Escuela de Educación en Matemática
e Informática Educativa
Facultad de Educación

PROPUESTA DE DEMOSTRACIONES QUE INVOLUCRAN CONTENIDOS DE LOS PROGRAMAS DEL PLAN DIFERENCIADO DE MATEMÁTICAS PARA III Y IV MEDIO CONSIDERANDO LAS FUNCIONES DE MICHAEL DE VILLIERS

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN
Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA
E INFORMÁTICA EDUCATIVA

INTEGRANTES:
GONZÁLEZ ARÁNGUIZ, RUBÉN DARÍO

PROFESOR GUÍA:
ALONSO BENJAMÍN QUIROZ MEZA

SANTIAGO, CHILE
2013

DEDICATORIA

A mi profesora colaboradora, Doña Cecilia Margarita Villalobos Quiroga,

a quien le agradezco profundamente que me haya aceptado

para realizar mi práctica profesional.

A mis queridas alumnas del I° A y I° D, promoción 2013, del

Liceo Técnico Clelia Clavel Dinator,

quienes me inspiraron a consolidar definitivamente

mi vocación como profesor.

A ustedes, el fruto de mi trabajo y determinación en continuar

sin titubeos en la noble misión de educar.

Desde los griegos, quién dice matemáticas dice demostración

Nicolás Bourbaki

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En el presente seminario, se realiza una propuesta de las demostraciones que están implícitas en los Planes y Programas de formación Diferenciada de III y IV Medio de Matemáticas considerando las funciones de de Villiers, esto con la finalidad de generar una propuesta para el profesor que puediese implementar en la sala de clases.

Se ha hecho un desglose de las demostraciones en relación a las funciones del autor mencionado. Esto con el propósito de orientar a los docentes en su ejercicio de maestros y dar importancia a las proposiones que considere más importantes que, a su juicio, no deben estar ausentes en el aula. A su vez, se ilustran tres ejemplos de distintos ámbitos de la matemática de cómo se incorporan las funciones de Michael de Villiers en las demostraciones presentadas.

Es menester mencionar que la demostración ha estado ausente en las salas de clases durante mucho tiempo, los profesores las evaden por diversos motivos, como también los programas oficiales del Ministerio de Educación (MINEDUC) presentan una escasez de propuestas de trabajo y sugerencias que orienten al docente en una nueva forma de presentar a los educandos la matemática: no como una ciencia que afirma de manera tautológica las proposiciones, sino como una ciencia deductiva que, a través de axiomas, postulados y definiciones, genera un cuerpo de conocimientos sólidos y perdurables en el transcurso del tiempo.

En el marco metodológico se expone la orientación de este estudio, explicando los conceptos de qué es investigar, qué es una investigación educativa, una investigación documental o bibliográfica y por qué se ha optado por una tesis de tales características.

Para el diseño del estudio, se encasillan las funciones que se adecuan a cada tópico que proponen los documentos oficiales del MINEDUC según algunos ejemplos e indicaciones al docente, como también, las demostraciones que no se explicitan y que pudieran estar incluidas en el trabajo profesional del docente.

Finalmente, en las conclusiones se presentan las reflexiones que el investigador a extraído a lo largo de su tesis. Se menciona que, al ser una propuesta, el docente puede establecer otros criterios de selección y clasificación de las demostraciones, por lo que no existe una única elección, sino varias, de acuerdo al juicio que tenga el profesor al respecto.

El autor espera que esta investigación sea una contribución al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas y de sus propiedades, así como también al desarrollo cognitivo de nuestros educandos.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

EL PROBLEMA

La demostración en matemáticas es, por antonomasia, uno de los procesos más importantes que hay en esta ciencia. Es la que permite formular y aseverar una proposición o su falsedad, construir nuevas ideas y hacer progresar otras ramas que pueden estar interconectadas.

Sin embargo, la enseñanza de la demostración en las aulas escolares está ausente, ya sea por la dificultad del tema a tratar, la falta de experiencia del profesor para demostrar, el nivel de conocimientos previos que requieren los estudiantes para realizarla, disponibilidad de tiempo, entre otros factores.

Cabe señalar, y a partir de la experiencia docente del investigador, que el currículum nacional chileno, y los planes y programas otorgados por el Ministerio de Educación (MINEDUC), poseen un déficit en el tema de las demostraciones[1], siendo recurrente por parte de los profesores la realización, en la sala de clases, de ejercicios típicos utilizando las propiedades sin hacer mayores cuestionamientos de ellas, o simplemente, aceptándolas como dogmas.

Muchos autores han mencionado la importancia de demostrar en matemáticas, destacando, a su vez, los procesos que en ella se ven involucrados; entre ellos, Michael de Villiers (1996) habla de las funciones de la demostración, indicando seis, a saber: verificación, explicación, descubrimiento, sistematización, reto intelectual y comunicación.

Por su parte, cada demostración realizada posee connotaciones distintas entre una y otra; a modo de ejemplo, la demostración del Principio de Cavalieri es distinta a la demostración del siguiente límite por definición:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} = \frac{2}{3}$$

lo que permite apreciar que no sólo hay un tipo de demostración en matemáticas, sino varias, según el área de estudio de ésta (cálculo, geometría, álgebra, etc.).

En esta tesis, se dará a conocer cómo las demostraciones logran desarrollar en el estudiante aspectos que son relevantes, pero que pasan inadvertidos: las funciones de la demostración que se mencionaron anteriormente. De esta forma, se plantea la

[1] Esto se ha hecho en base a una revisión de los planes y programas otorgados por el Ministerio de Educación, y en consultas que ha hecho el investigador con algunos docentes respectivos al área, egresados hace más de 30 años.

siguiente pregunta: ¿Qué demostraciones implícitas en los contenidos matemáticos del Plan Diferenciado de III y IV medio merecen ser tratadas en el aula por su aporte de acuerdo a las funciones de de Villiers?
Para el investigador de esta tesis, considera pertinente incluir las siguientes demostraciones:

- Obtención de las raíces de la ecuación de 2° grado en $\mathbb{R}$
- Relación entre las raíces
- Las ecuaciones de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola en el origen.
- Propiedades de sumatorias.
- Transformación de grado a radián.

Como bien menciona el título de esta investigación, el docente puede incorporarlas o no de acuerdo a su criterio. Se han elegido por la importancia e trascendencia que poseen, más allá del mero hecho de ser demostraciones tildadas de “clásicas”, sino más bien por lo aportes que ellas, *per se*, poseen. A lo largo de esta tesis, se darán a conocer las funciones que están inmersas en estas demostraciones; es muy probable que otros profesores puedan encontrar otras funciones que ellos consideran pertinentes incluir o apartar de lo que ha concluído el investigador, lo cual hará de este trabajo un producto más enriquecedor para sus posteriores desarrollos profesionales.

JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

El problema planteado apunta a la escasa presencia de las demostraciones en los cursos diferenciados de III y IV medio de matemáticas.

El investigador, en conversaciones con profesores de más de 30 años de docencia, junto con su experiencia, ha corroborado esta afirmación. Postula, además, el hecho de que los maestros justifican la no enseñanza de la demostración en matemáticas por diversas razones (Crespo, 2005, p. 27):

- Falta de interés de los alumnos
- El trabajo con cursos numerosos
- La falta de conocimientos previos de los alumnos

- La excesiva extensión de los programas.

La enseñanza de la demostración en el aula se ve como un procedimiento obligatorio por parte del profesor; sin embargo, esta enseñanza se realiza de forma rutinaria y plana, sin crear manifestaciones mentales dinámicas de razonamiento. Si bien existen diversos tipos de demostraciones, el más preponderante es el método directo, también llamado lógico-formal.

Una solución a esta carencia en la enseñanza de la matemática la constituye las funciones de de Villiers. El modelo de de Villiers busca exponer algunas de las funciones de la demostración dentro de la actividad matemática científica y permite vislumbrar las posibilidades de modificar algunas prácticas vinculadas con la demostración en el aula evitando caer en la función formalista de verificación que se reconoce generalmente en la enseñanza de la matemática en las aulas (Crespo, 2005, p. 27).

Esta clasificación de criterios propuesta por de Villiers genera una serie de recursos mentales en la creación del razonamiento lógico-deductivo; además, las demostraciones ocupan una posición central en la actividad matemática, ya que constituyen el método de validación de las afirmaciones de esta ciencia (Crespo, 2005, p. 26).

El incentivo de pensar en la verificación o refutación de proposiciones matemáticas coadyuva a la toma de decisiones que tendrá una persona a lo largo de su vida, la génesis de una inteligencia creativa, ordenada y sólida como, a su vez, una concepción cultural que valora la fundamentación racional (Crespo, 2005, p. 29).

OBJETIVO GENERAL

Realizar una propuesta posible de las demostraciones que debieran incluirse en el saber a enseñar, implícitas en los Contenidos Mínimos Obligatorios del Plan diferenciado de matemáticas, considerando las funciones de las demostraciones postuladas por de Villiers.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Fundamentar la importancia de las demostraciones en la educación media en matemáticas.
- Operacionalizar las funciones de de Villiers referidas al aporte de las demostraciones en la formación de los educandos.
- Analizar los contenidos de matemáticas propuestos en los planes y programas oficiales de III y IV medio diferenciado en los que se pueden realizar demostraciones.
- Seleccionar cuáles son las demostraciones y sus aportes respecto de las funciones de de Villiers, que un docente pudiera incluir a nivel de aula.

CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL

MARCO REFERENCIAL

La demostración, en su esencia misma, se puede entender como una comprobación, una explicación que posee ciertos fundamentos teóricos. Ésta está sujeta a ciertos cambios producidos en el tiempo, ya sea por los nuevos acuerdos universales o, en el caso de las ciencias básicas, por descubrimientos innovadores que obligan a perfeccionarla. En el caso de las matemáticas, la demostración es muy distinta a lo que en las ciencias naturales ocurre. Las demostraciones ocupan una posición central en la actividad matemática, ya que constituyen el método de validación de las afirmaciones de esta ciencia, en contraposición, por ejemplo de lo que ocurre en la física o en otras ciencias, en las que el método de verificación de las afirmaciones consiste en su contrastación con la realidad (Crespo, 2005).

Así como cuando se desea establecer la veracidad de un enunciado como, a su vez, la afirmación de una sentencia o fallo, la matemática emplea este recurso inherente a ella. El empleo de este recurso es un aspecto indispensable a la hora de comprobar la certeza de una propiedad numérica o geométrica, una proposición algebraica o la impredecibilidad de un estudio estocástico. Sin embargo, lo que ocurre en la matemática, no sucede en la educación.

Durante el transcurso del último tiempo, se ha visto que en la educación chilena existe una carencia respecto a las demostraciones en matemáticas. En comparación a lo que sucede en los países europeos, en un estudio realizado a cursos de séptimo básico, menciona Varas (2008) que la diferencia más importante fue la total ausencia de demostraciones en las clases. Hay que mencionar, también, que muchos docentes no saben probar demostraciones, lo cual dificulta enormemente el progreso en este saber. Esto no es menor dado que, en comparación a otras naciones, a través de las pruebas internacionales PISA y TIMSS, Chile esta bajo los índices promedios de países pertenecientes a la OCDE. Se debe tener presente, además, que estos exámenes no contemplan, entre sus objetivos, las pruebas de propiedades matemáticas. Empero, se sabe, dado la diversa bibliografía, las ventajas cognitivas que otorga la demostración (Nápoles *et al*, 2001; Sáenz, 2001; Bravo y Arrieta, 2005; Samper *et al*, 2010; Martínez, 1999; Crespo, 2007; Crespo y Ponteville, 2005).

Dados los antecedentes anteriormente mencionados, el marco referencial de esta investigación se centrará en los siguientes aspectos:

- Qué es la demostración, qué es una demostración matemática y tipos de demostración
- La demostración, su importancia en el aula y funciones de la demostración.

LA DEMOSTRACIÓN

- ¿Qué es demostrar?

Si bien se tiene la concepción de que demostrar es comprobar o verificar, se debe hacer una distinción en qué contexto estamos refiriéndonos. La demostración en ciencias básicas es distinto a la demostración en matemáticas. Según la RAE, *demostrar* es

1. Manifestar, declarar.
2. Probar, sirviéndose de cualquier medio de demostración.
3. Enseñar (mostrar o exponer algo).
4. Mostrar, hacer ver que una verdad particular está comprendida en otra universal, de la que se tiene certeza[2] (RAE).

A su vez, la RAE define *demostración* como

1. Acción y efecto de demostrar.
2. Señalamiento, manifestación.
3. Ostentación o manifestación pública de fuerza, poder, riqueza, habilidad, etc.
4. Prueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes.
5. Comprobación, por hechos ciertos o experimentos repetidos, de un principio o de una teoría.
6. Fin y término del procedimiento deductivo[3] (RAE).

Sin embargo, ¿qué diferencia una demostración científica de una demostración matemática?. Podemos decir que se distinguen en su forma de proceder. El método científico es un procedimiento para responder preguntas acerca del mundo poniendo a prueba conjeturas razonables (hipótesis) y formulando reglas generales (Hewitt, 1999). Así como las ciencias básicas (física, química o biología) poseen el método científico en su forma de trabajar, la matemática, por su parte, posee el método deductivo. A su vez, el primero se caracteriza por ser inductivo, es decir, se inicia con

[2] http://lema.rae.es/drae/?val=demostrar
[3] http://lema.rae.es/drae/?val=demostraci%C3%B3n

unos casos particulares, para luego generalizar la o las hipótesis planteadas. El método deductivo, por su lado, considera los casos generales, para ir particularizando, o sea, encontrar algunos casos “especiales”, ya sea que no se cumplan, o que dan algunos resultados de suma importancia.

Algunos autores, generalmente se encuentra en las traducciones de los libros de origen angloparlante, utilizan la palabra prueba para designar a las demostraciones matemáticas. La RAE define *prueba* de distintas formas, aquí consideraremos algunas acepciones:

1) Acción y efecto de probar
2) Razón, argumento, instrumento u otro medio con que se pretende mostrar y hacer patente la verdad o falsedad de algo.
3) Ensayo o experimento que se hace de algo, para saber cómo resultará en su forma definitiva.
4) Operación que se ejecuta para comprobar que otra ya hecha es correcta[4].

La tercera acepción es la que más se adecúa al concepto de demostración en ciencias, mientras que la número 4, es la que se utiliza en matemáticas.

Se debe hacer referencia, además, a que en el lenguaje común, se utilizan las palabras *verificaciones, argumentaciones, demostraciones, explicaciones* y *pruebas*. Algunos autores han propuesto algunos significados para *prueba* y *demostración*. Aún más, otros plantean que son sinónimos, mientras que investigadores como Duval, establecen una distinción entre explicación y argumentación. En la *argumentación* se trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la *explicación* los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento (Duval, 1993, citado por Crespo, 2005). Para Balacheff, *argumentación* es cualquier discurso destinado a obtener el consentimiento del interlocutor sobre una afirmación; una *explicación* es una argumentación en que el consentimiento se busca a partir de la explicitación del carácter verdadero de la afirmación, utilizando exclusivamente argumentos de contenido. Las *pruebas* son explicaciones en que la explicitación del carácter verdadero de la afirmación se realiza sobre la base de normas aceptadas por una comunidad dada en un momento dado. Cuando la comunidad involucrada es la matemática y las normas plantean la presentación de una sucesión de enunciados, cada uno de los cuales es una definición,

[4] http://lema.rae.es/drae/?val=prueba

un axioma, un teorema previo o un elemento derivado mediante reglas preestablecidas de los enunciados que le preceden, las pruebas reciben el nombre de *demostraciones* (Azcárate, 2001). Finalmente, Montoro (2007) menciona que la noción filosófica de demostración se relaciona con la derivación de un enunciado a partir de otros enunciados llamadas premisas, mediante la aplicación de determinadas leyes lógicas.

- ¿Qué es una demostración en matemáticas? ¿Qué es demostrar en matemáticas?

El matemático trabaja de una manera que es propia de su ciencia. Utilizando los recursos de la lógica y el razonamiento deductivo, debe llegar a concluir una verdad o proposición dada. Es importante destacar que, independientemente del campo de estudio de la persona o del interés que posea, una característica esencial de las matemáticas es su forma de analizar los resultados obtenidos, siendo de conocimiento universal su proceder. Sáenz (2001) entiende por demostración al procedimiento en que partiendo de unas ciertas hipótesis y mediante razonamientos lógicos se consigue la conclusión deseada. En matemáticas, una demostración es un argumento impecable, basado sólo en los métodos del razonamiento puramente lógico, que permite inferir la validez de una afirmación matemática dada a partir de la validez preestablecida de otras afirmaciones matemáticas, o de ciertas afirmaciones concretas primitivas – los *axiomas* – cuya validez se considera evidente. Una vez que tal afirmación matemática ha quedado establecida de esta forma, se conoce como un *teorema* (Penrose, 2007). Montoro (2007) menciona al respecto que la demostración matemática es un procedimiento ligado a establecer propiedades de los conceptos, equivalencia de definiciones o confirmación de conjeturas en el contexto de un sistema axiomático.

- Tipos de demostraciones.

Inicialmente, los primeros avances científicos y arquitectónicos del antiguo Egipto fueron descubrimientos basados en el ensayo y error. Con la aparición del pensamiento helénico, matemáticos como Pitágoras, Euclides, Arquímedes, entre otros, llevaron a la matemática al pedestal de ciencia deductiva. Primero, fue la geometría, luego, la aritmética, las primeras áreas de la matemática que fueron adquiriendo un papel importante en los inicios de la demostración. Cabe destacar el notable trabajo hecho por Euclides en su magna obra de trece tomos titulada *Elementos*, elaborando el principio de la lógica de la demostración. Su método de trabajo consistía en lo que se conoce como demostración directa, es decir, que a partir de unas hipótesis (lo que se supone cierto), se concluye una verdad (o falsedad) de un argumento. En símbolos, esto se escribe:

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge \ldots \wedge h_n) \Rightarrow \ q$$

siendo, h_1, h_2, h_3, ..., h_n las hipótesis, y q la conclusión o *tesis* (lo que se quiere demostrar). El método de demostración directo tiene como fundamento lógico la regla de inferencia clásica o esquema argumentativo válido llamado Modus Ponens:

$$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$$

que significa: si la hipótesis p es verdadera y la hipótesis p implica la conclusión q, entonces, la conclusión q es verdadera (Morales, 2008).

Las demostraciones de tipo indirecto son la demostración por contrapositiva o contrarrecíproca y la demostración por reducción al absurdo.

La demostración por contrapositiva tiene como fundamento la equivalencia lógica:

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \Longrightarrow \sim p)$$

Para realizar una demostración por contrapositiva se toma como hipótesis la negación de la conclusión, escrita como $\sim q$, para obtener como conclusión la negación de la hipótesis, escrita como $\sim p$ (Morales, 2008).

Un progreso notable del desarrollo lógico fue usado por Aristóteles, con su método de reducción al absurdo (*reductio ad absurdum*), que se cree que fue creado por Zenón de Elea. El fundamento lógico del método de reducción al absurdo es la equivalencia lógica llamada, precisamente, reducción al absurdo:

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) \Longrightarrow C]$$

en donde p es de la forma $h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge ... \wedge h_n \wedge \sim q$ y C denota una contradicción (Morales, 2008).

La demostración por inducción consiste en que, a partir de una proposición, se prueba para un valor inicial, luego, se supone un caso general válido, llamado hipótesis de inducción y, finalmente, se debe demostrar para el caso siguiente. Este método es bastante empleado para probar algunas propiedades de los números naturales y teoremas diversos. Esto se explica del siguiente modo:

Sea $A(n)$ una afirmación que contiene el entero n. Se puede concluir que $A(n)$ es verdadero para cada $n \geq n_1$ si es posible:

a) Probar que $A(n_1)$ es cierta.
b) Probar, que supuesta $A(n)$ verdadera, siendo k un entero fijado $\geq n_1$, que $A(k + 1)$ es verdadera (Apostol, 2006).

Usualmente, la demostración de propiedades utilizando inducción, comienza con $n_1 = 1$.

Dar una *prueba constructiva de existencia* del enunciado $\exists\, x : P(x)$ es establecer la afirmación exhibiendo un valor c tal que $P(c)$ es verdadera (Choque, 2007).

Una prueba no constructiva de existencia establece la afirmación $\exists\, x : P(x)$ sin indicar cómo encontrar el valor c tal que $P(c)$ es cierta (Choque, 2007).

La demostración asistida por computador se puede decir que ha sido una innovación dentro del campo de las pruebas de proposiciones matemáticas. Algunos teoremas se han *comprobado* a través de este método, sin embargo, algunos matemáticos se muestran reticentes a aceptar estas afirmaciones como demostraciones válidas. Un caso emblemático es el teorema de los cuatro colores, ampliamente tratado en teoría de grafos, que se enuncia como sigue: cuatro colores son suficientes para colorear un mapa. Entre 1970 y 1976 los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken de la Universidad de Illinois en Urbana – Champaign lograron, con la ayuda de un computador y distinguiendo miles de casos, dar la buena nueva: “Cuatro colores son suficientes (...)”. Si bien se han dado presentaciones más refinadas del resultado de

Appel y Haken, nadie hasta el momento ha logrado eludir la intrincada enumeración de casos, es decir, encontrar argumentos que sin ayudas computacionales resolvieran la cuestión. Esta inclusión de las ciencias de la computación en demostraciones matemáticas (más allá de los colores) ha abierto un nuevo paradigma en el mundo de las demostraciones matemáticas clásicas. En 1997 Robertson, Sanders, Seymour y Thomas lograron una actualización de esta demostración usando tanto viejas ideas como nuevos recursos computacionales. Sin embargo, una demostración "clásica" sigue aún pendiente (Alsina, 2011).

- La importancia de la demostración en la escuela y funciones de la demostración.

La demostración en matemáticas es uno de los aspectos más importantes que han permitido el desarrollo no sólo de la propia matemática, sino también, el avance tecnológico. Esto ha sido un camino largo, producto de aciertos y errores. El conocimiento matemático se sustenta en dos modos de comprensión y expresión: uno se realiza de forma directa, que corresponde a la intuición y el otro se lleva a cabo de forma reflexiva, es decir, lógica. Estos modos de pensamiento, aunque de naturaleza distinta, son complementarios e indispensables en la matemática. El primero es creativo y subjetivo, mientras que el segundo es analítico y objetivo (Crespo, 2005). Sin embargo, la demostración no ha contado con el respaldo y aprobación suficiente para insertarse en la educación, menos aún en el aula. Aún más, los profesores no dan crédito a que los alumnos más pequeños puedan demostrar o, al menos, comprenderlas. Contradiciendo la supuesta inmadurez de los estudiantes de 7° año para entender demostraciones matemáticas, los estudiantes chilenos exhiben su mejor rendimiento relativo a sus pares europeos (de 8° y 9° año) en la tarea de juzgar la validez de demostraciones que se le presentan (Varas *et al*, 2008, p. 23).
El matemático, que ha hecho su carrera y se ha formado en las facultades universitarias, es el que posee cierta autoridad para realizar demostraciones; empero, el docente que ha cursado asignaturas como cálculo, análisis o álgebra abstracta, entre otros, ha recibido una formación igual o de similar exigencia, se ve sometido a probar ciertas afirmaciones. ¿Qué es lo que ocurre en la transición del saber demostrar a ausentarse este conocimiento en las aulas escolares? Como se mencionó en la Justificación del problema, Crespo (2007, p. 27) esgrime las siguientes razones:

— Falta de interés de los alumnos.
— El trabajo con cursos numerosos.
— La falta de conocimientos previos de los alumnos.
— La excesiva extensión de los programas.

Si queremos que el profesorado de matemáticas asuma las funciones de la demostración para convertirlas en una actividad significativa, entonces, deberían haberse formado en situaciones similares durante su propio proceso de formación profesional docente (Bravo y Arrieta, 2005).

A nivel nacional, el currículum no implementa mayores objetivos que lograr los Contenidos Mínimos Obligatorios, sabiendo que la adquisición por parte de los alumnos de la capacidad de entender y producir demostraciones matemáticas es un objetivo muy importante a alcanzar en todos los currículos oficiales de matemáticas de cualquier sistema educativo en el nivel de la educación secundaria (Martín *et al*, 2000).

Se sabe, además, que el propósito de la matemática, el fin que posee, a juicio del investigador, es el desarrollo del pensamiento crítico y abstracto, implementarlo en la toma de decisiones a los que se ve enfrentada una persona a lo largo de su existencia, ya sea de índole económica, social, profesional, etc. Varas *et al* (2008, p. 5) dice al respecto sobre las ventajas del aprendizaje de las matematicas: emitir juicios fundados, para utilizar y relacionarse con la matemática de modo que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

El éxito de la educación escolar en matemáticas representa un claro beneficio para las posibilidades de desarrollo de los países, pero también tiene altas implicancias a nivel de personas, posibilitando el acceso a mayores niveles educacionales y oportunidades de trabajo.

De hecho, la matemática es mucho más que mero encadenamiento deductivo, formal, apareciendo como un proceso creativo, ligado a la formulación de conjeturas, a la presencia del ejemplo y el contraejemplo, a la falsabilidad, a los procesos de prueba y refutación (Lakatos, 1976, citado por Martínez, 2001).

¿Cómo lograr tan ambicioso objetivo? La enseñanza de la demostración colabora enormemente en ello: las demostraciones contribuyen de manera esencial al desarrollo de determinadas capacidades mentales de los alumnos, por ejemplo:

— La argumentación correcta.
— La fundamentación admisible y plausible.

- La inferencia lógica exacta.
- La valoración crítica de argumentaciones.
- La refutación de proposiciones falsas.
- La comprensión, la reproducción y el desarrollo independiente de demostraciones (Nápoles *et al*, 2001).

Dadas las impresionantes ventajas cognitivas que otorga el sólo hecho de aprender a demostrar, ¿por qué no incorporarlas? Para empezar, hay que educar al alumno en el gusto por la certeza y el alumno ha de ser conciente de la necesidad de demostración (Sáenz, 2001). Para lograr que los educandos comprendan la necesidad de argumentar matemáticamente e, incluso, de demostrar propiedades, resulta indispensable que construyan la significatividad de la argumentación. La importancia de favorecer escenarios donde se alcance este objetivo, deberá ser comprendida por los docentes a partir de asumir las demostraciones como prácticas sociales (Crespo *et al*, 2010). El objeto de enseñanza de la habilidad para argumentar no debe restringirse únicamente a los contenidos matemáticos sino que está marcado por una concepción epistemológica no sólo de la comunidad científica, sino también por una concepción cultural que valora la fundamentación racional (Crespo, 2005).

Ahora bien, ¿cómo generar las habilidades necesarias para demostrar en matemáticas? Para comenzar, la comprensión del lenguaje, y su correcta utilización constituyen uno de los requisitos más importantes para el aprendizaje de las matemáticas. Por eso no es de extrañar que la inclusión de determinadas "expresiones" – del lenguaje usual o del más específico de las matemáticas – en el enunciado de los teoremas influya en su comprensión por parte de los alumnos (Ibañes, 2001). Como se explicó en el apartado anterior, muchos autores realizan ciertas diferencias en torno a la palabra demostración, utilizando como sinónimos prueba, explicación, argumentación, lo cual constituye un obstáculo epistemológico para el análisis conceptual (...), pues esto conduce a fusionar distintos niveles de actividad de los alumnos impidiendo entender la conceptualización de sus ideas (Crespo y Ponteville, 2005). Más aún, muchos textos de origen anglosajón que han sido traducidos al español emplean la palabra prueba en vez de demostración, sin hacer algún comentario al respecto de cuál debe ser la más correcta.

Por otro lado, ¿cuáles son las habilidades que se necesitan para iniciarse en demostrar? Definamos, primeramente, qué se entiende por habilidad. En palabras de García *et al* (2010, p. 1) la habilidad es el modo de relacionarse el sujeto con la situación que le posibilita darle solución y el objetivo expresa los conocimientos, niveles de asimilación, profundidad y sistematicidad y las condiciones en que ese sujeto se apropiará de la habilidad, como su núcleo. A continuación, explica que la habilidad matemática es la construcción, por el alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite buscar o utilizar estrategias de trabajo, realizar razonamientos, juicios que son necesarios para resolver problemas matemáticos (García *et al*, 2010, p, 2). Además, esta autora y sus colaboradoras, distinguen tres tipos de habilidades matemáticas, atendiendo a los niveles de sistematicidad de la actividad matemática :

- Habilidad para resolver problemas matemáticos.
- Habilidades matemáticas básicas.
- Habilidades matemáticas elementales (García *et al*, 2010, p. 3).

Observando detenidamente, cada una de ellas, se puede establecer que el aprendizaje de la demostración matemática se encuentra en el primer nivel, dada la complejidad y abstracción que se requiere. Empero, lograr alcanzar esta meta es arduo; primero, por el lenguaje que se utiliza. De emplear palabras, ahora, se usan símbolos que expresan ideas, proposiciones o frases. Aquí se encuentra el problema inicial, ya que el lenguaje de los estudiantes no coincide con el que imparte la escuela. Sus formas de expresarse, de razonar, de percibir, de representar y de valorar entran en conflicto muchas veces con la cultura escolar (Crespo *et al*, 2010).

La demostración implica dos tipos de razonamientos: intuitivo y reflexivo. Es menester que el profesor pueda incluir ambos, dado que los educandos emplearán más el primero que el segundo. Se puede establecer que, la primera misión que tendrá el docente es que hay que aprender a probar pero también hay que aprender a intuir (Sáenz, 2001).

Generalmente, los profesores proveen a sus estudiantes una visión limitada de qué es demostrar, pues esa actividad en sus clases se reduce a realizar ejemplos de demostraciones que los estudiantes deben entender y replicar (Samper *et al*, 2010). Es imperativo cambiar esta concepción del "aprendizaje" de la demostración, pues el alumno reitera el procedimiento sin realizar una mayor reflexión y análisis del problema matemático ¿Cómo incentivar a demostrar? En la interacción entre los compañeros y el docente se producen ideas y opiniones muy interesantes que permiten elaborar una argumentación sólida. La clave está en hacer las demostraciones lo más claras posible, intentando que quede claro el por qué y el para qué de cada paso y en presentar la demostración como la respuesta a una necesidad de tal manera que la estructura de la matemática formal sea vista por el alumno como un objetivo significativo (Tall, 1991a, citado por Azcárate, 2001). Se debe convencer al estudiante que, en matemáticas, la demostración de un enunciado o propiedad es fundamental en la persecución de la verdad, sin embargo, el aprender a demostrar aparece, más bien, relacionado con resolver la tarea de demostrar que se le plantea y no como una necesidad de validar los conocimientos (Montoro, 2007).

Nos podemos plantear cuál es la función o fin de cada área de las matemáticas, como aprender aritmética ayuda a la realización de operaciones elementales como la suma, la sustracción, la multiplicación y la división, y emplearlas utilizando números naturales, enteros, fracciones y decimales; en el álgebra, el desarrollo del pensamiento abstracto y la generalización de los resultados obtenidos en la aritmética, el uso de variables y constantes para representar una función o comportamiento de un objeto; en geometría, el estudio de las formas bidimensionales y tridimensionales y sus propiedades; por último, en datos y azar, también conocido como probabilidades y estadística, en el entendimiento del azar y su valorización en los experimentos aleatorios, y la lectura de gráficos y lo que nos quiere decir, distinción entre éstos y la obtención de valores importantes que permiten interpretar una información. Así como se ha hecho, a *grosso modo*, con cada uno de los ejes establecidos en el currículum nacional, ¿cómo hacerlo con la demostración? De Villiers (1996) distingue seis funciones de la demostración:

- Verificación (referida a la **verdad** de un enunciado).
- Explicación (proporciona comprensión o discernimiento de **por qué** es verdadero).
- Descubrimiento (el descubrimiento o invención de resultados **nuevos**).
- Sistematización (la **organización** de varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos y teoremas principales).
- Reto intelectual (la **auto-realización/plenitud** derivada de la construcción de una demostración).
- Comunicación (la **negociación** del **significado** y la **transmisión** del conocimiento matemático).

Detallemos estas funciones.

El investigador postula que la función verificación tiene relación a la comprobación de la verdad o falsedad de un enunciado. Cuando leemos un teorema, sabemos de antemano, que hay una proposición que se sabe que es verdadera. Sin embargo, ¿qué sucede cuando, producto de nuestros análisis, encontramos un resultado que nos ayuda a arribar a nuestra conclusión, pero que no sabemos si es cierto? Nos vemos expuestos ante una situación que conlleva a la verificación de nuestra suposición. Las herramientas son variadas, dependiendo del área de estudio (geometría, álgebra lineal, cálculo), ya que puede ser un procesador geométrico como *Geogebra* o un *software* algebraico como *Maple* o *Derive*.

En el transcurso de la demostración escribimos una serie de silogismos, cada uno de ellos conduce a un argumento que consolida la afirmación propuesta. Lo que el matemático está realizando es una explicación del enunciado, o sea, está utilizando la segunda función establecida por de Villiers. Es así como, cuando concluye la veracidad o falsedad de la proposición, los recursos otorgados por la lógica matemática hacen las bases para sostener las argumentaciones, dando a conocer las razones que sustentan cada paso que siguió.

La creación de nuevas teorías matemáticas ha abierto un nuevo mundo para la ciencia en general. Se sabe que, desde el análisis de las ecuaciones diferenciales no lineales, Poincaré echó las bases de lo que son los sistemas dinámicos y la teoría del caos. Incluso algunos lo han llamado “el abuelo del caos”. Esto se debe a que, a finales del siglo XIX, cuando una de las publicaciones de Poincaré, que lo ubican ganador del concurso auspiciado por el rey Óscar II de Suecia y Noruega, reescribe nuevamente su artículo, dando a conocer un fallo en su escrito. Así, y a un nivel escolar, pero no más importante, es que el hallazgo de las nuevas ideas, como el desvelo de otras proposiciones, genera la tercera función: el descubrimiento.

Ahora bien, este paso debe ser guiado por el docente hacia sus alumnos. La estimulación temprana del desarrollo del pensamiento lógico puede generar nuevas formas de razonamiento en los estudiantes y ser una valiosa ayuda para el docente.

La sistematización, la cuarta función que menciona de Villiers, para el investigador, está fuertemente unida con la explicación, dado que, la concatenación de los argumentos expuestos en probar una proposición, o en la creación de una nueva teoría, no deben ser contradictorios entre sí. A modo de ejemplo, durante centurias, el sistema axiomático de la geometría de Euclides se mantuvo incólume y firme. No fue hasta que el matemático ruso Nicolái Lobachevski, el alemán Bernhard Riemann y el húngaro János Bolyai establecieron otro sistema geométrico, negando el quinto postulado, conocido también como postulado de las paralelas. Así, a pesar de no haberlo aceptado, el sistema geométrico que propusieron es tan sólido como el euclideano, sin encontrarse contradicciones en ello. Si bien se ha mencionado un ejemplo de la sistematización en la creación de un nuevo sistema axiomático, los estudiantes deben poseer una claridad de que no cualquier argumento es válido o sustenta la proposición siguiente. Para el investigador, esta es una de las funciones más difíciles de conseguir en los estudiantes, pues requiere de una serie de requisitos que son necesarios para alcanzar su estado óptimo, como por ejemplo, la utilización de axiomas y teoremas, claridad en los contenidos, como también, una familiarización de lo que es demostrar.

Puede ser, quizás, una de las funciones, junto con la anterior, más complejas de lograr: el reto intelectual que trae toda demostración. ¿Qué significa todo este análisis si no se logra crear en el estudiante la suficiente pasión y curiosidad que se obtiene en alcanzar un tipo de resultado semejante? No sólo está poniendo a prueba la fuerza de los argumentos que tiene para demostrar, sino también el ahínco que debe suministrar para arribar a la conclusión deseada. Es más, se requieren de ciertas dosis de imaginación y creatividad para llegar a ésta, además de recurrir a los conceptos y contenidos previos y enlazarlos de modo adecuado. Hay que agregar, a su vez, el hecho de contemplar el trabajo realizado por el estudiante en la consecusión de la tesis. El sentirse satisfecho por la labor de llegar a la verificación de un teorema, más aún si es de una dificultad muy alta, lleva al estudiante a un nuevo nivel de autoestima que, a juicio del investigador, coadyuva a que el educando se interese y estimule por la matemática.

Finalmente, de Villiers coloca en último lugar la comunicación como otra de las funciones de la demostración. Cada resultado obtenido se dirige a una comunidad, especializada o no. Ejemplo de ello es la transmisión de los resultados logrados en la geometría euclideana, contenidos que toda persona que haya cursado una escolaridad, parcial o completa, reconoce. A modo de ilustrar esto último, la fómula del Teorema de Pitágoras, que enuncia que en un triángulo rectángulo, el cuadrado construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos (Mercado, 1993) (en símbolos, si a y b son las medidas de los lados de los cuadrados construídos sobrelos catetos y c la medida del lado del cuadrado construído sobre la hipotenusa, esto se escribe: $a^2 + b^2 = c^2$), está dirigido a un público universal, dado que constituye la primera piedra fundamental en el estudio de la geometría. Más difícil aún es la propiedad de la unicidad del límite, que se enmarca en una sociedad de carácter más docta e interesada en este tipo de temas. En ambos casos, nos encontramos en una situación que requiere que expongamos nuestras conclusiones y resultados obtenidos, o sea, comuniquemos lo que deseamos que otros aprendan y aprecien. ¿Cómo lograr este fin? Si nos atenemos a la definición que otorga de Villiers a la función de comunicación, entonces, se debe interpretar los símbolos, las fórmulas, es decir, se debe lograr una negociación de qué se lee y cómo se lee.

Se dice que la finalidad de una demostración consiste en despejar dudas, aclarar aspectos que no son siempre claros al momento de establecer una verdad; dicho de otro modo, lograr el convencimiento de una persona hacia otra. La convicción en matemáticas se obtiene a menudo "por medios diferentes de los que resultan de una demostración lógica" (Davids & Hersch, 1986: 67, citado por de Villiers, 1993). Esto es de suma importancia, dado que el profesor debe tener presente que un pensamiento intuitivo puede coadyuvar a la elaboración de un argumento lógico que permita persuadir, de forma convincente, una afirmación. Así, se puede avizorar que ambos tipos de razonamientos son complementarios, siendo el primero una reflexión personal y plausible, y si es así, que tanto lo es, y el segundo, de tipo deductivo, que ayude a construir la respuesta matemática en el lenguaje simbólico idóneo.

A continuación, el investigador, por medio de una serie de reflexiones, y durante el transcurso de su experiencia, ilustra, por medio de tres ejemplos, cómo se hacen patentes las funciones de las que habla de Villiers. La primera será una demostración que se enmarca en el ámbito del álgebra abstracta, la segunda, en la geometría euclideana y, por último, la tercera, en el cálculo de límites por definición.

- Si G no tiene subgrupos distintos de los triviales, pruébese que debe tener orden primo (Herstein, 2008).

Demostración: sea G grupo. $|G| = n$. Por hipótesis, sabemos que G no posee subgrupos propios, por lo que sólo tiene subgrupos triviales, esto es, $H_1 = \{e\}$ y $H_2 = \{G\}$; luego:

$$|H_1| = 1 \wedge |H_2| = n$$

Por teorema de Lagrange, tenemos que:

$$|H_1| \mid |G| = 1 \mid n = n$$

A su vez:

$$|H_2| \mid |G| = n \mid n = 1$$

Ergo, los únicos divisores de n son 1 y n. Por lo tanto, n es primo, siendo n el orden del grupo G ■

Se aprecia en esta demostración que las funciones de sistematización, explicación y verificación están presentes. La primera se hace patente por la secuencia de los argumentos presentados para llegar a la conclusión. A su vez, esto se logra visualizar en mayor grado en la frase “ahora, por teorema de Lagrange”, dando pie a la argumentación que sustenta el por qué el orden de un subgrupo divide al orden del grupo.

Por otra parte, la función explicación está muy presente, dado que se necesita argüir cada paso con el que avanzamos, o sea, necesitamos comprender el por qué el paso siguiente es verdadero.

Por su lado, la verificación no sólo está implícita en la demostración, sino también en el enunciado del teorema. Cuando el autor formula el teorema, asegura que es válido. Basta con releer el enunciado y enforcar la atención en una palabra: “pruébese”. Por lo tanto, nuestro trabajo se centra en llegar a lo que el matemático nos establece es verdadero.

Sin embargo, las funciones de descubrimiento, reto intelectual y comunicación no son tan evidentes como las anteriores o están en menor grado que la otras tres.

El estudiante no está creando una propiedad o inventando una nueva proposición que le permita llegar a demostrar esta afirmación, por lo que esta función está ausente.

La comunicación se puede trasladar al docente, en donde él transmitirá el resultado a sus alumnos; a esto se suma el hecho de que, como menciona de Villiers, se debe realizar una negociación del significado, es decir, interpretar los símbolos y operaciones que están presentes en la demostración.

Por último, a juicio del investigador, la función reto intelectual, es la más difícil de conseguir, ya que aquí juegan una serie de variables que son el interés del estudiantes por el álgebra abstracta, el ahínco puesto en comprobar que lo que dice el autor es cierto, entre otras.

- Demostrar que la suma de las perpendiculares trazadas a los lados desde un punto interior de un triángulo equilátero, es igual a la altura del triángulo (Masjuán y Arenas, 2000).

Hipótesis:

Sea P punto interior al ΔABC equilátero.

$\overline{PD}, \overline{PE}, \overline{PF}$: segmentos perpendiculares a los lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente.

$\overline{BL}$: altura.

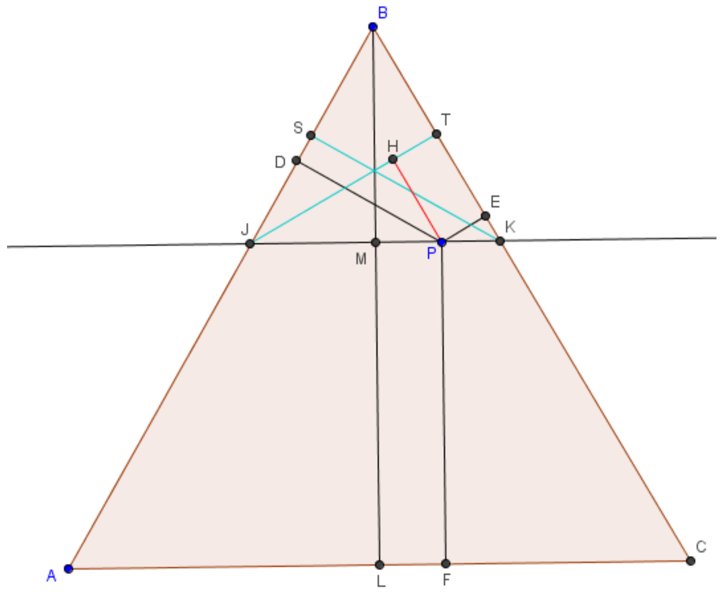

Figura 1: altura y perpendiculares en el triángulo equilátero.

Demostración:

Por P trazamos una recta l tal que: $l \parallel \overline{AC}$.

$l \cap \overline{AB} = \{J\}$; $l \cap \overline{BC} = \{K\}$; $l \cap \overline{BL} = \{M\}$.

$ML = PF$

Se genera el ΔJBK, equilátero.

Ahora bien:

Sean $\overline{JT}$ y $\overline{KS}$ las alturas del ΔJBK.

Se traza el segmento $\overline{PH} \perp \overline{JT}$.

Luego:

$$\left\{\begin{matrix} \measuredangle HJP \cong \measuredangle JPD \\ \overline{JP} \cong \overline{JP} \\ \measuredangle DJP \cong \measuredangle HPJ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \Delta JHP \cong \Delta PDJ \text{ (criterio A.L.A)}$$

O sea: $\overline{PD} \cong \overline{JH}$ y $\overline{HT} \cong \overline{PE}$

Entonces:

$JT = JH + HT = PD + PE$

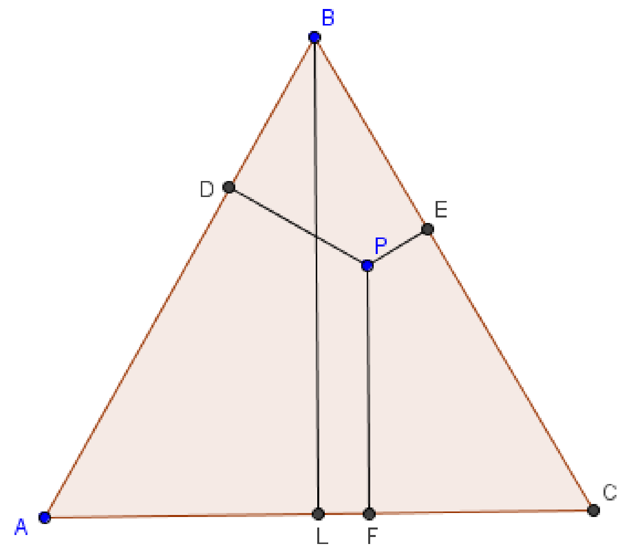

Figura 2: resolución del problema considerando construcciones auxiliares.

Pero como el ΔJBK es equilátero, entonces: $JT = BM = PD + PE$.

Ergo: $BL = BM + ML$

Dicho de otro modo: $BL = PD + PE + PF$. ■

A criterio del investigador, la función reto intelectual es la que más se hace patente en esta demostración, ya que no sólo se debe llegar a comprobar que esto es cierto (función verificación), sino que, además, se suma un componente esencial a esto: el docente tiene que realizar, forzosamente, un dibujo que aclare y guíe tanto a él como al estudiante o, más aún, a un público universal.

Como se mencionó, la función verificación vuelve a estar presente; esto, porque el enunciado del ejercicio nos dice "Demuestre que (...)", dando por sentado que la proposición ya es, *per se*, verdadera.

También se tiene que la función sistematización se encuentra aquí. La organización de varios resultados (criterio A.L.A, la generación del ΔJBK, que es equilátero, a través de una recta auxiliar, entre otros), cada uno sustentado en la aplicación de un axioma, definición, postulado o algún teorema, hace ver que la concatenación de las bases sustenta a las argumentaciones subsiguientes.

Enlazada con la anterior, la función explicación vuelve a presentarse. Cuando se establece que $\Delta JHP \cong \Delta PDJ$ es válido, por criterio A.L.A, presentamos una base que sustenta esta conclusión. Dicho de otro modo, establecemos el por qué lo primero es verdadero.

No puede decirse que la función descubrimiento este aquí. Como bien dice la palabra, se crean nuevos resultados o se descubren nuevas propiedades. Si bien, puede ser que esta proposición es “nueva” para un estudiante que esté versado en geometría, no es conocida, quizás, por la complejidad y el cuantioso análisis a realizar. Basta con pensar en la recta auxiliar l que se trazó por el punto P, para desencadenar una serie de razonamientos que desembocan a la verificación del enunciado.

Así como la anterior, la función comunicación vuelve a estar ausente. La simbología da a reflexionar sobre si el lenguaje utilizado es universal. ¿Toda persona que vea esta demostración comprenderá cada signo que está allí? Nuevamente, el profesor deberá hacer incapié en el hecho de ir mencionando qué paso siguió, sino también, con que ícono expresar una idea. Si centramos en el siguiente signo $\cong$, como Δ, y yendo al extremo del formalismo matemático, la diferencia entre $\overline{PD}$ y PD, es porque estamos suponiendo, *a priori*, que el educando ya está familiarizado con éstos, sólo que acá el docente debe expresarlos de manera verbal.

- Demostrar el siguiente límite por definición:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} = \frac{2}{3}$$

Demostración:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ni n > n_0 \Longrightarrow \left|\frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ni n > n_0 \Longrightarrow \left|\frac{3(1+2\cdot 10^n) - 2(5+3\cdot 10^n)}{3(5+3\cdot 10^n)}\right| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ni n > n_0 \Longrightarrow \frac{7}{3(5+3\cdot 10^n)} < \varepsilon$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\Longrightarrow \frac{7}{3(5+3\cdot 10^n)} < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow 7 < 3\varepsilon\,(5+3\cdot 10^n)$$

$$\Longleftrightarrow 7 < 15 + 9\varepsilon\cdot 10^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{7-15\varepsilon}{9\varepsilon} < 10^n \ / \log$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{7-15\varepsilon}{9\varepsilon}\right) < n$$

Por consecuencia de la propiedad arquimediana, existe n_0 tal que:

$$n_0 > \log\left(\frac{7-15\varepsilon}{9\varepsilon}\right) \Rightarrow n > \log\left(\frac{7-15\varepsilon}{9\varepsilon}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3(5+3\cdot 10^n)} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

Q.E.D.

Se puede decir que esta demostración posee las funciones de verificación, de sistematización y de explicación. La primera, porque corroboramos la existencia de la validez del enunciado. En cuanto a la segunda, la presentación de las conclusiones obtenidas en cada paso, de manera secuencial, y la rigidez propia de las demostraciones en cálculo, más aún en límites, asegura la sistematización. La explicación se da en la frase "Por consecuencia de la propiedad arquimediana, existe un n_0 tal que (...)"; anteriormente, se ha establecido una serie de procedimientos, cada uno sustentado en los axiomas de la construcción de los números reales, a esto hay que agregarle la propiedad arquimediana – suponiendo *a priori* que el profesor ya ha ilustrado a sus educandos con esta propiedad – y, gracias a esto, se establece la verdad de cada argumento.

Ahora bien, esta demostración adolece de las restantes funciones. Así, por ejemplo, no se puede decir que el estudiante haya descubierto un resultado nuevo (función descubrimiento); digamos que está conociendo este límite, pero nada ha creado a partir del desarrollo de este ejercicio.

El profesor debe emplear la función comunicación dada la cantidad de símbolos empleados en la demostración. A modo de ejemplo, cuando nos estamos refiriendo a ε, ¿de qué se está hablando?; ¿qué significa ∀ y ∃? En general, ¿qué significa la definición de límite? Es claro ver que, en una secuencia de íconos, el maestro se ve en la obligación de explicar cada uno de ellos, siendo utilizados en forma reiterada. Nuevamente, el establecimiento de un "acuerdo" (negociación, según de Villiers), es lo que el docente ha de realizar en el aula, para así mostrarle el conocimiento matemático que subyace a la proposición presentada.

La función reto intelectual, nuevamente, según el criterio del investigador, podría considerarse la más difícil de lograr. Recordemos que hay diversos factores que afectan a que un alumno se interese por realizar esta demostración, siendo, quizás, la más determinante, el gusto por esta asignatura. No se quiere decir con esto que el área del cálculo carezca de asombro, sino más bien, y a juicio del autor de esta tesis, es cómo el profesor aborde los contenidos propios del cálculo diferencial, como también los tópicos del álgebra moderna (o abstracta), la geometría euclideana y analítica, etc., agregando a ellos, una cuota de pasión por la entrega de los saberes que tiene el maestro en su poder.

- La transposición didáctica

Todo conocimiento se ve sometido a los cambios establecidos por nuevos descubrimientos o paradigmas que modifican la manera de pensar, de crear, reestructuran una sociedad desde sus raíces e, incluso, pueden alterar una visión global que se tenía hasta ese entonces. Un ejemplo de ello es la teoría geocéntrica que se permutó por la teoría heliocéntrica. Más aún, el cisma que ocurrió en la Iglesia Católica (la creación de la Iglesia Luterana) desencadenó una nueva corriente de aceptación de la fe; la teoría de la relatividad de Einstein y el principio de incertidumbre de Heinsenberg hicieron girar la concepción científica radicalmente... y así se pueden ir sumando otros ejemplos más actuales y representativos que ilustran estas corrientes de reflexión.
Todos estos cambios sociales, científicos, tecnológicos, religiosos, entre otros, alteran permanentemente a la educación y, por sobre todo, a la enseñanza. Es así como los teóricos de la educación, en particular, de la matemática, se vieron obligados a crear una forma de traspasar el conocimiento en algo más ameno y cercano. Aquí es cuando nació lo que se denomina trasposición didáctica. La gran mayoría de los investigadores en didáctica están de acuerdo en atribuir la paternidad del concepto de transposición didáctica a Michel Verret (1975). Él define la didáctica como la transmisión de aquellos que saben a aquellos que no saben. De aquellos que han aprendido a aquellos que aprenden (Verret, 1975, p. 139, citado por Gómez, 2005, p. 84). Se puede extender esta noción al concepto que define Yves Chevallard: un

contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El “trabajo” que un objeto de saber enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica (Chevallard, 1985, p. 39; citado por Gómez, 2005, p. 87).

Chevallard continúa en esta línea, haciendo la siguiente distinción: la transformación de un contenido de saber preciso en una versión didáctica de ese objeto de saber puede denominarse más apropiadamente “transposición didáctica *stricto sensu*”. Pero el estudio científico de transposición didáctica (que es una dimensión fundamental de la didáctica de las matemáticas) supone tener en cuenta la transposición didáctica *sensu lato*, representada por el esquema

Objeto de saber

↓

Objeto a enseñar

↓

Objeto de enseñanza

en el que el primer eslabón marca el paso de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo preconstruído a lo construído (Chevallard, 1991, p. 39, citado por Hurrell, s/f, p. 60).

Sin embargo, se debe señalar que no todo saber es enseñable, ya sea por la dificultad del conocimiento, como también por lo que la sociedad define y necesita.

Aún más, la transposición didáctica ha sufrido innumerables críticas y detractores. Si bien ésta se ha aplicado a otros ramos, generalmente, a las áreas científicas, la filosofía, por su parte, la excluye de manera tajante en su metodología de enseñanza. Esto, porque el estudiante se sumerge en el pensamiento filosófico desde un inicio, por lo que no hay un traspaso de ese conocimiento a través de un mediador, en este caso, el docente.

Se ha incorporado este inciso dado que las funciones de de Villiers, explicadas anteriormente, se ven sometidas a los cambios que sufre la transposición didáctica. Esto se debe a que el profesor ya sabe qué y cómo demostrar. El reto es cómo incentivar al estudiantado a demostrar en matemáticas, qué y cómo incluir este recurso en clases en el plan electivo y, por qué no, en el plan común. Puede que este último objetivo sea el más difícil de lograr; la diversidad de intereses de los propios estudiantes, la complejidad de los contenidos, el nivel de conocimientos previos de los alumnos hace plantearse a los docentes la posibilidad de incorporar la demostración en el aula. Las dificultades que se ponene de manifiesto al realizar demostraciones matemáticas en el aula se deben, en muchas ocasiones, a que no se detecta la existencia y características de otros tipos de argumentaciones en los estudiantes, ya que se asume como natural al razonamiento aristotélico (Crespo *et al*, 2009, p. 64). Continúan esta autora y sus colaboradores mencionando que la lógica no es innata; se trata de una cosntrucción sociocultural que a veces los alumnos la sienten con un carácter artificial (Crespo *et al*, 2009, p. 56). Se genera, entonces, una interrogante de la que cómo un profesor puede acercar el conocimiento científico a la sala de clases. Al respecto Izquierdo y Aliberas (2004), citado por Chamizo (2007), alude a una tabla que se establece una conexión muy interesante para reflexionar en cuanto a la práctica de las demostraciones.

Aspectos fundamentales a considerar en una enseñanza de la ciencia racional (en la que se aprenda a pensar mediante modelos científicos) y razonable (a partir de preguntas que tengan sentido para los estudiantes).

- **Concepciones actuales de la ciencia.** Donde se destaca el cambio de la tradicional idea de la ciencia como conocimiento, al de ciencia como actividad humana trasformadora de la realidad.
- **La ciencia escolar.** La que corresponde a los conocimientos construídos y elaborados en el entorno escolar. No es la ciencia tal cual de los científicos, sino una reconstrucción de ésta, al mismo tiempo que tampoco es un reflejo de los saberes cotidianos de los alumnos. Aquí la idea principal es la de transposición didáctica.
- **Resolución de problemas tanto teóricos como prácticos.** De manera que los alumnos aborden su resolución de manera razonable de acuerdo con las condiciones particulares en las que se encuentran (edad, infraestructura material, tiempo, etc.) reuniendo para ello la teoría con la práctica y expresando sus soluciones con el mejor uso posible del lenguaje.

Se ha presentado de esta manera para facilitar su lectura y no entorpecerla.

Los maestros pueden aunar los argumentos que elaboren los estudiantes junto con una respuesta de tipo matemático, o sea, empleando el lenguaje propio de esta ciencia.

Como dice Chamizo (2007, p. 136) hay que enseñar a los alumnos a argumentar de manera competente, para ello hay que proporcionarles las herramientas y la práctica necesaria para que puedan hacerlo. Por ello hay que argumentar en las aulas.

Una alternativa que se plantea en este estudio es que los estudiantes más avezados en las demostraciones en matemáticas se unan con los alumnos que son neófitos en estos tópicos. Así tendrá una alianza productiva y muy constructiva para desarrollar no sólo en las llamadas "áreas duras", sino también, las competencias sociales que el mundo demanda, como la colaboración, la perseverancia y el trabajo en equipo.

CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO

MARCO METODOLÓGICO

A continuación, se presentarán algunos aspectos importantes de la metodología elegida para realizar la investigación. Se darán a conocer los tipos de investigación existentes, la metodología seleccionada y métodos de investigación.

Se iniciará esta sección indicando, primeramente, qué es investigar, para luego dar paso a lo que es una investigación y qué se entiende por investigación educativa.

- ¿Qué es investigar?

Cada artículo científico, cada nueva noticia en el ámbito de la medicina, la química, la física teórica, los aportes y descubrimientos de estudios sociológicos, antropológicos e incluso, religiosos, son un avance de una perseverancia y esfuerzo ingente, de especialistas que han deseado entender un fenómeno, dar respuestas a sucesos mundiales que han originado movimientos a nivel local y global, paradigmas novedosos y vanguardistas. Sin embargo, nada se hubiese logrado si es que no existiera la curiosidad y la pasión de generar interrogantes que inicien una búsqueda de "por qué" y "cómo". En otras palabras, nos estamos refiriendo a la investigación. Pero, ¿qué es investigar? Según la RAE, define esta palabra como:

1. Hacer diligencias para descubrir algo.
2. Realizar actividades intelectuales y experimentales de modo sistemático con el propósito de aumentar los conocimientos sobre una determinada materia.
3. Aclarar la conducta de ciertas personas sospechosas de actuar ilegalmente.

Se investigó a dos comisarios de Policía.[5]

Para el propósito de esta tesis, se tendrá presente la segunda acepción, dado que el investigador dará un aporte, desde su punto de vista, a la comprensión de la problemática expuesta anteriormente.

Antes de continuar, daremos paso a un segundo punto que no es menor mencionar, que es la investigación educativa.

[5] http://lema.rae.es/drae/?val=investigar

- ¿Qué es la investigación educativa?

La investigación es entendida como producción de conocimiento, como una forma de pensar el contexto y como la manera de generar alternativas que afecten la realidad[6]. Según esto, la generación de nuevas ideas que aporten de manera significativa para la creación y visión de nuevas tendencias es un aspecto de suma importancia, dado que permite obtener resultados valiosos que no se habían conseguido antes, o que no han encontrado respuesta aún.

Esto se ha relacionado, preferentemente, con la producción de conocimiento científico, dado que las viejas ideas se renuevan permanentemente, la óptica de visualizar un fenómeno de la naturaleza cambia, se inventan aparatos que coadyuvan a nacer una perspectiva diferente de lo pensado hasta ese momento.

Por su parte, las ciencias sociales no se quedan atrás. La filosofía, las leyes, la psicología, la antropología, entre otras más, han hecho contribuciones notables a entender no sólo el comportamiento del ser humano desde que tiene conciencia de sí mismo, sino a comprender los sucesos mundiales que afectan al mundo: guerras, acuerdos, convenciones nacionales e internacionales, el por qué de la aceptación de una sociedad plurirreligiosa y pluriaxiológica, entre otras interrogantes. La investigación educativa ha estado influenciada de estos sucesos, cambiando de manera constante. Un claro ejemplo de esto se logra apreciar en los planes y programas curriculares que otorga el Ministerio de Educación (MINEDUC), en la que cada gobierno modifica, según sus propios criterios y evaluaciones, lo que considera mejor para la enseñanza de los estudiantes chilenos.

Podemos decir que la investigación educativa es una explicación sistemática y racional de los problemas de la realidad educativa, a través de la búsqueda de nuevos conocimientos, del análisis de las funciones, los métodos y los procesos educativos[7], que trata las cuestiones y problemas relativos a la naturaleza, epistemología, metodología, fines y objetivos en el marco de la búsqueda progresiva de conocimiento en el ámbito educativo. Aún más, la investigación pedagógica hace énfasis en los análisis de los procesos comprometidos en la enseñanza y el aprendizaje y en la relación de los sujetos con los saberes. No se restringe al quehacer

[6] http://www.medellin.edu.co/sites/Educativo/Docentes/maestrosinvestigadores/Lists/Entradas%20de%20blog/Post.aspx?ID=31

[7] http://www.fhumyar.unr.edu.ar/escuelas/3/materiales%20de%20catedras/trabajo%20de%20campo/adscripcion.htm

del maestro, considera la elaboración conceptual y epistemológica para consolidar el saber pedagógico, consustancial al docente intelectual e investigador[8].

Para efectos de esta tesis, la investigación educativa tiene como propósito ayudar al profesor en la toma de decisiones en la clasificación de demostraciones que debe realizar y de qué tipo son al momento de enseñar en el plan diferenciado de III y IV medio en matemáticas.

- Tipos de investigaciones

Toda investigación que se haga se debe elegir uno de los enfoques que existen; a saber: investigación cuantitativa o investigación cualitativa.

Generalmente, las ciencias básicas utilizan recursos estadísticos para generalizar sus resultados a través de representaciones numéricas; probar ciertos materiales que vayan rompiéndose por medio de un uso continuado, nos da una certeza de que esto sucede en la mayoría de la veces. Una nueva teoría científica debe basarse en hechos que conlleven a una conclusión, pero su argumentación se sustenta en base a los experimentos llevados a cabo en los laboratorios. La pregunta es: ¿cuántas veces deben realizarse los estudios en laboratorio para generalizar los resultados? ¿Qué herramienta, matemática o tecnológica, nos permitirá enunciar el producto de nuestra investigación? Estas interrogantes están condicionadas al tipo de investigación cuantitativa.

El objetivo de la investigación cuantitativa es el de adquirir conocimientos fundamentales y la elección del modelo más adecuado que nos permita conocer la realidad de una manera más imparcial, ya que se recogen y analizan datos a través de los conceptos y variables[9]. Para Sampieri *et al* (2006, p. 5) el enfoque cuantitativo usa la recolección de datos para probar hipótesis, con base en la medición numérica y el análisis estadístico, para establecer patrones de comportamiento y probar teorías. A su vez, este tipo de estudios proponen relaciones entre variables con la finalidad de arribar a proposiciones precisas y hacer recomendaciones específicas (Sampieri *et al*, 2006, p. 18).

[8] http://www.medellin.edu.co/sites/Educativo/Docentes/maestrosinvestigadores/Lists/Entradas%20de%20blog/Post.aspx?ID=31

[9] http://juanherrera.files.wordpress.com/2008/11/investigacion-cuantitativa.pdf

Como se puede apreciar en esta última definición, lo que caracteriza una investigación cuantitativa es el empleo de herramientas estadísticas y métodos numéricos que permitan extraer conclusiones generales.

Por otra parte, el estudio del comportamiento de una sociedad frente a una determinada pregunta valórica o una puesta en práctica de una teoría psicológica no se condice con resultados matemáticos. Es, más bien, un tipo de investigación que intenta ahondar en otros aspectos que van más allá de la simple inspección estadística producida por la selección de muestras. No todos los productos han surgido del análisis de muestreos, sino que se han obtenidos de observaciones de cúmulos de personas u objetos, concluyendo aspectos de manera más profunda. En este caso, nos estamos refiriendo a una investigación cualitativa.

Una investigación cualitativa es una investigación que se basa en el análisis subjetivo e individual, esto la hace una investigación interpretativa, referida a lo particular[10]. Se puede decir también que la investigación cualitativa es aquella donde se estudia la calidad de las actividades, relaciones, asuntos, medios, materiales o instrumentos en una determinada situación o problema. La misma procura por lograr una descripción holística, esto es, que intenta analizar exhaustivamente, con sumo detalle, un asunto o actividad en particular[11].

Sampieri *et al* (2006, p. 524) enuncian que el planteamiento cualitativo suele incluir los objetivos, las preguntas de investigación, la justificación y la viabilidad, además de una exploración de las deficiencias en el conocimiento del problema y la definición inicial del ambiente o contexto.

Aún más, se puede ampliar el espectro de la elección de la investigación, dentro de las cuales podemos mencionar:

- Exploratorio: también conocido como estudio piloto, son aquellos que se investigan por primera vez o son estudios muy pocos investigados. También se emplean para identificar una problemática[12].
- Descriptivo: describen los hechos como son observados[13]. Los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis[14].

[10] http://metodologia02.blogspot.com/p/operacionalizacion-de-variables.html
[11] http://www.ponce.inter.edu/cai/Comite-investigacion/investigacion-cualitativa.html
[12] http://metodologia02.blogspot.com/p/operacionalizacion-de-variables.html
[13] Ídem.
[14] http://www.tecnicas-de-estudio.org/investigacion/investigacion22.htm

- Correlacional: este tipo de estudios tienen como propósito medir el grado de relación que exista entre dos o más conceptos o variables, en un contexto en particular[15].
- Explicativo: intenta responder el por qué de un fenómeno de estudio, enfocándose en el establecimiento de un "causa – efecto". están dirigidos a responder a las causas de los eventos físicos o sociales. Como su nombre lo indica, su interés se centra en explicar por qué ocurre un fenómeno y en qué condiciones se da éste, o por qué dos o más variables están relacionadas[16].

- Investigación documental/bibliográfica.

En este apartado se explicará en qué consiste una investigación documental/bibliográfica. La investigación bibliográfica y documental se define como un proceso sistemático y secuencial de recolección, selección, clasificación, evaluación y análisis de contenido del material empírico impreso y gráfico, físico y/o virtual que servirá de fuente teórica, conceptual y/o metodológica para una investigación científica determinada[17]. La investigación documental o bibliográfica es una secuencia lógica de actividades conducentes a la obtención de información necesaria para generar más conocimiento a partir del uso apropiado y creativo de dicha información (PPT Biblioteca Central, U. de Chile, 2003)[18]. La investigación bibliográfica es aquella etapa de la investigación científica donde se explora qué se ha escrito en la comunidad científica sobre un determinado tema o problema[19]. Una investigación documental se caracteriza por la utilización de documentos, recolecta, selecciona, analiza y presenta resultados coherentes; (...) porque supone una recopilación adecuada de datos que permiten redescubrir hechos, sugerir problemas, orientar hacia otras fuentes de investigación, orientar formas para elaborar instrumentos de investigación y elaborar hipótesis[20]. Su propósito es obtener antecedentes para profundizar en las teorías y aportaciones ya existentes sobre el tema, o refutarlas y en su caso derivar conocimientos nuevos[21].

[15] http://www.ecured.cu/index.php/Investigaci%C3%B3n_Correlacional
[16] http://www.eumed.net/libros-gratis/2012a/1158/diseno_de_la_investigacion.html
[17] http://guiadetesis.wordpress.com/2013/08/19/acerca-de-la-investigacion-bibliografica-y-documental/
[18] iustitia.lex.uchile.cl/biblioteca/archivos/taller/invdoc.pps
[19] http://www.hospitalolavarria.com.ar/Investigaci%C3%B3n%20bibliogr%C3%A1fica.htm
[20] http://guiadetesis.wordpress.com/2013/08/19/acerca-de-la-investigacion-bibliografica-y-documental/
[21] http://profesores.fi-b.unam.mx/jlfl/Seminario_IEE/Seminario_IEE_Tema_2.pdf

El estudio que se realizó responde, en el marco de una investigación cualitativa, al método de investigación documental bibliográfica; se analizaron los planes y programas de estudio otorgados por el Ministerio de Educación, junto con un acopio de información de experimentados investigadores educacionales de nivel internacional, que han avanzado y aportado en esta materia. Además, se ha buscado bibliografía pertinente en cuanto a la demostración matemática se refiere, junto con una visión de cómo se trabaja en las matemáticas doctas. Posteriormente, se presenta una sección de cómo y por qué podría enseñarse la demostración matemática en el aula. Esto con el fin de generar una reflexión en los docentes en formación y futuros profesionales de la educación.

CAPÍTULO IV: DESARROLLO DEL ESTUDIO

DESARROLLO DEL ESTUDIO

A lo largo de esta investigación, se pudo constatar la existencia de una escasez de demostraciones en los planes y programas de III y IV medio del plan electivo de matemáticas. Si bien hay ejercicios propuestos de buen nivel de exigencia, es insuficiente para alcanzar los propósitos deseados por el investigador. No obstante, constituyen un acercamiento adecuado para incentivar a los estudiantes a la reflexión que conlleva la demostración en matemáticas. Es menester, entonces, que el profesor realice una búsqueda más exhaustiva de ejercicios y problemas que puedan estimular la búsqueda de las respuestas de las proposiciones de éstos. La innumerable cantidad de material que ofrece internet, junto con la bibliografía que entregan algunas universidades estatales a través de sus editoriales, constituyen un recurso de valiosa ayuda al docente.

Como menciona el título de esta tesis, se realizará una sugerencia de las demostraciones expuestas en estos documentos ministeriales. Queda a juicio de cada profesor el hecho de agregar, modificar o eliminar algunas de ellas, ya sea por su dificultad, importancia, entre otros motivos, que le permiten construir un material de apoyo a su labor profesional.

A continuación, se expondrán los ejercicios propuestos por estos programas con sus demostraciones respectivas. Luego, se dará a conocer cuál es la clasificación para cada una de ellas, según el criterio del investigador, para realizar un análisis profundo de cada una ellas de acuerdo a las funciones establecidas, en un principio, por de Villiers.

Plan Diferenciado III Medio de Matemáticas.

- Profundización del lenguaje algebraico, página 15

Demostrar algunas reglas de divisibilidad: por 3, por 4, por 5.

Divisibilidad por 3:

Si a, b, c son las cifras de un número que satisfacen la condición $a + b + c = 3k$, k entero, entonces, $100a + 10b + c$ es divisible por 3.

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 99a + a + 9b + b + c \\ &= 99a + 9b + a + b + c \\ &= 99a + 9b + 3k \end{aligned}$$

$= 3(33a + 3b + k).$

Divisibilidad por 4:

Si a, b, c son las cifras ordenadas de un número que satisfacen la condición $(10b + c) = 4n$, n entero, entonces, $100a + 10b + c$ es divisible por 4.

$100a + 10b + c = 4 \cdot 25a + 4n$

$= 4(25a + n)$

Ambas demostraciones se pueden generalizar para cualquier número con más de tres cifras (Mineduc, 2002).

A juicio del investigador, estas demostraciones poseen las siguientes funciones:

- Explicación: cuando se inicia la demostración, se menciona lo siguiente: si a, b, c son las cifras de un número que satisfacen la condición $a + b + c = 3k$, k entero (Mineduc, 2002, p. 15), con esto comienza una serie de preguntas y respuestas dadas en forma algebraica.
- Comunicación: así como la función anterior, el profesor debe comunicar qué significa cada paso desarrollado. Aún más, tanto el estudiante como el maestro deben negociar (como menciona de Villiers al referirse a esta función), cada una de las expresiones algebraicas explicitadas en la demostración.
- Reto intelectual: se puede catalogar estas demostraciones de reto intelectual por la creatividad empleada. Si bien las propiedades son ampliamente conocidas por los estudiantes en la enseñanza básica, sólo son reglas nemotécnicas, sin ahondar en por qué se cumplen.

  La demostración propuesta por el plan y programa de III Medio es idónea al nivel que se les presenta a los alumnos, ya que posee un nivel de abstracción y manejo algebraico básico. Más aun, el educando debe ser conciente de que al momento de factorizar la expresión, quedará:

  $$3(33a + 3b + k)$$

  siendo el 3 el que permite decir que el número obtenido es múltiplo de 3.

  En el anexo adjunto, se presenta una demostración utilizando congruencias.

- Lugares geométricos, página 53

Suponga que una circunferencia con centro en el eje Y intersecta a una parábola $y = x^2$ en cuatro puntos de coordenadas (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); (x_4, y_4). Demostrar que: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Demostración: Sea $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ la ecuación de la circunferencia con centro en el eje Y, con $b > 0$. La ecuación de la parábola, por hipótesis, es: $y = x^2$.

Reemplazando esta expresión en la ecuación de la circunferencia, obtenemos:

$$x^2 + (x^2 - b)^2 = r^2$$

$$x^2 + x^4 - 2bx^2 + b^2 = r^2$$

$$x^4 + (1 - 2k)x^2 + (b^2 - r^2) = 0$$

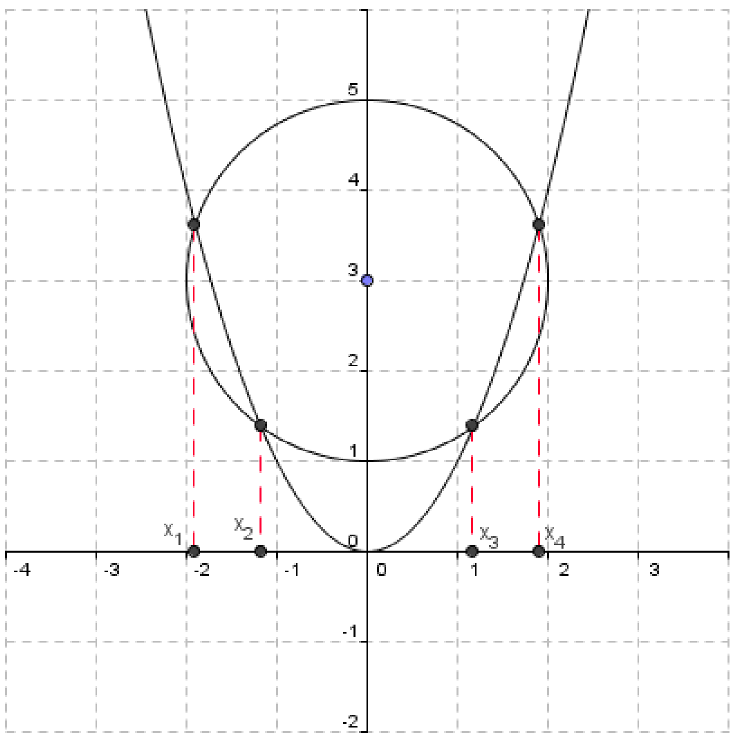

Figura 3:parábola con vértice en el origen y circunferencia intersectada en cuatro puntos

Ahora bien, sea $u = x^2$, reemplzando este valor en la última expresión, se tiene:

$$u^2 + (1 - 2b)u + (b^2 - r^2) = 0$$

Empleando la fórmula de Bháskara para la obtención de las raíces de una ecuación de segundo grado, se tiene que:

$$u=\frac{-(1-2b)\pm\sqrt{(1-2b)^2-4(b^2-r^2)}}{2}$$

$$u=\frac{-(1-2b)\pm\sqrt{1-4b+4\cancel{b^2}-4\cancel{b^2}+4r^2}}{2}$$

$$u=\frac{2b-1\pm\sqrt{4r^2-4b+1}}{2}$$

Obtenemos dos raíces que son:

$$u_1=\frac{(2b-1)+\sqrt{4r^2-4b+1}}{2}\wedge u_2=\frac{(2b-1)-\sqrt{4r^2-4b+1}}{2}$$

De cada una de ellas se tienen dos soluciones que son, respectivamente:

$$x_1=\sqrt{\frac{(2b-1)+\sqrt{4r^2-4b+1}}{2}}\qquad x_2=-\sqrt{\frac{(2b-1)+\sqrt{4r^2-4b+1}}{2}},$$

$$x_3=\sqrt{\frac{(2b-1)-\sqrt{4r^2-4b+1}}{2}}\qquad x_4=-\sqrt{\frac{(2b-1)-\sqrt{4r^2-4b+1}}{2}}$$

Al realizar la suma de las raíces obtenidas, da como resultado 0, quedando demostrado el ejercicio. ■

Por otra parte, se prestará atención en la existencia de las raíces obtenidas. Se hará con x_1, ya que con las restantes se obtiene idéntico resultado.

$$\sqrt{\frac{(2b-1)+\sqrt{4r^2-4b+1}}{2}}\geq 0\Longrightarrow\frac{(2b-1)+\sqrt{4r^2-4b+1}}{2}\geq 0$$

$$\Longrightarrow(2b-1)+\sqrt{4r^2-4b+1}\geq 0$$

$$\Longrightarrow(2b-1)\geq-\sqrt{4r^2-4b+1}\ /\ (\quad)^2$$

$$\Longrightarrow 4b^2-\cancel{4b}+\cancel{1}\geq 4r^2-\cancel{4b}+\cancel{1}$$

$$\Longrightarrow 4b^2\geq 4r^2$$

$$\Longrightarrow b^2\geq r^2\ /\ \sqrt{\quad}$$

$$\Longrightarrow b\geq r$$

Por lo tanto, existirá solución siempre que se cumpla esta última condición.

La demostración de este problema no aparece en el plan y programa de III medio diferenciado.

Para el investigador, se observa que esta demostración posee las siguientes funciones:

- Verificación: encontrar la verdad de este enunciado es complejo. Un buen acercamiento para comprobar la certeza del enunciado es utilizar una expresión analítica de la circunferencia adecuada que aclare que la suma de las intersecciones de la parábola con la circunferencia sea nula. La dificultad se presenta cuando se trabajan con expresiones abstractas. La ayuda que otorga el docente hacia el estudiantado para realizar la demostración es vital, ya que se debe emplear una variable auxiliar que permitirá extraer las cuatro intersecciones correspondientes.
- Sistematización: el alumno debe ser ordenado en la secuencia de la comprobación de este enunciado. La presentación metódica de los resultados obtenidos dará respuestas inmediatas a los procedimientos utilizados por los educandos. El alumno debe ser conciente, además, del recurso que le presenta la extracción de la raíz cuadrada de u_1 y u_2, dado que con esto conseguirá lo que se pide.
- Reto intelectual: en comparación al resto de las actividades propuestas por el programa diferenciado de III medio, esta es la más difícil que ha encontrado el investigador. Esto es porque la continua aparición de raíces y el uso de letras en lugar de guarismos que, dicho sea de paso, son accesibles de calcular, pueden provocar más de algún error en los cálculos realizados. La complejidad comienza cuando se debe realizar el reemplazo adecuado para iniciar la demostración: $y = x^2$ se escribe en la ecuación de la circunferencia. Luego, al generarse una ecuación de 4° grado, se logran obtener las intersecciones de la parábola con la circunferencia. A continuación, se suma el empleo de una variable auxiliar que permita obtener los puntos deseados.

Plan Diferenciado IV Medio de Matemáticas

- Funciones trigonométricas, página 63.

Demostrar que:

i) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

ii) $cosc^2\alpha = 1 + ctg^2\alpha$

iii) $tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$

Demostración:

i) Se sabe que, en un triángulo rectángulo, se tiene lo siguiente:

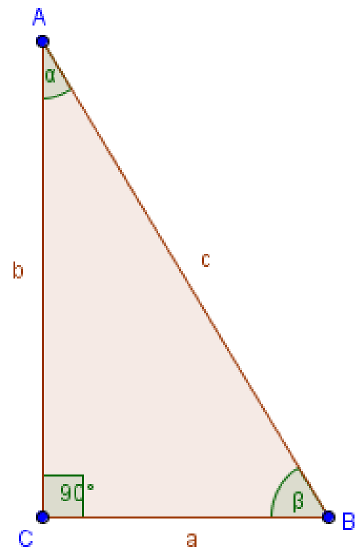

Figura 4: triángulo rectángulo, sus lados y ángulos

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c} \wedge cos\ \alpha = \frac{b}{c}$$

Al elevar al cuadrado ambas expresiones y al sumarlas se obtiene la igualdad:

$$sen^2\alpha\ +\ cos^2\alpha = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

■

ii) Utilizando un criterio similar al anteriormente expuesto, se obtiene lo siguiente:

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c} \Longrightarrow cosc\ \alpha = \frac{c}{a}\ ;\ tan\ \alpha = \frac{a}{b} \Longrightarrow ctg\ \alpha = \frac{b}{a}$$

Elevando al cuadrado la cotangente y sumando 1 a esta identidad, se llega al resultado:

$$ctg^2\alpha + 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = cosc^2\alpha$$

Q.E.D.

iii) Se sabe que:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} \Longrightarrow sec\ \alpha = \frac{c}{b}$$

Al sumar 1 al cuadrado de la tangente se obtiene lo pedido:

$$tan^2\alpha + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = sec^2\alpha$$

■

Para el investigador, las demostraciones del tópico de trigonometría reúnen las siguientes funciones:

- Sistematización: al presentarse ejercicios de esta categoría, la organización que debe tener el profesor para ir seleccionando la identidad adecuada para alcanzar el resultado, es un muestra de que esta función está siendo usada. Esto es claramente visible al emplear las definiciones de las razones trigonométricas fundamentales (seno, coseno, tangente). Es menester mencionar que el docente debe hacer incapié en transmitir a sus alumnos que la matemática recurre a los conocimientos previos para dar respuestas a las propiedades que desea demostrar, y este es un muy buen ejemplo de ello.
- Verificación: como muchos textos mencionan, estas son identidades trigonométricas sencillas, también llamadas fundamentales, dado que son ampliamente utilizadas para demostrar otras más complejas, o son un recurso valioso para las propiedades de geometría analítica, como la rotación solidaria de los ejes coordenados. Por lo mismo, la comprobación de estos resultados es de suma importancia. Se podría decir que para estas tres identidades, la función de verificación es la imperante. Para facilitar esto, el docente puede utilizar un dibujo de un triángulo rectángulo con medidas angulares α y β. Si el profesor lo desea, puede realizar una particularización de estas demostraciones dando valores a los otros ángulos y comprobar si realmente se cumple la igualdad.
- Reto intelectual: este tipo de problemas constituyen un buen entrenamiento para los estudiantes no iniciados en cuanto a demostración de propiedades se refiere. Por lo mismo, es ideal presentárselos como un desafío a las capacidades de los educandos; obviamente, éstos no deben estar solos, y como tal, el maestro debe hacer uso de sus herramientas pedagógicas para guiar a los alumnos cuando se vean estancados o tengan dificultades en alguna de ellas.

- Funciones trigonométricas, página 64.

Demostrar que:

i) $sen(x+y)\cdot sen(x-y) = sen^2x - sen^2y$

ii) $cos(x+y)\cdot cos(x-y) = cos^2x - sen^2y$

Demostración:

i) $sen(x+y)\cdot sen(x-y) =$

$$= (sen\,x\cdot cos\,y + sen\,y\cdot cos\,x)(sen\,x\cdot cos\,y - sen\,y\cdot cos\,x)$$

$$= sen^2x\cdot cos^2y - sen^2y\cdot cos^2x$$

$$= sen^2x\cdot(1-sen^2y) - sen^2y\cdot(1-sen^2x)$$

$$= sen^2x - \cancel{sen^2x\cdot sen^2y} - sen^2y + \cancel{sen^2x\cdot sen^2y}$$

$$= sen^2x - sen^2y$$

Q.E.D.

Demostración alternativa utilizando las fórmulas de prostaféresis:

$$sen\,\alpha\cdot sen\,\beta = \frac{cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$sen(x+y)\cdot sen(x-y) = \frac{cos(2y) - cos(2x)}{2}$$

$$sen^2x - sen^2y = \frac{\cancel{1} - 2\cdot sen^2y - \cancel{1} + 2\cdot sen^2x}{2}$$

$$sen^2x - sen^2y = \frac{2\cdot sen^2x - 2\cdot sen^2y}{2}$$

$$sen^2x - sen^2y = \frac{\cancel{2}\cdot(sen^2x - sen^2y)}{\cancel{2}}$$

$$sen^2x - sen^2y = sen^2x - sen^2y$$

■

ii) $cos(x+y)\cdot cos(x-y) =$

$$= (cos\,x\cdot cos\,y - sen\,x\cdot sen\,y)\cdot(cos\,x\cdot cos\,y + sen\,x\cdot sen\,y)$$

$$= cos^2x\cdot cos^2y - sen^2x\cdot sen^2y$$

$$= cos^2x\cdot(1-sen^2y) - (1-cos^2x)\cdot sen^2y$$

$$= cos^2x - \cancel{cos^2x \cdot sen^2y} - sen^2y + \cancel{cos^2x \cdot sen^2y}$$

$$= cos^2x - sen^2y$$

Q.E.D.

Demostración alternativa usando las fórmulas de prostaféresis:

$$cos\,\alpha \cdot cos\,\beta = \frac{cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$cos(x+y) \cdot cos(x-y) = \frac{cos(2x) + cos(2y)}{2}$$

$$cos^2x - sen^2y = \frac{2 \cdot cos^2x - 1 + 2 \cdot cos^2y - 1}{2}$$

$$cos^2x - sen^2y = \frac{2 \cdot cos^2x + 2 \cdot cos^2y - 2}{2}$$

$$cos^2x - sen^2y = \frac{\cancel{2} \cdot (cos^2x + cos^2y - 1)}{\cancel{2}}$$

$$cos^2x - sen^2y = cos^2x + cos^2y - 1$$

$$cos^2 - sen^2y = cos^2x - sen^2y$$

■

A continuación, las funciones que están presentes en estas demostraciones:

- Verificación: es notable que las razones trigonométricas de ángulos compuestos (suma y resta de ángulos), puedan generar propiedades muy interesantes. A este trabajo se adiciona que el profesor ya ha demostrado, previamente, el seno de una suma y resta de ángulos, como también para el coseno. La comprobación de estas dos propiedades es la que permitirá al estudiantado resolver estos problemas. Ahora bien, es más difícil comprobar el seno de la suma o resta de ángulos (o el coseno de la adición o sustracción de ángulos) que estas dos propiedades. Para ello, la elaboración de un dibujo que apoye el entendimiento de estas proposiciones es lo que ayudará a los estudiantes a comprenderlas.
- Sistematización: si bien el estudiante no necesitará demostrar las razones trigonométricas de ángulos compuestos, si tendrá la necesidad de ocuparlas. Más aún, se aprecia que tendrá que volver a utilizar las relaciones fundamentales de la trigonometría que se expusieron anteriormente. Es esta organización la que hace nacer la función de sistematización.

- Explicación: el profesor debe ir, ordenadamente, presentar cada paso que ha escrito. A medida que lo hace, debe ir mencionando en qué se basa para lograr el resultado siguiente. Como se mencionó más atrás, se vuelve a emplear las identidades trigonométricas fundamentales.

  Una observación que es necesario agregar es que se ha expuesto una demostración alternativa para estos dos ejercicios. Las fórmulas de prostaféresis son una opción valedera que puede emplear tanto el docente para demostrar en clases, como el estudiante que investiga otras vías de encontrar la solución a estos problemas. No está demás decir que puede obviar el recurso de estas fórmulas, dada la complejidad que poseen, pero es interesante ver qué reacción tienen los alumnos al presentarles otro medio no tan conocido como éstas, así como también su demostración. En el anexo de esta tesis, se exponen las demostraciones de las dos fórmulas de prostaféresis aquí señaladas.

- Funciones trigonométricas, página 66.

Demostrar que en cualquier triángulo ABC se tiene que:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta}$$

Esta propiedad es conocida como teorema del seno. La relación entre el tercer lado y el tercer ángulo no aparece explicitada; esto se da como una indicación al docente para que los alumnos se motiven a comprobar si esta relación se cumple para el lado y el ángulo faltante.

Demostración.

En un triángulo cualquiera si se traza la altura, obtenemos que, en el ΔADC:

$$sen\,\alpha = \frac{h_c}{b} \Longrightarrow h_c = b \cdot sen\,\alpha$$

A su vez, en el ΔCDB tenemos que:

$$sen\,\beta = \frac{h_c}{a} \Longrightarrow h_c = a \cdot sen\,\beta$$

Por transitividad, se tiene que:

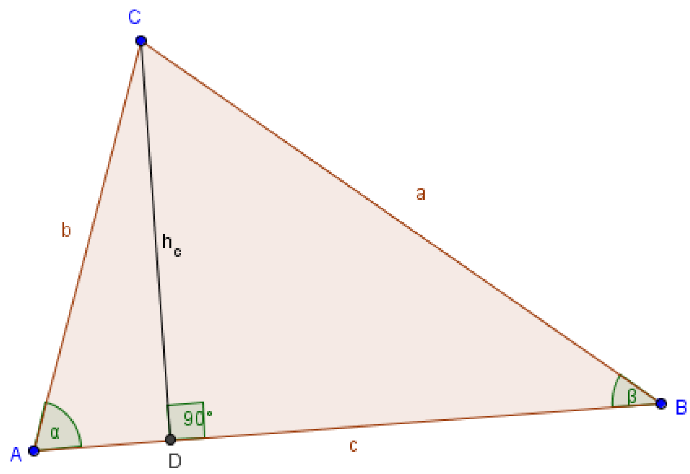

Figura 5: triángulo cualquiera con la altura h_c

$$a \cdot sen\,\beta = b \cdot sen\,\alpha \Longrightarrow \frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta}$$

■

Nótese que no se plantea el teorema del coseno como ejercicio para demostrar en clases o como desafío para los estudiantes.
Las funciones que aquí aparecen son:

- Verificación: la comprobación del teorema del seno no es menor. La resolución de triángulos por medio de este teorema es sinónimo de que el estudiante es capaz de asegurar que un triángulo es o no constructible, lo cual no es un análisis menor el que ha hecho el alumno. Para el investigador, la presentación de este enunciado es de suma importancia para los educandos que muestran una habilidad matemática más avanzada, por lo que puede formar parte de un muy buen trabajo a su ingenio.
- Sistematización: el estudiante debe ser conciente de la ayuda que requiere, por lo que es conveniente utilizar un dibujo que explique lo que se está realizando. La transitividad y las definiciones de las razones trigonométricas, en este caso, el seno, pasa a ser un avance de lo que se espera del estudiante. Es así cómo llegará a la relación pedida; no tendrá que hacer grandes trabajos algebraicos; quizás la dificultad sea en ocupar la transitividad que se obtiene de despejar h_c, para luego igualar las expresiones y llegar a lo que se pide.
- Reto intelectual: puede ser esta la función más trascendental de esta demostración. La ayuda que otorga un buen dibujo como el presentado

anteriormente, colabora en la comprensión del enunciado, además de su comprobación. Ahora bien, el desafío consiste en que, en el dibujo adjunto, el alumno trace la altura en relación a uno de los lados. Aún cuando no sean los mismos lados enunciados por el problema, éste puede encontrar la tercera igualdad faltante del teorema del seno, comparando sus resultados con otro compañero que haya obtenido uno distinto. Es aquí cuando el docente debe reunir ambas conclusiones y hacerlas una, ilustrándoles a sus educandos la relación que existe entre la medida de un lado y el seno del ángulo que se opone a ese lado.

- Funciones trigonométricas, página 70.

Demostrar si las siguientes igualdades son verdaderas:

a) $\frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta} = tan\,\alpha \cdot tan\,\beta$

b) $sen\,\alpha \cdot \frac{1}{tan\,\alpha} = cos\,\alpha$

c) $\frac{1 + sen\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{cos\,\alpha}{1 + sen\,\alpha} = 2\,sec\,\alpha$

Demostración:

a) $\frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta} = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{\frac{1}{tan\,\alpha} + \frac{1}{tan\,\beta}}$

$$= \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{\frac{tan\,\beta + tan\,\alpha}{tan\,\alpha \cdot tan\,\beta}}$$

$$= (tan\,\alpha + tan\,\beta) : \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{tan\,\alpha \cdot tan\,\beta}$$

$$= \cancel{(tan\,\alpha + tan\,\beta)} \cdot \frac{tan\,\alpha \cdot tan\,\beta}{\cancel{tan\,\alpha + tan\,\beta}}$$

$$= tan\,\alpha \cdot tan\,\beta$$

■

b) $sen\,\alpha \cdot \frac{1}{tan\,\alpha} = sen\,\alpha \cdot \frac{1}{\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}$

$$= \cancel{sen\,\alpha} \cdot \frac{cos\,\alpha}{\cancel{sen\,\alpha}}$$

$$= cos\,\alpha$$

Q.E.D.

c) $$\frac{1+sen\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{cos\,\alpha}{1+sen\,\alpha} = \frac{(1+sen\,\alpha)^2 + cos^2\alpha}{(1+sen\,\alpha)\cdot cos\,\alpha}$$

$$= \frac{1 + 2\cdot sen\,\alpha + sen^2\alpha + cos^2\alpha}{(1+sen\,\alpha)\cdot cos\,\alpha}$$

$$= \frac{1 + 2\cdot sen\,\alpha + 1}{(1+sen\,\alpha)\cdot cos\,\alpha}$$

$$= \frac{2 + 2\cdot sen\,\alpha}{(1+sen\,\alpha)\cdot cos\,\alpha}$$

$$= \frac{2\cdot \cancel{(1+sen\,\alpha)}}{\cancel{(1+sen\,\alpha)}\cdot cos\,\alpha}$$

$$= \frac{2}{cos\,\alpha}$$

$$= 2\cdot sec\,\alpha$$

Q.E.D.

Para el investigador, las demostraciones contemplan las siguientes funciones:

- Verificación: se vuelve a presentar esta función en las demostraciones de algunas identidades trigonométricas importantes. Al igual que algunos ejercicios presentados anteriormente, constituyen un buen entrenamiento para los alumnos que son legos en la comprobación de estas proposiciones. Además, es una forma de establecer la certeza de estos enunciados.
- Sistematización: el estudiante debe ser conciente de que debe volver a emplear las identidades básicas para lograr llegar a los resultados. Organizar los procedimientos empleados para resolver estos ejercicios es lo que hace aparecer esta función.
- Explicación: cada paso a seguir es una forma de dar respuesta a los procedimientos siguientes. Puede ser adecuado escribir al costado de cada procedimiento una breve reseña que asegura que lo que se señala es verdadero, así dará comprensión de dónde surge cada uno de ellos.
- Reto intelectual: los alumnos más experimentados lograrán hacer esta demostraciones sin mayores dificultades. Sin embargo, para los estudiantes no versados en cómo demostrar, pueden constituir un excelente paso para no sólo comprender el trabajo del matemático, sino además, para transformar un

desafío a las capacidades e ingenio de los alumnos. Como se mencionó más atrás, los recursos pedagógicos del profesor son una fuente de recursos para guiar a los educandos que les dificulta este tipo de temas.

A continuación, se presentarán algunos teoremas no contemplados en los planes y programas de III y IV medio del plan diferenciado, o que sólo se han nombrado, pero que no son mencionados ni siquiera sus enunciados. Con un criterio similar, el investigador hará una clasificación y análisis de las funciones de de Villiers que poseen estas demostraciones.

Plan Diferenciado III Medio de Matemáticas

- Unidad 1: Profundización del lenguaje algebraico
- Teoremas o propiedades a incluir:
  - Obtención de las raíces de la ecuación de segundo grado en $\mathbb{R}$:
  - Relación entre las raíces.

- Obtención de las raíces de una ecuación de segundo grado en $\mathbb{R}$:

Demostración: Sea el trinomio $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Dado que deseamos obtener las raíces de la ecuación, se procede de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$= ax^2 + bx = -c \quad / \cdot 4a$$

$$= 4a^2x^2 + 4abx = -4ac \quad / + b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad / \sqrt{}$$

$$(2ax + b) = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \quad / -b$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Dividiendo por $2a$, se obtienen las raíces buscadas, que son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ , x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\blacksquare$

(Blanco Molleda *et al*, 1994, 37).

Ahora bien, analicemos con la expresión $b^2 - 4ac$, conocida como discriminante:

— Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ representa un número real positivo que, al sumarse y restarse de –*b* determina que las raíces o soluciones sean dos números reales y distintos.

— Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, por lo que las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática son dos números reales e iguales (se suma o se resta cero al mismo número).

— Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ representa un número no real que se denomina imaginario. Luego, en este caso las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática son números imaginarios, es decir, la ecuación no tiene solución en el conjunto $\mathbb{R}$.
(Blanco Molleda, 1994).

Se puede decir que esta demostración tiene las siguientes funciones de de Villiers:

- Verificación: en el transcurso de su escolaridad, el estudiante conoce la ecuación de segundo grado que describe una parábola. Cuando esta cónica intersecta al eje X, se obtienen las raíces de la ecuación. Sin embargo, no hay una presentación adecuada de cómo se llega a esta fórmula. Aquí se ilustra una forma, en donde hay que completar el trinomio cuadrado perfecto para obtener las raíces. Ahora bien, el por qué de la verificación no es algo obvio. El trabajo que debe realizar el educando para comprobar la veracidad de los resultados es hacer el proceso inverso, es decir, si reemplaza estos valores en la ecuación original, debe llegar a la igualdad 0 = 0.
- Sistematización: organizar los resultados en uno sólo es una labor ardua, empero, es una manera muy ideal para medir el rendimiento de saberes que tienen los estudiantes en relación a los conocimientos previos que requieren para demostrar esta propiedad. Estos resultados son la guía que tienen los alumnos para llegar a los resultados deseados.
- Comunicación: ¿qué significan las raíces de una ecuación? ¿qué resultados son estos? Estas preguntas planteadas puede realizar el profesor en la sala de clases antes de iniciar la demostración de este enunciado. Esto puede ayudar a motivar el desarrollo de conjeturas y posibles respuestas que ayudan al

docente a encontrar, quizás, dificultades conceptuales como obstáculos icónicos, incluso, de operatoria.

Por su parte, el maestro transforma estos símbolos y expresiones al lenguaje natural, que le permiten al estudiante comprender qué significan y su importancia en el estudio de la obtención de las raíces.

- Reto intelectual: se puede considerar, junto con la función anterior, una de las más importantes y complejas a la vez, ya que la completación de cuadrados de esta expresión es difícil. Es por ello que la ayuda del profesor es de suma importancia para que el estudiante no se frustre en su intento de comprobar esta proposición.

- Relación entre las raíces del trinomio de segundo grado.

Demostración. Si sumamos ambas raíces obtendremos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Si se multiplican las raíces, tenemos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Q.E.D.

Las funciones de la demostración que se pueden encontrar aquí son:

- Descubrimiento: el ejercicio no acomete mayor complejidad, por lo que llegar a estas conclusiones no es de dificultad alguna para un estudiante. Es un trabajo algebraico elemental, pudiendo obtener una satisfacción por este problema. Más aún, el alumno puede encontrar otras relaciones que tengan que operarse entre las raíces de la ecuación de segundo grado. Estos nuevos descubrimientos harán del estudio del educando algo más interesante que va más allá de lo que pide el programa oficial del Ministerio.
- Comunicación: la primera impresión que puede llevarse un estudiante es la utilidad de esta relación. Si bien es cierto de que, a primera vista, carece de cierta importancia, la verdad es que es aquí cuando el docente presenta esta función. El profesor debe ser claro en transmitir a sus educandos que se puede encontrar valores y expresiones de una ecuación de segundo grado a partir de

sus raíces, o sea, es ir "de atrás hacia delante". Es en este *feedback* cuando el nuevo conocimiento se hace patente en el aprendizaje de los alumnos.

- Verificación: la comprobación del enunciado planteado es el que da el puntapié inicial para alentar al estudiante a demostrarlo. Dado que no requiere de mayores desarrollos algebraicos de dificultad alta, puede ser incluído en los cursos de plan común. El análisis en parejas puede ser una buena alternativa de trabajo, como también un estudio con el curso completo. Esto queda a juicio de cada docente.

- Unidad 2: Lugares geométricos.
- Teoremas a incluir:
  - Distancia entre dos puntos
  - Ecuación de la circunferencia con centro en el origen y centro (h, k)
  - Ecuación de la parábola con vértice en el origen.
  - Ecuación de la elipse con centro en el origen.
  - Ecuación de la hipérbola con centro en el origen.

- Distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

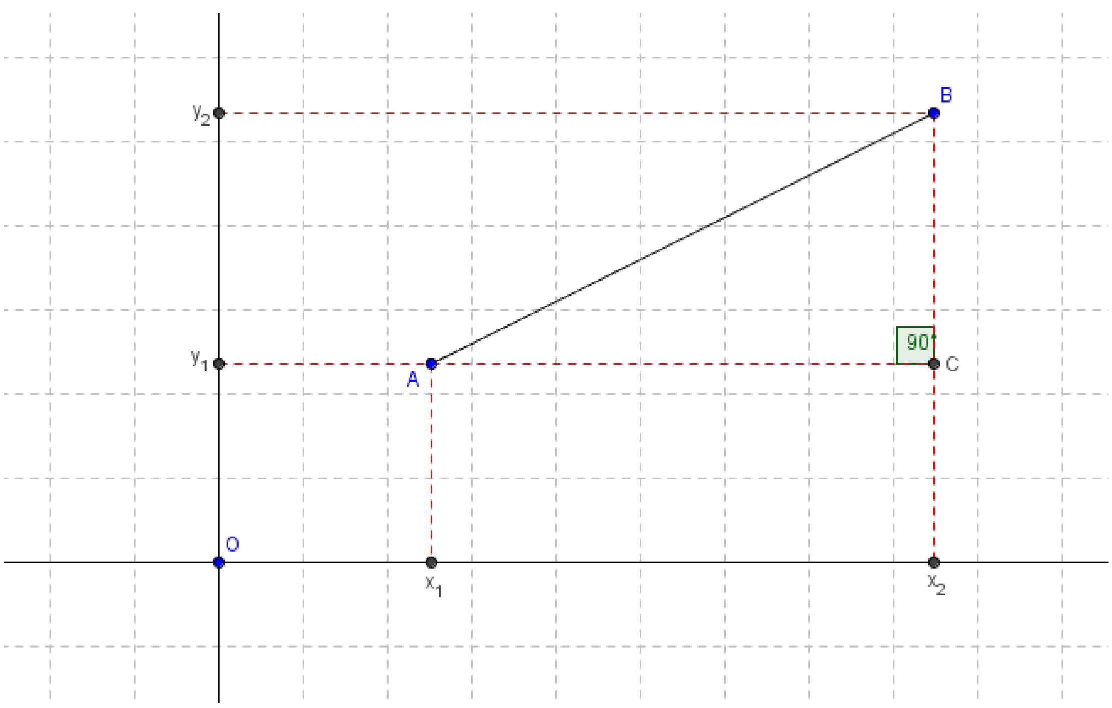

Figura 6: distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

Demostración. En la figura, se han trazado paralelas a los ejes coordenados por *A* y *B*, respectivamente, de modo que se ha formado el triángulo *ABC* rectángulo en *C*, donde la medida de la hipotenusa $\overline{AB}$ corresponde a la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, la que designamos por *d*(*A*, *B*).

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$[d(AB)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)$$

Por lo tanto:

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(Blanco Molleda *et al*, 1994, p. 91).

- Ecuación de la circunferencia con centro en el origen y centro (*h*, *k*):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

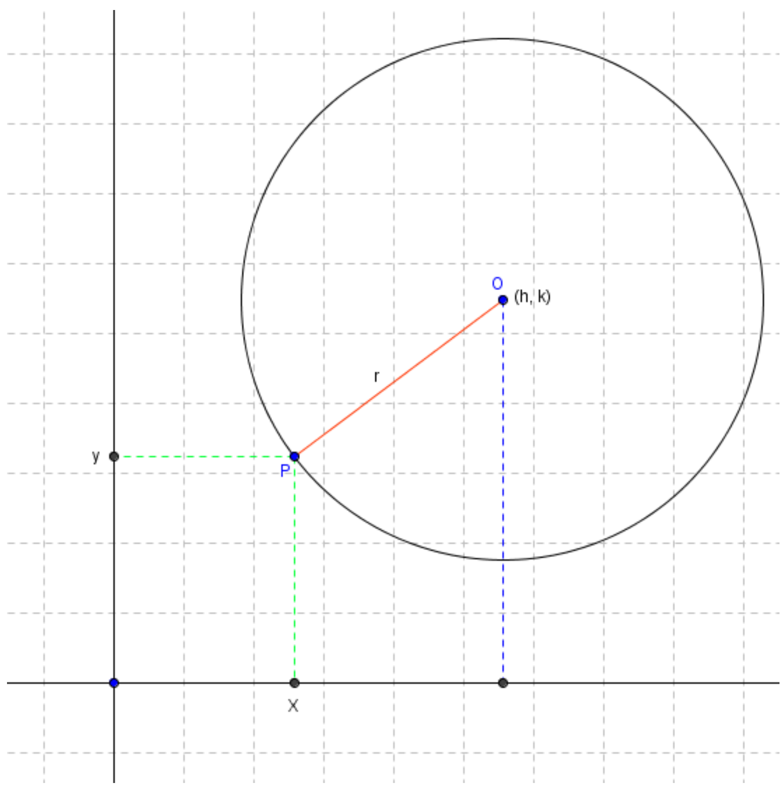

Figura 7:circunferencia con centro (h, k).

Demostración. Las coordenadas del centro *O*, que hemos designado (*h*, *k*) corresponden a un punto cualquiera del plano.

La distancia de O hasta P es $d(OP) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$. El radio r es la distancia desde cualquier punto de la circunferencia a su punto centro. Si elevamos al cuadrado resulta:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

(Blanco Molleda, 1994, p. 103 – 104).

Para el caso de la circunferencia centrada en el origen sólo basta con asignarle valores a h y k, donde $h = k = 0$, obteniéndose la ecuación canónica de la circunferencia.

- Ecuación de la parábola con vértice en el origen:

$$y^2 = 4px$$

Analizaremos el caso en el que el eje focal de la parábola coincide con el eje X, dado que el análisis para la parábola con eje focal en el eje Y es similar.

Demostración. A partir de la definición de parábola se obtiene la fórmula de su lugar geométrico. La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz. Luego, si las coordenadas del foco son $F(p, 0)$ y la directriz tiene por ecuación d: $x = -p$, entonces, se puede establecer la igualdad entre la distancia que hay entre el foco y un punto de

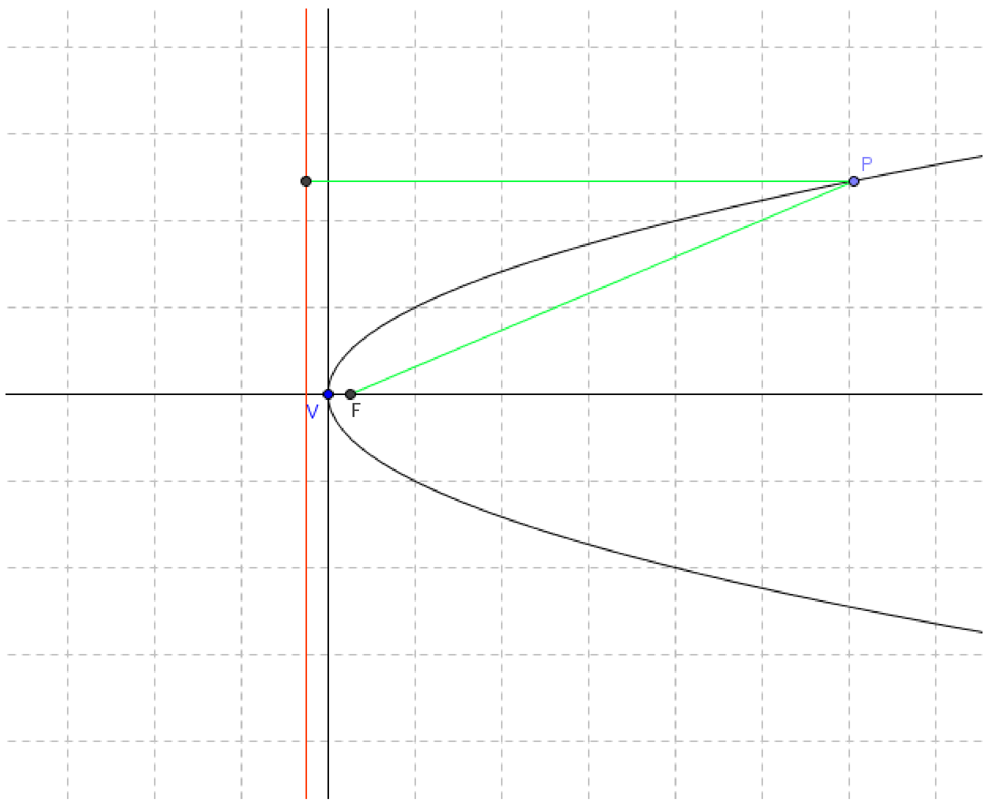

Figura 8: parábola con vértice en el origen y foco en el eje de las abscisas

la parábola y entre éste y la directriz.

Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola. Luego, ambas distancias están dadas por:

$$d(P, F) = d(P, D)$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = x + p$$

Elevando esta expresión al cuadrado y desarrollando los cuadrados de binomios, obtenemos:

$$\cancel{x^2} - 2px + \cancel{p^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2px + \cancel{p^2}$$

$$y^2 = 4px$$

Q.E.D.

- Ecuación de la elipse con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demostración. Como en el caso anterior, sólo daremos la fórmula cuando los focos de la elipse se encuentran en el eje X.

Se define la elipse como el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Supongamos que el punto $P(x, y)$ coincide con uno de los vértices, en este caso V_1; la distancia que hay desde el centro de la elipse hasta V_1 es a, siendo $a \in \mathbb{R}^+$ y constante, luego, la distancia hasta V_2 es $2a$. Luego, si se ubica el punto P en un lugar cualquiera de la elipse, entonces, las distancias desde éste hasta cada uno de los focos de coordenadas $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, son:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Despejando una de las raíces y elevando al cuadrado, tenemos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

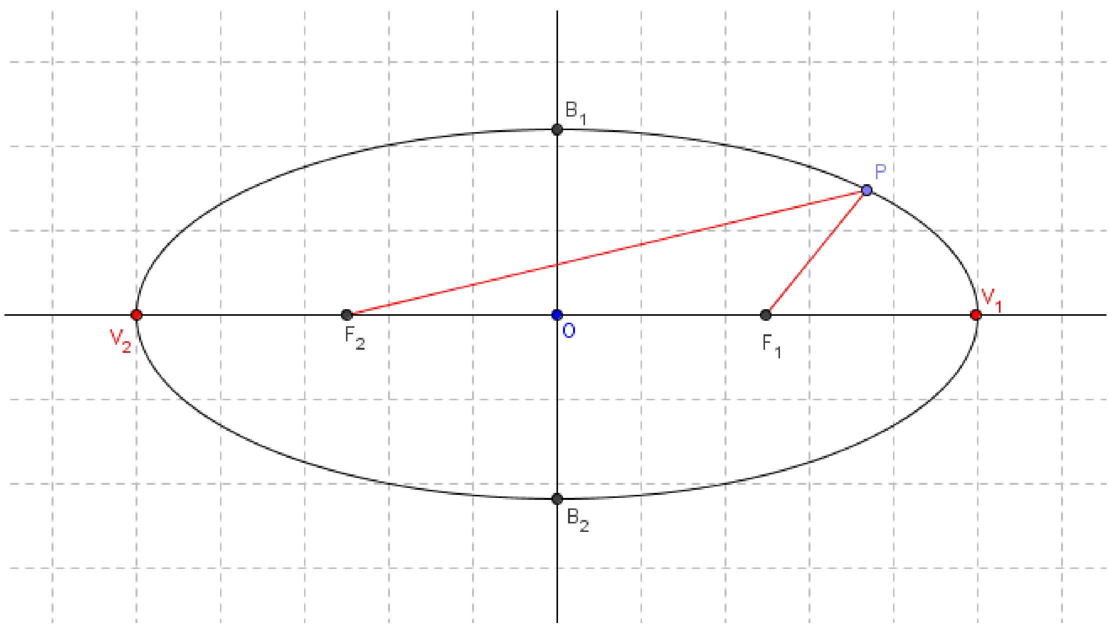

Figura 9:elipse con centro en el origen y focos en el eje

$$\cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$a^2((x+c)^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + \cancel{2a^2cx} + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2}x^2 + a^2y^2 = a^2\underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \;/\cdot \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

■

- Ecuación de la hipérbola con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demostración. Se dará la ecuación correspondiente a la hipérbola cuando los focos de este lugar geométrico se encuentran en el eje de las abscisas. Como en el caso de las dos cónicas anteriores, iniciamos nuestro estudio a partir de la definición de hipérbola. Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tal que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Si designamos por $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ las coordenadas de los focos, $P(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola y por $2a$, $a \in \mathbb{R}^+$ y constante, a la distancia que hay de vértice a vértice, tenemos que:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Despejamos una de las raíces y elevamos al cuadrado:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 - 2acx + a^4 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2$$

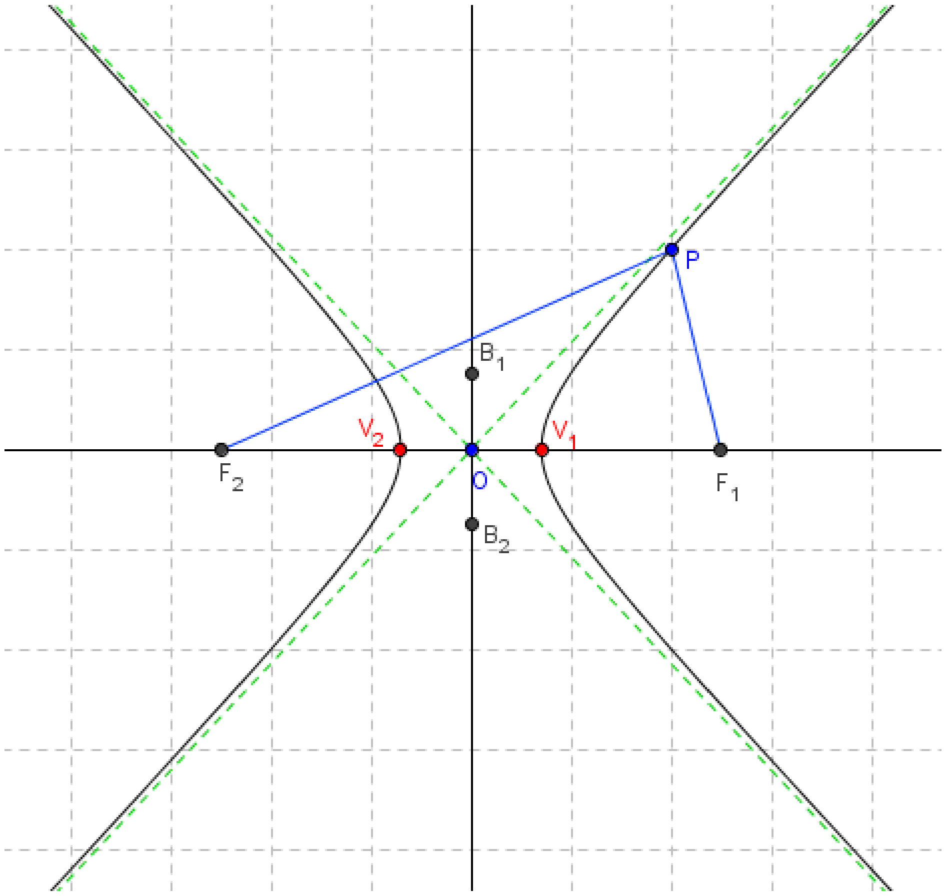

Figura 10: hipérbola con centro en el origen y focos en el el X

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\underbrace{(c^2 - a^2)}_{b^2} x^2 - a^2y^2 = \underbrace{(c^2 - a^2)}_{b^2} a^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ \ / \cdot \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Q.E.D.

El investigador ha optado por reunir en este inciso a todas las demostraciones de lugares geométricos en una sola, dado que en ellas se encuentran las mismas funciones de Michael de Villiers. Serán desglosadas una por una.

Por otra parte, no se han incorporado las demostraciones de la parábola con vértice (h, k), la de la elipse con centro (h, k) y la de la hipérbola con centro (h, k); esto debido a que hay un estudio previo de la traslación solidaria de los ejes coordenados que permiten llegar a estas fórmulas. Generalmente, los docentes se limitan a escribir estos resultados sin hacer mayores reflexiones de cómo se generan. El investigador sugiere plantear estos objetivos como temas de discusión en clases para coadyuvar al pensamiento crítico y a la imaginación de los estudiantes.

- Explicación: el trabajo que debe realizar el profesor se centra a partir de las definiciones de cada cónica. En comparación con el estudio de la distancia entre dos puntos, ésta se inicia a través de un análisis de la geometría euclideana, empleando solamente el teorema de Pitágoras como herramienta principal. Dado que la unión entre dos puntos es la recta que los contiene, basta con demostrar la fórmula para concluir su explicación.

  En relación a las cónicas investigadas, se puede mencionar que el desarrollo algebraico a realizar es lo que genera la respuesta de por qué es verdadero. Aún más, al definir, previamente, cada lugar geométrico, el trabajo que se hace es lo que proporciona la veracidad de cada enunciado.
- Sistematización: una organización de estos resultados crea una retroalimentación que no acaba. Si se observan las demostraciones realizadas, se podrá constatar que todas ellas emplean la distancia entre dos puntos como pieza fundamental. Es un elemento recurrente de todas las cónicas estudiadas, por lo que no se debe prescindir de analizar, previamente, cómo generar la curva a estudiar.
- Comunicación: esta función se encuentra en la definición de cada lugar geométrico. Si bien el estudiante, en el transcurso de su escolaridad, conoce la recta y la circunferencia como figuras geométricas básicas, la presentación de estas nuevas figuras, más llamativas y complejas de analizar y comprender, junto con un estudio analítico de ellas, genera un significado nuevo a la matemática en una rama primordial de ella. Ahora bien, el recurso del dibujo de la circunferencia, de la parábola, elipse e hipérbola es de suma importancia, para que se establece un diálogo entre representación algebraica e icónica de las figuras geométricas.

- Unidad 3: Programación lineal
- Teoremas a incorporar:
  - Teorema fundamental.

Para este caso, no es necesario incluir este teorema, dada la dificultad que posee. Esta demostración incluso escapa a los objetivos de esta tesis, por lo que sólo será enunciado. El teorema dice: si existe una solución que optimice la función objetivo, esta debe encontrarse en uno de los vértices de la región determinada por las restricciones del problema (de las Heras *et al*, 1993).

Plan Diferenciado IV Medio de Matemáticas

- Unidad 1: Procesos infinitos.
- Teoremas o propiedades a incluir:
    - Sumatoria de una constante.
    - Sumatoria del producto de una constante por los términos de una sucesión.
    - Sumatoria de la suma o resta de términos de dos o más sucesiones.
    - Propiedad telescópica de las sumatorias.
    - Suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética.
    - Suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica.

- Sumatoria de una constante: si $c_1 = c_2 = c_3 = ... = c_n = c$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = n \cdot c$$

Demostración. Desarrollando esta sumatoria, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

Luego, si $c_1 = c_2 = c_3 = ... = c_n = c$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} c_n = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n\ veces}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{n} c_n = n \cdot c$$

■

- Sumatoria del producto de una constante por los términos de una sucesión: si *c* es una constante, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_n$$

Demostración. Desarrollando la primera sumatoria obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \cdots + c \cdot a_n$$

$$= c \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

$$= c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_n$$

Q.E.D.

- Sumatoria de la suma o resta de términos de dos o más sucesiones: si a_k y b_k son sucesiones, entonces se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Demostración. Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = a_1 \pm b_1 + a_2 \pm b_2 + \cdots + a_n \pm b_n$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Q.E.D.

- Propiedad telescópica de las sumatorias:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

Demostración. Al desarrollar el lado izquierdo de la igualdad se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots +$$

$$+(a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

De forma tal que:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

■

- Serie aritmética finita: suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética (P. A).

Demostración. Escribimos la suma de los *n* primeros términos de la P. A.:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]$$

Escribimos esta misma suma en orden inverso:

$$S_n = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

Sumamos miembro a mienbro y término a término las igualdades anteriores:

$$2S_n = \underbrace{[2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \cdots + [2a_1 + (n-1)d]}_{n\ veces}$$

$$2S_n = n \cdot [2a_1 + (n-1)d] \; / \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1)d]$$

De donde, se deduce también una expresión equivalente,

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n} \right]$$

Luego:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_n]$$

Q.E.D.

- Serie geométrica finita: suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica (P. G).

Demostración. La sumatoria de los *n* primeros términos de una progresión geométrica, que designaremos por S_n, podemos deducirla de la manera siguiente:

Escribimos la suma de los *n* primeros términos de la P.G.:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \cdots + a_1 \cdot r^{n-1}$$

Multiplicamos por *r* esta igualdad:

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \cdots + a_1 \cdot r^n$$

Restamos miembro a miembro las igualdades anteriores:

$$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot r^n$$

$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n) \; / \cdot \frac{1}{1-r} ; r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

De esta última expresión se deduce otra equivalente:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot r^n}{1-r}$$

Pero

$$a_1 \cdot r^n = a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r$$

Y sabemos que

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Luego,

$$a_1 \cdot r^n = a_n \cdot r$$

Reemplazando esta expresión en la expresión correspondiente:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

■

(Blanco Molleda *et al*, 1994).

Las funciones de de Villiers reunidas en esta unidad son:

- Verificación: cada enunciado presentado conlleva, necesariamente, una comprobación de su validez. Para los ejercicios de sumatoria, es un aspecto esencial; para el caso de las progresiones, es más complejo, pues emplea cierta dosis de ingenio para concluir lo que se desea. Sin embargo, resulta interesante que, a partir de esta función, se puedan extraer importantes indicaciones que pueden ayudar al docente a conducir al curso en una dirección novedosa. A modo de ejemplo, basta con preguntar a los educandos: ¿qué sucede si queremos sumar infinitos términos? ¿Tendrá un resultado todo esto, o el resultado es infinito? Aquí se han incorporado dos interrogantes que están muy asociadas al límites de sumas y convergencia, cuestiones que se analizan en los cursos de Cálculo Integral y Análisis Real. No es necesario incorporar tal nivel de dificultad, pero si cautivar a los estudiantes y llevarlos a lugares, para ellos, aún insospechados.
- Explicación: resulta notorio que la propia demostración de estas propiedades genere la argumentación necesaria para validar el por qué es verdadera cada proposición. Puede utilizarse para comprobar, a modo experimental, algunos ejemplos que los mismos estudiantes hayan creado por su cuenta o investigado en un libro o Internet, por lo que resulta un trabajo interesante dentro del aula.
- Sistematización: todos estos resultados se logran masificar en uno solo ya que, tanto los conceptos de sumatoria como los de progresiones se aúnan para implementar una novedosa y rápida forma de calcular sumas de muchos números. Conocida es la anécdota de Gauss que, siendo muy niño, logró determinar la suma a partir de 1 hasta 100. El docente puede iniciar su clase con esta conocida efeméride matemática, para mencionar la facilidad de

realizar cálculos que se ven interminables, así como nombrar a uno de los matemáticos más renombrados y prolíficos del siglo XIX.

- Comunicación: se vuelve a presentar un diálogo entre demostración y simbología de interesantes caracterísitcas. Aquí, el estudiante emplea y conoce un nuevo símbolo, el de sumatoria, representado por la letra griega sigma mayúscula (Σ), lo que provoca una simbiosis única entre el saber matemático y el aprendizaje que se genera. Ya con sólo presentar este ícono, el alumno recurre al significado que posee, por lo que esta función queda muy bien fijada para esta unidad.
- Reto intelectual: para las sumatorias puede ser un buen trabajo para iniciar a los estudiantes a demostrar estas propiedades, ya que se ven obligados a utilizar el símbolo de sumatoria para llegar a los resultados, como también de las definiciones de éstas. En el caso de las progresiones resulta más complejo, pues se necesita hacer una doble suma o multiplicar por un elemento adecuado para obtener lo que se desea. No obstante, se sugiere que el profesor, antes de comenzar a demostrar las propiedades de progresiones, deje experimentar a los alumnos, que busquen sus propios medios y hagan sus reflexiones en torno a cómo demostrar estas propiedades. El docente debe ser conciente que, si llevado un lapso de tiempo considerable los estudiantes aún no logran concluir, comenzar él a iniciar la demosración de las proposiciones de éstas. No debe olvidarse también que este esfuerzo, aún cuando haya sido infructuoso, es lo que hace que los estudiantes nunca olviden que deben perseverar para llegar a lo que se les pide en el ejercicio. Es una muy buena instancia para felicitarlos por la labor realizada y enaltecer su autoestima ante tan complicada disciplina como lo es la matemática.

- Unidad 2: Funciones polinomiales.
- Teoremas o propiedades a incluir:
    - Teorema del resto.
    - Teorema del factor.

- Teorema del resto: al dividir un polinomio $P(x)$ por $x - a$, el resto es $P(a)$.

Demostración. Recordemos que al dividir un polinomio se obtiene un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$, donde el resto tiene grado inferior que el grado del divisor. En este caso el grado del divisor $x - a$ es 1, por lo tanto el grado del resto es cero, es decir, el resto es una constante real que denotaremos por r, $R(x) = r$.

$$\frac{P(x)}{x-a} = C(x) + \frac{r}{x-a}$$

o bien

$$P(x) = C(x) \cdot (x-a) + r$$

Si hacemos $x = a$ nos queda

$$P(a) = C(a) \cdot 0 + r$$

$$P(a) = r$$

Es decir, al dividir $P(x)$ por $(x - a)$ el resto está expresado por $P(a)$ (Carreño y Cruz, 2002).

- Teorema del factor: α es una raíz de $P(x)$ si y sólo si $(x - \alpha)$ es un factor de $P(x)$.

Demostración. Por el teorema del resto $P(x) = (x - \alpha)\, Q(x) + P(\alpha)$.
Entonces α es raíz si y sólo si $P(\alpha) = 0$
Si y sólo si $P(x) = (x - \alpha)\, Q(x)$
Si y sólo si $(x - \alpha)$ es factor de $P(x)$.
(Ayub, 1996).

Para el investigador, ambas demostraciones poseen las funciones de:

- Verificación: es interesante apreciar que los resultados obtenidos en forma analítica son un instrumento valioso para encontrar nuevas maneras de factorizar una expresión algebraica. Muchos textos, como el "Álgebra" de Baldor, incluyen muy buenos ejemplos que se adecuan a estas afirmaciones expuestas. Como se ha mencionado anteriormente, una sugestión a contemplar es que no basta con que se haya realizado la demostración, también es necesario complementarlo con ejemplos que ilustren que lo que se ha demostrado es cierto.
- Explicación: una observación que es menester recalcar es el hecho de que, en comparación con las precedentes demostraciones expuestas, aquí se ha mostrado que ambas incorporan el lenguaje natural para ser entendidas. Nótese, además, que los polinomios son una extensión de entidades numéricas que se estudian en la aritmética, por lo que ya son entes matemáticos abstractos que requieren de una forma idonea para ser comprendidos. Es interesante ver que los recursos que otorga el lenguaje para dar a conocer los

resultados son imprescindibles a la hora de ejecutar la demostración de estas proposiones.

- Comunicación: la división de polinomios, así como el resto de la operaciones entre ellos, y la búsqueda de las raíces de éstos y sus factores necesita de un estudio a profundidad. Requiere de cierto nivel de abstracción que se logra con la introducción temprana del álgebra en los escolares, más las destrezas que se adquieren producto del estudio realizado por los alumnos. Téngase en cuenta que se presenta un hecho de suma importancia. En básica, los educandos saben que, en toda división, hay un dividendo, un divisor, un cuociente y un resto, por lo que no debiesen tener mayores dificultades en extender este algoritmo al álgebra. Sólo así se estará completando la función de comunicación en un dobre sentido: por una parte, se estará prolongando el significado de cociente entre dos cantidades y, por otro lado, transmisión de un saber conocido a otro más amplio y complejo.

- Unidad 3: Funciones trigonométricas.
- Teoremas o propiedades a incorporar:
    - Transformación de grado a radián.
    - Seno de la suma y resta de ángulos.
    - Coseno de la suma y resta de ángulos.

- Transformación de grado a radián:

Demostración. Recordemos que el radián es otra medida para los ángulos. Un radián corresponde a un ángulo que abarca un arco que es, en logitud, igual a la medida del radio.

1 radián: $r = OA =$ arco AB (medidas de logitud).

¿Cuántos radianes hay en el ángulo completo?

Dado que la circunferencia posee 360°, entonces:

Longitud de arco = $2\pi r$

1 radián = arco de longitud r

Por lo tanto, el ángulo completo tiene una medida de 2π radianes.

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$

Si se multiplica esta igualdad por n, obtendremos:

$$n \text{ radianes} = \frac{360° \cdot n}{2\pi}$$

■

- Seno de suma de ángulos:

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$$

Demostración. En una circunferencia goniométrica consideremos los ángulos α, β y α + β, tal que 0° ≤ α + β ≤ 90° (Véase figura 11).

Tenemos que:

$m(\measuredangle AOB) = \alpha$; $m(\measuredangle BOC) = \beta$; $m(\measuredangle AOB + \measuredangle BOC) = m(\measuredangle BOC) = \alpha + \beta$.

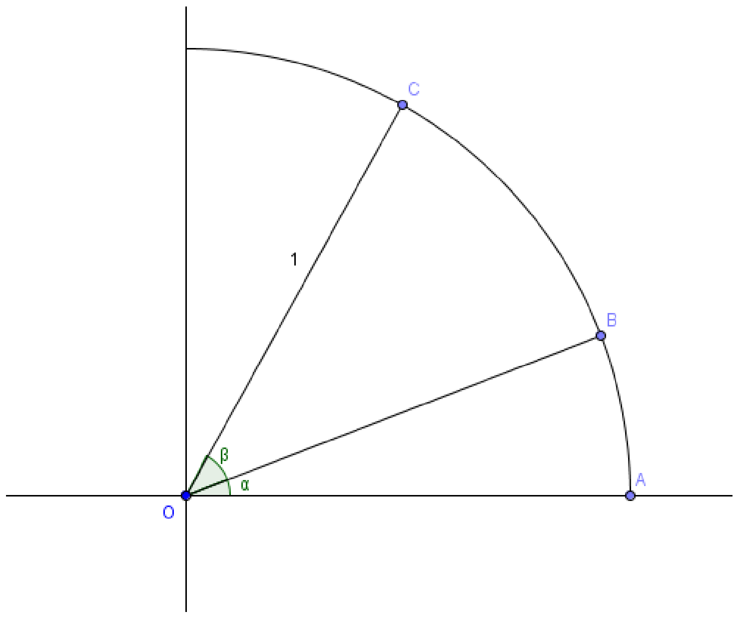

Figura 11: circunferencia goniométrica

Trazamos:

$$\overline{CG} \perp \overline{OA};\ \overline{CE} \perp \overline{OB};\ \overline{EF} \perp \overline{OA};\ \overline{DE} \perp \overline{CG}$$

(Véase figura 2).

Por lo tanto, tenemos rectángulo *GFED*; además $m(\measuredangle ECD) = \alpha$ (lados respectivamente perpendiculares).

Vemos que:

$$sen(\alpha + \beta) = \frac{CG}{OC} = \frac{CG}{1} = \frac{CD + DG}{1} = CD + EF\ (1)$$

En Δ*OFE* tenemos:

$$sen\,\alpha = \frac{EF}{OE}$$

entonces, $EF = OE \cdot sen\,\alpha$

En Δ*OEC* tenemos:

$$cos\,\beta = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{1}$$

En ΔOEC tenemos

$$sen\,\beta = \frac{CE}{OC} = \frac{CE}{1}$$

entonces, $sen\,\beta = CE$

Luego: $CD = sen\,\beta \cdot\ cos\,\alpha$ (3)

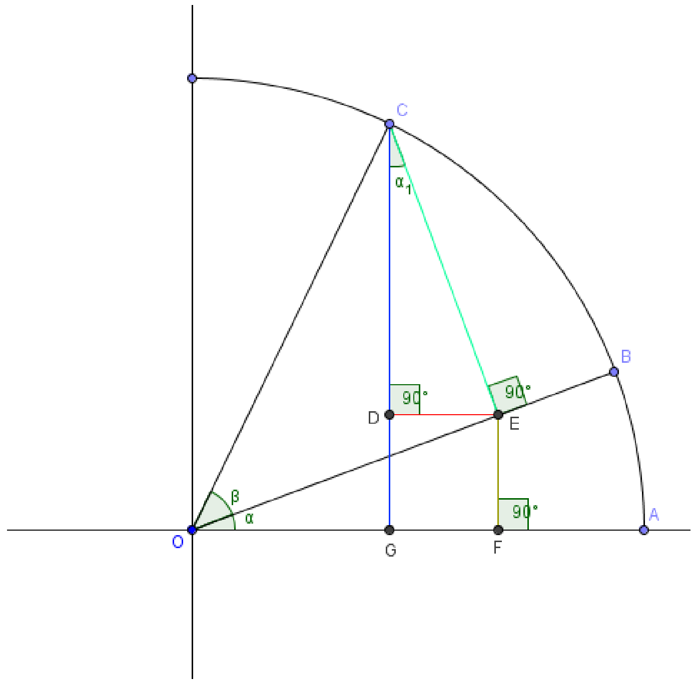

Figura 12: construcciones auxiliares en la circunferencia goniométrica.

Reemplazando (2) y (3) en la expresión (1), obtenemos:

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$$

Q.E.D.

(Blanco Molleda, *et al*, 1994).

- Seno de la diferencia de ángulos:

$$sen(\alpha - \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$$

Demostración. Si en la identidad $sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$ sustituimos β por (–β), obtenemos:

$$sen(\alpha - \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,(-\beta) + sen(-\beta) \cdot cos\,\alpha \quad (1)$$

Como sabemos: $sen(-\beta) = -sen\,\beta$ (2) y $cos(-\beta) = cos\,\beta$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1), tenemos:

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$$

Q.E.D.

(Blanco Molleda, *et al*, 1994).

- Coseno de la suma de ángulos:

$$cos(\alpha+\beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - sen\ \alpha \cdot sen\ \beta$$

Demostración. Se empleará la figura 12 adjuntada en la demostración del seno de la suma de ángulos como referencia.

En la figura se puede ver que:

$m(\measuredangle AOB) = \alpha$ y $m(\measuredangle BOC) = \beta$. Así: $m(\measuredangle AOC) = \alpha + \beta$.

Trazamos:

$$\overline{CG} \perp \overline{OA};\ \overline{CE} \perp \overline{OB};\ \overline{EF} \perp \overline{OA};\ \overline{DE} \perp \overline{CG}$$

A su vez: $m(\measuredangle ECD) = \alpha$.

De lo anterior se desprende:

$$cos(\alpha+\beta) = \frac{OG}{OC} = \frac{OF-GF}{OC} = \frac{OF}{OC} - \frac{GF}{OC} = \frac{OF}{OC} - \frac{DE}{OC} = \frac{OF}{OE}\cdot\frac{OE}{OC} - \frac{DE}{EC}\cdot\frac{CE}{OE}$$

Luego:

$$cos(\alpha+\beta) = cos\ \alpha \cdot cos\beta - sen\ \alpha \cdot sen\ \beta$$

■

(Masjuán *et al*, 2011) (Se han modificado los vértices en relación a la figura 12 que se agregó en la demostración ya mencionada).

- Coseno de la diferencia de ángulos:

$$cos(\alpha-\beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta + sen\ \alpha \cdot sen\ \beta$$

Demostración. Si en la identidad $cos(\alpha+\beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - sen\ \alpha \cdot sen\ \beta$ sustituimos β por (–β), obtendremos:

$$cos(\alpha-\beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ (-\beta) + sen\ \alpha \cdot sen\ (-\beta) \quad (1)$$

Se sabe que: $sen(-\beta) = -sen\ \beta$ (2) y $cos(-\beta) = cos\ \beta$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos:

$$cos(\alpha-\beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - sen\ \alpha \cdot sen\ \beta$$

Q.E.D.

Se encuentran aquí las siguientes funciones:

- Verificación: una de las más importantes, a criterio del investigador. Es interesante apreciar la importancia que tienen los dibujos aquí, ya que son el soporte de la demostración, sin ellas, sería muchísimo más complejo. Ahora bien, el trabajo que implica esta función es más bien de comprobación, evitar aceptar las afirmaciones a la primera.

- Explicación: la demostración crea las respuestas de por qué son verdaderas estas afirmaciones de las identidades trigonométricas. La ayuda que otorga un dibujo como el que se ha adjuntado es lo que permite una comprensión más amplia y clara de cómo se generan estas propiedades. No es de fácil discernimiento el seno y coseno de la suma y diferencia de ángulos, por lo que no es una demostración elemental. La argumentación de estas propiedades no es proceso fácil, por lo que las preguntas que pueden surgir en la clase son el primer obstáculo que encontrará el profesor, y debe estar lo más preparado para contestar cualquier interrogante que surja.
- Sistematización: estas cinco demostraciones adjuntas son la base de los posteriores ejercicios de identidades trigonométricas más complejas. Como la matemática es una ciencia recursiva, estas propiedades emplean todas las definiciones de las razones trigonométricas, así como el teorema de Pitágoras y elementos de geometría elemental, como trazar perpendiculares y relaciones entre ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares. Todas ellas crean la función de sistematización, que se reúnen para lograr la afirmación de estas proposiciones.
- Descubrimiento: el estudiante conoce, en su etapa básica, el sistema sexagesimal de medición de ángulos, con sus respectivos submúltiplos, el minuto y el segundo sexagesimal. Por una cuestión meramente cultural, se le menciona del grado centesimal, además del poco uso que tiene en la actualidad. Pero aquí empleará, habitualmente, el radián, una nueva forma de medición, más avanzada en comparación a las demás. A su vez, resulta más eficiente dado que no tiene unidad de medida, en comparación en el grado sexagesimal. Esta es una ventaja de trabajo que ahorra mucho desgaste, como también mucho tiempo en calcular la inversión de grado a radián y viceversa. Más allá de todo esto, lo fundamental es lo que se extrae de este nuevo saber que le es presentado al alumno, con sus ventajas y desventajas.
- Comunicación: para estas demostraciones, se establece un enlace entre representación icónica y lenguaje algebraico. Es importante señalar que el conocimiento matemático presentado es de una dificultad bastante alta, aún cuando los dibujos son el principal apoyo de éstas. Esta negociación entre un registro y otro debe ser conducido por el profesor de una manera pausada y sin apuro, por la cantidad de recursos geométricos utilizados, así como las relaciones que hay que establecer para llegar a estos resultados.

- Reto intelectual: a primera vista, estas demostraciones poseen un nivel altísimo para que sean comprobadas por los estudiantes que apenas conocen los temas de trigonometría, pero la transformación de grado a radián es de una dificultad moderada, y podría ser incorporada como un desafío a los alumnos. En cuanto al resto, el profesor podría delegar tanto el coseno de la suma y diferencia de ángulos, así como el seno de la diferencia de ángulos en sus alumnos como tarea. Previo a ello, el docente puede ilustrar a sus educandos cómo se concluye que el seno de la suma de ángulos es la fórmula presentada en el enunciado. Consistiría en un muy buen trabajo de cambios de registros, como también en un duelo a sus habilidades matemáticas.

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

De acuerdo a los objetivos específicos planteados, se deduce lo siguiente:

- Fundamentar la importancia de las demostraciones en la educación media en matemáticas.

  El desarrollo del pensamiento lógico – deductivo es uno de los aspectos más relevantes en los estudiantes. Aprender a fundamentar los argumentos es imperativo en una sociedad que avanza velozmente en el ámbito científico. Al respecto, Crespo y Ponteville (2005) dicen que las demostraciones son importantes para que los alumnos sepan que las propiedades o teoremas se cumplen no porque el profesor lo dice, sino porque tienen una validez más rigurosa, que se obtiene con la demostración (...). Es importante demostrar en la clase de matemática porque es lo que diferencia a la matemática de otras ciencias y le da validez. Por la forma de trabajo que ella implica, ordenada y justificando cada paso a seguir, fomenta una forma de pensar y de realizar la tarea (...). La demostración ayuda a los alumnos a la comprensión de los temas (...). De esta manera se ve que los conceptos matemáticos no son cosas inventadas, sino cosas comprobables.

  Por su parte, Martínez (2001) se refiere a que el valor de la enseñanza de la demostración matemática en el aula (...) es de ayudar a comprender la necesidad de validar las diferentes proposiciones matemáticas que se aprenden en el aula, dentro de un objetivo más amplio cual es el de ayudar a comprender la necesidad de validar de modo objetivo el conocimiento científico.

  Nuevamente, Crespo (2007) se refiere a que la demostración (...) surge como indispensable para lograr la comprensión, la capacidad de razonar, no sólo razonar en la ciencia cuya enseñanza nos ocupa sino razonar en situaciones que van más allá de los ámbitos académicos.

  De forma escueta, Sáenz (2001) menciona que parece que la demostración sí parece desempeñar un papel importante: minimiza el riesgo de contradicciones. Sigue Samper *et al* (2010) al respecto: pensar en las funciones de la demostración es reflexionar sobre los aportes de la misma en la formación del individuo.

También Nápoles *et al* (2001), en palabras de Horst Müller (1980) habla que las demostraciones contribuyen de manera esencial al desarrollo de determinadas capacidades mentales de los alumnos, por ejemplo: la argumentación correcta, la fundamentación admisible y plausible, la inferencia exacta, la valoración crítica de argumentaciones, la refutación de proposiciones falsas, la comprensión, la reproducción y el desarrollo independiente de demostraciones.

Se podría considerar de suma importancia la implementación de la demostración matemática en las aulas por los motivos recién señalados. Si bien el investigador a centrado su tesis en el Plan Electivo de Matemáticas de III y IV Medio, se sugiere le sugiere al docente que también intente, en la medida de lo posible, introducir este recurso en sus clases.

- Operacionalizar las funciones de de Villiers referidas al aporte de las demostraciones en la formación de los educandos.

— Verificación: en palabras de Michael de Villiers (1996), la demostración se ha considerado casi exclusivamente en términos de su función de verificación, es decir, verificando la corrección de los enunciados matemáticos.

No se quiere decir con esto que el docente establezca una supremacía de esta función en relación a las demás, sino, más bien, que le permita entender, y así iluminar a sus estudiantes, que la comprobación de enunciados es algo transversal a la ciencia matemática. De ahí su importancia y valor que es menester mencionar.

— Comunicación: a lo largo de la investigación realizada, y en la selección y demostración de los enunciados propuestos, tanto el profesor como el estudiante se encontrarán con esta función permanentemente. Describe de Villiers (1996) este criterio como la negociación del significado y la transmisión del conocimiento matemático.

Muchas veces el alumno tendrá que pasar del registro icónico (como el caso de las sumatorias con el símbolo Σ) al lenguaje natural, y viceversa, como en el estudio de las cónicas. Es en este permanente diálogo de registros en que el maestro traspasa su sabiduría al estudiantado, haciéndole saber qué denota la nomenclatura utilizada o qué fórmula se emplea.

— Explicación: las ventajas que posee el demostrar es la generación de una pregunta no menor: ¿por qué es verdadero? Puede parecer una interrogante superflua, pero que tiene un valor inestimable a la hora de establecer la veracidad de un enunciado. Aquí es cuando el profesor debe sacar provecho a sus educandos, que usen su imaginación, que puedan crear sus propios argumentos a través de los conocimientos previos. Así, pueden ir juntos contestando a la pregunta planteada aquí.

— Descubrimiento: no todas las demostraciones expuestas aquí poseen esta función, pero se pueden crear instancias reflexivas para obtener resultados ligeramente distintos. Entre ellas, se sugieren las siguientes:
    — Ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el eje de las ordenadas, ecuación de la elipse e hipérbola con centro en el origen y focos en el eje Y, así como cuando están ubicadas en un punto (h, k).
    — Resta y cociente de las raíces de la ecuación de segundo grado.

Si bien las primeras no son nuevas, pueden plantearse como ejercicio en clases o para adquirir un nivel de destreza. En cuanto a las segundas, el docente puede realizar conjeturas sobre qué propiedades cumplen o satisfacen estas relaciones. Se pueden lograr resultados muy valiosos, como también explotar la capacidad de reflexión de los estudiantes.

— Sistematización: respecto de esta función, de Villiers (1996) explica que es la organización de varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos y teoremas principales. Algo de suma importancia señala Sáenz (2001) que se relaciona con lo dicho por de Villiers: parece que demostración sí parece desempeñar un papel importante: minimiza el riesgo de contradicciones.

La secuencia lógica y argumentativa que presentan las demostraciones constituye, *per se*, un camino ordenado y estructurado que ayuda a disminuir las paradojas o falsas razones a blas que puedan recurrir los alumnos. Si bien no es inadecuado usar la intuición y otras maneras de pensar, lo que no quita valor como primer paso a la reflexión, el profesor debe recomendar a sus alumnos, en la medida de lo posible, el empleo argumentos matemáticos convincentes y claros.

— Reto intelectual: a juicio del investigador, esta es la función que es la esencia que impregna una demostración. Cada una de ellas posee ciertos requisitos para ser llevada a cabo. A modo de ejemplo, Bravo y Arrieta (s/f) destacan tres capacidades estrechamente relacionadas con las demostraciones geométricas: la de razonamiento, la de visualización y la de imaginación espacial. Más allá de esto, es la satisfacción adquirida luego de demostrar un enunciado, más aún si se ha empleado tiempo y ha constituído un desafío a las capacidades de los alumnos.

- Analizar los contenidos de matemáticas propuestos en los planes y programas oficiales de III y IV medio diferenciado en los que se pueden realizar demostraciones.

  Dentro de los contenidos presentados en los planes y programas de III y IV medio de formación matemática electiva, en casi todos ellos es posible incorporar una demostración o teorema que el docente puede incluir en sus clases. Sólo en el tema de Programación Lineal, en este caso, el teorema fundamental, se puede excluir su demostración (no incorporada en esta tesis; para un tratado de este tema y su demostración, se sugiere la revisión Álgebra II, capítulo X, de Armando Rojo (1998), Editorial El Ateneo, Argentina).

  Ahora bien, hay algunos temas que se han incorporado al plan curricular de formación común de matemáticas. A modo de ejemplo, trigonometría es un contenido que los profesores tienen que abarcar en las clases de plan común. Si bien es de un nivel más bajo, el profesor igualmente podría incluir en sus clases algunas demostraciones que sean de un nivel de dificultad bajo, para ilustrar a sus estudiantes que no todo en la matemática es calcular, sino también, verificar, comprobar algunos enunciados, o sea, demostrar.

  Por otro lado, hay una ausencia de algunos temas que, habitualmente, son tratados en el plan electivo de matemáticas, pero que no son mencionados en los programas de estudio del Mineduc; entre éstos, se pueden mencionar: matrices y determinanates, lógica proposicional, límites y derivadas. ¿Cómo abordaría el investigador estos temas, de acuerdo a las funciones de Michael de Villiers?, ¿por qué no se implementaron estos tópicos a los planes y programas? Estas interrogantes y otras más se podrían haber formulado y pasan a ser parte de las limitaciones de esta investigación.

- Seleccionar cuáles son las demostraciones y sus aportes respecto de las funciones de de Villiers, que un docente pudiera incluir a nivel de aula.
  Si bien, el caso ideal, es que se incluyan todas las demostraciones expuestas con anterioridad, no es menos cierto que el docente puede elegir, de acuerdo a su criterio, cuáles de ellas implementar en clases. Ahora bien, a criterio del investigador, se sugieren las siguientes las siguientes demostraciones a ser tratadas en clases:
  - Obtención de las raíces de la ecuación de 2° grado en $\mathbb{R}$
  - Relación entre las raíces
  - Las ecuaciones de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola en el origen.
  - Propiedades de sumatorias.
  - Transformación de grado a radián.

  El profesor puede escoger, de acuerdo a sus criterios, las demostraciones que sean idóneas a sus cursos, a sus programas o exigencias. Sería útil señalar otro tipo de demostración que pudiese llegar a los mismos resultados expuestos en esta investigación. Se sugiere que el profesor incluya estas demostraciones en el aula, por la importancia y trascendencia que poseen en los contenidos sugeridos por los planes y programas de estudio de matemática.

Es notable apreciar que muchas de estas demostraciones aparece repetida la función verificación. Si bien es cierto que en el ámbito de la matemática es lo que impera, esto no debería obnubilar las otras funciones que destaca de Villiers. Los maestros se ven subyugados, por su formación, a emplear de forma recurrente esta función, dejando de lado otras que, incluso, podrían crear ellos mismos.

La función de explicación, junto con la función de reto intelectual, sistematización y comunicación, son las que aparecen con más frecuencia en las demostraciones expuestas. En cuanto a la primera, esto se debe a que el docente está permanentemente argumentando la proposición expuesta a sus alumnos; aquí entra en juego la sistematización, dado que, como menciona de Villiers, es la organización de varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos y teoremas principales (de Villiers, 1996). Se podría decir que están enlazadas en cuanto a la presentación de los argumentos de manera ordenada que permiten concatenarse entre sí, hasta llegar a la conclusión pedida. A esto debemos sumarle la función comunicación, ya que los profesores transmiten sus saberes hacia sus educandos, haciendo incapié en los significados que poseen los símbolos empleados en sus demostraciones. Muchas de ellas contienen íconos fácilmente reconocibles, así por ejemplo, en la demostración del seno de la suma y resta de ángulos, se empleó el signo Δ para ilustrar que esto significa "triángulo". Por su parte, se empleó Σ para simbolizar la sumatoria de n números, evitando así escribir una larga y tediosa lista de n con sub – índice separados con un signo +. Así, se establece un interesante cambio de lenguaje: del natural al icónico.

Es interesante señalar que la función reto intelectual aparece aún en demostraciones que suelen ser "clásicas", por su reiterada aparición en las aulas; sin embargo, los profesores pueden obtener interesantes reflexiones por parte de sus estudiantes si logran crear, ente todos, otras formas de demostración que no sea, necesariamente, la que aparece en los libros de estudio, sino también, conjeturando posibles respuestas y alternativas que ellos mismos pudieran sugerir. Así se creará una clase dinámica en la que todos son partícipes de la demostración a alcanzar.

Por último, la función descubrimiento es la que menos aparece en las demostraciones citadas. No se puede decir que de todas ellas el estudiante pueda concluir, por sí mismo, alguna propiedad que sea importante. Aún así, es recomendable que los alumnos experimenten un poco sobre qué podrían establecer ellos como "nuevos teoremas", guiados por su profesor. A modo de ejemplo, las propiedades de rectas tangentes a una cónica como la parábola o la elipse o, como se mencionó en su momento, la diferencia o la división entre las raíces de una ecuación de segundo grado. Ambas sugestiones serían de un gran aporte a la metodología del profesor, así como para apreciar la reacción de los educandos a otras propiedades más avanzadas.

ALCANCES

- Incluir otros temas que no son contemplados en los planes y programas que otorga el Mineduc, como matrices y determinantes, lógica proposicional, límites y derivadas, y establecer qué función de Michael de Villiers está presente en cada tema.
- Incorporar algunas demostraciones en el plan común y su clasificación de acuerdo a los criterios adoptados por de Villiers.
- Entrevistar a escolares de enseñanza media y a estudiantes de carreras de pregrado de Licenciatura y/o Pedagogía en Matemáticas si, para ellos, es importante demostrar en clases y por qué.

LIMITACIONES

- Encuestar a un número representativo de docentes de colegio y universitarios preguntándoles sobre cómo clasificarían las demostraciones expuestas en esta investigación, cómo clasificarían esas demostraciones según las funciones de de Villiers y si pudieran crear otras funciones con sus respectivos criterios y definiciones.
- Enfocar estos análisis en un contenido en particular, como por ejemplo, trigonometría, o en contenidos de plan común, como geometría, en donde es más amplia la riqueza de las demostraciones. Esto último es por la razón de que geometría emplea recursos gráficos y el empleo de herramientas manuales como la regla y el compás, por lo que el educando tiene que emplear recursos tanto intelectuales y conceptuales como intuitivos.
- Ocupar una metodología de análisis más amplia que no sólo incluyera la argumentación aristotélica impuesta en los alumnos, sino también otras formas de razonamiento que usan frecuentemente los estudiantes en la sala de clases.

ANEXOS

- Demostración de las fórmulas de prostaféresis:

$$sen\,\alpha\ \cdot sen\,\beta = \frac{cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)}{2}$$

Demostración. Se sabe que:

$$sen(x+y) = sen\,x\cdot cos\,y + sen\,y\cdot cos\,x$$

$$sen(x-y) = sen\,x\cdot cos\,y - sen\,y\cdot cos\,x$$

Si se multiplican miembro a miembro ambas expresiones, resulta:

$$sen(x+y)sen(x-y) = sen^2x\cdot cos^2y - sen^2y\cdot cos^2x \qquad (1)$$

Ahora bien, sean:

$x + y = \alpha \ \wedge\ x - y = \beta$

Sumando miembro a miembro, obtenemos:

$2x = \alpha + \beta \Longrightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ (2)

Restando miembro a miembro, resulta:

$2y = \alpha - \beta \Longrightarrow y = \frac{\alpha-\beta}{2}$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1), se tiene:

$$sen\,\alpha\cdot sen\,\beta = sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Por otro lado, se sabe que:

$$sen\frac{\gamma}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,\gamma}{2}} \Longrightarrow sen^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1-cos\,\gamma}{2}$$

$$cos\frac{\gamma}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\,\gamma}{2}} \Longrightarrow cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1+cos\,\gamma}{2}$$

Si aplicamos estas fórmulas en la expresión anterior, se tiene que:

$$sen\,\alpha\cdot sen\,\beta = \left(\frac{1-cos(\alpha+\beta)}{2}\right)\left(\frac{1+cos(\alpha-\beta)}{2}\right) - \left(\frac{1-cos(\alpha-\beta)}{2}\right)\left(\frac{1+cos(\alpha+\beta)}{2}\right)$$

Operando, se tiene:

$$= \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{cos(\alpha-\beta)}{4} - \frac{cos(\alpha+\beta)}{4} - \cancel{\frac{cos(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta)}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{cos(\alpha-\beta)}{4}$$

$$- \frac{cos(\alpha+\beta)}{4} + \cancel{\frac{cos(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta)}{4}}$$

Finalmente, se tiene:

$$= \frac{\cancel{2}cos(\alpha-\beta)}{\cancel{4}} - \frac{\cancel{2}cos(\alpha+\beta)}{\cancel{4}}$$

$$= \frac{cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)}{2}$$

Q.E.D.

- Demostración de fórmula de prostaféresis:

$$cos\ \alpha \cdot cos\ \beta = \frac{cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)}{4}$$

Demostración. Se sabe que:

$$cos(x+y) = cos\ x \cdot cos\ y - sen\ x \cdot sen\ y$$

$$cos(x-y) = cos\ x \cdot cos\ y + sen\ x \cdot sen\ y$$

Multiplicando miembro a miembro mabas igualdades, resulta:

$$cos(x+y)cos(x-y) = cos^2 x \cdot cos^2 y - sen^2 x \cdot sen^2 y$$

Empleando similar razonamiento que el ocupado en el ejercicio anterior, se tiene que:

$$cos\ \alpha \cdot cos\ \beta = cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Utilizando las fómulas anteriores, llegamos que:

$$cos\ \alpha \cdot cos\ \beta = \left(\frac{1+cos(\alpha+\beta)}{2}\right)\left(\frac{1+cos(\alpha-\beta)}{2}\right) - \left(\frac{1-cos(\alpha-\beta)}{2}\right)\left(\frac{1-cos(\alpha+\beta)}{2}\right)$$

Operando y reduciendo términos semjantes, tenemos:

$$= \frac{1}{4} + \frac{cos(\alpha-\beta)}{4} + \frac{cos(\alpha+\beta)}{4} + \frac{cos(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta)}{4} - \frac{1}{4} + \frac{cos(\alpha-\beta)}{4}$$

$$+ \frac{cos(\alpha+\beta)}{4} - \frac{cos(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta)}{4}$$

$$= \frac{2cos(\alpha+\beta)}{4} + \frac{2cos(\alpha-\beta)}{4}$$

$$= \frac{cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)}{2}$$

■

- Demostrar que: es condición necesaria y suficiente para que un número entero sea divisible por 3, que la suma de sus cifras sea divisible por 3.

Demostración.

$$1 \equiv 1\ (mod\ 3)\ /\cdot\ d \implies d \equiv d\ (mod\ 3)$$

$$10 \equiv 1\ (mod\ 3)/\cdot\ c \implies 10c \equiv c\ (mod\ 3)$$

$$100 \equiv 1\ (mod\ 3)/\cdot\ b \implies 100b \equiv b\ (mod\ 3)$$

$$1000 \equiv 1\ (mod\ 3)/\cdot\ a \implies 1000a \equiv a\ (mod\ 3)$$

Luego:

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0 \equiv a + b + c + d\ (mod\ 3)$$

$$abcd \equiv a + b + c + d\ (mod\ 3)$$

- Entrevistas a profesores de matemáticas:

Docente entrevistado: Cecilia Villalobos. Liceo Técnico Clelia Calvel Dinator

1. ¿Incluiría las demostraciones en sus clases? ¿Por qué?

   Siempre las he incluído, porque al niño le permite ir viendo qué es lo que tiene, qué es a lo que tiene que llegar, qué cosas les sirve y empieza a analizar las cosas. Entonces, les sirve para enfrentarse mejor en la vida, porque después, cuando entre a la universidad, le van a pedir que demuestre cosas, sobre todo si va a seguir algo relacionado con matemáticas, las pruebas son puros teoremas y uno los tiene que demostrar, aplicar, y además que la universidad tiene sale con un nivel muy alto, sobre todo el profesor, sale con un nivel para trabajar en universidad, no para trabajar en un colegio. (Los alumnos) ya aprendieron a razonar. Dicen: "ellos me están pidiendo que calcula tal cosa", "aquí voy a aplicar el teorema del valor medio", por decir algo, y de ahí, uno dice: "¡ah!, pero yo hacía esto o lo otro", entonces, va aplicándolo en su cabeza, le quedó la demostración, como fue llegando, o sea, le permite llegar a un resultado que lo convence de que eso está bien

2. ¿Qué demostraciones incorporaría en el plan diferenciado?

   Todos esos temas los demuestro (refiriéndose a los temas tratados en los planes y programas que entrega el MINEDUC). En tercero medio, sobre todo, demuestro muchas cosas. Lo del teorema del resto uno los va demostrando, y después haces ejercicios en donde el niño va aplicando los mismos pasos. Eso, a ellos, les permite, cuando el "profe" empieza a hablar en la universidad en cálculo y en álgebra no llegan "perdidos", porque los que vienen de un colegio en donde no les enseñaron bien en el plan diferenciado y donde ellos sacaron buen puntaje y optaron por una ingeniería, perdieron álgebra y cálculo "al tiro", o repitieron. Llegan mejor preparados cuando uno demuestra porque, además, uno tiene las tres horas del plan común y las tres del plan diferenciado, entonces, como sabe que los niños que están ahí les gusta realmente la matemática, les gusta demostrar, les gsuta hacer estas cosas, entonces, uno puede pedirles. Generalmente, uno dice "yo voy a demostrar éste teorema, y el otro lo van a demostrar ustedes", más o menos, siguiendo, viendo, entonces ahí los niños se atreven más a preguntar también, y por qué aplicó eso, "es que yo estoy aplicando tal teorema", en geometría analítica uno pone lo que tengo y aquí al lado, como si dividiera la pizarra por la mitad, tengo esto, y si yo aplico esto, voy a llegar a este otro punto, y si aplico esto otro, entonces, va comparando, va viendo, va analizando hasta que llega a la demostración que le piden.

Aún cuando no estén incluído límites y derivadas, uno los incorpora igual ya que como son cabezas más pensantes, uno alcanza a esbozar, en las derivadas, en las integrales, pero yo incluyo estos temas. Termino cuarto medio viendo esas cosas.

3. ¿Qué ventajas y desventajas considera Ud. al demostrar en el aula?

   En este caso, como son niños que les gusta, entonces, ellos están pendientes de lo que tú estás haciendo, o sea, que si tú te equivocaste... porque ellos te dicen: "es que usted dijo tal cosa", entonces ellos se atreven más a preguntar, adquieren más personalidad y, constantemente, en las otras asignaturas están siempre "¿y por qué?", "¿y para qué?", "¿y para qué me sirve?". Entonces, les ayuda a pensar mejor, desarrollan más el pensamiento crítico. No hay desventajas al demostrar, al contrario, muchas ventajas.

4. ¿Qué recurso o recursos incorporaría para demostrar en clases? (Material audiovisual, *softwares*, juego didáctico, etc.)

   Yo prefiero trabajar con los juegos didácticos. Es que en los softwares viene como todo hecho y uno va como "rellenando". En cambio, en un juego de ingenio, les ayuda a agilizar la mente, porque un ingeniero tiene que ser astuto para pensar: "tengo esto, esto, si hago esto otro, ¿se me va a caer el edificio?, ¿me va a explotar el transformador?", tiene que estar lo más atento posible, entonces, prefiero un juego didáctico, que además que se entretienen, le van tomando más gusto a la matemática.

   Antes hacían como campeonatos de actividades lúdicas a los chiquillos y chiquillas, pero acá en media uno ve que le han quitado muchas cosas, que les van poniendo otras; se supone que con esta última reforma que hay cosas que, en segundo, empiezan con potencias, raíces y logaritmos, y uno logaritmos no los veía en segundo medio, uno los veía en cuarto medio. Entonces, de repente, uno ve a las de segundo, si les enseñaron bien, están en competencia con las de cuarto, y se sienten con más ganas porque saben más que las de cuarto. Lo mismo la parte de estadística, igual sirve harto, pero eso lo toman desde primero básico. En primero y segundo medio, cuando iba a pasar estadística les decía “traigan monedas, traigan naipes, traigan dados, traigan dominó”, y las dejaba que jugaran un rato y después empezaba: tire una moneda, ¿qué crees que va a salir? ¿Y si tiramos dos? Entonces ahí la niña pensaba que le podía salir lo uno o lo otro, y con dos, puede tener el doble de posibilidades. Entonces, ya empiezan a analizar con el juego y después ya le empieza a meter la materia y la entienden “al tiro”; entonces, uno tiene que aprovechar de utilizar bien las horas.

Docente entrevistado: Sixta Postigo. Liceo Técnico Clelia Clavel Dinator.

1. ¿Incluiría las demostraciones en sus clases? ¿Por qué?
   Actualmente sí, porque creo que dan desarrollo cognitivo y superior muy alto, muy bueno; nuestros jóvenes son capaces de eso, incluso lo he hecho en el plan común, pequeñas demostraciones, pero que son capaces de llevar a cabo, porque produce un razonamiento muy alto, desarrolla las capacidades superiores en forma extraordinaria. Ellas no lo notan, ellas no lo entienden, pero uno que es especialista, si lo ve, y hay alumnas que destacan; no es que nuestras alumnas no sean inteligentes, son flojas, que es distinto.

2. ¿Qué demostraciones incorporaría en el plan diferenciado?
   Con ellas, en forma adecuada, este año, yo hice trigonometría en tercero medio, e hicieron demostraciones, porque en la medida en que vayamos cada vez más... es bueno ir haciendo demostraciones; primero, comprobando con números, y después hacerlo con letras, o sea, demostraciones algebraicas, pero ellas logran, primero, en forma paulatina, luego, ir subiendo el grado de dificultad, hasta llegar a un punto de abstracción que corresponda. Lo logré yo, por lo menos, con algunos cursos, no todos, es cierto, pero con algunos... a todos les dí lo mismo, pero algunas fueron avanzando más, depende del nivel de preparación que tengan.

3. ¿Qué ventajas y desventajas considera Ud. al demostrar en el aula?
   Ventajas muchas, porque, como te digo, el tener la capacidad de razonar, aumenta mucho su desarrollo personal; desventajas, de que es muy en abstracto y, hoy en día, nuestras alumnas no logran comprender que esto es...

que corresponde a un estudio de la realidad. Cuesta mucho, porque no hay un bagaje cultural previo que acerque matemáticas con la vida real.

4. ¿Qué recurso o recursos incorporaría para demostrar en clases? (Material audiovisual, softwares, juego didáctico, etc.).

   Lo que hemos estado trabajando es con *software*, con juegos didácticos no, podrían ser los juegos didácticos también, pero no los ocupamos. Más bien al estilo universitario nada más que lo he hecho en la sala de clases, plumón y pizarra. Pero ahora, en la parte de trigonometría, en la parte... que lo vieran, las cosas, agregué el *Geogebra*, e Internet, lo usé mucho. Solas, no. Acompañadas por mí han logrado muchas cosas. Ellas no tienen idea del desarrollo personal que tienen, desde el primer mes. "Descúbrelo tú", "hazlo tú", "mira, si pasa esto, constantemente, ¿cómo lo podrías explicar?" Y ahí hay una demostración matemática. Lo hago primero con comprobación, luego, en forma matemática, qué estamos planteando, hay que insistir. Si hay algo a lo que no están acostumbradas nuestra alumnas es que escriban, por darte un ejemplo, el teorema de Pitágoras, los teoremas de Euclides... no, es *h* cuadrado igual a *p* por *q*, pero, ¿por qué?, ¿qué significa *h* cuadrado?, ¿qué significa *p* y *q*? Y ellas no lo saben explicar, o sea, que esta es la proyección, que ahora, una letra es una simbología que ellas tienen que traducir.

BIBLIOGRAFÍA

- Alsina, C. (2011) *Mapas del metro y redes neuronales. La teoría de grafos.* España: RBA.
- Apostol, T. M. (2006) *Cálculus, Volumen 1*. México: Editorial Reverté.
- Ayub Nahum, B. (1996) *Álgebra Clásica.* Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Azcárate Giménez, C. (2001) *Definiciones, demostraciones ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?.* Tomado el 17 de agosto de 2013, de http://www.guiasensenanzasmedias.es/verpdf.asp?area=mates&archivo=GR107.pdf
- Blanco Molleda, S.; De Las Heras Karl, R. E.; Fuenzalida Correa, G.; Riveros Rojas, J. A. (1994) *Matemática III Plan Común. Educación Media.* Chile: Editorial Santillana.
- Blanco Molleda, S.; De Las Heras Karl, R. E.; Fuenzalida Correa, G.; Riveros Rojas, J. A. (1994) *Matemática Plan Electivo III y IV Educación Media.* Chile: Editorial Santillana.
- Bravo Estévez, Mª de L.; Arrieta Gallastegui, J. J. (2005) *Algunas reflexiones sobre las funciones de la demostraciones matemáticas.* Revista Iberoamericana de Educación. Tomado el 17 de agosto de 2013, de http://www.rieoei.org/deloslectores/838Bravo.PDF
- Bravo, L.; Arrieta, J. A. (s/f) *Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: resultados de su implementación.* Tomado el 5 de octubre de 2013, de http://funes.uniandes.edu.co/1364/1/Arrieta2003Una_SEIEM_153.pdf
- Chamizo Guerrero, J. A. (2007) *Las aportaciones de Toulmin a la enseñanza de las ciencias.* Enseñanza de las ciencias, Revista de investigación y Experiencias didácticas, 25(1), págs. 133 – 146.
- Choque, R. (2007) *Cómo hacer demostraciones.* Tomado el 28 de septiembre de 2013, de http://www.matetam.com/sites/default/files/metodos_de_demostracion.pdf
- Carreño Campos, X.; Cruz Schmidt, X. (2002) *Álgebra.* Chile: Arrayán Editorial.
- Crespo Crespo, C. (2005) *La importancia de la argumentación matemática en el aula.* Tomado el 17 de agosto de 2013, de

http://www.soarem.org.ar/Documentos/24%20Crespo.pdf

- Crespo, Cecilia R.; Ponteville, Ch. (2005) *Las funciones de la Demostración en el Aula de Matemática*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 18, págs 307 – 312.
- Crespo Crespo, C. (2007) *Demostraciones matemáticas: Un recorrido a través de la historia desde una visión socioepistemológica*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 20, págs. 548 – 553.
- Crespo Crespo, C.; Farfán, R. M.; Lezama, J. (2009) *Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Págs. 29 – 66.
- Crespo Crespo, Cecilia; Farfán, Rosa María; Lezama, Javier (2010) *Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales.* Relime 283 – 306.
- De Las Heras Karl, R. E.; Fuenzalida Correa, G.; Lara Ramírez, M.; Riveros Rojas, J. A. (1993) *Álgebra y Geometría II. Educación Media*. Chile: Editorial Santillana.
- De Villiers, Michael (1993) *El papel y la función de la demostración en matemáticas.* Sudáfrica, Revista Épsilon. Págs. 15 – 30
- De Villiers, Michael (1996) *¿Por qué demostrar en la Geometría Dinámica?* Tomado el 21 de agosto de 2013, de http://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2012/02/s45-aperitivo-michael-de-villiers.pdf
- García Bello, B.; Hernández Gallo, T.; Pérez Delgado, E. (2010) *El proceso de formación de habilidades matemáticas*. Tomado el 17 de agosto de 2013, de http://www.monografias.com/trabajos81/proceso-formacion-habilidades-matematicas/proceso-formacion-habilidades-matematicas.shtml
- Godino, J. D.; Recio, A. M (1997) *Significado de la demostración en educación matemática*. Tomado el 22 de agosto de 2013, de http://150.185.184.61/profeso/guerr_o/didmat_web/referencias/3.modelos_didacticos/demostraci%F3n%20de%20godino.pdf
- Godino, J.; Recio, Á. (2001) *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática*. Tomado el 24 de agosto de 2013, de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/21763/21597

- Gómez Mendoza, M. A. (2005) *La Transposición Didáctica: Historia de un concepto.* Revista Latinoamericana de Estudios Educativos. Volumen 1, págs. 83 – 115.
- Hernández-Sampieri, R; Fernández Collado, C.; Baptista Lucio, P. (2006) *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill.
- Herstein, I. N. (2008) *Álgebra Moderna*. México: Editorial Trillas.
- Hewitt, P. G. (1999) *Física Conceptual. Tercera Edición.* México: Editorial Pearson.
- Hurrell, S. (s/f) *Transposición didáctica.* C.A.P.A.C.Y.T. Tomado el 16 de Noviembre de 2013, de carlospaba.weebly.com/uploads/1/1/5/8/.../1.transposicin_didctica.pdf
- Ibañes Jalón, Marcelino J. (2001) *Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración.* Quinto simposio de la Sociedad española de Investigación en Educación Matemática. Almería.
- León Corredor, O. L.; Calderón, D. I. (2001) *Validación y argumentación de la matemático en el aula.* Relime Vol. 4, págs. 5 – 21.
- Martín, J. F.; Murillo, J.; Fortuny, J. (2000) *El Aprendizaje Colaborativo y la Demostración Matemática*. Tomado 17 de agosto de 2013, de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/MartinMurilloF02.pdf
- Martínez Recio, Á. (1999) *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Tomado el 18 de agosto de 2013, de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/escorial/ponencia1.htm
- Martínez Recio, Á. (2001) *La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica*. Quinto simposio de la Sociedad española de Investigación en Educación Matemática. Almería. Se puede encontrar en http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/47919/Dialnet-AproximacionAunMarcoTeoricoYMetodologicoEspecifico-2746553.pdf?sequence=1
- Masjuán, G.; Arenas, F. (2000) *Ejercicios de Geometría Elemental*. Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Masjuán, G.; Arenas, F.; Villanueva, F. (2011) *Trigonometría y Geometría Analítica.* Chile: Ediciones UC.
- Mercado Schüler, C. (1993) *Geometría. Curso de Matemática Elemental. Tomo III y IV.* Chile: Editorial Universitaria.

- Mineduc (2002) *Matemática. Álgebra y Modelos analíticos. Programa de Estudio. Tercer Año Medio. Formación Diferenciada*. Gobierno de Chile.
- Mineduc (2002) *Matemática. Funciones y Procesos Infinitos. Programa de Estudio. Cuarto Año Medio. Formación Diferenciada Humanístico-Científica.* Gobierno de Chile.
- Montoro, V. (2007) *Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración.* Argentina: Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias.
- Morales Santacruz, C. A. (2008) *Los métodos de demostración en matemática.* Guatemala: Universidad de San Carlos de Guatemala. Facultad de Humanidades. Departamento de Postgrado. Maestría en Investigación.
- Nápoles Valdés, J.; Macías, D.; Caputo, S.; Espinoza, R.; Jorge, M.; Vilotta, D.; Acosta, J.; Dechat, D.; Oliva, A.; Mengual, C. (2001) *La enseñanza de la demostración matemática*. Tomado el 22 de agosto de 2013, de http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2001/9-Educacion/D-021.pdf
- Penrose, R. (2007) *El camino a la realidad. Una guía completa de las leyes del universo.* México: Editorial Debate.
- Sáenz Castro, C. (2001) *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas.* Quinto simposio de la Sociedad española de Investigación en Educación Matemática. Almería. Se puede encontrar en dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/617798.pdf
- Samper de Caicedo, C.; Ospina Usaquén, Y.; Plazas Merchán, T. (2010) *Aproximación a las visiones de demostración de algunos profesores universitarios de matemáticas*. Tomado 17 de agosto de 2013, de http://www.pedagogica.edu.co/admin/UserFiles/10(1).pdf
- Varas, M. L.; Cubillos, L.; Jiménez, D. (2008) *Análisis de la Calidad de clases de Matemática. Teorema de Pitágoras y razonamiento matemático.* Chile: Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación (FONIDE). Departamento de Estudios y Desarrollo. División de Planificación y Presupuesto. Ministerio de Educación.

Páginas webs

- http://lema.rae.es/drae/?val=demostrar
- http://lema.rae.es/drae/?val=demostraci%C3%B3n
- http://lema.rae.es/drae/?val=prueba

- http://lema.rae.es/drae/?val=investigar
- http://www.medellin.edu.co/sites/Educativo/Docentes/maestrosinvestigadores/Lists/Entradas%20de%20blog/Post.aspx?ID=31
- http://www.fhumyar.unr.edu.ar/escuelas/3/materiales%20de%20catedras/trabajo%20de%20campo/adscripcion.htm
- http://www.medellin.edu.co/sites/Educativo/Docentes/maestrosinvestigadores/Lists/Entradas%20de%20blog/Post.aspx?ID=31
- http://metodologia02.blogspot.com/p/operacionalizacion-de-variables.html
- http://guiadetesis.wordpress.com/2013/08/19/acerca-de-la-investigacion-bibliografica-y-documental/
- http://www.hospitalolavarria.com.ar/Investigaci%C3%B3n%20bibliogr%C3%A1fica.htm
- http://guiadetesis.wordpress.com/2013/08/19/acerca-de-la-investigacion-bibliografica-y-documental/
- http://www.tecnicas-de-estudio.org/investigacion/investigacion22.htm
- http://juanherrera.files.wordpress.com/2008/11/investigacion-cuantitativa.pdf
- iustitia.lex.uchile.cl/biblioteca/archivos/taller/invdoc.pps
- http://profesores.fib.unam.mx/jlfl/Seminario_IEE/Seminario_IEE_Tema_2.pdf