma de representación a otra, extenderlos, usarlos y crearlos. La percepción de los patrones les permite predecir y también fundamentar su razonamiento al momento de resolver problemas. Una base sólida en patrones facilita el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como es el pensamiento algebraico.

Finalmente, los ejes temáticos pretenden desarrollar un trabajo ordenado y metódico, abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones, manifestar curiosidad e interés por el aprendizaje de la matemática, manifestar una actitud positiva frente a sí mismo y sus capacidades, demostrar actitud de esfuerzo y perseverancia, expresar y escuchar ideas de forma respetuosa.

4.4.3. Planes y programas

En el año 2009, en octavo básico, la unidad de número y álgebra se veían por separado, la primera, se entendía como multiplicar y dividir potencias y operaciones combinadas; y la segunda era entendida como la interpretación de gráficos y el

planteamiento de ecuaciones que representan la relación entre dos variables y proporcionalidad.

En Primero Medio, en ese mismo año, la unidad de números incorpora el concepto de números racionales, representarlos en la recta, transformarlos, operaciones básicas y potencias. De la unidad de álgebra señala la aplicación de productos notables y factorización; ecuaciones literales, análisis de la función lineal y la composición de funciones.

Pero con el nuevo ajuste curricular liberado el año 2012, los autores estipularon que los estudiantes de octavo año básico deberían dominar los siguientes contenidos en la unidad de números y álgebra (primera unidad): multiplicación y división de números enteros, potencias, propiedades de potencias; siendo en el contenido de las potencias en donde se introduce el álgebra (ejemplo, calcular el signo de $(-1)^n$ con n natural) y la cuarta unidad, álgebra, deben dominar ecuaciones, funciones y proporciones.

En Primer año Medio, se ha conservado la separación de las unidades, pero se ha visto afectada la unidad de álgebra, ya que el ajuste curricular influyó desde sexto básico, dejando un gran vacío a las generaciones que vienen con la propuesta antigua. Siendo la unidad de números sólo modificada en el tema de densidad de los racionales, a diferencia de álgebra, la cual aborda la multiplicación, la factorización (expresiones no fraccionarias), resolución de ecuaciones y representación de funciones lineales y la composición de éstas.

De esta forma con el nuevo ajuste, se modificaron no tan sólo los contenidos, sino también, los objetivos y se crearon los mapas de progreso (2009), los cuales tienen la finalidad de entregar información que enriquece el aprendizaje del alumno y se puede utilizar como referencia, por ejemplo, en la evaluación. Es una información para el aprendizaje, porque a un alumno bien informado sobre su desempeño, seguramente, le va a ir mejor en su trayectoria escolar, ya que recibe un estímulo y se transparenta la evaluación.

Los mapas de progreso son la descripción gruesa de la secuencia de destrezas y habilidades que un niño debiera alcanzar desde primer año básico hasta cuarto año medio. Le permiten al profesor focalizar su mirada en los aprendizajes centrales, de modo que pueda observar cuán lejos o cerca están sus alumnos del criterio de evaluación, para poder orientar su pedagogía. Los niveles de logro vendrían a ser una descripción más fina de lo mismo.

5. Mapas de Progreso

Según el Ministerio de Educación de Chile, para fortalecer los aspectos de la implementación curricular relacionados con la evaluación, en la cual especifica que una pedagogía más efectiva es la que se nutre de la información obtenida sobre el nivel de aprendizaje de los docentes, ha desarrollado dos innovaciones importantes relacionadas con la evaluación del aprendizaje: los mapas de progreso y niveles de logro.

Los mapas de progreso describen el tránsito habitual que siguen los educandos en su proceso de enseñanza aprendizaje en las distintas áreas curriculares, buscando apoyar a los docentes en el proceso de observación y análisis del aprendizaje de sus alumnos, relevando las componentes centrales a observar en cada sector curricular. Para ello los mapas de progreso deben responder la siguiente pregunta ¿Qué saben, comprenden y son capaces de hacer los estudiantes en distintos momentos de su trayectoria escolar?⁵

A su vez, los mapas de progreso o trayectorias de crecimiento de los aprendizajes desde primero básico a cuarto medio, definen lo que cada estudiante debe haber aprendido sobre un aspecto de un subsector en siete niveles y/o categorías.

En cambio, los niveles de logro son construidos a partir de los elementos preponderados por los mapas de progreso, complementan la información entregada por SIMCE⁶ y permiten clasificar a los estudiantes en tres descripciones de desempeño: inicial, intermedio y avanzado. La pregunta que éstos buscan responder es: ¿Qué tan adecuado es el desempeño de los alumnos y alumnas al finalizar un ciclo de aprendizaje?

Éstos son un descriptor del aprendizaje demostrado por los alumnos al finalizar un ciclo de aprendizaje.

5.1. ¿Para qué sirven los Mapas de progreso y Niveles de logro?

Los mapas de progreso y niveles de logro, son una información que enriquece el aprendizaje de los educando y se puede utilizar como referencia, siendo la evaluación un claro ejemplo. Es una información para el aprendizaje, que presupone, si un estudiante bien informado sobre su desempeño, seguramente, tendrá una mejor trayectoria escolar, ya que recibe un estímulo y se transparenta la evaluación.

Los mapas de progreso son la descripción gruesa de la secuencia de conocimientos que los estudiantes debieran alcanzar. Le permiten al docente focalizar su mirada en

⁵ Educarchile. www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=132702

⁶ El Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) es el Sistema Nacional de Evaluación de resultados de aprendizaje del Ministerio de Educación de Chile.

los aprendizajes centrales, de modo que pueda observar cuán lejos o cerca están sus educandos del criterio de evaluación, para poder orientar su metodología. Los niveles de logro vendrían a ser una descripción más fina de lo mismo. A continuación, la coordinadora de Componente Currículum, de la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación, Jacqueline Gysling⁷, explica:

“De esta manera, se va a conectar el proceso de los niños con una historia escolar, donde los profesores traspasen entre sus colegas la información de cada alumno. Porque se mira al alumno a lo largo de su formación y no sólo año a año; la mirada tiene un énfasis en la progresión y en mejorar la calidad de la educación”.

Con esto, estudiantes y apoderados están informados sobre la cercanía o lejanía en la cual se encuentra el educando respecto a los niveles de logro que corresponden a esa edad y nivel de enseñanza.

Gysling aclara:

“Es un material de apoyo al currículum, al orientar a los profesores a centrarse en lo más importante. El mapa se puede usar como criterio de evaluación e informar a los alumnos de los resultados del aprendizaje”.

Los mapas de progreso, alineados con el currículum, describen secuencialmente el progreso del aprendizaje en los sectores fundamentales para la formación de los estudiantes. Esta descripción está hecha de un modo conciso y claro para que tanto profesores, alumnos y apoderados puedan compartir esta visión sobre cómo progresa el aprendizaje a través de los doce años de escolaridad. Se busca aclarar a los profesores, a los padres de familia y a los estudiantes, qué significa mejorar en un determinado dominio del aprendizaje.

Los mapas de progreso detallan siete niveles de aprendizaje para cada área fundamental en los cinco sectores curriculares desde primero básico a cuarto medio. Cada nivel corresponde a dos años de escolaridad, describiendo una secuencia continua en la que los estudiantes circulan a diferentes ritmos, no obstante, no conciernen exactamente a lo que todos logran en determinado grado escolar.

Cabe destacar, que los mapas de progreso no constituyen un nuevo currículum, porque no promueven nuevos aprendizajes, en contraste, profundizan la implementación del currículo recalcando la observación de los aprendizajes centrales que se esperan conseguir con los estudiantes.

⁷ Licenciada en Antropología, Universidad de Chile. Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile

5.2. Mapas de progreso y Niveles de logro en Matemática

El propósito del currículum de matemática es la adquisición de conocimientos básicos de la disciplina, el desarrollo de un pensamiento lógico, la capacidad de deducción, la precisión, las capacidades para formular y resolver problemas y las habilidades necesarias para modelar situaciones o fenómenos. La construcción de la matemática surge de la necesidad de responder y resolver desafíos provenientes de los más variados ámbitos del quehacer humano y de la Matemática misma; su construcción y desarrollo es una creación ligada a la historia y la cultura.

Como ya es sabido, el subsector de matemática se ha subdividido en cuatro ejes centrales, siendo estos, números y operaciones, álgebra, geometría y datos y azar. Para cada uno de estos ejes, existen mapas de progresos y niveles de logros asociados.

- Números y Operaciones, describe el desarrollo del concepto de cantidad y de número y la competencia en el uso de técnicas mentales y escritas para calcular y resolver problemas que involucran distintos tipos de números.
- Álgebra, describe el progreso de la capacidad para utilizar símbolos en la representación de generalidades y el modelamiento de situaciones y fenómenos así como también el desarrollo de la argumentación matemática.
- Geometría, describe el progreso de las competencias relacionadas con la comprensión, medición y el modelamiento de las formas, las transformaciones, la posición y el espacio.
- Datos y Azar, describe el progreso de las habilidades para organizar y representar información disponible, para describir y analizar situaciones, hacer interpretaciones de sucesos en los que interviene el azar y la incertidumbre.

Para esta investigación, sólo se considerará el eje de álgebra con sus respectivos mapas de progreso y niveles de logros.

Los aprendizajes descritos en el Mapa de Progreso de Álgebra avanzan considerando tres dimensiones que se desarrollan de manera interrelacionada:

- a. Comprensión y uso del lenguaje algebraico. Se refiere a las habilidades para interpretar el significado y escribir expresiones algebraicas haciendo uso de las convenciones del álgebra, representarlas de diversas maneras y usarlas en la designación de números, variables, constantes u otros objetos matemáticos.
- b. Comprensión y uso de relaciones algebraicas. Se refiere a la habilidad para establecer relaciones entre expresiones simbólicas mediante igualdades,

ecuaciones, inecuaciones o funciones y a la capacidad para aplicar reglas y procedimientos que permitan transformarlas en expresiones equivalentes.

- c. Razonamiento Matemático. Involucra habilidades relacionadas con el reconocimiento y descripción de regularidades, el modelamiento de situaciones o fenómenos y la argumentación matemática.

5.3. Elementos claves del mapa de álgebra

Actualmente, el álgebra ocupa un lugar de privilegio en la enseñanza de la matemática, siendo reconocida y valorada, no solo por matemáticos sino también por especialistas de otras disciplinas científicas, como una poderosa herramienta que permite representar y manipular símbolos, constituyéndose así en un lenguaje formal con el cual se puede describir generalizaciones, modelar situaciones de diversos ámbitos y demostrar conjeturas. A lo anterior se suma su innegable aporte al desarrollo del pensamiento abstracto y el razonamiento lógico.

La figuración del eje de álgebra desde Quinto Básico en el ajuste curricular propuesto para el sector, no excluye de ninguna manera la observación temprana del desarrollo de habilidades tales como, la identificación de regularidades de los números y figuras geométricas, el reconocimiento de un símbolo como valor desconocido, la interpretación de relaciones y propiedades conocidas de los números descritas en lenguaje simbólico y la justificación de procedimientos. Estas capacidades, tradicionalmente inmersas en los contextos numéricos o geométricos, pueden ser analizadas con una mirada algebraica, constituyéndose de esta forma en valiosos elementos de pre-álgebra que conformarán la base para el desarrollo del pensamiento algebraico futuro. De esta forma, el mapa de álgebra describe la progresión desde el nivel uno al siete, intencionando en los dos primeros niveles, la observación de las habilidades descritas anteriormente.

El Razonamiento Matemático en el Mapa de Álgebra, se refiere tanto al trabajo con modelos simples de situaciones y fenómenos tanto de la cotidianidad como de la propia disciplina como al desarrollo de la capacidad de argumentación usando herramientas matemáticas. Es de esta forma como en los primeros niveles se aprecia un énfasis en la detección de regularidades y en la búsqueda de reglas que las generen, para dar paso posteriormente a la representación de situaciones por medio de ecuaciones o el uso de relaciones de proporcionalidad. Finalmente el razonamiento algebraico en los últimos niveles está marcado por la modelación de situaciones para resolver problemas diversos y argumentar la validez de proposiciones usando procedimientos y herramientas matemáticas. El término “modelamiento” se refiere al proceso mediante el cual un problema en particular es descrito utilizando lenguaje simbólico, posteriormente se resuelve empleando las herramientas propias de la disciplina y luego se entrega su respuesta en el contexto que originalmente se encontraba el problema. El describir un problema usando lenguaje simbólico, implica detectar en él, tanto aquellos elementos claves que permiten una adecuada

representación como las relaciones existentes entre ellos; este proceso implica, por lo general, realizar supuestos que permitan describir de manera simple el problema en cuestión.

5.4. Detalle de Mapas de progreso y Niveles de logro

NIVELES	DESCRIPCIÓN
Nivel 1	Comprende que el signo igual representa una igualdad entre dos expresiones y reconoce que símbolos no numéricos pueden representar valores numéricos. Determina el valor desconocido en situaciones de adición y sustracción. Continúa el desarrollo de patrones numéricos y geométricos, dada la regla que lo genera. Fundamenta su respuesta en la determinación de un valor desconocido aludiendo al concepto de igualdad y da razones de por qué un término numérico pertenece o no a una secuencia refiriéndose a una regla dada.
Nivel 2	Expresa relaciones de orden utilizando la simbología correspondiente. Determina el valor desconocido en situaciones de multiplicación y división. Identifica, describe y continúa patrones numéricos y geométricos con figuras conocidas, mencionando alguna regla que genere la secuencia. Explica las estrategias aplicadas en la determinación de un valor desconocido y justifica la regla elegida para continuar un patrón aludiendo a los términos dados.
Nivel 3	Comprende que en las expresiones algebraicas las letras pueden representar distintos valores de acuerdo al contexto. Reconoce las expresiones algebraicas que representan las propiedades de las operaciones e interpreta expresiones algebraicas que representan la generalización de una operación matemática. Comprende que una misma expresión tiene distintas representaciones algebraicas equivalentes. Resuelve ecuaciones de primer grado donde la incógnita se encuentra a un solo lado de la igualdad, utilizando estrategias informales. Justifica sus soluciones explicitando las estrategias utilizadas.
Nivel 4	Traduce expresiones desde el lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa. Reduce expresiones algebraicas por medio de la aplicación de propiedades de las operaciones. Resuelve problemas en diferentes contextos que involucran ecuaciones de primer grado con la incógnita en ambos lados de la igualdad, utilizando propiedades y convenciones del álgebra. Reconoce funciones en contextos cotidianos y sus elementos constituyentes, distinguiendo entre variables independientes y dependientes. Resuelve problemas que involucran aplicar el

	<p>modelo de variación proporcional, explicando la relación entre las variables. Justifica la pertinencia de los procedimientos aplicados aludiendo a la situación que modela.</p>
<p>Nivel 5</p>	<p>Reconoce el tipo de situaciones que modelan las funciones lineal, afín, exponencial, logarítmica y raíz cuadrada, y las representa a través de tablas, gráficos y algebraicamente. Transforma expresiones algebraicas de forma entera y fraccionaria haciendo uso de convenciones del álgebra. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales en forma algebraica y gráfica. Resuelve problemas que involucran composición de funciones, modelos lineales y afines o sistemas de ecuaciones lineales. Justifica la pertinencia del modelo aplicado y de las soluciones obtenidas.</p>
<p>Nivel 6</p>	<p>Reconoce el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadrática y potencia, las caracteriza y representa a través de tablas, gráficos y algebraicamente. Distingue funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Representa e interpreta de diversas formas las soluciones de inecuaciones y sistemas de inecuaciones. Resuelve ecuaciones de segundo grado e inecuaciones de primer grado identificando el conjunto al cual pertenecen sus soluciones. Resuelve problemas que pueden ser modelados por medio de las funciones potencia y cuadrática. Elabora estrategias de resolución, las desarrolla y justifica usando lenguaje algebraico.</p>
<p>Nivel 7 Sobresaliente.</p>	<p>Interpreta y usa convenciones del álgebra para representar generalizaciones y relaciones entre números, variables, funciones u otros objetos matemáticos estableciendo nuevas representaciones algebraicas de un nivel de abstracción mayor. Muestra autonomía y flexibilidad en la transformación de expresiones simbólicas escribiendo, reconociendo y eligiendo formas equivalentes de distintas representaciones algebraicas. Modela situaciones o fenómenos provenientes de diversos contextos y utiliza argumentos y propiedades matemáticas para demostrar proposiciones.</p>

6. Marco Teórico

Aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de la matemática son de diversas índoles, que se conectan y se refuerzan en redes complejas, éstas pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina como objetos matemáticos y procesos de pensamiento; la tercera ligada a los procesos de enseñanza de la matemática; la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos y sus representaciones semióticas; y una quinta relacionada con la falta de una actitud racional hacia la matemática (Socas, 1997).

Es por lo anteriormente mencionado que para la realización de esta investigación se utilizará como marco teórico y estrategia didáctica la teoría de Representaciones Semióticas de la Matemática que les permitirán a los investigadores, vislumbrar las falencias que los alumnos presentan en la comprensión y aplicación del álgebra.

6.1. Concepciones de la matemática

De los múltiples procedimientos que se han ido efectuando a lo largo de la humanidad, se pueden encontrar numerosas acepciones de la matemática, por ejemplo, según señalan Godino y Batanero:

- Existen quienes creen que los objetos matemáticos poseen una existencia propia, así como cualquier otro objeto que se encuentra en el universo. Ante esto, solo es necesario descubrir dicho objeto, por medio de sus definiciones y propiedades, para tener conocimiento de su existencia.
- También, la matemática se puede considerar como el resultado del ingenio y la actividad de la humanidad. Ya que se fue generando debido a la necesidad de las sociedades de poder entregar una respuesta a los diversos problemas que se le presentaban.
- Hay quienes consideran a la “matemática pura”, la fundamental de todas, es decir que no se requiere de la aplicación de esta en diferentes áreas, para poder comprenderla.

Como bien se sabe, la matemática no es un ente aislado que se generó por sí mismo, que no influye en ningún aspecto de la vida y que a él no le influye ni una otra variable. Más bien, la matemática se fundamenta en la necesidad de entregar respuesta a las necesidades que el hombre posee ante diferentes situaciones. Teniendo esto como fundamento y los tres tipos de concepciones de la matemática que se han considerado, se puede comprender el análisis que realiza cada uno de los estudiantes, el cual le encuentra un sentido lógico tanto al procedimiento que está siguiendo, como a la respuesta que está considerando válida para resolver la situación a la cual se enfrenta.

No importa, entonces, del punto de vista que se analice la matemática, siempre intervendrán diferentes tipos de objetos al momento de realizar una actividad de ésta

índole. Por esta causa es que los educandos presentan dificultades al momento de estudiar estos contenidos. A pesar de esto, es natural que los escolares presenten dichos errores y debilidades en el proceso de aprehensión de los contenidos, pero es necesario que para superar estos obstáculos, los docentes tengan claro que se puede aprender de aquellos errores que han cometido.

Es así, que el trabajo realizado por los estudiantes se puede comparar con el de un matemático, J. Godino (2004) señala que *“el alumno investiga y trata de resolver problemas, predice su solución (formula conjeturas), trata de probar que su solución es correcta, construye modelos matemáticos, usa el lenguaje y conceptos matemáticos, incluso podría crear sus propias teorías, intercambia sus ideas con otros y finalmente reconoce cuáles de estas ideas son correctas- conformes con la cultura matemática-, y entre todas ellas elige las que le sean útiles. De aquí la idea de que el alumnos aprende matemática cuando la comprende y experimenta con los nuevos conocimientos y aquellos que ya posee.”*

6.2. Concepciones acerca del aprendizaje de la matemática

Para una mayor comprensión de la investigación, es necesario precisar algunos conceptos que se encuentran bien definidos por autores que se han dedicado a indagar el comportamiento de los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

En una primera instancia, para los investigadores es menester mencionar las concepciones que tienen algunos autores relevantes, para la mirada de la investigación, sobre “objeto matemático”.

“Objeto matemático es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemática” (Godino, 2012).

Así mismo para Duval (2007) un objeto matemático es un *“signo, concepto que aparece en la actividad Matemática y del que se conocen sus propiedades, operaciones, teoremas, etc; como los números enteros, las funciones, los límites, los polinomios, las matrices, etc”*.

Continuando con la idea de objeto matemático, Bruno D’Amore⁸ señala en una de sus publicaciones los tipos de objetos matemáticos sugeridos por él:

- “lenguaje” (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- “situaciones”(problemas, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
- “acciones” (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, ...)

⁸ D’Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. Número Especial, 177-195.

- “conceptos” (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- “propiedad o atributos de los objetos” (enunciados sobre conceptos, ...)
- “argumentos” (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados, por deducción o de otro tipo, ...)

6.3. Teoría de Representaciones Semióticas

A partir de un objeto matemático podemos encontrar numerosas representaciones semióticas, debido a que dentro del aula existe un variado universo de sujetos con disímiles características cognitivas que generan acepciones distintas con respecto a dicho objeto.

Para los investigadores, es necesario tener presente las siguientes definiciones claves, entregadas por Duval (2007):

- ❖ Representaciones mentales: aquellas que cubren el conjunto de imágenes y las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto.
- ❖ Semiótica: ciencia de los modos de producción, funcionamiento y recepción de los diferentes sistemas de signos de comunicación en los individuos o colectividades. Teoría de los signos. Producción de una representación semiótica.
- ❖ Representaciones semióticas: aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.) que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias reglas y significancia. Es decir, el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Existen tres tipos de registros de representaciones semióticas: registro de la lengua natural, registro gráfico y registro algebraico.
- ❖ Semiosis: es la aprehensión o la producción de una representación semiótica.
- ❖ Noesis: actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la comprensión de una inferencia, etc.
- ❖ Tratamiento: transformación de la representación al interior de un registro de representación o de un sistema. La paráfrasis es una transformación interna del registro del discurso en la lengua natural: “reformula” un enunciado en otro, ya sea para reemplazarlo o para explicarlo.

- ❖ **Conversión:** transformación externa del registro de representación de partida. La ilustración es la puesta en correspondencia de una palabra, una frase o un enunciado, con una figura o con uno de sus elementos.
- ❖ **Congruencia:** la congruencia entre registros existe cuando se cumplen las siguientes condiciones: Correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas dos unidades en las dos representaciones, y transformación de una unidad significativa en la representación de partida en una sola unidad significativa en la representación de llegada.
- ❖ **Objeto ostensivo:** con soporte material, intersubjetivo en el sentido de que se pueden mostrar a otra persona.
- ❖ **Objeto no-ostensivo:** conceptos, ideas, etc. personales al sujeto.

Además, Duval señala ser partidario de la idea de que *“no hay noesis sin semiosis es decir, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis”* (Duval 1995, pág.4). Esto se refiere a que Duval entiende como semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica y por noesis a los actos cognitivos que realiza el estudiantes sobre la aprehensión conceptual de un objeto matemático, la comprensión, la deducción, etc.

Puesto que la siguiente investigación se basa en el aprendizaje de los alumnos con respecto al álgebra, se debe tener en cuenta que ellos poseen saberes anteriores que habilitan u obstaculizan la formación de nuevos conocimientos. Es por esto que los investigadores dieron énfasis a aquellos procesos cognitivos que generados por concepciones anteriores provocan un obstáculo en la transición de la aritmética al álgebra. Estos obstáculos se visualizan en los estudiantes en los siguientes temas principales del álgebra: **formas de ver el signo igual**, cuando los estudiantes se ven enfrentados a este símbolo tienden a identificarlo como una “señal de hacer algo”, como una preposición o un mero separador antes de verlo como un símbolo de la equivalencia entre el lado izquierdo y derecho (Kieran 1980); **variable**, el cómo los alumnos llegan a entender el significado de los términos variables en las ecuaciones algebraicas; **expresiones y ecuaciones**, en este sentido se refieren a que los estudiantes no diferencian una expresión de una ecuación, ya que no pueden asignar significado alguno a expresiones algebraicas por la carencia de un signo igual y un miembro al lado derecho; **resolución de ecuaciones** y los enfoques utilizados para dicha solución: a) intuitivo, b) sustitución por tanteo y c) formal. Estos temas se tratarán con mayor profundidad más adelante.

Enfocándose en lo anterior se señala que:

“la semiótica ha generado un interés reciente en la Educación Matemática, al tomar los investigadores conciencia de que la actividad matemática es esencialmente simbólica y de que los

signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación que hacen de la semiótica un campo apropiado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos.”⁹ (Radford, 2006).

Es bien sabido que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos y solamente a través de las representaciones semióticas tenemos acceso a esos objetos. Por tal motivo, es importante analizar el papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento matemático. Por tanto, los investigadores trabajarán con la idea que Duval (1993, 1995) presenta en su teoría de “Las Representaciones Semióticas”, con la finalidad de develar los procesos en que incurre el estudiante al momento de aprehender un determinado concepto o conocimiento.

Duval (1993, 1995) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación, que puede ser un registro de representación si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

“1) La presencia de una representación identificable...2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada...3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.”

Sobre la construcción de conceptos, Duval establece que dado que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, se considera absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones para la formación del concepto, en otras palabras, un solo concepto es analizado desde la perspectiva de los registros de representación y si un alumno comete errores, se debe intentar explicar cada uno de esos errores en ese contexto teórico.

Un concepto se va construyendo mediante tareas que impliquen la utilización de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre representaciones (ver Figura 1). Desde esta orientación teórica, el conocimiento de un discente sobre un concepto es estable si es capaz de articular diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones. Así, en la resolución de problemas, las representaciones están en el seno de la actividad matemática. Además, la articulación de diferentes representaciones del concepto libre de contradicciones tiene que ver con la transferencia.

⁹ Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números, 5-34.

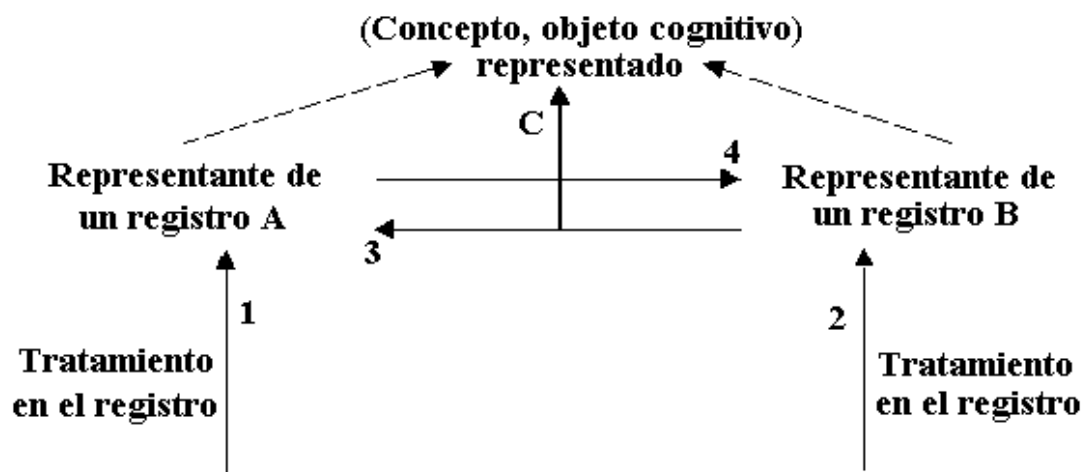


Figura 1. Modelo de la representación centrado en la función de objetivación. Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha C corresponde a lo que llamaremos comprensión integradora de una representación: supone una coordinación de dos registros. Las flechas punteadas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado.¹⁰

En una actividad matemática, se señala una situación determinada de la cual surge en el estudiante representaciones internas que construyen redes de conocimiento, con el fin de obtener una respuesta al problema presentado en dicha situación. Por añadidura, los procesos internos que vive el alumno al adquirir un nuevo conocimiento, pueden provocar en él errores cognitivos, conceptuales, etc.

Los errores más frecuentes se manifiestan durante la manipulación de una representación dentro de un mismo sistema de representación, que generalmente es el aritmético en los primeros niveles escolares y en el algebraico posteriormente; otro tipo de error se puede presentar cuando hay una elección inadecuada de un sistema semiótico al resolver un problema matemático. La construcción inadecuada de un concepto se pudiera deber a una carencia de articulación entre diferentes registros semióticos de representación.

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de la matemática. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico. Debido a esto, Duval (1998) recalca la importancia de la representación matemática, ya que expone que no es factible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a esta representación. Sin embargo, hay que saber identificar (no confundir) entre objeto matemático y la representación de dicho objeto, si los conceptos matemáticos fueran directamente accesibles a través de experiencias realizadas con los objetos “físicos”, no existiría tal confusión, pero los conceptos son objetos mentales y es imprescindible utilizar medios que sean audibles o visibles. Únicamente son accesibles de manera

¹⁰ Gómez, P. & Rico, L. (Eds.), (2001). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. En F. Hitt, *El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en educación matemática* (pp. 165-177). Granada, FIEMAL & ALFA.

directa las representaciones semióticas, construidas por el empleo de signos, las que son representaciones externas que se diferencian de las representaciones internas. Así mismo, al representar un concepto matemático se puede realizar mediante diversos registros, de los cuales, los investigadores, considerarán los registros de la lengua natural, gráfico, algebraico y numérico.

Análogamente, para Duval los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, al contrario, se debe contar con un estudio y tratamiento de representaciones de los mismos, es por eso que las representaciones externas, de las que habla Duval, son importantes en la realización del conocimiento del estudiante, ya que el docente puede ayudar a corregir o ratificar dicha representación, éstas pueden ser de carácter geométrico, algebraico o numérico del objeto.

Más aún, el mismo Duval (2000,2004) especifica:

“el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, debido a que a diferencia de otros campos de conocimiento (biología, geología y física), no existen otras maneras de lograr el acceso a los objetos matemáticos sin producir algunas representaciones.”

Es por eso, que las representaciones permiten acceder al objeto matemático. Por medio de estos procesos de representaciones mentales, los estudiantes producen una retroalimentación y una mejora de las mismas.

Para comprender un concepto, es necesaria la articulación entre los diferentes registros, si se acciona en un sólo registro no se obtendrá la comprensión integral del concepto. Por consiguiente, la conversión entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada. Es por esto que se puede observar que la mayoría de los alumnos no reconocen el mismo objeto a través de representaciones que son dadas en sistemas semióticos diferentes.

En ese sentido, Bruno D'Amore (2004) señala:

*“Por lo tanto, la construcción de los conceptos matemáticos dependen estrechamente de la capacidad de usar **más** registros de representaciones semióticas de esos conceptos: 1) de **representarlos** en un dado registro. 2) de **tratar** tales representaciones al interior de un mismo registro. 3) de **convertir** tales representaciones de un dado registro a otro.”*

Con la finalidad de comprender las dificultades que varios estudiantes tienen en el aprendizaje de la matemática, Duval (2006) plantea dos tipos de transformaciones en las representaciones semióticas: Tratamiento y Conversión. Estos dos tipos afectan a cualquier actividad matemática y señalan el tipo de sistema semiótico que se requiere

para responder a una determinada situación, con el fin de analizar las causas que afectan a los estudiantes en una actividad (taller, clase expositiva, evaluación, etc.) y no tratar las falencias como una problemática en el aprendizaje de conceptos.

Por esta razón, Duval (2006) establece diferencias radicales entre los dos tipos de representaciones semióticas, señaladas en el párrafo anterior:

*“tratamiento semiótico se refiere a transformaciones en las representaciones que ocurren en el mismo registro de representaciones; mientras que **conversión semiótica** se relaciona con transformaciones en las representaciones que ocurre en cambios de registros de representaciones; por ejemplo pasando de la notación algebraica de una ecuación a su representación gráfica.”*

En consecuencia, se puede producir un obstáculo en el dicente al momento de la conversión del registro, puesto que Guzmán (1998) señala que existe una preponderancia en los estudiantes a quedarse en el mismo registro en el cual se planteó la pregunta referente a una determinada actividad matemática. Esto ocurre por la incomprensión en el aprendizaje de la matemática, ligada a las representaciones internas que formula el estudiante, lo cual produce errores que con el tiempo generan obstáculos en él.

Como se señaló con anterioridad, para lograr una adecuada comprensión de un concepto matemático es necesario que cualquier estudiante transite por la representación, el tratamiento y la conversión de dicho concepto, siendo esta la secuencia especificada por Bruno D’Amore, lo cual no se cumple a cabalidad por instrucción del docente, ya que él insiste solo en el tratamiento de conceptos sin realizar una conversión de registros.

7. Marco Metodológico

7.1. Metodología de investigación

La presente investigación es del tipo cualitativa, con carácter cuantitativa en el análisis del instrumento aplicado. Es cualitativa, puesto que se centra en una teoría que aborda, desde su naturaleza epistemológica, el proceso que genera el estudiante frente a una determinada actividad matemática, con la finalidad de poder entender la totalidad concreta de una realidad dinámica. Dicho proceso es subjetivo, porque depende de los procesos cognitivos que realice el estudiante. Sin embargo, es cuantitativa al momento de la recolección de datos, por consiguiente, se tendrá una medición controlada y particularista; a su vez los datos son sólidos y el análisis, realizado por los investigadores, será objetivo. Además, la recolección de datos se fundamentará en la medición de variables, esta recolección se llevará a cabo al utilizar procedimientos estandarizados en rúbricas señaladas posteriormente.

Los investigadores describen la metodología de la investigación como un estudio descriptivo, ya que el propósito de la investigación consiste en describir como se manifiesta el fenómeno de algebrización en los escolares de primer año medio del Complejo Educativo Alberto Widmer. Según Danhke (1989) los estudios descriptivos buscan especificar las características de personas, grupos, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis.

Se debe considerar que los estudios descriptivos únicamente pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren, esto es, su objetivo no es indicar cómo se relacionan las variables medidas.

7.2. Diseño metodológico

El estudio de caso es un método de investigación cualitativa que se ha utilizado ampliamente para comprender en profundidad la realidad social y educativa.

Según Yin (1989), el estudio de caso consiste en una descripción y análisis detallados de unidades sociales o entidades educativas únicas. Por otro lado, para Stake (1998) es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas.

La particularidad más característica de ese método es el estudio intensivo y profundo de un/os caso/s o una situación con cierta intensidad, entendiéndose éste como un sistema acotado por los límites que precisa el objeto de estudio, pero enmarcado en el contexto global donde se produce (Muñoz y Muñoz, 2001). Para ser más concreto, se llama casos a aquellas situaciones o entidades sociales únicas que merecen interés de investigación. Para la investigación, dichos casos serán las situaciones que se generen

en el establecimiento educacional Alberto Widmer, en los primeros años medios.

En virtud de esta definición, es necesario precisar que el estudio de casos puede incluir tanto estudios de un solo caso como de múltiples casos (según sea una o varias las unidades de análisis). Según los investigadores, dicho estudio tendrá más de una variable, ya que estas serán los contenidos mínimos obligatorios de la unidad de Álgebra. El propósito fundamental es comprender la particularidad del caso, en el intento de conocer cómo funcionan todas las partes que los componen y las relaciones entre ellas para formar un todo (Muñoz y Serván, 2001).

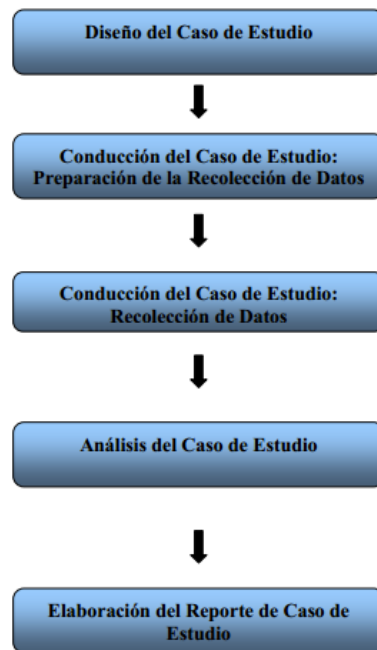
Latorre (1996) señala las siguientes ventajas del uso socioeducativo del estudio de casos:

- Pueden ser una manera de profundizar en un proceso de investigación a partir de unos primeros datos analizados.
- Es apropiada para investigaciones a pequeña escala, en un marco limitado de tiempo, espacio y recursos.
- Es de gran utilidad para el profesorado que participa en la investigación, puesto que contribuye a su desarrollo como profesional.
- Es un método abierto a retomar otras condiciones personales o instituciones diferentes.
- Lleva a la toma de decisiones, a implicarse, a desenmascarar prejuicios o preconcepciones, etc.

Lo indicado anteriormente, es coherente a la investigación, ya que sólo se realizará un instrumento para ser analizado, por el tiempo que se tiene para ésta, además, será en una pequeña escala, porque se analizará sólo un establecimiento. Así mismo, este trabajo podrá ser retomado por otro grupo investigador para realizarlo en otro complejo educacional y finalmente ayudará a los investigadores, docentes, lectores, etc. a no realizar preconcepciones o prejuicios de los errores o dificultades que tienen los estudiantes frente a la concepción y operación del álgebra.

En resumen, el estudio de caso para la investigación, aportará a los realizadores una mirada diferente frente a un suceso reiterativo en la educación de la matemática chilena, ya que es común el encontrar discentes que produzcan errores al momento de transitar desde la aritmética al álgebra, siendo este trabajo un aporte enriquecedor en el quehacer de los docentes que participaron en él.

Según Yin (1984), esta metodología consta de cinco partes:



Fuente: Yin, R. (1984)

A continuación, se presentará una contextualización de la investigación para esta metodología de estudio.

7.2.1. Diseño del caso de estudio

El diseño de la investigación consiste en ligar los datos a ser recolectados con las preguntas iniciales del estudio (Yin, 1984, p.27). Los seis componentes de un diseño de investigación son:

a. Preguntas de estudio

El tipo de preguntas de investigación utilizadas en este estudio son generalmente ¿qué? o bien ¿cuáles?, es decir, preguntas de tipo exploratorio. Las preguntas que se buscan resolver en esta investigación son:

- ¿Qué errores, dificultades u obstáculos están presentes en el aprendizaje del álgebra?
- ¿De qué manera afecta el uso de diversos registros en el desarrollo de actividades algebraicas?
- ¿Cuáles son las transformaciones de representación semiótica que realizan los estudiantes, al efectuar una actividad matemática?

b. Propositiones del estudio

Según Yin (1994, p. 30), cada proposición dirige su atención a algo que debe ser examinado dentro del alcance del estudio, es decir, la hipótesis les ayudará a los realizadores a probar algún fenómeno o acontecimiento, sin embargo, en esta investigación no se hará una hipótesis, ya que no se busca explicación alguna, en este estudio se espera obtener información relevante sobre el tránsito del pensamiento aritmético a un pensamiento algebraico, a través de las producciones estudiantiles.

c. Unidades de análisis

La presente investigación tiene como universo el complejo educacional Alberto Widmer, ubicado en Avenida Pajaritos #2803 de la comuna de Maipú, siendo formada por alumnas y alumnos que realizan su educación en el segundo semestre del año 2012. Dicho establecimiento presenta las modalidades disciplinarias de técnico profesional y científico humanista. El centro educativo contempla un total de 1.679 estudiantes.

El tipo de muestreo para este estudio es dirigido, no probabilístico y por conveniencia, dicho de otra forma, una muestra intencionada. Por este motivo dicha muestra está determinada por los estudiantes que componen la población de los primeros años medios desde la letra A hasta la letra G, la cual tiene una cardinalidad de 292 escolares (anexo 1) que integran el complejo educacional Alberto Widmer.

La muestra contempla a un 41,44% de discentes de sexo masculino y un 58,56% de discentes de sexo femenino (anexo 2), que cursan Primer año Medio, el total de estudiantes de la muestra son 292, provenientes, en su mayoría, de la comuna de Maipú, los cuales ascienden a un 78,8% y de comunas aledañas, un 21,2% (ver anexo 3).

d. La relación lógica entre las preguntas y las proposiciones

Debido a lo anterior, no existe relación alguna entre las preguntas y las proposiciones, ya que en este estudio no se pretende explicar algún acontecimiento o fenómeno, más bien, vislumbrar los factores cognitivos que dificultan un buen aprendizaje del álgebra.

e. Criterios para interpretar resultados

Los resultados serán interpretados utilizando como criterios los Contenidos Mínimos Obligatorios, que fueron creados por los investigadores basándose en los planes y programas actuales de segundo ciclo básico y primer año medio, los cuales son:

- Identificar regularidades en la realización de transformaciones para formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones.
- Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado.
- Representar enunciados mediante expresiones algebraicas.

f. Tipo de diseño de caso de estudio

En el caso de estudio de Yin, existen cuatro tipos de diseño de estudio: 1) Caso único – Unidad única, 2) Caso único – Múltiples unidades, 3) Caso múltiple – Unidad única, 4) Caso múltiple – Múltiples unidades.

El Caso múltiple de Unidad única es el tipo de diseño más correcto para esta investigación, ya que se compone de múltiples variables (CMO), que son los factores para el estudio de las producciones estudiantiles, sin embargo, se tendrá una unidad única de análisis, la cual es el establecimiento Alberto Widmer.

Cabe mencionar, que dentro de esta unidad de análisis sólo se observará a los discentes que componen el primer nivel de enseñanza media, entendiéndose éste por su globalidad y no por cursos separados.

7.2.2. Conducción de caso de estudio: Preparación de la recolección de datos

El protocolo de investigación contiene no sólo el instrumento sino todos los procedimientos y reglas generales que deben ser seguidas para usar ese instrumento. Según Yin (1984, p. 55) el protocolo debe contener las siguientes secciones:

a. Visión general de la investigación de caso de estudio

La visión general incluye información acerca de la investigación y los objetivos de la misma.

Los objetivos de esta investigación son:

- Identificar qué tipo de dificultades y problemas se detectan en el aprendizaje del álgebra en los estudiantes de primer año medio.
- Revelar el uso de diversos registros que emplea el estudiante en el desarrollo de actividades algebraicas.

- Constatar la presencia de tratamiento y/o conversión que efectúan los estudiantes en una actividad matemática.
- Establecer recomendaciones conducentes a la elaboración de alguna propuesta metodológica que contribuya a superar las dificultades y problemas detectados para el aprendizaje del álgebra en los alumnos de primer año medio.

Se realizará una recogida de información obtenida a través de la implementación de un instrumento, con el fin de recopilar antecedentes concretos y fidedignos de los procesos cognitivos de los estudiantes que cursan el segundo semestre de primer año de enseñanza media.

b. Procedimiento de campo

Este aspecto se refiere al grado de accesibilidad al lugar de estudio y a la información necesaria para la investigación.

En este estudio, el instrumento se aplicará a cada uno de los estudiantes que conforman el nivel de primer año medio. El acceso al complejo educacional ha sido con la debida autorización por parte del director de dicho establecimiento, Don Carlos Gómez Galarce, de la jefe de la unidad técnico pedagógica de enseñanza media, Doña Viviana Aracibia Leroux, de la directora de básica, Doña María Elena Perez Mateluna y de la inspectora general de enseñanza media, Doña Jessica Tapia Palma, como también informado al personal encargado de la educación y formación de los estudiantes (coordinadora, orientadoras y docentes del subsector de matemática). Todo lo antes mencionado, fue validado a través de una carta enviada a dichas autoridades, en la que se autoriza la realización del proyecto (ver anexo 4) y por medio de una entrevista entre el profesor guía, Don Carlos Gómez Castro y la jefe de U.P.T, Doña Viviana Arancibia Leroux.

c. Preguntas de caso de estudio

Según Yin (1984) estas preguntas son para los investigadores y no para el educando que contesta el instrumento de recogida de información. Son una especie de recordatorios que deben de considerar la información que se necesita recolectar y el por qué de las mismas.

Las preguntas que deben de mantener siempre en mente los investigadores para este estudio específico son:

- ¿Qué tipo de dificultades se vislumbran en una actividad algebraica, por parte de los estudiantes que cursan el segundo semestre de primer año medio, del Complejo Educacional Alberto Widmer?

- ¿Cómo manifiestan las falencias del pensamiento algebraico los discentes del establecimiento?

d. Caso piloto

La preparación final de la recolección de datos es la realización del caso piloto. Este caso piloto ayuda a los investigadores a afinar el plan de recolección de datos, con respecto al contenido de los datos y a los procedimientos a seguir. (Yin, 1984, p.74).

Para la investigación se construyeron dos instrumentos de recogida de información, los cuales fueron presentados ante un juez experto, quien validó uno de estos instrumentos para su posterior aplicación en el centro educacional.

7.2.3. Conducción de caso de estudio: Recolección de datos

Yin (1984, p.78), menciona que la evidencia de los casos de estudio puede ser recolectada a través de documentos, archivos, entrevistar, observación directa, observación participativa y artefactos físico.

En el caso específico del presente estudio, la recopilación de datos se llevará a cabo principalmente con la documentación entregada por el establecimiento; listado de las comunas de procedencia de los estudiantes y una planilla de la cantidad de alumnos(as) que conforman los diversos cursos de primer año medio.

7.2.4. Análisis de caso de estudio

Para poder llevar a cabo este estudio, los investigadores confeccionaron dos instrumentos de recogida de información, siendo validado sólo uno de ellos (ver anexo 5). Dichos instrumentos fueron evaluados por un docente experto perteneciente a la Escuela de Educación en Humanidades y Ciencias, Departamento de Educación Matemática, profesora Isabel Barros Inostroza (ver anexo 6).

Lo señalado por la docente experta, en relación a los instrumentos puestos en juicio, es:

Instrumento I:

- *Algunos ejercicios se repiten.*
- *Agregar preguntas al ítem I: ¿cuántos puntos se deben agregar a la figura 10 y a la 20?, ¿cómo llegas a esa conclusión?*
- *Ítem II: es pertinente*
- *Ítem III: revisar redacción y orden de la pregunta*
- *Faltan ejercicios que involucren una situación gráfica cotidiana, que el alumno pueda inferir (o representar) en lenguaje algebraico.*

- *Falta rúbrica*

Instrumento 2:

- *Ítem I: OK*
- *Ítem II: Faltan ejercicios de representación de una situación cotidiana gráfica o verbal a una algebraica.
No logro entender lo que quiere que conteste el estudiante.*
- *Ítem III: agregaría ¿qué estrategia usó? O ¿cómo lo hizo?*

Ambos instrumento son perfectibles. A mi juicio deben contemplar 3 tipos de ejercicios según las 3 representaciones semióticas: verbal, gráfica y algebraica. Insistir en la “forma” que el alumno resuelve cada uno de ellos y por ello es necesario plantear ejercicios en donde los estudiantes deban plantearse esquemas y sacar conclusiones.

En una primera instancia, los investigadores acortaron el instrumento en función del tiempo otorgado por el establecimiento educacional. Éste fue presentado a un docente del subsector de matemática perteneciente al colegio, quien sugirió una readecuación de la estructura, eliminando situaciones que perseguían un mismo objetivo de análisis.

Es imperativo mencionar que al momento de aplicar el instrumento los investigadores, se vieron enfrentados a 259 estudiantes, lo que refleja un 88,70% de asistencia de escolares de primer año medio.

Del mismo modo, se elaboró una encuesta, que fue aprobada por un juez experto, dirigido a los docentes del subsector de matemática de enseñanza media, con el propósito de conocer las propuestas curriculares que emplean en su acto docente para minimizar las dificultades que presentan los estudiantes frente a una determinada actividad algebraica.

a. Descripción del instrumento aplicado

En este apartado se presenta el detalle del *instrumento aplicado, especificando por ítems sus contenidos mínimos obligatorios, objetivo de aprendizaje, programa de estudio al cual pertenece y su respectivo nivel en el mapa de progreso de álgebra.*

ÍTEM I

1. **Completa las secuencias dibujando las figuras que faltan y responde a las siguientes preguntas:**



Fig. 1

Fig. 2

Fig.3

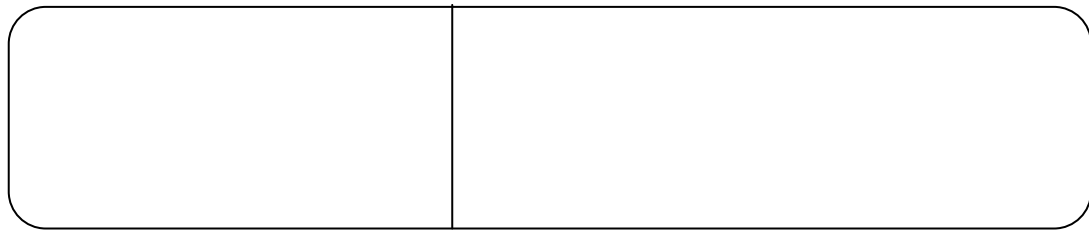


Fig. 4

Fig. 5

¿Por cuántos fósforos está formada la figura 3? _____

¿Por cuántos fósforos estará formada la figura 5? _____

¿Cuántos fósforos agregaría a la figura 10? _____ ¿y a la 20? _____

¿Cómo llegaste a esa conclusión? _____

Si tienes 21 palos ¿Cuántos cuadrados y triángulos se pueden formar siguiendo la forma de las figuras? _____

2. **Observa las figuras anteriores y completa la tabla:**

Figura	Nº de palos de fósforos
1	6
2	9
3	
4	
5	
6	
7	
8	

3. Vuelve a observar las figuras y la tabla que completaste y responde:

a. ¿Qué fórmula se podría usar para calcular la cantidad de palos que hay en la figura N?

Resp.: _____

Contenido Mínimo Obligatorio	Identifican regularidades en la realización de transformaciones para formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones.		
Objetivo de aprendizaje	Representar y calcular secuencias y regularidades.		
Programa de estudio al cual pertenece	Nivel	Unidad	Objetivo de Aprendizaje
	NB6	Patrones y Álgebra	<p>Demostrar que comprender la relación entre los valores de una tabla y aplicarla en la resolución de problemas sencillos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificando patrones entre los valores de la tabla. - Formulando una regla con lenguaje matemático.
Nivel del mapa de progreso correspondiente	<p>Nivel 2: Identifica, describe, y continúa patrones numéricos y geométricos con figuras conocidas, mencionando alguna regla que genere la secuencia. Explica las estrategias aplicadas en la determinación de un valor desconocido y justifica la regla elegida para continuar un patrón aludiendo a los términos dados.</p> <p>Nivel 3: Comprende que en las expresiones algebraicas las letras pueden representar distintos valores de acuerdo con el contexto.</p>		

ÍTEM II

1. Plantea la ecuación en cada caso y resuelve

a. La suma de un número y 36 es igual a la diferencia entre 240 y 200. ¿Cuál es el número?

b. 1 kg de papas vale \$578, ¿cuántos kilos se pueden comprar con \$2.890?

c. En un supermercado de tu Comuna se ofrece el choclo congelado en tres paquetes de distintas masas. El de 500 gramos cuesta \$499, el de 1.000 gramos, \$999 y el de 1.500 gramos, \$1.499. Si compras 3 kg de choclo, ¿Cuál de los tres paquetes conviene comprar?

Contenido Mínimo Obligatorio	Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado		
Objetivo de aprendizaje	Representar problemas mediante ecuaciones y resolver		
Programa de estudio al cual pertenece.	Nivel	Unidad	Objetivo de Aprendizaje
	NB7	Números y Álgebra	Resolver problemas que impliquen plantear y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, en el ámbito de los números enteros y fracciones o decimales positivos, y problemas que involucren proporcionalidad.
	NB8	Álgebra	Resolver problemas en diversos contextos que implican la proporcionalidad directa y problemas que implican proporcionalidad inversa.
	NM1	Álgebra	Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	<p>Nivel 3: Resuelve ecuaciones de primer grado donde la incógnita se encuentra a un solo lado de la igualdad.</p> <p>Nivel 4: Resuelve problemas que involucran aplicar el modelo de variación proporcional</p>		

ITEM III

1. Relaciona los enunciados de la Columna A con las expresiones algebraicas de la columna B

En la columna A se encuentra un listado de enunciados. Las cuales debe relacionar indicando el número en los términos algebraicos que se encuentran en la columna B.

Columna A

1. El doble de un número disminuido en su cuarta parte.
2. Un número impar
3. El producto de dos números es 20
4. El cuadrado de la suma de dos números
5. El triple de la suma de dos números cualquiera
6. La semisuma de dos números cualquiera

Columna B

- ___ $\frac{x+y}{2}$
- ___ $a^3 - a$
- ___ $2n - \frac{n}{4}$
- ___ $3(x + y)$
- ___ $7t$
- ___ $(m + n)^2$

Contenido Mínimo Obligatorio	Representan enunciados mediante expresiones algebraicas		
Objetivo de aprendizaje	Representar enunciados mediante expresiones algebraicas		
Programa de estudio al cual pertenece.	Nivel	Unidad	Objetivo de Aprendizaje
	NB6	Patrones y Álgebra	Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones.
Nivel del mapa de progreso correspondiente.	Nivel 4: Traduce expresiones desde el lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa		

b. Análisis cuantitativo y cualitativo del instrumento

Por lo general la matemática es considerada una disciplina rígida y estructurada. Sin embargo, debido al nivel de comprensión y análisis de los estudiantes, se pueden encontrar diversos sentidos que le dan a esta disciplina, lo cual entrega como resultado, un gran listado de erros que surgen de algunos “malos entendidos” que se tienen de los procedimientos matemáticos que deben realizarse en aquellas situaciones que se les plantean a los escolares. De esto habla Mancera E. quien señala que:

“Esos procedimientos raros en los estudiantes son muestra de un esfuerzo por tratar de entender, son rastros de que desean recorrer el camino pero que sus propias posibilidades lo hacen avanzar más lento o detenerse en asuntos que no les quedan del todo claros”.

Motivo de lo anterior es que el sólo señalar o caracterizar la presencia de una deficiencia, error u obstáculo en un dicente o grupo de curso, no es suficiente para franquear dicho problema. Es necesario identificar las posibles causas, se evalúen y se formulen procedimientos claros y adecuados que sean capaces de mejorar esta situación.

Es primordial, en primera instancia comprender los conceptos error, dificultad y obstáculo. J. Godino dice que un error es: “... cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.” Y una dificultad: “... indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio.”. Por último, según G. Brousseau un obstáculo es: “aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas.”

A pesar de que se tiene conocimiento de que los estudiantes se encuentran propensos a cometer errores o a no interiorizar un contenido que se cree que fue claramente explicado, los profesores suelen intentar identificar en los escolares la información que se le ha transmitido, creyendo que éstos la han procesado de manera adecuada. Esta visión ideal del proceso cognitivo que genera cada estudiante crea ingenuidad ante lo que realmente ocurre en el pensar de cada uno de ellos, los cuales construyen con las herramientas que poseen, ya sea para bien o para mal, un “castillo del conocimiento”, que para ellos está perfecto, ya que las conexiones que han realizado responden a su propia lógica.

Es por ello que los investigadores, mediante una exhaustiva indagación, buscan diagnosticar a los estudiantes de primer año medio del colegio Alberto Widmer de la Comuna de Maipú, con la finalidad de determinar si existe comprensión del álgebra

escolar en relación a los contenidos aritméticos que los docentes ya “dominan”. Debido a que las dificultades que presentan los educandos se pueden considerar como un camino para surgir en el razonamiento matemático, permitiendo tanto al docente como al docente crear una vía más apta en la formación de los conocimientos aritméticos.

Por consiguiente, en este punto se presentan ambas visiones, siendo la primera especificada por medio de porcentajes y gráficos, los cuales aluden a los cinco niveles de logro¹¹, que se describen a continuación:

- **No logrado (NL):** Este nivel engloba a los estudiantes que no evidencian producciones, entendiéndose esto el no señalar algún desarrollo, limitándose sólo a escribir una respuesta, o bien, omitir la pregunta.
- **En proceso de logro (PL):** Este nivel engloba a los estudiantes que intentan realizar una producción coherente con lo solicitado, pero dicha producción es incompleta e incorrecta o resuelve el problema de manera sencilla (sin un razonamiento algebraico), por medio de un procedimiento de resolución que se desprende directamente de la información que dispone.
- **Medianamente logrado (ML):** Este nivel engloba a los estudiantes que aún no han consolidado los aprendizajes del nivel suficientemente logrado, ya que realizan producciones matemáticas utilizando un razonamiento algebraico, sin embargo, presentan errores en el desarrollo que los conlleva a un resultado errado.
- **Suficientemente logrado (SL):** Este nivel engloba a los estudiantes que aún no han consolidado los aprendizajes del nivel logrado, ya que en ocasiones demuestra logros en algunos de los aprendizajes descritos en ese nivel, pero con una menor frecuencia y de manera poco consistente.
- **Logrado (L):** Este nivel engloba a los estudiantes que de manera idónea relacionan sus conocimientos, resuelven problemas rutinarios y así mismo, analizan información presentadas en varios registros y resuelven problemas abstractos.

Así mismo, la segunda visión a tratar hace referencia al levantamiento de conjeturas de los resultados obtenidos al aplicar el instrumento de recogida de información. Por este motivo, se eximirá cuidadosamente cada producción para identificar patrones, semejanza, diferencias y/o relaciones que surjan de ellas.

¹¹ Rúbrica de evaluación para instrumento de recogida de información. (Ver anexo 5)

Competencia I: Identifica regularidades en la realización de transformaciones para formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones.

Indicador I: Reconoce la representación gráfica de la secuencia.

Completa las secuencias dibujando las figuras que faltan y responde a las siguientes preguntas:



Fig. 1

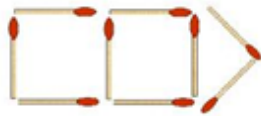


Fig. 2

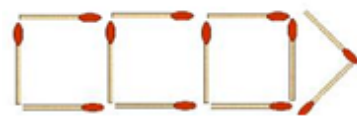


Fig.3

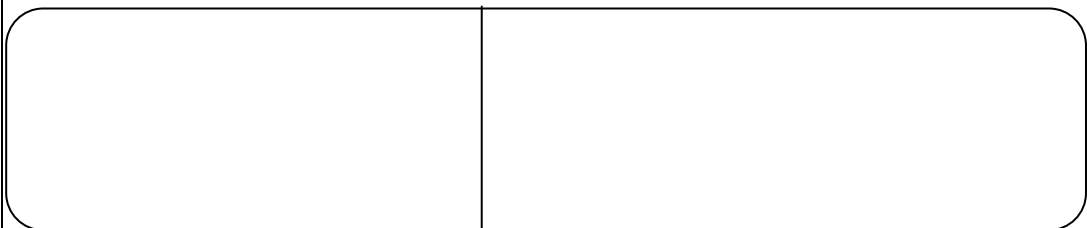


Fig. 4

Fig. 5

NIVELES DE LOGRO

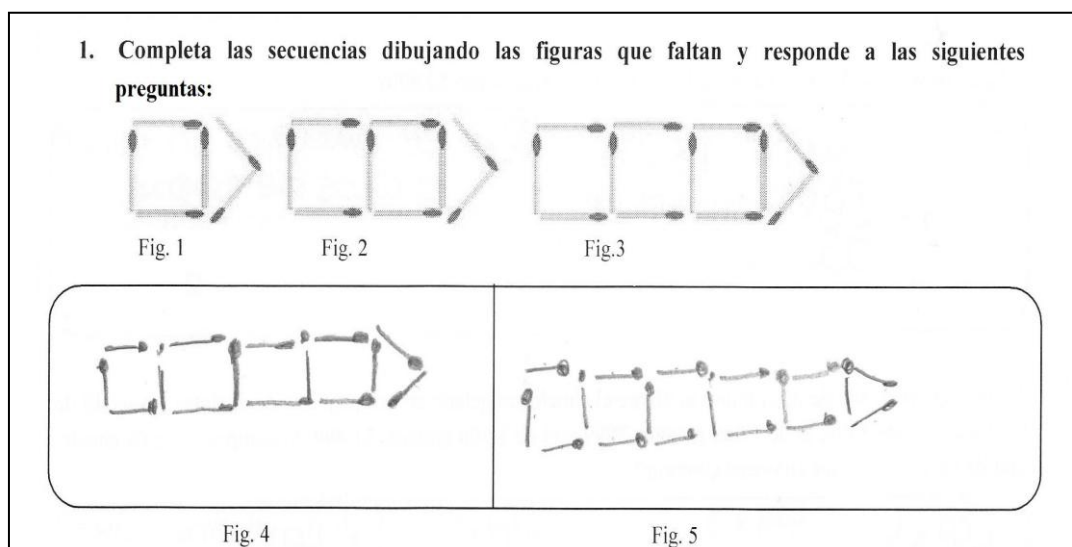
No logrado (NL)	En proceso de logro (PL)	Medianamente logrado (ML)	Suficientemente logrado (SL)	Logrado (L)
0,39%	0,39%	4,25%	1,16%	93,82%

(Ver gráfico anexo 4)

- Se refleja un mismo porcentaje tanto para los estudiantes que omitieron la pregunta y los que realizaron de forma incompleta y errónea lo solicitado. Esto puede deberse a una incomprensión de la secuencia para reproducirla gráficamente.
- Un porcentaje menor de estudiantes, se encuentra en el nivel intermedio de logro, puesto a que las figuras realizadas no fueron las correctas, por ejercer una separación de los cuadrados, lo que difiere enormemente con las mostradas en el ejemplo.
- De la muestra de población un pequeño grupo maneja medianamente el tratamiento del registro gráfico, ya que dibujaron ambas figuras solicitadas cometiendo algún error en una de ellas.
- Para esta pregunta un gran porcentaje de estudiante obtuvo un nivel máximo de logro, debiéndose a que sólo hay un tratamiento de registro que facilita el razonamiento matemático. Los resultados reflejan que los estudiantes se

manejan en el registro gráfico, revelando una comprensión adecuada de dicho lenguaje.

Evidencia indicador:



Evidencia N°1. Esta producción representa aquellos estudiantes que dibujaron correctamente las figuras, ya que identificaron desde las imágenes mostradas, que los palos de fósforos debían ir unidos formando cuadrados y finalmente cerraron la imagen con dos palos los cuales formaron el triángulo final. Siendo esta producción representativa del nivel logrado.

Indicador II: Recuenta la cantidad de palos de fósforos de la secuencia señalada en el instrumento y la dibujada por él.

¿Por cuántos fósforos está formada la figura 3? _____

¿Por cuántos fósforos estará formada la figura 5? _____

NIVELES DE LOGRO

No logrado (NL)	En proceso de logro (PL)	Medianamente logrado (ML)	Suficientemente logrado (SL)	Logrado (L)
0%	0%	0,78%	5,41%	93,82%

(Ver gráfico anexo 5)

- Lo más visible es que los participantes de esta recogida de información no omitieron las preguntas referentes a este indicador, tampoco contestaron de forma incompleta. Lo que llama la atención es que dichas preguntas están directamente relacionadas con la pregunta del primer indicador, por lo que es inexplicable que no hayan contestado el primer indicador y si pudieron contestar el segundo, tratándose

éste de contabilizar los palos de fósforos que componían las figuras dadas como ejemplo y la realizada por el estudiante.

Del porcentaje de estudiantes que se situaron en el nivel no logrado y en proceso de logro del indicador anterior se distribuyeron en los niveles medianamente logrado y suficientemente logrado, reflejando una inconsistencia entre los logros obtenidos.

- Sólo dos estudiantes se encuentran en el nivel medianamente logrado, por lo cual los investigadores infieren que podrían ser los mismos que se encuentran en los niveles: no logrado y en proceso de logro del indicador anterior, puesto que para la realización de este indicador se necesitaba la construcción correcta de la figura número cinco solicitada en el apartado previo.
- En esta pregunta hubo un aumento en el nivel suficientemente logrado, los investigadores piensan que es debido a la categorización de los niveles de logro de este indicador, siendo ésta el contestar ambas preguntas, de la cual sólo una es correcta. Los estudiantes para alcanzar este nivel de logro podrían haber respondido la primera pregunta que hace referencia al conteo de los palos de fósforo que estaba dada como ejemplo, la imagen número 3, sin embargo la segunda pregunta alude a la figura que ellos debían realizar, estando ésta errónea.
- En este indicador se refleja el mismo porcentaje del nivel máximo de logro que en el anterior, pudiendo esto ser consecuencia de la estrecha relación que existe entre el desarrollo de las preguntas, producto del trabajo gráfico que realizaron en el primer indicador, puesto que en el indicador actual sólo debían contar los elementos que componen las figuras.

Evidencia indicador:

¿Por cuántos fósforos está formada la figura 3? _____ 12 _____
¿Por cuántos fósforos estará formada la figura 5? _____ 18 _____

Evidencia N°2. En esta imagen refleja la respuesta de la mayoría de los estudiantes, ubicados en el nivel logrado.

Indicador III: Calcula la cantidad de palos de fósforos de la secuencia.				
¿Cuántos fósforos agregaría a la figura 10? _____ ¿y a la 20? _____ ¿Cómo llegaste a esa conclusión? _____				
Si tienes 21 palos ¿Cuántos cuadrados y triángulos se pueden formar siguiendo la forma de las figuras? _____				
NIVELES DE LOGRO				
No logrado (NL)	En proceso de logro (PL)	Medianamente logrado (ML)	Suficientemente logrado (SL)	Logrado (L)

- En el análisis de esta pregunta los investigadores decidieron eliminar la primera interrogante, debido a la ambigüedad que ésta provocó en los estudiantes y en los investigadores que realizaron la toma de muestra. Puesto que el “agregaría” (relativo al encabezado de la pregunta) se podría tomar de dos formas, el contar los palos de fósforo desde la figura número cinco y la segunda manera de entender era contabilizar la totalidad de palos de fósforos que compone la figura diez y veinte.

- Se conservó la segunda parte de esta pregunta, la cual arrojó los siguientes datos (Anexo 6):

- Contestaron correctamente la pregunta 66,80% de estudiantes, ubicándose en el nivel Logrado.

- Contestaron erróneamente la pregunta 33,20% de estudiante, situándose en el nivel No logrado.

Los discentes que realizaron la respuesta de forma equívoca, según los investigadores, puede ser producto de una deficiente comprensión lectora. Esto se debe a que indicaron cantidades de cuadrados separadas de las cantidades de triángulos, lo que se devela en las producciones estudiantiles en las que adjuntaron una figura que corrobora su respuesta.

La mayoría de los discentes que respondieron de manera asertiva se apoyaron en el registro gráfico creado en el primer indicador, lo cual demuestra que los estudiantes franquearon el obstáculo que se presentó en la primera parte de este indicador. Por lo tanto, comprendieron la secuencia presentada en esta competencia.

Evidencias indicador:

¿Cuántos fósforos agregaría a la figura 10? 15 ¿y a la 20? 30 ¿Cómo llegaste a esa conclusión? _____

Evidencia N°3. Se puede observar la producción de un estudiante, el cual agregó a la figura cinco los palos de fósforos correspondientes para completar la figura diez. Dicha producción fue seleccionada por el desarrollo realizado por el escolar, ya que **agregó** los palos de fósforo a partir de la figura cinco.

10 → 33
11 → 36
12 → 39
13 → 42
14 → 45
15 → 48
16 → 51
17 → 54
18 → 57
19 → 60
20 → 63

¿Cuántos fósforos agregaría a la figura 10? 33 ¿y a la 20? 63 ¿Cómo llegaste a esa conclusión? ya que a cada figura se le agrega 3 palitos.

Si tienes 21 palos ¿Cuántos cuadrados y triángulos se pueden formar siguiendo la forma de las figuras? _____

$$\begin{array}{r} 18 \\ + 3 \\ \hline 21 \\ + 3 \\ \hline 24 \\ + 3 \\ \hline 27 \\ + 3 \\ \hline 30 \\ + 3 \\ \hline 33 \end{array}$$

Evidencia N° 4. Acá se presenta una imagen en que el docente contabilizó la totalidad de los elementos que componen la figura diez y veinte. El estudiante agregó tres fósforos a la figura anterior.

Si tienes 21 palos ¿Cuántos cuadrados y triángulos se pueden formar siguiendo la forma de las figuras? 6 Cuadrados y 1 Triángulo

Evidencia N° 5. Esta producción refleja la mayoría de las respuestas entregadas por los estudiantes, ya que todos se apoyaron de un dibujo para dar solución a la situación.

Indicador IV: Ubica los valores que corresponde a la cantidad de palos de fósforos que contienen las figuras señaladas en la tabla.

Observa las figuras anteriores y completa la tabla:

Figura	N° de palos de fósforos
1	6
2	9
3	
4	
5	
6	
7	
8	

NIVELES DE LOGRO

No logrado (NL)	En proceso de logro (PL)	Medianamente logrado (ML)	Suficientemente logrado (SL)	Logrado (L)
0%	0,39%	5,79%	0,39%	93,44%

(Ver gráfico anexo 7)

- La totalidad de la muestra no omitió la pregunta, producto de esto una cantidad considerable de alumnos contestó números que no tenían relación alguna con la secuencia numérica, incrementando el porcentaje de medianamente logrado. Esto refleja que existe una debilidad entre la conversión de registros, específicamente de lo gráfico a lo aritmético.
- La relación entre el actual indicador con el segundo presenta un incremento de los educandos que lograron el nivel medianamente logrado, lo cual es consecuencia de un vacío entre la correlación de los aprendizajes previos, siendo estos, el graficar y contar, con la creación de una secuencia numérica.
- Existe un alto porcentaje de estudiante que se encuentran en el nivel de logro superior, lo que demuestra un pensamiento aritmético, debido a que los docentes completaron la columna sólo sumando tres unidades a la cantidad de fósforos de la figura anterior. Esto se fundamenta por la consistencia que el establecimiento le ha brindado a los estudiantes en la formación de un razonamiento aritmético.

Evidencia indicador:

2. Observa las figuras anteriores y completa la tabla:

Figura	N° de palos de fósforos	
1	6	+3
2	9	+3
3	12	+3
4	15	+3
5	18	+3
6	21	+3
7	24	+3
8	27	

Evidencia N°6. Representa la mayoría de las producciones estudiantiles, las cuales se ubican en el máximo nivel de logro, ya que es el sistema que más utilizaron los educandos para completar la tabla.

Indicador V: Representa la secuencia numérica de forma algebraica.

Vuelve a observar las figuras y la tabla que completaste y responde:

¿Qué fórmula se podría usar para calcular la cantidad de palos que hay en la figura N?

Resp.: _____

NIVELES DE LOGRO				
No logrado (NL)	En proceso de logro (PL)	Medianamente logrado (ML)	Suficientemente logrado (SL)	Logrado (L)
13,51%	69,11%	3,86%	10,04%	3,48%

(Ver gráfico anexo 8)

- En el nivel no logrado, en comparación con las otras preguntas de la competencia se observa un aumento considerable de estudiantes que omitieron la pregunta. Los investigadores, deducen que es producto de un nulo pensamiento algebraico, debido a que no logran una relación entre los indicadores anteriores y lo solicitado en éste.
- Un gran número de estudiantes se encuentra en proceso de logro, esto alude a que su respuesta fue señalada en un lenguaje natural y a su vez, incorrecta. Lo cual proviene del nivel máximo de logro del indicador anterior, puesto a que los estudiantes ligaron su correcto procedimiento aritmético con un mal tránsito hacia la algebrización.

- Hay estudiantes que contestaron asertivamente en un lenguaje natural, siendo posicionados en el nivel medianamente logrado, lo cual demuestra que existe sólo una conversión entre el lenguaje aritmético y natural.

El grupo investigador, categorizó a estos estudiantes en dicho nivel de logro con motivo del tema base de la investigación, la cual busca identificar la existencia o no del puente entre lo aritmético y algebraico.

- Otro porcentaje de estudiantes intentaron responder la pregunta realizando una conversión desde el registro aritmético al algebraico, pero de una forma errada. Siendo encasillados en el nivel de suficiencia.
- En este indicador la cantidad de estudiantes que consiguieron el nivel máximo de logro disminuyó considerablemente, se debe a que ellos no dominan la generalización de una regularidad o secuencia, lo cual afecta la creación de una expresión algebraica.

Esta pregunta es fundamental para el propósito de la investigación, puesto que vislumbra un mal tránsito entre la aritmética y el álgebra, basándose en el porcentaje de logro que se obtuvo en esta pregunta, ya que una base sólida en patrones facilitaría el desarrollo de un pensamiento algebraico.

Evidencia indicador:

3. Vuelve a observar las figuras y la tabla que completaste y responde:

a. ¿Qué fórmula se podría usar para calcular la cantidad de palos que hay en la figura N?

Resp.: sumarle tres palitos de fosforo cada vez que vaya aumentando la figura.

Evidencia N°7. Los estudiantes en su mayoría expresaron su respuesta de manera verbal situándose en el nivel en proceso de logro, puesto a que lo importante para los investigadores es que los estudiantes sean capaces de formular una expresión algebraica generalizadora de la secuencia.

<p>Competencia II: Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado.</p> <p>Observación general: Para poder realizar el análisis, los investigadores, vieron necesario separar las producciones de los estudiantes en tres etapas: planteamiento algebraico del problema, proceso de desarrollo y conclusión o respuesta de éste.</p>				
<p>Indicador I: Traduce del lenguaje verbal a un lenguaje algebraico y resuelve.</p> <p>1. Plantea la ecuación en cada caso y resuelve</p> <p>a. La suma de un número y 36 es igual a la diferencia entre 240 y 200. ¿Cuál es el número?</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; height: 80px; margin: 10px 0;"></div>				
NIVELES DE LOGRO				
No logrado (NL)	En proceso de logro (PL)	Medianamente logrado (ML)	Suficientemente logrado (SL)	Logrado (L)
15,83%	9,67%	9,27%	6,95%	58,3%

(Ver gráfico anexo 9)

- Un porcentaje no menor, de educandos se abstuvo de responde la pregunta. Los investigadores creen que esto se debe a un escaso manejo de tecnicismos matemáticos, o bien, por miedo a la instrucción del indicador que señalaba el planteamiento de una ecuación para resolver la situación expuesta.
- En consecuencia de lo anterior, los investigadores infirieren que debido a aquello los niveles de logro, en proceso y medianamente, tienen un porcentaje similar por el débil manejo de conversión de registros (verbal – algebraico) que poseen los estudiantes. Esto se vislumbra por las repuesta de los dicentes, ya que algunos de ellos optaron por transformar en lenguaje verbal al aritmético, siendo esto una conversión más expedita y/o factible para su grado de razonamiento matemático, en cambio, en el nivel medianamente logrado los estudiantes quisieron transitar entre el lenguaje verbal al algebraico, pero cometieron errores al plantear la ecuación o desarrollar dicha actividad matemática.
- Un gran porcentaje de estudiantes demuestran un pensamiento algebraico, realizando una conversión adecuada entre el registro planteado y el registro solicitado, además, realizaron un correcto procedimiento logrando la respuesta asertiva. Esto puede ser consecuencia de una correcta comprensión lectora de

los estudiantes que componen este porcentaje, debido a la accesibilidad que tiene el planteamiento de la situación para ser transformada a una ecuación de tipo lineal.

Evidencia indicador:

a. La suma de un número y 36 es igual a la diferencia entre 240 y 200. ¿Cuál es el número?

$$x + 36 = 240 - 200 \quad 4 + 36 = 240 - 200$$

$$x + 36 = 40 \quad 40 = 40$$

$$x = 40 - 36$$

$$x = 4$$

R=El N° es 4.

Evidencia N°8. Un gran porcentaje de estudiantes lograron plantear la ecuación literal de primer grado y desarrollarla satisfactoriamente. Es por esto que los investigadores decidieron escoger esta producción, ya que refleja dicho proceso y su comprobación.

Indicador II: Convierte el lenguaje verbal a un lenguaje algebraico.

b. 1 kg de papas vale \$578, ¿cuántos kilos se pueden comprar con \$2.890?

NIVELES DE LOGRO

No logrado (NL)	En proceso de logro (PL)	Medianamente logrado (ML)	Suficientemente logrado (SL)	Logrado (L)
15,06%	62,16%	2,32%	1,16%	19,31%

(Ver gráfico anexo 10)

- Los estudiantes omitieron la pregunta o sólo señalaron una respuesta sin un previo planteamiento que justifique dicha opción, esto se debe, según el grupo investigador, a un débil manejo de conversión de registro.
- En el nivel proceso de logro se vislumbra un aumento de porcentaje considerable a la pregunta anterior, debido a que los discentes se enfrentan a una pregunta que requiere de un mayor rozamiento algebraico para poder plantear la situación como una ecuación lineal. Por consiguiente, los estudiantes tendieron a resolverlo a través de una conversión del registro verbal a uno aritmético, lo cual no era el objetivo que buscaban los investigadores.

- En el nivel medianamente logrado, hubo un menor porcentaje que intento trabajar entre los registros solicitados, obteniendo un errado planteamiento lo que generó un procedimiento y respuesta incorrecta. Esto se debe a que tenían conciencia de que la resolución se debía realizar en lenguaje algebraico, mas bien desarrollaron dicho planteamiento de forma aritmética, por las herramientas matemáticas que poseen, tratando de incluir la incógnita en la respuesta obtenida de manera incoherente.
- Un número considerable de estudiantes lograron un planteamiento adecuado de la actividad matemática, existiendo un diferencia en la respuesta entregada por ellos, ya que los que se ubican en el nivel suficiente sólo tuvieron problemas a entregar la conclusión del ejercicios, sin embargo, los que se encuentran en el nivel logrado, pudieron sortear todas las dificultades a las cuales conllevaba esta situación, posicionándose en una máxima satisfacción esperada para la investigación. Según los investigadores, el error que cometieron aquellos estudiantes que no se sitúan en el nivel superior de logro, es debido a errores en las operaciones básicas de la matemática.

Evidencia indicador:

b. 1 kg de papas vale \$578, ¿cuántos kilos se pueden comprar con \$2.890?

$1 = 578 + 578 = 1156$ $2 = 1156 + 578 = 1734$ $3 = 1734 + 578 = 2312$ $4 = 2312 + 578 = 2890$ $5 = 2890 //$	<p>Así se Pueden comprar 5 kg de Papas</p>
--	--

Evidencia N°9. Como se refleja en esta producción, una alta cantidad de estudiantes utilizó el método aritmético para dar respuesta a esta situación, omitiendo el encabezado, el que solicitaba plantear una ecuación. Siendo esto clave para que dichos estudiantes se instalaran en el nivel proceso de logro.

Indicador III: Analiza las variables del problema y resuelve a través de una conversión de registros.

c. En un supermercado de tu Comuna se ofrece el choclo congelado en tres paquetes de distintas masas. El de 500 gramos cuesta \$499, el de 1.000 gramos, \$999 y el de 1.500 gramos, \$1.499. Si compras 3 kg de choclo, ¿Cuál de los tres paquetes conviene comprar?

NIVELES DE LOGRO


No logrado (NL)	En proceso de logro (PL)	Medianamente logrado (ML)	Suficientemente logrado (SL)	Logrado (L)
38,22%	58,3%	1,54%	0%	1,93%

(Ver gráfico anexo 11)

- Esta pregunta en comparación con las dos anteriores, referente a la misma competencia, es la que presenta un mayor grado de dificultad, debido a que los estudiantes necesitan de conocimientos previos de unidades de medida para realizar un tratamiento adecuado de dicho conocimiento. En consecuencia, muchos estudiantes optaron por omitir la pregunta, o bien, sólo señalaron una respuesta sin un planteamiento que la fundamentara.
- Los estudiantes realizan un proceso análogo a la pregunta anterior, esto se debe a una seguridad que reflejan en el uso de la aritmética para solucionar los problemas de planteamiento. Esto sucede porque en experiencias anteriores (enseñanza básica) se ven enfrentados constantemente a una ejercitación de este registro, por lo cual, los estudiantes no se sienten capacitados para utilizar el álgebra en la resolución de dichos problemas.
- Un pequeño porcentaje de discentes intento plantear el problema utilizando un registro algebraico, evidenciando errores en el desarrollo, arrojando una conclusión equivocada.
- No existen estudiantes ubicados en el nivel suficientemente logrado, eso ocurre porque aquellos que consiguieron plantear la ecuación lograron un buen procedimiento y una respuesta asertiva. Lo que evidencia que existe un pequeño esboce de estudiantes que se encuentran en el nivel máximo de logro que alcanza un razonamiento algebraico esperado.

Evidencia indicador:

c. En un supermercado de tu Comuna se ofrece el choclo congelado en tres paquetes de distintas masas. El de 500 gramos cuesta \$499, el de 1.000 gramos, \$999 y el de 1.500 gramos, \$1.499. Si compras 3 kg de choclo, ¿Cuál de los tres paquetes conviene comprar?



500 - 499

Evidencia N°10. Existe un porcentaje no despreciable de escolares que omitieron o sólo señalaron una respuesta sin un desarrollo que avale dicha elección. Por consiguiente, el grupo investigador tomó la decisión de elegir aquella producción donde el estudiante realiza la segunda opción señalada anteriormente.

Competencia III: Representar enunciados mediante expresiones algebraicas.

Indicador I: Expresa el lenguaje natural en un lenguaje algebraico.

Relaciona los enunciados de la Columna A con las expresiones algebraicas de la columna B

En la columna A se encuentra un listado de enunciados. Las cuales debe relacionar indicando el número en los términos algebraicos que se encuentran en la columna B.

Columna A

1. El doble de un número disminuido en su cuarta parte.
2. Un número impar
3. El producto de dos números es 20
4. El cuadrado de la suma de dos números
5. El triple de la suma de dos números cualquiera
6. La semisuma de dos números cualquiera

Columna B

- ___ $\frac{x+y}{2}$
- ___ $a^3 - a$
- ___ $2n - \frac{n}{4}$
- ___ $3(x + y)$
- ___ $7t$
- ___ $(m + n)^2$

NIVELES DE LOGRO

No logrado (NL)	En proceso de logro (PL)	Medianamente logrado (ML)	Suficientemente logrado (SL)	Logrado (L)
2,7%	28,57%	1,54%	66,8%	0,39%

(Ver gráfico anexo 12)

- Un porcentaje de estudiantes omitió la relación de enunciados, por lo que no revela algún conocimiento de traducción de un lenguaje natural a uno algebraico. Los investigadores creen que existen factores externos que afectaron la decisión de omitir del estudiante.
- Existe un porcentaje mayor de escolares, comparado con el nivel anterior, que realizaron la conexión directa entre columnas, de forma errada, sin presentar un razonamiento adecuado para justificar dicha elección.
- En el nivel medianamente logrado, los estudiantes visualizaron la falta de dos enunciados que no están relacionados con las expresiones de la columna B, sin embargo, la relación de los restantes no fueron las correctas. La situación presentada en este nivel, se puede enlazar con la falta de manejo de las expresiones algebraicas, siendo esto una parte importante para lograr un

pensamiento, y posteriormente, un razonamiento algebraico acorde a los mapas de progreso en que cada educando se debe ubicar.

Como indica el nivel cuatro de los mapas de progreso del eje de álgebra, el estudiante “traduce expresiones desde el lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa...”¹²

- Una cantidad considerable de discentes realizaron de forma correcta la asociación entre el enunciado y su respectiva expresión algebraica, sin embargo, no identificaron aquellos enunciados que no tenían su expresión en la columna B. Esto manifiesta una débil aprehensión del lenguaje algebraico, lo que se relaciona directamente con la inseguridad que los estudiantes presentaron, según los investigadores, frente a la posibilidad de que no existieran enunciados libres.
- Para el grupo investigador es preocupante el nivel alcanzado de logro, puesto que el porcentaje refleja la realización correcta sólo de un estudiante, lo que corrobora una deficiente conversión de un registro natural a uno algebraico. En consecuencia de lo anteriormente señalado, los investigadores infieren que en el grupo de escolares examinados presentan un pensamiento de tipo algebraico sin alcanzar el nivel de razonamiento, ya que pudieron encontrar parejas de enunciados con sus respectivas expresiones, algebraicas, sin embargo, no discriminaron aquellos enunciados libres.

¹² Unidad de Currículum, (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje, Álgebra (p.5)*. Santiago: Valente.

Evidencia indicador:

1. Relaciona los enunciados de la Columna A con las expresiones algebraicas de la columna B
 En la columna A se encuentra un listado de enunciados. Los cuales debe relacionar indicando el número en los términos algebraicos que se encuentran en la columna B.

Columna A	Columna B
1. El doble de un número disminuido en su cuarta parte.	<u>6</u> $\frac{x+y}{2}$
2. Un número impar	<u> </u> $a^3 - a$
*3. El producto de dos números es 20	<u>1</u> $2n - \frac{n}{4}$
4. El cuadrado de la suma de dos números	<u>5</u> $3(x + y)$
5. El triple de la suma de dos números cualquiera	<u>8</u> $7t$
6. La semisuma de dos números cualquiera	<u>4</u> $(m + n)^2$

3. No se encuentra en lista de algebra.

Evidencia N°11. Esta producción fue seleccionada porque refleja que el estudiante ubicó correctamente los cuatro enunciados que tenían su expresión algebraica, pero no fue capaz de discriminar la existencia de que el enunciado, referente a un número impar no contaba con su expresión algebraica. Por el contrario, el educando señaló de manera explícita la carencia de la expresión del enunciado número 3.

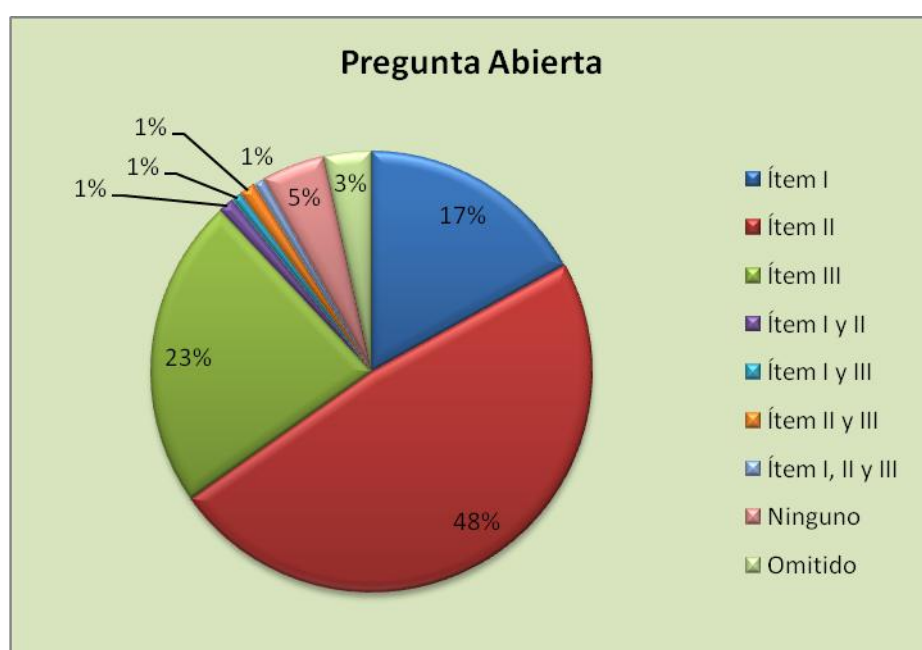
c. Análisis cuantitativo y cualitativo de pregunta abierta

En el instrumento de recogida de información aplicada a los estudiantes de primer año medio del establecimiento Alberto Widmer, se señala una pregunta la cual tiene como objetivo conocer si los docentes tienen la capacidad de realizar una autocrítica de sus producciones realizadas en dicho instrumento. A continuación se señala la pregunta planteada:

¿Qué fue lo que más te costó hacer y por qué?

DETALLE	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Ítem I: “Identificar regularidades en la realización de transformaciones para formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones”	44	16,99%
Ítem II: “Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado”	125	48,26%
Ítem III: “Representar enunciados”	59	22,78%

mediantes expresiones algebraicas”		
Ítem I y II	3	1,16%
Ítem I y III	2	0,77%
Ítem II y III	3	1,16%
Ítem I, II y III	2	0,77%
Ninguno	12	4,63%
Omitido	9	3,47%
TOTAL	259	99,99%



Gáfico1:Elaboracion propia

Interpretación del gráfico: De un universo de 259 estudiantes se obtuvo un 17% de escolares a los cuales les dificultó la realización del primer ítem, un 48% tuvo problemas con el ítem II, un 23% señala que en el ítem III encontraron una mayor dificultad, los dicentes demostraron una dificultad del 1% en los ítem I y II, I y III, II y III y en todos los ítem. Mientras que un 5% indican su debilidad en ningún ítem, finalmente un 3% omitió la pregunta. **Nota: Los porcentajes señalados en el gráfico corresponden a una aproximación de los indicados en la tabla.**

A partir de la información recogida, el grupo investigador, infiere que la gran mayoría de los dicentes creen tener mayor debilidad al momento de plantear y resolver ecuaciones de tipo literal de primer grado, esto se debe producto a la falta de confianza sobre las herramientas que ellos poseen en el instante de ejecutar una conversión entre el registro verbal y el algebraico, sin embargo, algunas producciones estudiantiles del ítem reflejan un óptimo manejo de dicha conversión. Lo que se refleja en:

ITEM II

CMO: Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado.

OA: Representar problemas mediante ecuaciones y resolver

1. Plantea la ecuación en cada caso y resuelve

a. La suma de un número y 36 es igual a la diferencia entre 240 y 200. ¿Cuál es el número?

$$\begin{aligned}x + 36 &= 240 - 200 \\x &= 40 - 36 \\x &= 4\end{aligned}$$

b. 1 kg de papas vale \$578, ¿cuántos kilos se pueden comprar con \$2.890?

$$\begin{aligned}x - 578 &= 2890 \\x &= \frac{2890}{578} \\x &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}578 \\+ 578 \\ \hline 1156 \text{ (x1)} \\+ 578 \\ \hline 1734 \text{ (x2)} \\+ 578 \\ \hline 2212 \text{ (x3)}\end{array}$$

c. En un supermercado de tu Comuna se ofrece el choclo congelado en tres paquetes de distintas masas. El de 500 gramos cuesta \$499, el de 1.000 gramos, \$999 y el de 1.500 gramos, \$1.499. Si compras 3 kg de choclo, ¿Cuál de los tres paquetes conviene comprar?

conviene comprar el de 500 gramos

$$\begin{aligned}1499 \times 2 &= x \\2998 &= x \\(1500 \text{ g})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}55 \\ 499 \times 6 &= x \\2994 &= x \\(1500 \text{ g})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}22 \\ 999 \times 3 &= x \\2997 &= x \\(1000 \text{ g})\end{aligned}$$

Evidencia N°12

Por otro lado, los estudiantes encontraron mayor dificultad al relacionar un enunciado con su correspondiente expresión algebraica, por consecuencia, los investigadores aluden que dicha falencia ocurre por una incomprensión del contenido estudiado en años anteriores, momento en que no se generó un aprendizaje significativo en ellos. Esto se puede observar en la siguiente producción estudiantil:

ITEM III

CMO: Representan enunciados mediante expresiones algebraicas

OA: Representar enunciados mediante expresiones algebraicas

1. Relaciona los enunciados de la Columna A con las expresiones algebraicas de la columna B

En la columna A se encuentra un listado de enunciados. Las cuales debe relacionar indicando el número en los términos algebraicos que se encuentran en la columna B.

Columna A

- ✓ 1. El doble de un número disminuido en su cuarta parte.
- ✓ 2. Un número impar
3. El producto de dos números es 20
- ✓ 4. El cuadrado de la suma de dos números
- ✓ 5. El triple de la suma de dos números cualquiera
- ✓ 6. La semisuma de dos números cualquiera

Columna B

- 4 $\frac{x+y}{2}$
- 3 $a^3 - a$
- 1 $2n - \frac{n}{4}$
- 5 $3(x+y)$
- 2 $7t$
- 6 $(m+n)^2$

Evidencia N°13.

Finalmente, los investigadores se centrarán en aquellos estudiantes que señalaron el ítem I como el que posee un mayor grado de complejidad. Cabe mencionar la existencia de una diversidad en sus respuestas, ya que dicho ítem engloba tres fases en las cuales responden a distintas destrezas que deberían haber adquirido los escolares hasta este nivel de enseñanza (NM1).

El grupo investigador se enfocara sólo en la fase número tres, debido a que las dos fases anteriores guían al estudiante hacia un razonamiento lógico, por el contrario, la tercera etapa induce al educando a transformar dicho razonamiento lógico a uno lógico-algebraico, siendo esta última etapa un pilar fundamental para la investigación.

A pesar de lo antes señalado, existen algunas producciones que demuestran un desconocimiento por parte de los estudiantes, sobre sus habilidades cognitivas para enfrentar de buena manera lo solicitado. La siguiente imagen refleja esta situación:

ITEM I

CMO: Identifican regularidades en la realización de transformaciones para formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones.

OA: Representar y calcular secuencias y regularidades

3. Vuelve a observar las figuras y la tabla que completaste y responde:

- a. ¿Qué fórmula se podría usar para calcular la cantidad de palos que hay en la figura N?

Resp.: $F \cdot 3 + 3 = N$

Evidencia N°14.

d. Cuestionario docente

Con la intención de recaudar información sobre la metodología utilizada por los docentes, del sector de matemática del establecimiento observado, en relación a los errores de los docentes frente a una determinada actividad matemática, los investigadores formularon un cuestionario, el cual fue validado por la profesora Isabel Barros Inostroza (ver anexo 17). Posteriormente, dicho cuestionario fue aplicado a los cuatro docentes que componen el departamento de matemática del colegio Alberto Widmer (ver anexo 18).

Pregunta 1: Diversas investigaciones, desde una perspectiva cognitivista, se centran en el análisis de los errores que tienen nuestros alumnos cuando resuelven tareas algebraicas y en la asociación de estos errores a diferentes tipos de dificultades. ¿Qué propuesta(s) curricular(es) utiliza usted, que ayude(n) a paliar estas dificultades? La pregunta está hecha en el convencimiento como grupo investigador de que la persistencia de errores en niveles medios y observados en la práctica docente nos sugieren ampliar las investigaciones hechas en este campo.

Objetivo de la pregunta	Identificar propuestas metodológicas que el docente utiliza para facilitar el aprendizaje del álgebra, minimizando las dificultades de sus estudiantes.
--------------------------------	---

Una de las metodologías que utilizan, es separar el tipo de error dependiendo si es previo o es específico del contenido. De ser previo, el docente, al momento de realizar la transposición didáctica los menciona o espera que los discentes perciban dicho error. Un complemento a esta metodología es revisar las producciones para visualizar la problemática y/o realizar una retroalimentación de las evoluciones de los estudiantes, con el fin de efectuar una explicación general del contenido.

Por otro lado, también señalan propuestas curriculares ideales, como por ejemplo, que los cursos se compongan de un número menor de estudiantes con el objetivo de que cada sesión sea personalizada, además los profesores debieran contar de un asistente que apoye dicha labor educativa.

En cuanto a los contenidos, los docentes proponen mantener un orden entre ellos, dependiendo de las necesidades de cada curso, es por esto, que es fundamental relacionar de manera decreciente un contenido específico para apaliar las dificultades que aparezcan en el trayecto. Si no se entiende un contenido con esta propuesta los educadores sugieren entregar ejemplos nuevos, con la intención de retomar aquello que no se comprendió.

De dos formas, si son errores que conozco de Antes, en el momento de explicar los contenidos Hago el comentario con respecto al error, para que eviten cometerlo, aunque también podría esperar y ver como procede el estudiante para ver sus capacidades. La otra forma es cuando lo evidencio después de dar las actividades o pruebas (revisión), en tonces después realizo una explicación general para que evidencian el error y lo superen.

Evidencia N°15.

Pregunta 2: En nuestro trabajo vamos a presentar resultados de un estudio exploratorio donde pondremos de manifiesto las dificultades que tienen nuestros alumnos en la resolución de tareas algebraicas relativamente sencillas y propias de su curso. Si eventualmente, en dicho estudio, los alumnos presentaran una amplia gama de errores en la resolución de sus tareas. ¿Cómo usted identificaría, categorizaría y analizaría los errores y dificultades de sus alumnos? Lo cual podría ser utilizado como orientador para establecer propuestas curriculares que eviten estas tipologías de errores.

<p>Objetivo de la pregunta</p>	<p>Contrastar las estrategias que utilizan los docentes al momento de identificar, categorizar y analizar los errores y dificultades de sus alumnos.</p>
---------------------------------------	--

Los docentes identifican los errores de distintas maneras, una de ellas es en el momento en que los estudiantes resuelven ejercicios, o a través de la implementación de frecuentes controles, evaluaciones, interrogaciones o preguntas abiertas al finalizar cada subtema. A su vez, el error puede ser identificado, por medio del análisis que realizan los estudiantes al momento de resolver un problema matemático, ya que demuestran variadas interrogantes e inseguridades que los llevan a cometer un error.

Posteriormente, los educadores categorizan los errores en distintas gamas, pueden ser relativos al contenido o a la sesión dictada. Dichos errores se pueden subcategorizar en errores de contenidos previos y los que surgen por problemas de cognición. Como una tercera etapa, los docentes, jerarquizan los errores de forma decreciente para apaliar aquellas dificultades que el estudiante debe superar.

Como consecuencia de la identificación y categorización de los errores producidos por los estudiantes los docentes concluyen que es importante generar un pensamiento lógico-critico para así discriminar y evaluar lo que se realiza o confecciona al hacer matemática, con la finalidad de encontrar mejorías a los problemas visualizados.

Primero, la idea es reconocer inmediatamente las dificultades para así disminuir la acumulación de errores al pasar el contenido y no se logra con controles constantes después de cada subtema, ya sea con pruebas o interrogatorios, incluso con preguntas abiertas o dirigidas, así se podrían identificar claramente los dificultades y por lo tanto categorizar y jerarquizar la información desde lo que menos se entienda hasta lo que genera mayor conflicto.

Evidencia N°16.

Pregunta 3: ¿Considera usted que los errores de sus alumnos son valiosos indicadores de los procesos intelectuales que ellos desarrollan y por lo tanto, es importante analizarlos, para tratar de determinar las razones por las cuales ellos no logran realizar correctamente una actividad y detectar los posibles obstáculos con que se enfrentan, para planificar en función de ellos las futuras intervenciones? Justifique su respuesta.

<p>Objetivo de la pregunta</p>	<p>Analizar si los docentes confeccionan sus planificaciones en función de los errores que puedan cometer sus estudiantes, con el fin de minimizar las dificultades que se presentan en las sesiones que el educador ejecuta.</p>
---------------------------------------	---

En las respuestas señaladas por los docentes, se puede observar distintas miradas frente a la utilización del error en sus planificaciones. Por un lado se basan en teorías útiles para confeccionar dichas planificaciones, identificando dos tipos: la primera hace referencia a explicar los contenidos y posteriormente develar los errores tipos que pueden cometer los estudiantes. La segunda alude al constructivismo, puesto que se plantea una situación inicial que genere en los discentes un error, para que a partir de éste ellos construyan un aprendizaje significativo.

Otra mirada, apunta a la retroalimentación basada en los errores y de ahí generar estrategias de mejoramiento, la cual puede afectar a la creación de instrumentos de evaluación para años posteriores.

Sin embargo, llamó la atención un comentario que hace referencia al indagar en la vida personal de sus estudiantes para la confección de la planificación, por consiguiente, es menester centrarse en los estudiantes con necesidades educativas especiales porque no se les puede enseñar ni evaluar con las mismas metodologías generales.

Claro que si, ya que como se sabe los alumnos en esta etapa de sus vidas son objetos de multiples situaciones, sobretodo emocionales, las cuales repercuten en sus calificaciones. Por esto es necesario que el docente, al ver tal situacion, se de el tiempo necesario para indagar un poco en la vida emocional de sus alumnos, tan carente en estos dias. Mas esto' decir que tambien hay que adaptarse a aquellos alumnos que presenten N.E.E., a los cuales no se les puede evaluar y enseñar con los mismos procesos metodologicos normales.

Evidencia N°17.

8. Conclusiones

Los estudiantes que se ven enfrentados al trabajo algebraico (debido a que en años anteriores se situaron en una mirada aritmética de la matemática), se les presenta una dificultad en el tránsito de un modo informal de representaciones y de resoluciones de problemas, a uno formal, el cual contiene axiomas, propiedades, teoremas y postulados. Una causa que avala dicha dificultad es la noción que tienen los estudiantes en aritmética sobre la interpretación del signo igual, donde su representación semiótica de dicho objeto matemático, es entendida como el proceso de realizar un cálculo el cual debe arrojar un resultado, por el contrario, en álgebra tiene la forma de equivalencia lo que provoca un obstáculo en los escolares.

Por consiguiente, la problemática que crea el tránsito anteriormente señalado se refleja en la carencia de habilidades y destrezas que poseen los dicentes al momento de utilizar métodos formales y procedimientos en la resolución de problemas. Dicha problemática se observa directamente con los porcentajes de niveles de logro extraídos en el análisis del instrumento, aun más específicamente se vislumbra en las producciones que realizaron los escolares de primer año medio sobre la segunda competencia, que hace referencia a la resolución de problemas cuyo modelamiento involucra ecuaciones literales de primer grado.

A partir del análisis del instrumento de recogida de información, aplicado a los estudiantes de primer año medio del Complejo Educacional Alberto Widmer, se relevan los problemas señalados al comienzo de esta investigación. Identificando que los estudiantes más que utilizar la aritmética abusan de ella para dar solución a problemas de cualquier índole, lo cual se observa en la primera y segunda competencia. Esto se debe a las carencias que tienen los escolares al momento de realizar una articulación entre los diferentes registros semióticos de representación que poseen.

En consecuencia, de dicho abuso, los estudiantes no logran formular una expresión algebraica generalizadora de una sucesión, así mismo, en muchas producciones se pudo observar que los estudiantes preferían plasmar su pensamiento mediante el lenguaje natural, excluyendo la posibilidad de emplear un razonamiento algebraico para concluir una fórmula.

En la competencia número tres, se identifica otra problemática constante en el análisis obtenido desde el instrumento de recogida de información. Los estudiantes desconocen sus habilidades cognitivas, ya que no fueron capaces de discriminar los enunciados que carecían de su respectiva expresión algebraica. Por lo tanto, los procesos internos de cada estudiante de los primeros años medios, en el momento en que van adquiriendo nuevos conocimientos van provocando errores y deficiencias las cuales conllevan lo señalado anteriormente.

Ya que como no existe una continuidad entre temas de una misma unidad en las planificaciones de los docentes, existe la posibilidad de que el discente no complete un determinado esquema mental, lo cual provoca dudas y errores que no puede, en su determinado tiempo, responder o corregir, por consecuencia, cuando el estudiante requiera de ese aprendizaje previo los procesos internos tendrán falencias generando una adquisición inesperada de un nuevo contenido.

Al momento de categorizar las producciones de los estudiantes en los diversos niveles de logro, señalados en la rúbrica (anexo 5), el grupo investigador pudo visualizar la existencia del uso de distintos tipos de registros por parte del escolar. Esto se puede ver con mayor claridad, en el instante de analizar la segunda competencia se observan los registros, tales como, gráfico, algebraico, natural y aritmético; este último no forma parte del propósito de la investigación.

Se puede verificar, que en todas las competencias que conforman el instrumento, la existencia de una conversión de registros, además, en el indicador I de la primera competencia se comprueba la presencia de un tratamiento de registros, puesto a que los estudiantes debían formular su respuesta por medio de un mismo registro, gráfico.

En conclusión, el grupo investigador, aprecia que la mayoría de los estudiantes cometen los mismos errores de forma reiterada, síntoma de las serias dificultades que tienen en su aprendizaje. Estos ocurren porque los estudiantes confían en su método intuitivo, que a veces funciona, antes de utilizar métodos formales que el docente le entrega, además, los errores son considerados como falta de estudio o de atención, sin embargo, esto es producto de la carencia de la comprensión de los contenidos. Aquellos problemas pudieran estar relacionados con una serie de deficiencias en comprensión de conceptos y en la manera de enfocar el álgebra que traen como consecuencia inmediata una forma errónea de enfrentarse con su aprendizaje.

Otro elemento perjudicador en el tránsito entre la aritmética y el álgebra es que los estudiantes conciben el álgebra como una utilización reiterada de letras y no le dan un significado de objeto matemático a lo que realizan. Modificando ese razonamiento se logrará un importante paso para crear un puente sólido entre dichos temas.

9. Recomendaciones

En una primera instancia, se agradece la buena disposición que tuvieron los docentes pertenecientes al departamento de matemática del establecimiento, al momento de solicitar su ayuda para llevar a cabo esta investigación. Además rescatar la colaboración por parte del estudiantado al momento de contestar el instrumento presentado, siendo sus respuestas honestas, intentando completar en su totalidad dicho instrumento desinteresadamente.

Como grupo investigador queremos destacar la formación que tienen los estudiantes sobre el razonamiento aritmético, ya que evidenciaron por medio de sus producciones un alto dominio en este ámbito. Sin embargo no se presenta un considerable razonamiento algebraico para la edad de madurez cognitiva en la cual deben encontrarse los alumnos de primer año medio, correspondiente al nivel cuatro de los mapas de progreso de álgebra.

Es por esto, que los investigadores recomiendan que el establecimiento deba enfocar su atención en utilizar las habilidades aritméticas que ya poseen los docentes, para potenciar el pensamiento y razonamiento lógico algebraico. Logrando de esta manera apaliar las dificultades y problemas detectados para el aprendizaje del álgebra.

Para el grupo investigador, es necesario que los profesores que enseñan matemática en los diferentes niveles generen conexiones en los temas que tratan en un año escolar y también con los de otros años. Este trabajo debe ser plasmado en las planificaciones de los docentes para luego reflejarlas en el aula, para que de este modo se facilite el aprendizaje correlacional de contenidos en el estudiante. Esta metodología de planificación debiese ser regulada por la asesora curricular tanto de enseñanza básica como de enseñanza media del establecimiento. Además, dichas asesoras debieran fomentar el trabajo colaborativo entre los docentes que componen el segundo ciclo básico con los dos ciclos de enseñanza media.

10. BIBLIOGRAFÍA

Barrios, I., González, J. (Eds). *Métodos de Investigación Educativo*. Universidad Autónoma de Madrid.

Bisquerra, R.,(2009). *Metodología de la investigación educativa*. Editorial La Muralla, S.A.

Cosci, C., May, G., Esperanza, J, Echevarría, G., Simunovich, R. (2010). *Continuidad. Conversión entre registros*. Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

Cox, C. (2001). El currículum escolar del futuro. *Revista Perspectivas*. (pp. 213-232).

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. Número Especial, 177-195.

Duval, R.: (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang S.A.

Godino J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*.

Gómez, P. & Rico, L. (Eds.), (2001). Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. En F. Hitt, *El papel de los esquema, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en educación matemática* (pp. 165-177). Granada, FIEMAL & ALFA.

Hernandez, R., Fernandez, C., Baptista, P. *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.

Kieran, C y Filloy, E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. (pp. 229 – 240).

Mancera, E. (1998). *Errar es un placer. El uso de los errores para el desarrollo del pensamiento matemático*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación. Mayo del 2011, Chile.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. Universidad de la Laguna.

Socas, M. (2011). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria*. Aportaciones de la investigación. Números, 5-34.

Unidad de Currículum, (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje, Álgebra (p.5)*. Santiago: Valente.

<http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v7n3p229.pdf>

http://www.academia.edu/1410305/Construccion_de_conceptos_matematicos_y_de_estructuras_cognitivas

www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=132702

http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf

didactica2004.galeon.com/cvitae969421.html

http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s2_f2.pdf

Anexos

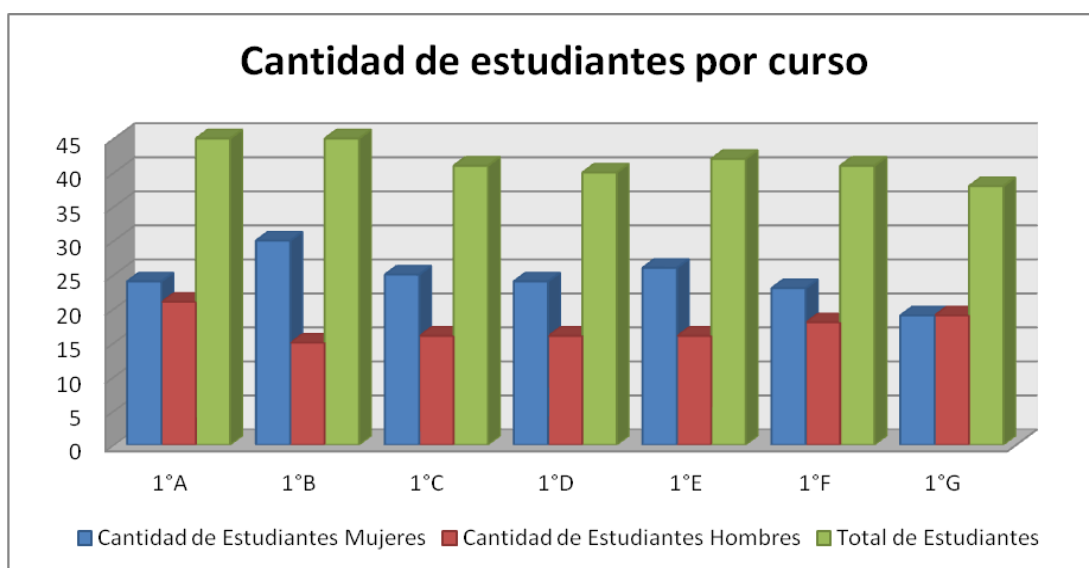
ANEXO 1:

**Cantidad de estudiantes de primer año medio del establecimiento
Alberto Widmer**

Tabla que indica la cantidad de estudiantes que tiene cada curso

Curso	Cantidad de Estudiantes Mujeres	Cantidad de Estudiantes Hombres	Total de Estudiantes
1°A	24	21	45
1°B	30	15	45
1°C	25	16	41
1°D	24	16	40
1°E	26	16	42
1°F	23	18	41
1°G	19	19	38
TOTAL	171	121	292

%Total	58,56	41,44
---------------	-------	-------

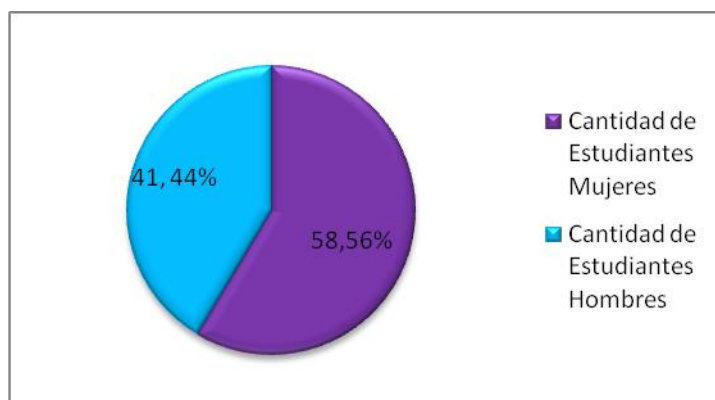


Elaboración propia

ANEXO 2:

Género de los estudiantes de la muestra

**Gráfico sobre el género de los
estudiantes de la muestra**

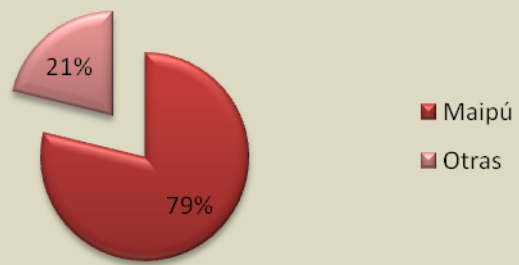


Elaboración propia

ANEXO 3:

Comuna de procedencia de los estudiantes de primer año medio

Procedencia de los estudiantes



Elaboración propia

ANEXO 4:

**Carta de autorización para realizar la investigación en el
establecimiento**

PARA: Señora Viviana Arancibia Leroux:

Jefa de UTP colegio Alberto Widmer

DE: Alumnos tesistas Pedagogía en Matemáticas, UCSH.

REF: Solicita autorización para aplicar instrumentos de medición.

Junto con saludarle respetuosamente, nos dirigimos a usted como autoridad pedagógica del establecimiento, con el fin de solicitar autorización para intervenir en su comunidad educativa. Nuestra Tesis tiene como modalidad la “investigación de acción”, razón por la que necesitamos recopilar información a través de una intervención en el actuar pedagógico. El posible título de nuestra tesis será “De la aritmética a la *algebrización*: un tránsito desde segundo Ciclo Básico hasta la Enseñanza Media”. Es debido a que éste es nuestro interés, hemos escogido su establecimiento con el fin de recopilar la información necesaria para la validación de esta investigación.

Debido a que recientemente hemos conformado el equipo de trabajo con el Profesor guía Carlos Gómez y hemos elegido cuál será nuestro tema a investigar, no tenemos mayor información del contenido de nuestra tesis para dársela a conocer. Sin embargo, a medida que aquello se vaya consolidando le haremos llegar cualquier dato que necesite.

Por último, si usted desea otro tipo de respaldo de la institución dónde estudiamos, del profesor guía u otro ente autoritario de ella, no dude en solicitárnoslo, ya que se le será entregado a la brevedad.

Muy agradecidos de su gentileza y buena disposición, se despiden atentamente,

Karin Acevedo
David Gutiérrez
Carla Jara
Constanza Morales

ANEXO 5:

Instrumento de recogida de información (aplicado)

INSTRUMENTO EVALUATIVO - RECOGIDA DE INFORMACIÓN

SUBSECTOR: EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CURSO: PRIMER AÑO MEDIO _____

FECHA: ___/___/___

INSTRUCCIONES:

- Lee comprensivamente cada una de las preguntas
- Utiliza lápiz grafito para responder y si te equivocas puedes borrar y reemplazar
- Las preguntas que tengan desarrollo deberás responderlas en la misma prueba. Puedes utilizar los espacios de la prueba para hacer tus cálculos y desarrollos

ITEM I

CMO: Identifican regularidades en la realización de transformaciones para formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones.

OA: Representar y calcular secuencias y regularidades

4. Completa las secuencias dibujando las figuras que faltan y responde a las siguientes preguntas:

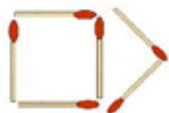


Fig. 1



Fig. 2

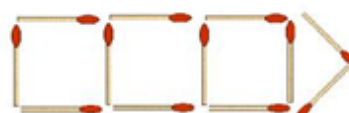


Fig.3

Fig. 4

Fig. 5

¿Por cuántos fósforos está formada la figura 3? _____

¿Por cuántos fósforos estará formada la figura 5? _____

¿Cuántos fósforos agregaría a la figura 10? _____ ¿y a la 20? _____ ¿Cómo llegaste a esa conclusión? _____

Si tienes 21 palos ¿Cuántos cuadrados y triángulos se pueden formar siguiendo la forma de las figuras? _____

5. Observa las figuras anteriores y completa la tabla:

Figura	N° de palos de fósforos
1	6
2	9
3	
4	
5	
6	
7	
8	

6. Vuelve a observar las figuras y la tabla que completaste y responde:

a. ¿Qué fórmula se podría usar para calcular la cantidad de palos que hay en la figura N?
Resp.: _____

ITEM II

CMO: Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado.

OA: Representar problemas mediante ecuaciones y resolver

2. Plantea la ecuación en cada caso y resuelve

a. La suma de un número y 36 es igual a la diferencia entre 240 y 200. ¿Cuál es el número?

b. 1 kg de papas vale \$578, ¿cuántos kilos se pueden comprar con \$2.890?

c. En un supermercado de tu Comuna se ofrece el choclo congelado en tres paquetes de distintas masas. El de 500 gramos cuesta \$499, el de 1.000 gramos, \$999 y el de 1.500 gramos, \$1.499. Si compras 3 kg de choclo, ¿Cuál de los tres paquetes conviene comprar?

ITEM III

CMO: Representar enunciados mediante expresiones algebraicas

OA: Representar enunciados mediante expresiones algebraicas

2. Relaciona los enunciados de la Columna A con las expresiones algebraicas de la columna B

En la columna A se encuentra un listado de enunciados. Los cuales debe relacionar indicando el número en los términos algebraicos que se encuentran en la columna B.

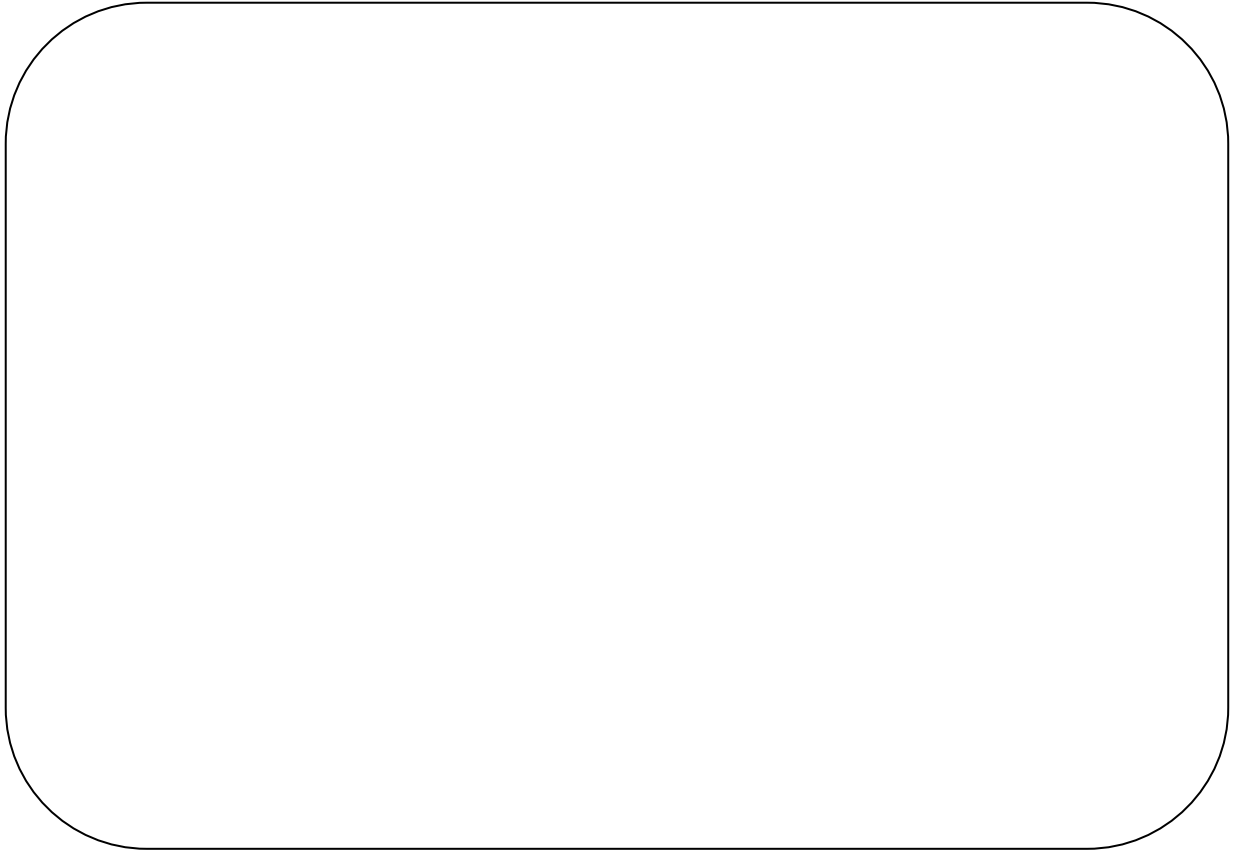
Columna A

- 1. El doble de un número disminuido en su cuarta parte.
- 2. Un número impar
- 3. El producto de dos números es 20
- 4. El cuadrado de la suma de dos números
- 5. El triple de la suma de dos números cualquiera
- 6. La semisuma de dos números cualquiera

Columna B

- _____ $\frac{x+y}{2}$
- _____ $a^3 - a$
- _____ $2n - \frac{n}{4}$
- _____ $3(x + y)$
- _____ $7t$
- _____ $(m + n)^2$

¿Qué fue lo que más te costó hacer y por qué?

A large, empty rounded rectangular box with a thin black border, intended for the user to write their response to the question above.

Muchas gracias por tu colaboración

ANEXO 6:

Carta dirigida a docente experto y validación de instrumento

- **Carta dirigida a docente experto**



ESCUELA DE EDUCACIÓN EN
HUMANIDADES Y CIENCIAS
Pedagogía en Matemáticas e
Informática Educativa

Solicitud de validación de instrumentos a través de Juicio de Experto(a).

La validación del instrumento elaborado por las alumnas y el alumno de tesis, se realiza con el propósito de asegurar que su estructura y contenido, permitan recopilar la información requerida para esta investigación.

El presente seminario es para optar al Grado de: Licenciado en Educación, Título Profesional: Pedagogía en Educación Matemáticas e Informática Educativa y su título es: “Algebrización de la Aritmética: Un Tránsito de Segundo Ciclo Básico a Primer Ciclo Medio (errores, dificultades y obstáculos de los estudiantes de primer año medio en la resolución de actividades algebraicas)”

La metodología es el Estudio de Casos a ser aplicada en alumnos de siete cursos(A-G) de primer año medio del Liceo Alberto Widmer de la comuna de Maipú.

La nomina de alumnas y alumno que optan a obtener su título profesional es:

1.- Acevedo Santibáñez, Karin Macarena
--

2.- Jara Lagos, Carla Alejandra

3.- Morales Bustos, Constanza Magdalena

4.- Gutiérrez Faúndes, David Isaías

Resumen:

En el presente trabajo de investigación se utiliza la metodología del Estudio de Casos aplicada en el reconocimiento de las principales dificultades y errores que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media, con referencia específica al álgebra. Destacando que ellas tienen su origen en la transición del pensamiento aritmético al

algebraico. Particularmente, centramos este estudio en el nivel de primer año medio en el cual pretendemos hacer una contribución para una mejor comprensión de las dificultades y problemas que nuestros actuales estudiantes se ven enfrentados. Al mismo tiempo, revisamos el estado del arte que aborda estos temas referidos al aprendizaje del álgebra y las tendencias curriculares más vigentes.

Pregunta de investigación.

¿Qué dificultades presentan los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra al desarrollar una actividad matemática?

Preguntas Relacionadas.

¿Qué errores, dificultades u obstáculos están presentes en el aprendizaje del álgebra?

¿De qué manera afecta el uso de diversos registros en el desarrollo de actividades algebraicas?

¿Realizan, los alumnos, transformaciones en sus representaciones semióticas al efectuar una actividad matemática?

Objetivo General:

Identificar las dificultades que presenta el tránsito del pensamiento aritmético al algebraico en los estudiantes de primer año medio del liceo Alberto Widmer.

Objetivos Específicos.

Identificar qué tipo de dificultades y problemas se detectan en el aprendizaje del álgebra en los estudiantes de primer año medio.

Reconocer lo más relevante en los tipos de dificultades y problemas atendidos.

Levantar algunas recomendaciones a partir de las conclusiones conducentes a la elaboración de una propuesta didáctica que contribuya a superar las dificultades y problemas detectados para el aprendizaje del álgebra en los alumnos de primer año medio.

Supuestos

La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal es difícil para muchos de aquellos que comienzan el estudio del álgebra ya que los estudiantes siguen usando los métodos que les funcionaban en la aritmética de su enseñanza básica, en su forma de ver e interpretar el signo igual (=), en sus dificultades con la concatenación y con algunas convenciones de notación del álgebra y con su falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y los procedimientos para resolver problemas

Observaciones:

Leyendo a Socas(2011) y diferentes trabajos como los de Wagner y Kieran (1989), Kieran y Filloy (1989), Socas y otros (1989), Kieran (1992, 2006, 2007), Rojano (1994), Bednarz, Kieran y Lee (1996), Palarea (1998), Socas (1999), Socas y otros (2007), nos dimos cuenta como grupo investigador que la investigación en pensamiento algebraico intenta encontrar soluciones a preguntas como ¿qué pueden hacer y qué no pueden hacer los estudiantes en los distintos ciclos o niveles del sistema educativo en pensamiento algebraico? Tomando en cuenta esta referencia es que estamos desarrollando nuestra investigación.

Le saluda atentamente y agradecen su colaboración:

Acevedo Santibáñez, Karin Macarena

Jara Lagos, Carla Alejandra

Morales Bustos, Constanza Magdalena

Gutiérrez Faúndes, David Isaías

- Validación de docente experta sobre los instrumentos presentados

Datos del Experto(a)

Nombre: Isabel Margot Barros Inostroza

Título profesional: Profesor de Estado en Matemática y Computación

Grado Académico: Magíster ©

Cargo: Académico Permanente Jornada Completa

Le rogamos consignar si los instrumentos revisados para validar, se ajustan a alguna de las siguientes categorías:

- Muy bien.
- Bien.
- Suficiente.
- Insuficiente

Observaciones:

Instrumento 1: Algunos ejercicios se repiten, agregar preguntas al ítem I.1 - ¿cuántos puntos se deben agregar a la fig 10 y a la 20? ¿cómo llegar a conclusiones? I.3 revisar redacción y orden de los preguntas. Ítem II es pertinente. Faltan ejercicios que involucren una situación gráfica cotidiana, que el alumno pueda expresar en lenguaje algebraico. (o representada)

Muchas gracias por su cooperación.

Instrumento 2: Ítem I: o.k. Ítem II. falta ejercicios de representación de una situación cotidiana gráfica o verbal a una algebraica. II.2 no logro entender lo que quiere que cont el estudiante. II.3 agregarle ¿qué estrategia usó? o cómo lo hizo.

Nombre y Firma.

Ambos instrumentos son perfectible. A mi juicio deben contemplar 3 tipos de ejercicios según las 3 representaciones semiótica verbal, gráfica y algebraica. Insistir en la "forma" que el alumno resuelve (u de ellos) y por ello es necesario plantear ejercicios en donde los estudiantes deben plantearse esquemas y sacar conclusiones.

Instrumento para docente. este o.k.

Santiago,/2012

ANEXO 7:

Rúbrica de evaluación para instrumento de recogida de información

RÚBRICA DE EVALUACIÓN PARA INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

Identifica regularidades en la realización de transformaciones para formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones.

Indicador	No logrado	En proceso de logro	Medianamente logrado	Suficientemente logrado	Logrado
Reconoce la representación gráfica de la secuencia.	Omite la pregunta.	Dibuja de manera incompleta una de las dos figuras solicitadas.	Dibuja de manera errónea las figuras solicitadas en el instrumento.	Grafica ambas imágenes que solicita el instrumento, pero sólo una es correcta.	Representa correctamente las figuras requeridas.
Recuenta la cantidad de palos de fósforos de la secuencia señalada en el instrumento y la dibujada por él.	No completa la información demandada.	Contesta una de las preguntas señaladas, y a su vez errónea.	Responde el recuento de ambas preguntas de manera errónea.	Realiza el conteo correcto de sólo una figura.	Responde asertivamente ambas preguntas, basadas en las figuras anteriores.

Indicador	No logrado	En proceso de logro	Medianamente logrado	Suficientemente logrado	Logrado
Calcula la cantidad de palos de fósforos de la secuencia.	El estudiante deja en blanco los espacios señalados para las preguntas expuestas en el instrumento, que corresponde a este indicador.	Responde a lo más dos tercios de las preguntas requeridas, las cuales están erradas.	Completa la información solicitada equivocadamente.	Rellena solamente dos espacios y ambas están correctas.	Completa asertivamente lo solicitado.
Ubica los valores que corresponde a la cantidad de palos de fósforos que contienen las figuras señas en la tabla.	Omite la pregunta, ya que no señala ningún valor en la tabla.	Completa a lo más cinco casilleros, sin embargo, sus respuestas se encuentran equivocadas.	Señala todos los valores sugeridos en la tabla, pero lo realiza de manera incorrecta.	Indica a lo más cinco respuestas, siendo éstas correctas.	Ubica correctamente en la tabla todos los valores que conciernen a la cantidad de palos de fósforos.

Indicador	No logrado	En proceso de logro	Medianamente logrado	Suficientemente logrado	Logrado
Representa la secuencia numérica de forma algebraica.	Deja en blanco el espacio.	Indica en un lenguaje natural la respuesta, no obstante, ésta es incorrecta.	Expresa en un lenguaje algebraico la respuesta, pero erradamente.	Escribe la expresión asertivamente en un lenguaje natural.	Representa de forma correcta la secuencia en un lenguaje algebraico.

Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado.

Indicador	No logrado	En proceso de logro	Medianamente logrado	Suficientemente logrado	Logrado
Traduce del lenguaje verbal a un lenguaje algebraico y resuelve.	El estudiante no responde la pregunta o sólo señala la respuesta de ésta.	Señala una respuesta correcta o incorrecta, utilizando el registro aritmético.	Traduce de un lenguaje verbal a un lenguaje algebraico, pero el proceso de resolución es incorrecto o parcial.	Realiza un eficiente cambio al registro algebraico, a su vez logra un buen proceso de resolución del problema, pero la respuesta indicada no es satisfactoria.	Traduce y resuelve el ejercicio planteado de manera correcta.
Convierte el lenguaje verbal a un lenguaje algebraico.	No deja evidencia de algún desarrollo, o bien, evidencia solamente la respuesta.	Realiza una conversión entre el registro natural a un registro aritmético, siendo la respuesta correcta o incorrecta.	Contesta erróneamente la pregunta señalada, producto de una incorrecta traducción de lenguajes (verbal-algebraico) o el proceso es incompleto.	Plantea correctamente la traducción entre el lenguaje verbal y algebraico, llegando a una respuesta no asertiva.	Resuelve correctamente el problema en un lenguaje algebraico.

Indicador	No logrado	En proceso de logro	Medianamente logrado	Suficientemente logrado	Logrado
Calcula la cantidad de palos de fósforos de la secuencia.	El estudiante deja en blanco los espacios señalados para las preguntas expuestas en el instrumento, que corresponde a este indicador.	Responde a lo más dos tercios de las preguntas requeridas, las cuales están erradas.	Completa la información solicitada equivocadamente.	Rellena solamente dos espacios y ambas están correctas.	Completa asertivamente lo solicitado.
Ubica los valores que corresponde a la cantidad de palos de fósforos que contienen las figuras señalas en la tabla.	Omite la pregunta, ya que no señala ningún valor en la tabla.	Completa a lo más cinco casilleros, sin embargo, sus respuestas se encuentran equivocadas.	Señala todos los valores sugeridos en la tabla, pero lo realiza de manera incorrecta.	Indica a lo más cinco respuestas, siendo éstas correctas.	Ubica correctamente en la tabla todos los valores que conciernen a la cantidad de palos de fósforos.

Representa la secuencia numérica de forma algebraica.	Deja en blanco el espacio.	Indica en un lenguaje natural la respuesta, no obstante, ésta es incorrecta.	Expresa en un lenguaje algebraico la respuesta, pero erradamente.	Escribe la expresión asertivamente en un lenguaje natural.	Representa de forma correcta la secuencia en un lenguaje algebraico.
--	----------------------------	--	---	--	--

Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado.

Indicador	No logrado	En proceso de logro	Medianamente logrado	Suficientemente logrado	Logrado
Traduce del lenguaje verbal a un lenguaje algebraico y resuelve.	El estudiante no responde la pregunta o sólo señala la respuesta de ésta.	Señala una respuesta correcta o incorrecta, utilizando el registro aritmético.	Traduce de un lenguaje verbal a un lenguaje algebraico, pero el proceso de resolución es incorrecto o parcial.	Realiza un eficiente cambio al registro algebraico, a su vez logra un buen proceso de resolución del problema, pero la respuesta indicada no es satisfactoria.	Traduce y resuelve el ejercicio planteado de manera correcta.
Convierte el lenguaje verbal a un lenguaje algebraico.	No deja evidencia de algún desarrollo, o bien, evidencia solamente la respuesta.	Realiza una conversión entre el registro natural a un registro aritmético, siendo la respuesta correcta o incorrecta.	Contesta erróneamente la pregunta señalada, producto de una incorrecta traducción de lenguajes (verbal-algebraico) o el proceso es incompleto.	Plantea correctamente la traducción entre el lenguaje verbal y algebraico, llegando a una respuesta no asertiva.	Resuelve correctamente el problema en un lenguaje algebraico.

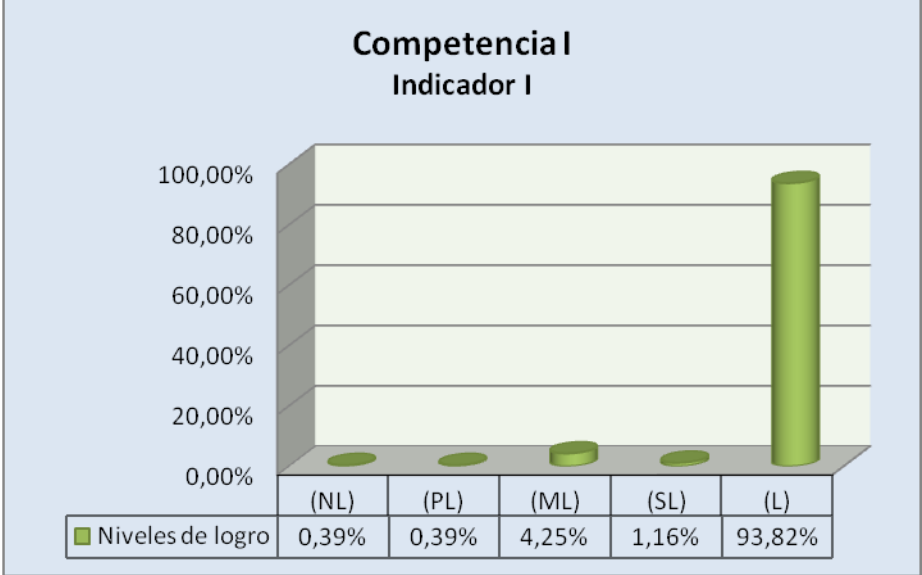
Indicador	No logrado	En proceso de logro	Medianamente logrado	Suficientemente logrado	Logrado
Analiza las variables del problema y resuelve a través de una conversión de registros.	Omite el problema señalado o indica la respuesta de éste en el instrumento de recogida de información.	Resuelve el problema en un registro aritmético, obteniendo una respuesta asertiva o no.	Se observa una traducción (verbal-algebraico) y resolución inadecuada o inconclusa.	Analiza correctamente las variables, logrando una adecuada conversión algebraica, sin embargo, la respuesta a dicho problema es errónea.	Logra una adecuada conversión de los registros, finalizando con una respuesta correcta.

Representar enunciados mediante expresiones algebraicas.

Indicador	No logrado	En proceso de logro	Medianamente logrado	Suficientemente logrado	Logrado
Relaciona el lenguaje natural con un lenguaje algebraico.	El estudiante no relaciona ningún enunciado con su expresión algebra.	El estudiante asume que los seis enunciados tienen su expresión algebraica, pero la relación entre ellos está errada.	Representa los cuatro enunciados que tienen su expresión asociada en la columna B erróneamente.	Indica los cuatro enunciados que tienen su expresión algebraica asociada en la columna B de forma correcta, sin embargo señala enunciados que no tienen su respectiva expresión.	Indica correctamente la relación entre enunciados verbales y sus respectivas expresiones algebraicas.

ANEXO 8:

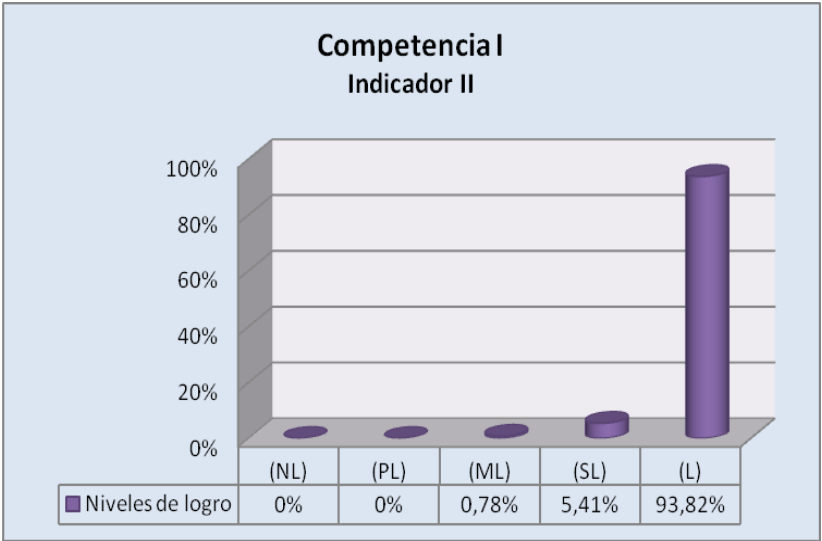
**Gráfico correspondiente al indicador I, de la competencia I de
análisis de instrumento**



Elaboración propia

ANEXO 9:

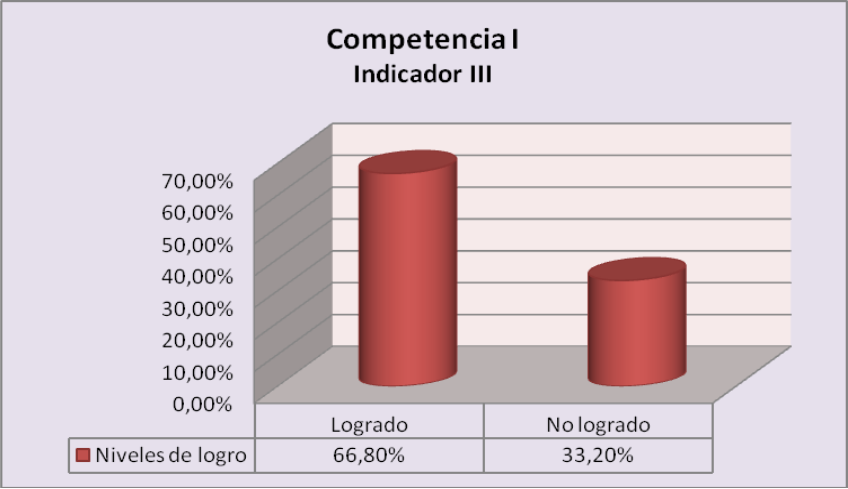
**Gráfico correspondiente al indicador II, de la competencia I de
análisis de instrumento**



Elaboración propia

ANEXO 10:

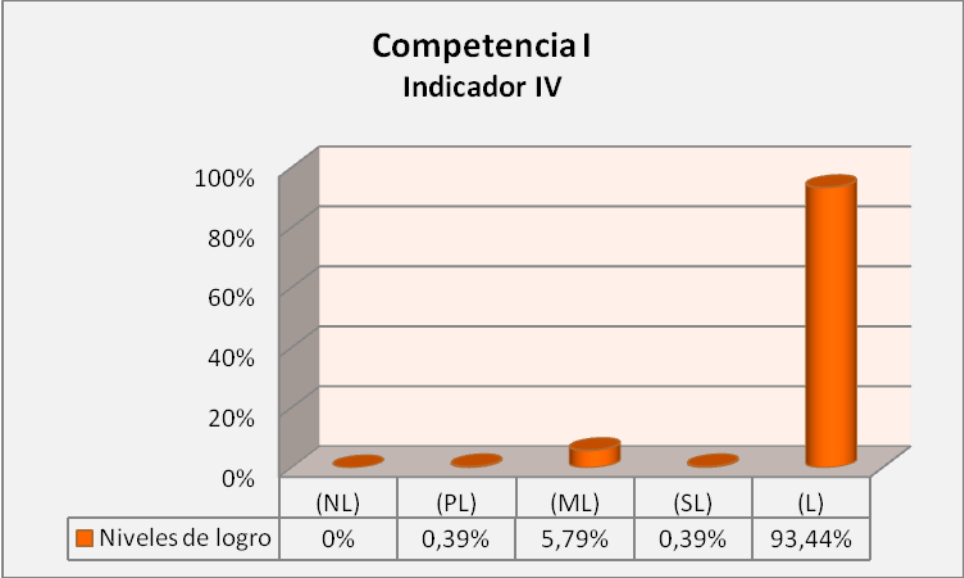
**Gráfico correspondiente al indicador III, de la competencia I de
análisis de instrumento**



Elaboración propia

ANEXO 11:

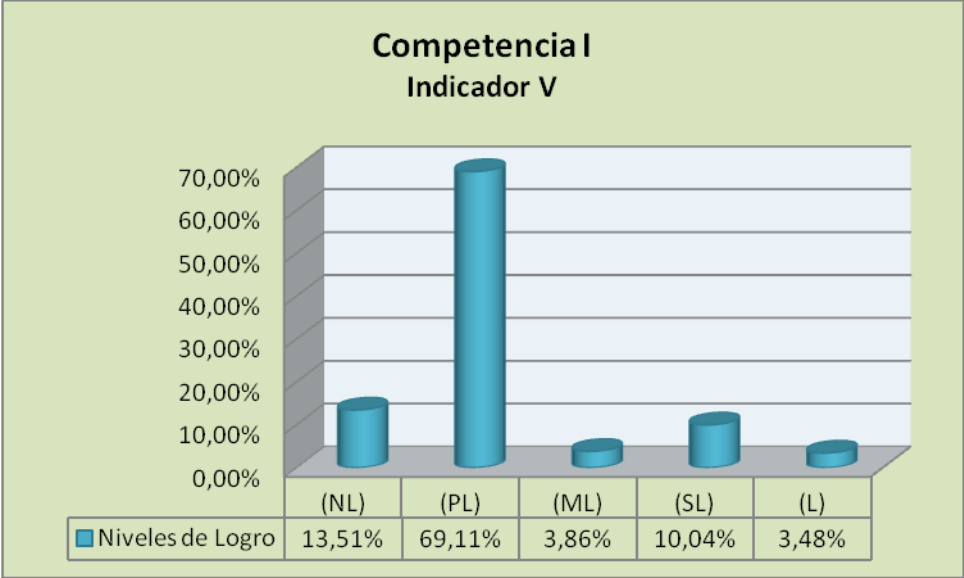
**Gráfico correspondiente al indicador IV, de la competencia I de
análisis de instrumento**



Elaboración propia

ANEXO 12:

**Gráfico correspondiente al indicador V, de la competencia I de
análisis de instrumento**

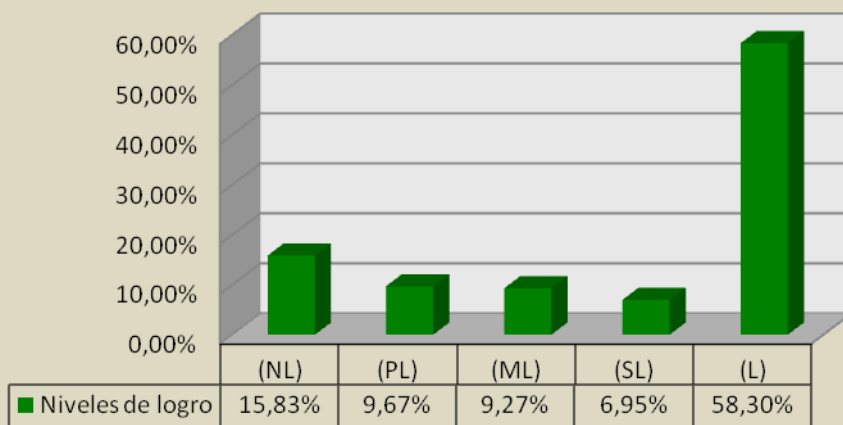


Elaboración propia

ANEXO 13:

**Gráfico correspondiente al indicador I, de la competencia II de
análisis de instrumento**

Competencia II Indicador I

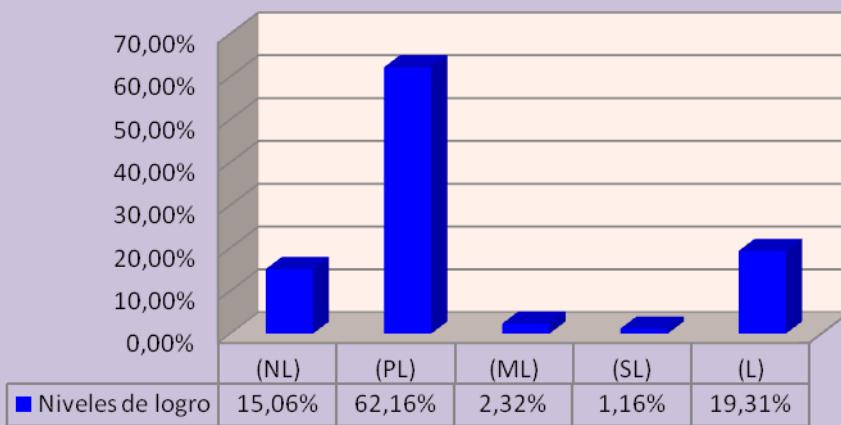


Elaboración propia

ANEXO 14:

**Gráfico correspondiente al indicador II, de la competencia II de
análisis de instrumento**

Competencia II
Indicador II

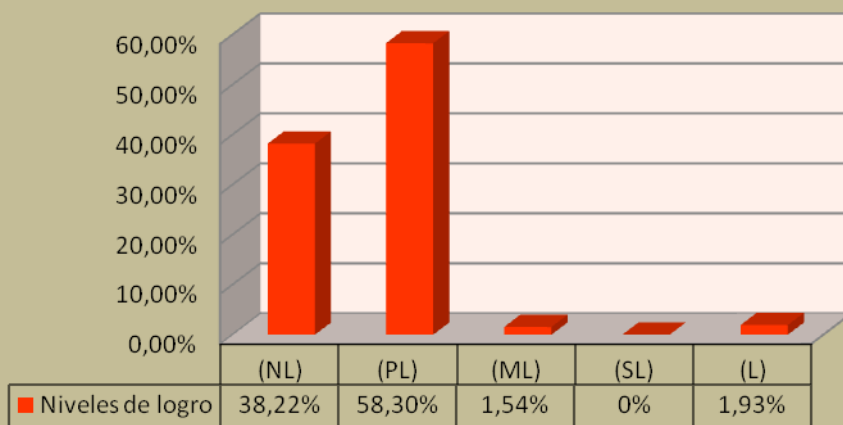


Elaboración propia

ANEXO 15:

**Gráfico correspondiente al indicador III, de la competencia II de
análisis de instrumento**

Competencia II Indicador III

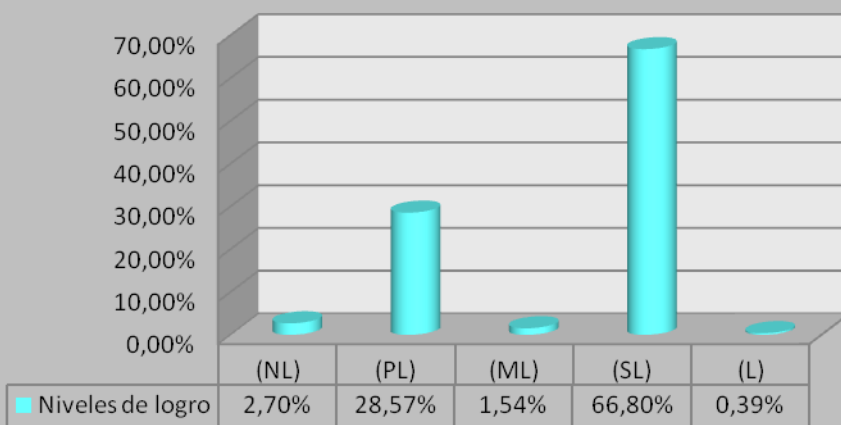


Elaboración propia

ANEXO 16:

**Gráfico correspondiente al indicador I, de la competencia III de
análisis de instrumento**

Competencia III
Indicador I



Elaboración propia

ANEXO 17:

Validación de cuestionario docente, por parte del docente experto

Datos del Experto(a)

Nombre: Isabel Margot Barros Inostroza

Título profesional: Profesor de Estado en Matemática y Computación

Grado Académico: Magíster ©

Cargo: Académico Permanente Jornada Completa

Le rogáramos consignar si los instrumentos revisados para validar, se ajustan a alguna de las siguientes categorías:

- **Muy bien.**
- **Bien.**
- **Suficiente.**
- **Insuficiente**

Observaciones:

Instrumento 1: Algunos ejercicios se repiten, agregar preguntas al ítem I.1 - ¿cuántos puntos se debe agregar a la fig. 10 y a la 20? ¿cómo llegar a conclusiones? I.3 revisar redacción y orden de las preguntas. Ítem II es pertinente. Faltan ejercicios que involucren una situación gráfica cotidiana, que el alumno pueda escribir en lenguaje algebraico. Falta revisión (complementar)

Muchas gracias por su cooperación.

Instrumento 2: Ítem I: o.k. Ítem II. falta ejercicios de representación de una situación cotidiana gráfica o verbal a una algebraica. II.2 no logro entender lo que quiere que cont el estudiante. II.3 agregarle ¿qué estrategia usó? o cómo lo hizo.

Nombre y Firma.

Ambos instrumentos son perfectible. A mi juicio deben trabajar por 3 tipos de ejercicios según las 3 representaciones semióticas: verbal, gráfica y algebraica. Insistí en la "forma" que Santiago,/2012

el alumno resuelve 4u de ellos y por ello es necesario plantear ejercicios en donde los estudiantes deban plantearse esquemas y sacar conclusiones.

Instrumento para docente, está o.k.

ANEXO 18:

**Cuestionario para los docentes del departamento de matemática del
establecimiento Alberto Widmer**



ESCUELA DE EDUCACIÓN EN
HUMANIDADES Y CIENCIAS
Pedagogía en Matemáticas e
Informática Educativa

Estimados Profesores(as):

La presente encuesta es un instrumento para la recolección de información (opinión) en un estudio de casos que estamos realizando como grupo de investigación, enfocado en los alumnos de primer año medio de este colegio, denominado “Algebrización de la Aritmética: Un Tránsito de Segundo Ciclo Básico a Primer Ciclo Medio (errores, dificultades, deficiencias y obstáculos de los estudiantes de primer año medio en la resolución de situaciones algebraicas)”

Toda información que Ud. nos entregue será administrada bajo la más completa discreción, sin exponer su integridad profesional, por lo que esperamos que su respuesta sea del más alto nivel de sinceridad, acorde a un profesional de la educación.

De ante mano muchas gracias.

Grupo investigador,
Pedagogía en Matemática e Informática Educativa.
Universidad Católica Silva Henríquez

Santiago, Noviembre 2012.-

Cuestionario docente

Nombre: _____

Título profesional: _____

Grado académico: _____

Cargo en el establecimiento: _____

Años en el establecimiento: _____

Años de experiencia docente: _____

Pregunta 1: Diversas investigaciones, desde una perspectiva cognitivista, se centran en el análisis de los errores que tienen nuestros alumnos cuando resuelven tareas algebraicas y en la asociación de estos errores a diferentes tipos de dificultades. ¿Qué propuesta(s) curricular(es) utiliza usted, que ayude(n) a paliar estas dificultades? La pregunta está hecha en el convencimiento como grupo investigador de que la persistencia de errores en niveles medios y observados en la práctica docente, nos sugieren ampliar las investigaciones hechas en este campo.

Pregunta 2: En nuestro trabajo vamos a presentar resultados de un estudio exploratorio donde pondremos de manifiesto las dificultades que tienen nuestros alumnos en la resolución de tareas algebraicas relativamente sencillas y propias de su curso. Si eventualmente, en dicho estudio, los alumnos presentaran una amplia gama de errores en la resolución de sus tareas. ¿Cómo usted identificaría, categorizaría y analizaría los errores y dificultades de sus alumnos? Lo cual podría ser utilizado como orientador para establecer propuestas curriculares que eviten estas tipologías de errores.

Pregunta 3: ¿Considera usted que los errores de sus alumnos son valiosos indicadores de los procesos intelectuales que ellos desarrollan y por lo tanto, es importante analizarlos, para tratar de determinar las razones por las cuales ellos no logran realizar correctamente una actividad y detectar los posibles obstáculos con que se enfrentan, para planificar en función de ellos las futuras intervenciones? Justifique su respuesta.
