



**Escuela de Educación en Matemática
e Informática Educativa
Facultad de Educación**

**PRINCIPALES DIFICULTADES PARA ACCEDER AL
CÁLCULO QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES DE CUARTO
AÑO MEDIO DE UN ESTABLECIMIENTO CIENTÍFICO
HUMANISTA. UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA**

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN
Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA
E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:
DÍAZ CASTRO, VALENTINA P.

PROFESOR GUÍA:
MARÍA EUGENIA PUYOL ZANINI

SANTIAGO, CHILE
2013

**“Aquellos que tienen el privilegio de saber,
tienen la obligación de actuar”.**

- Albert Einstein

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer a mi familia por el apoyo y amor incondicional durante toda mi vida, sin ellos realmente no sería la persona que soy. A mi madre por la contención, el apoyo y la disposición por ayudar en todo momento, a mi padre por la preocupación constante y ese inmenso amor que siempre hace de las dificultades una pequeñez, a mis hermanos la paciencia, y por supuesto a mi sobrino le agradezco esa alegría inmensa y amor incondicional.

Mención honrosa merece mi Mami, por recibirme en su casa y entregarme el espacio, amor y cariño que necesité para poder realizar mi tarea en completitud y tranquilidad. ¡Gracias Mami!

La Profesora María Eugenia también merece un especial saludo, pues fue parte y apoyo incondicional de mi último año como estudiante, guió mis prácticas profesionales y finalmente aceptó guiar este seminario de grado, brindando su apoyo sin importar el día, hora o lugar.

Finalmente quisiera agradecer a los profesores que participaron en mi formación profesional, quienes entregaron herramientas tanto matemáticas y pedagógicas, como personales e integrales, preparándome para no sólo ser un transmisor de conocimientos, sino una formadora de personas.

Gracias a todos quienes integraron esta bella etapa que ya llega a su fin, son y serán por siempre parte de la profesional que seré.

ÍNDICE

ABSTRACT.....	6
RESUMEN.....	7
CAPITULO I	8
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
1.1 ANTECEDENTES TEÓRICOS Y/O EMPÍRICOS OBSERVADOS	8
1.2 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA	12
1.3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.....	13
1.4 LIMITACIONES	14
1.5 HIPÓTESIS Y/O SUPUESTOS.....	15
CAPÍTULO II	17
ELEMENTOS DEL MARCO TEÓRICO.....	17
2.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA	17
2.1.2 INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN ...	19
2.2 DEFINICIÓN DEL CÁLCULO.....	21
2.3 EVOLUCIÓN DEL CÁLCULO	21
2.4 DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS	22
2.4.1 DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	24
2.4.2 CLASIFICACIÓN DE LAS DIFICULTADES	25
2.5 CONCEPCIÓN DEL LÍMITE.....	34
2.6 RUPTURAS EN EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO.....	36
2.7 PROGRAMAS DE ESTUDIO CHILENOS SECTOR MATEMÁTICA	37
CAPITULO III	43
ELEMENTOS DEL MARCO METODOLÓGICO.....	43
3.1 PARADIGMA O ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN.....	43

3.2 UNIVERSO Y MUESTRA	44
3.4 FUNDAMENTACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE TÉCNICAS E INSTRUMENTOS .	47
3.5 MODELO DE INSTRUMENTO A EMPLEAR	48
3.6 VALIDEZ Y CONFIABILIDAD	48
CAPITULO IV.....	50
TRABAJO DE CAMPO O RECOGIDA DE INFORMACIÓN	50
CAPÍTULO V.....	52
ÁNÁLISIS DE LOS HALLAZGOS DE INVESTIGACIÓN	52
5.1 ANÁLISIS PRELIMINARES	52
5.2 ANÁLISIS A PRIORI Y CONCEPCIONES	58
5.3 EXPERIMENTACIÓN	58
5.4 ANÁLISIS A POSTERIORI Y EVALUACIÓN	84
CAPÍTULO VI.....	87
CONCLUSIONES.....	87
BIBLIOGRAFÍA.....	92

ABSTRACT

This research seeks to identify the main difficulties to access the calculation with respect to the basic objects of calculation set forth for this research as numbers, functions and sequences, the design of the boundary as the core of calculus and ruptures in terms of practices over Algebra to Calculus, with students attending fourth half - year of a Scientific Humanist establishment of the Metropolitan Region.

Using a Didactic Engineering seeks to validate and complement the difficulties presented by the students in the knowledge that these should already have this with a previous analysis of existing curricula for 2013, for which an assessment is applied in a design session consisted of three items: Multiple choice, and open response items, with a total of 14 questions and having 90 minutes to develop. The results will be organized in data tables and pie charts, for synthesizing and clear analysis of these. According to the item being studied are identified and defined the categories used for analysis.

This thesis does not seek to solve the problems, but rather to serve as a tool and guide for the math teacher from high school and in turn assume that access difficulties Calculation not depend entirely on university education, but are also linked Media Education and the treatment that is given to the content and the development of mathematical reasoning in the training of students. Note that this thesis is not transferable given its qualitative approach, but can be used as a guide to identify the difficulties in accessing the calculation made by another group of students at the same level in Chile and even freshmen who are studying Calculus course, since the contents stipulated by the curriculum are the same for the whole country.

Keywords: Differential Calculus, Learning Disabilities, Teaching Engineering.

RESUMEN

Esta investigación busca detectar las principales dificultades para acceder al Cálculo con respecto a los objetos básicos del Cálculo estipulados para esta investigación como: números, funciones y sucesiones, a la concepción del límite como eje central del Cálculo y a las rupturas en cuanto a las prácticas en el paso del Álgebra al Cálculo, que tienen los estudiantes que cursan cuarto año medio de un establecimiento Científico-Humanista de la Región Metropolitana.

Mediante una Ingeniería Didáctica se busca validar y complementar las dificultades que presentan los estudiantes en los conocimientos que estos ya deberían tener, esto con un previo análisis de los programas de estudio vigentes para el año 2013, para lo que se diseñó una evaluación aplicada en una sesión conformada por tres ítems: Selección Múltiple, respuesta abierta y conceptos, con un total de 14 preguntas y disponiendo de 90 minutos para desarrollarlo. Los resultados obtenidos serán organizados en tablas de valores y gráficos de sectores, para una sintetización y análisis claro de estos. Según el ítem que se esté estudiando se identificarán y definirán las categorías utilizadas para el análisis.

Esta tesis no busca dar solución a las dificultades, sino que pretende servir de herramienta y guía para el profesor de matemáticas de enseñanza media y a su vez asumir que las dificultades de acceso al Cálculo no dependen completamente de la Enseñanza Universitaria, sino que también están ligadas a la Educación Media y al tratamiento que se le da a los contenidos y al desarrollo de un razonamiento matemático en la formación de los estudiantes. Cabe mencionar que esta tesis no es transferible dado su enfoque cualitativo, pero si se puede utilizar de guía para identificar las dificultades de acceso al Cálculo que presente otro grupo de estudiantes dentro del mismo nivel en Chile e incluso en estudiantes de primer año que estén cursando un curso de Cálculo, puesto que los contenidos estipulados por los programas de estudio son los mismos para todo el País.

Palabras Claves: Cálculo Diferencial, Dificultades de aprendizaje, Ingeniería Didáctica.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 ANTECEDENTES TEÓRICOS Y/O EMPÍRICOS OBSERVADOS

En el año 2009, el Ministerio de Educación publicó el Decreto N°254 que modifica al Decreto supremo N° 220 que contiene los Objetivos Fundamentales (OF) y los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) para la Educación Media desde el año 1998. Esto, a causa de las nuevas exigencias educacionales. Esta modificación pretende potenciar el desarrollo de Conocimientos, Habilidades y Actitudes con la finalidad de favorecer el desarrollo integral de cada estudiante, enfocándose no sólo en los conocimientos sino en las habilidades y actitudes que necesitan adquirir los estudiantes para desenvolverse de mejor manera en los variados ámbitos de sus vidas.

Dentro de los Sectores considerados para ser modificados en Educación Media se encuentra Matemática, tanto en la Formación General como en la Formación Diferenciada, esta última impartida en el segundo ciclo de Enseñanza Media en tres modalidades: Humanístico-Científica, Artística y Técnico-Profesional. *“En el caso de la educación media se considera, además, el carácter diferenciado que debe tener una proporción importante de esta experiencia formativa, la que debe ser relevante tanto para la formación de la persona y del ciudadano, como para la prosecución de estudios superiores y el desempeño en actividades laborales.”* (MINEDUC, 2009).

Este Ajuste Curricular pretende una implementación paulatina en la enseñanza, inicialmente pensada para comenzar el año 2010 en primer año medio, y así sucesivamente hasta el año 2013 en cuarto año medio, lo que se vio modificado en el Decreto N° 257, entregando más tiempo a los docentes para preparar esta implementación gradual a partir del año 2011 con primer año medio y finalizar el año 2014 en cuarto año medio.

Es entonces en cuarto año medio, específicamente en la Formación Diferenciada Humanístico-Científica sector Matemática, en donde esta investigación se quiere enfocar, puesto que este grupo de estudiantes son quienes probablemente desean una continuidad de estudios, más aún en algún aspecto puede esta continuidad relacionarse con las matemáticas. También existe la posibilidad de una incorporación del Cálculo en este sector, puesto que los programas de estudio modalidad diferenciada actualizados aún no han sido publicados por el Ministerio de Educación, por lo que los establecimientos tienen libertad para crear sus propios

planes y programas de estudio, esto en función de los requerimientos específicos de cada comunidad escolar y los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, *“En el caso de la Educación Media Humanístico-Científica, la Formación Diferenciada consiste en planes de estudio que deberán definir los establecimientos, en que alumnos y alumnas, por sobre el tiempo dedicado a la Formación General, dedican un tiempo adicional a expandir o profundizar sus aprendizajes en un número reducido de sectores, siguiendo sus intereses, aptitudes o expectativas de salida. Para este propósito, se han definido objetivos y contenidos adicionales a la Formación General en cada sector curricular.”* (MINEDUC, 2009). Siendo efectiva esta posible incorporación del Cálculo en la enseñanza media, específicamente en cuarto año medio, cabe cuestionarse si los estudiantes están preparados para acceder a esta nueva área de las matemáticas.

El Ajuste Curricular presenta un nuevo ordenamiento de los contenidos a enseñar, pues ya no se habla de unidades de aprendizaje sino de ejes temáticos o curriculares a saber, que son: Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar y, a la vez, se definió el Razonamiento Matemático como un eje transversal a estos cuatro anteriormente mencionados, es decir, desde el primer año de Enseñanza Básica hasta el último de Enseñanza Media, los contenidos se estructuran a raíz de estos cuatro ejes, todos en función del desarrollo de un Razonamiento Matemático enfatizando en que los estudiantes puedan resolver problemas, formular conjeturas, verificar la validez de los procedimientos y relaciones, modelar situaciones y razonar bajo hipótesis. Todas estas, características esenciales para poder acceder al Cálculo, de manera que esta inclusión de nuevos contenidos en la educación universitaria no sean tan invasivas para los estudiantes de este sector educativo.

A base de todo lo mencionado con anterioridad, lo que este trabajo pretende, a través de una Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, es lograr identificar las principales dificultades que presentan los estudiantes del último nivel del segundo ciclo de Educación Media Formación Diferenciada Sector Matemáticas, para acceder al Cálculo, puesto que son ellos quienes tienen más probabilidades de enfrentarse a esta área de las matemáticas si es que continúan con sus estudios.

No está demás mirar lo que ha pasado a nivel mundial con respecto a la Enseñanza del Cálculo. Michèle Artigue, en su trabajo *“INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA”* (Michèle Artigue, 1995) resume lo que fue la reforma de 1902 y la introducción del Cálculo en el liceo en Francia, producto de las dificultades de acceso al Cálculo que presentaban los estudiantes al ingresar a la Educación Universitaria, en un principio se quiso enseñar según las capacidades cognitivas de los estudiantes, introduciéndolo desde el primer grado del liceo en los

sectores científicos (1º Medio) hasta el último grado en todos los sectores (4º Medio) la idea era introducir una concepción experimental de las matemáticas, vinculándolas con el mundo real y así hacerla útiles para las otras ciencias. (Michèle Artigue, 1995), luego se introdujo la noción de derivada sin el concepto de límite. Y en los inicios de los años sesenta se incorporaron las generalidades de las funciones con variables reales: límites, continuidad, derivadas y teoremas hasta llegar a la definición formal de Límite, es decir se comenzó a trabajar el Cálculo desde sus definiciones. Y en los años 80, surge una contra reforma impulsada por los profesores de la AMPEP¹ y de los IREM². Estos criticaron la última reforma de los años 60 enfocándose en la introducción de las nociones básicas a través de problemas importantes y cercanos al estudiante, equilibrar lo cualitativo con lo cuantitativo, utilización de un lenguaje más formalizado, teorizando lo necesario con base en los niveles de aprendizaje de los estudiantes y promover un enfoque constructivista del aprendizaje.

Entonces finalmente la introducción al Cálculo se abarcó desde un enfoque intuitivo, introduciendo a partir de ejemplos el lenguaje de límites sin que esta noción estuviese definida, predominando la resolución de problemas y noción de derivadas, hasta llegar a continuidad y cálculo de máximos y mínimos. Previo a toda esta incorporación se debió estudiar las debilidades que presentaban los estudiantes para poder acceder al Cálculo o a los principios de este.

Por lo tanto, la presente investigación, busca identificar las dificultades que tienen los estudiantes al acceder al cálculo fuera de una incorporación paulatina a nivel medio o un enfrentamiento a nivel universitario, ya que en cualquiera de las dos ocasiones, estas dificultades aparecerán y parece necesario conocerlas y a raíz de esa información formar estrategias para enfrentarlas. Más aún, es preferible identificarlas y disminuirlas si es posible en la educación secundaria para disminuir la brecha entre la educación secundaria y la educación terciaria.

En cuanto a lo que pasa en Chile con respecto a la enseñanza de los principios del Cálculo, la Universidad Diego Portales, imparte un curso de cálculo gratuito para estudiantes de 3º y 4º año de enseñanza media siendo este año la decima versión de este curso, indicando a los estudiantes que es una oportunidad para nivelar contenidos, prepararse para la PSU y acercarse a la vida Universitaria; en cuanto a su malla curricular, esta cuenta de dos Etapas, la primera catalogada como pre-

¹ AMPEP Asociación de Profesores de Matemáticas del Sector Oficial (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

² IREM Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques)

cálculo, que consta de dos meses y medio de trabajo (13 sesiones), en la que se trabajan los Números reales, Funciones de Variable Real, Límite y continuidad y finaliza con una Introducción a derivadas. La segunda Etapa, denominada como Cálculo, que abarca 7 sesiones correspondientes a un mes y medio de trabajo y se enfoca principalmente en la derivada, su definición en un punto e interpretación geométrica, la función derivada, cálculo de derivadas y aplicaciones de esta.³ Se identifica que las dos primeras unidades de trabajo presentes en este programa de estudio, están enfocados a conceptos básicos y primordiales para acceder al Cálculo, abordados desde una visión de nivelación completamente necesaria para poder continuar con los contenidos nuevos.

La Universidad de Chile, por su lado, dentro de los cursos de verano del año 2014, impartirá uno virtual denominado “Introducción al Cálculo Diferencial”, que constará de 14 videoclases y 9 ejercicios resueltos, todo a través de la plataforma virtual Classroom.tv. La idea central de este curso es acercar a los estudiantes a su universidad y que la tomen como prioridad. La malla ofrecida por este curso aún no está publicada, por lo que no se puede hacer referencia a ella, que es en esencia lo que realmente esta investigación quiere conocer.⁴ Cabe mencionar que en algunos establecimientos del país que utilizan programas de estudios propios, se enseña el Cálculo en cuarto medio, lo que implícitamente muestra la necesidad de reforzar estos contenidos antes de que ellos ingresen a la Educación Superior.

En la Universidad Católica Silva Henríquez no se han presentado cursos de este tipo, pero si se ha reflejado en la carrera de Kinesiología y Fonoaudiología problemas con la actividad curricular MATEMÁTICAS 1, en ambas carreras los estudiantes de primer año deben cursar en el primer semestre la actividad, la cual consta de cuatro unidades temáticas: números reales, funciones, límite y continuidad, y derivadas. En Fonoaudiología la cantidad de estudiantes que cursó la actividad curricular el año 2013 fue de 85 y la cantidad de estudiantes que la reprobó fue de 39, lo que representa al 45,8%⁵ de los estudiantes, en Kinesiología ocurrió algo similar, en el año 2013 la cantidad de estudiantes que cursó la actividad curricular fue de 189 y a su vez el total de reprobados fue de 79 lo que corresponde al 41,7%⁶, en ambas carreras la situación fue similar, gran cantidad de estudiantes reprobó el curso, lo que representa dificultades en el acceso al Cálculo y probablemente debiese ser enfrentada con la implementación de un curso de pre-

³ Para ver más sobre el curso ir a : <http://www.cienciasbasicas.udp.cl/calculo/objetivos.html>

⁴ Para ver más sobre la EDV ir a : <http://www.edv.uchile.cl/cursos-de-verano-2014/ciencias-fisicas-y-matematicas/>

⁵ Información entregada por la secretaría de estudios de la carrera de Kinesiología de la UCSH.

⁶ Información entregada por la secretaría de estudios de la carrera de Kinesiología de la UCSH.

cálculo (como en las universidades anteriormente mencionadas) para así disminuirlas.

Con todo lo mencionado anteriormente si se compara, a nivel Internacional, la preocupación por minimizar los problemas de acceder al Cálculo, más aún la idea de incorporar el cálculo o los principios de este en la Educación Media, está claro que llegó un siglo más tarde, pero ciertamente es necesaria para un acercamiento entre la Educación Media y la Universitaria. Lo demuestra la iniciativa de las Universidades de impartir cursos de acceso al Cálculo para estudiantes de Educación Media y así minimizar las dificultades que se presentan en los primeros años universitarios en los que se ven los cursos relacionados a esta área de las matemáticas, que si bien las universidades lo abordan con una finalidad es interna, la idea de acercar el Liceo a la Universidad en esta área se hace cada vez más necesaria, ejemplo claro es lo que está pasando en las carreras de Kinesiología y Fonoaudiología de la UCSH, pero claro está que no se pueden incorporar contenidos nuevos a los estudiantes, sea cual sea su nivel de enseñanza, sin antes conocer las debilidades que estos presentan frente a este tema por lo que es ahí donde esta investigación desea indagar.

1.2 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA

Todas las personas relacionadas a la educación, saben que previo a una incorporación de nuevos contenidos se deben conocer las dificultades asociadas a estas, ya sea con los contenidos previos necesarios para la introducción de los nuevos, como las asociadas a los ejes centrales o conceptos principales de la temática en cuestión y más aún en la situación que planea esta investigación que es el paso del Álgebra al Cálculo, considera un complejo proceso por lo que hay que tomar en cuenta además las rupturas necesarias que este paso influye.

Uno de los factores que también influye en esta investigación es la deserción universitaria. Todos los estudiantes que entran a carreras universitarias o técnico-profesionales vinculadas a las matemáticas deben tomar al menos un curso de cálculo, lo que muestra la importancia de tener la menor cantidad de dificultades asociadas al acceso de estos contenidos antes de ingresar a la universidad. Esto podría influir en una baja en la deserción en la educación superior en Chile, la que se ve reflejada en los siguientes datos, más de un 50% de los estudiantes matriculados en pregrado no concluyen el programa en el que inicialmente se matricularon datos entregados por el Ministerio de Educación de Chile. Los factores

para la existencia de este 50%⁷, no se estudiaran en este trabajo, pero dentro de las variables que influyen en este valor están las académicas, donde influye claramente el programa de estudio de la institución de la que provienen los estudiantes.

1.3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Entonces, esta investigación tiene un objetivo claro que es buscar las principales dificultades de acceso al Cálculo en cuarto año medio, puesto son estos estudiantes quienes están a un paso de acceder a la Educación Universitaria y ya han completado su Educación Media. En los Fundamentos del Ajuste Curricular Sector Matemática se enfatiza la concepción de la enseñanza de esta disciplina como un proceso de diseño e implementación, como se ve a continuación:

“Se concibe la enseñanza de la matemática como un proceso de diseño e implementación de un conjunto de actividades que mediatice la relación entre el estudiante y los contenidos del Curriculum de matemática, el proceso de mediatización incluye espacios guiados de construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias de razonamiento y resolución de problemas.” (MINEDUC, 2009)

Entonces, como ya se mencionó con anterioridad, la finalidad de esta investigación, identificar las principales dificultades de acceso al Cálculo, la metodología que se pretende utilizar es una Ingeniería Didáctica, la que a través de sus fases de investigación, permite identificar estas dificultades y obtener conclusiones de acuerdo a los resultados obtenidos, las que pueden ser utilizadas para crear estrategias para enfrentarlas y probablemente que las disminuyan. Para lograr el desarrollo de este problema planteado, se formuló la siguiente pregunta de investigación y sus sub-preguntas:

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

- *¿Cuáles son las principales dificultades para acceder al Cálculo que presentan los estudiantes cuarto año medio formación diferenciada sector matemáticas, en un establecimiento Científico-Humanista de la región metropolitana?*

⁷ <http://www.mineduc.cl/usuarios/bmineduc/doc/201209281737360.EVIDENCIASCEM9.pdf>

Mediante esta pregunta de investigación se busca encontrar las dificultades de los estudiantes de Cuarto medio para acceder al cálculo, es por eso que se deben visualizar las Dificultades con ciertos contenidos previos, con conceptos propios del Cálculo diferencial y con ciertas rupturas que se deben hacer para poder acceder a estos conceptos propios: es ahí donde surgen las siguientes sub-preguntas:

SUB-PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- *¿Cuáles son las principales dificultades asociadas a los objetos básicos del cálculo que presentan estos estudiantes?*
- *¿Cuáles son las principales dificultades en la conceptualización del límite como pilar fundamental del cálculo?*
- *¿Cuáles son las principales rupturas para pasar de un pensamiento puramente algebraico, a las especificidades del trabajo técnico del Cálculo?*

Estas sub-preguntas, son aquellas que derivan de la pregunta de investigación, permitiendo dar respuesta a esta y posibilitando un mejor resultado. Estas tres sub-preguntas están relacionadas a las dificultades, en específico a las que se asocian a los objetos básicos del cálculo, es decir a los contenidos básicos necesarios para poder acceder al Cálculo. La segunda sub-pregunta enfatiza en las dificultades asociadas a la concepción de límite, puesto que es este concepto el pilar fundamental del cálculo. Finalmente la tercera sub-pregunta hace relación a las dificultades que se generan en los estudiantes al momento de hacer las rupturas en un pensamiento que es puramente algebraico, para pasar a uno que si bien conserva las prácticas algebraicas las modifica e involucra nuevas prácticas y formas de razonamiento.

1.4 LIMITACIONES

Como todo trabajo de investigación, existen diversas limitaciones al momento de crear o realizar un estudio. Para poder establecerlas se clasificaran en dos tipos: Internas y Externas.

LIMITACIONES INTERNAS:

Como limitación interna, se entenderá a las limitaciones que sólo dependen de los investigadores. Se tomará en cuenta que esta investigación es realizada por una persona, lo que significa que las conjeturas y conclusiones que aquí se obtengan serán en base de lo que el Marco Teórico y el Marco Metodológico entreguen, por el momento no se podrán discutir ideas ni opiniones, lo que reduce ese punto de la investigación.

LIMITACIONES EXTERNAS:

Por Limitaciones externas entonces, se entenderán las que están fuera del alcance de los investigadores, es decir que son controladas por otras personas o sucesos. La primera limitación que se debió enfrentar, surgió de una conversación informal con una profesora del Colegio María Luisa Villalón de la comuna de Santiago, en esta conversación se informó que el MINEDUC estaba asistiendo a algunos colegios de la R.M. para presentar el nuevo programa de estudio de Cuarto año Medio Educación Matemática 2014, y las sugerencias para el Plan Diferenciado Humanístico Científico en el mismo sector, donde suena fuerte la idea de incorporar el Cálculo a la Educación Media. Para confirmar esto y conseguir información más concreta, se contactó (sólo mediante una llamada telefónica) a la señora Elke Walter, Coordinadora del equipo de matemáticas de la unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación, quién afirmó estar trabajando en un tema relacionado al Cálculo y la Educación Media, y a la vez expresó no poder entregar más información al respecto, por lo que sólo había que esperar hasta el año que correspondiera para ver las publicaciones. Esto en un principio fue una gran limitación ya que se deseaba trabajar con la información que desde esta dependencia se pudiese haber proporcionado para el desarrollo de la investigación, para identificar desde esa afirmación las dificultades asociadas a esta incorporación, puesto que estaban trabajando en ello y por supuesto la información con la que cuentan es muy valiosa para este trabajo. Así, se tomó entonces la decisión de llegar a la identificación de estas por otros medios y fundamentos no tan ligados al MINEDUC.

Otras limitaciones de seguro surgirán a medida que esta investigación avance las que se resolverán en el transcurso de la misma.

1.5 HIPÓTESIS Y/O SUPUESTOS

Las hipótesis de investigación corresponden a las justificaciones que se les da a la investigación, la que puede ser verdadera o falsa y se verá al final de esta.

Los supuestos son considerados como respuestas provisionales a la pregunta de investigación, y deben ser comprobados empíricamente. Estos, con el transcurso del tiempo pueden mejorarse, acotarse, precisarse, anularse o también surgir nuevos durante el proceso de investigación.

En este caso se formularon tres supuestos:

- Al identificar las dificultades de acceso al cálculo se puede lograr una didáctica de un pre-cálculo que las utilice para lograr contribuir en los aprendizajes del último nivel de enseñanza de la Educación Media Formación diferenciada Sector Matemáticas.
- Los objetos básicos del Cálculo, la conceptualización del límite y las rupturas necesarias en un pensamiento algebraico, son la base de un pre-cálculo.
- El paso de las representaciones y prácticas comúnmente enseñadas y aprendidas como estáticas en relación al álgebra, a unas de tipo dinámicas es un pilar fundamental para entrar al mundo del cálculo.

1.6 OBJETIVOS GENERALES Y ESPECÍFICOS

Entonces, para dar respuesta a la pregunta y sub-preguntas de investigación se formularon los Objetivos Generales y Específicos, que en adelante dirigirán la investigación.

Objetivo General:

- Identificar las dificultades de acceso al cálculo que tiene un grupo de estudiantes de cuarto año medio formación diferenciada humanístico-científica sector matemáticas de un colegio de la R.M; para identificarlas y utilizarlas con el propósito de disminuir la brecha entre la Educación Media y la Universidad.

Objetivos Específicos:

1.- Identificar las dificultades asociadas con:

- La complejidad de los objetos básicos del Cálculo: números reales, sucesiones y funciones: y como estos objetos si se conceptualizan plenamente cuando se inicia la enseñanza del cálculo, van a contribuir fuertemente a su aprendizaje.
- La conceptualización y la formalización del límite como centro del campo del cálculo.
- Las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraico y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo.

CAPÍTULO II

ELEMENTOS DEL MARCO TEÓRICO

Esta tesis tiene como Objetivo General identificar las dificultades de acceso al cálculo que tiene un grupo de alumnos pertenecientes al último nivel del segundo ciclo de enseñanza media en un Liceo Científico-Humanista de Comuna de Macul, encasillando estas dificultades en los siguientes planos: **Cognitivo**, al buscar las dificultades relacionadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo, **Epistemológico**, en cuanto a la conceptualización y a la formalización del límite como centro del campo del cálculo y **Didáctico**, cuando se objetiva la idea de identificar las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraico y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo. Esto a través de una Ingeniería Didáctica, lo que permitirá establecer estas dificultades. La recogida de información será a través de un Análisis *a priori*, en el que se aplicará un test que permitirá identificar estas dificultades, y que forma parte de la primera etapa de investigación que más adelante se visualizará.

También se analizarán los Planes y Programas de estudio entregados por el Mineduc para los cursos desde Séptimo Básico hasta Cuarto Medio con la finalidad de determinar si es que los Objetos Básicos del Cálculo, aquí identificados como: Números, Funciones y Sucesiones y estipulados así por Artigue en su trabajo “Ingeniería Didáctica en Educación Matemática” (Michèle Artigue, 1995), están presentes en el Currículum Nacional y desde que plano se abordan; en el caso de que estos aún no estén publicados como los de Tercero y Cuarto Medio, se recurrirá al Ajuste Curricular Nacional en donde se explicitan los contenidos de cada nivel, y se definirá la “Ingeniería Didáctica”, correspondiente a la metodología de investigación utilizada, su historia, definición, fines y obstáculos.

2.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA

La Ingeniería Didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a principios de los años ochenta. Esta nace inmersa en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, la que se centra en modelar situaciones de enseñanza para permitir una elaboración y gestión controlada, además esta ingeniería incluye la elaboración de un texto de saber y la presentación de esos saberes en situaciones que permitan gestionar de manera controlada el aprendizaje. La ingeniería didáctica es percibida como el medio de abordar dos aspectos cruciales en la didáctica de las matemáticas

de la época, en primer lugar las relaciones entre la investigación acción en el sistema de enseñanza y segundo, el papel que conviene hacerle tomar a las “realizaciones didácticas” en clase, dentro de las metodologías de investigación en didáctica.

Según Artigue: *“se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.”* (Michèle Artigue, 1995)

En palabras de Douady: *“el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase.”* (Douady, 1996)

Entonces se puede decir que el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza. La función de metodología de investigación busca caracterizar a-priori una situación y confrontarla con un análisis a-posteriori de la realidad observada. La segunda función es más estandarizada, pues cumple con los requisitos correspondientes a una ingeniería, es decir, es eficaz, posee solidez y se adapta a diversos contextos.

Artigue (Michèle Artigue, 1995), distingue tres dimensiones ligadas a los procesos que componen la ingeniería didáctica, las que derivan de una perspectiva sistemática y a la vez son paralelas a la propuesta de G. Brousseau para el estudio de los obstáculos (Brousseau, *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, 1976). A continuación se explican en breves palabras cada una de estas dimensiones en palabras de Artigue:

- La dimensión *epistemológica* asociada a las características del saber en juego.
- La dimensión *cognitiva* asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
- La dimensión *didáctica* asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Como ya fue mencionado, el sustento teórico de la ingeniería didáctica proviene de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau G. , 1987) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991) , que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau G. , 1987).

2.1.2 INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En general la ingeniería didáctica como metodología de investigación se caracteriza por tener un **carácter experimental** basado en las realizaciones didácticas, es decir, en la concepción, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Por otra parte también se caracteriza por corresponder a estudios de caso y por tener una validación interna, la cual se basa en la confrontación entre el análisis *a-priori* y *a-posteriori*.

Se pueden distinguir dos niveles de ingeniería didáctica: micro-ingeniería y macro-ingeniería. Las investigaciones que se realizan a nivel de micro-ingeniería son las que tienen por objeto el estudio de un determinado tema, son más fáciles de llevar a la práctica, permiten tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos en el aula. Las investigaciones que corresponden al segundo nivel mencionado, permiten componer la complejidad de las investigaciones de micro-ingeniería con las de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Esta metodología también se caracteriza por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada, puesto que la mayoría de las investigaciones que recurren a la experimentación de clase por lo general se sitúan en un enfoque comparativo de validación externa. Por el contrario este tipo de investigaciones se ubica en un registro de los estudios de caso y su validación es interna.

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis a-priori de las situaciones didácticas, experimentación y análisis a posteriori y evaluación.

- **Fase 1 – Análisis Preliminares:** en esta primer etapa de la investigación se deben hacer diversos análisis relacionados a los contenidos es decir, análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; el análisis de las concepciones, de las dificultades y de los obstáculos que determinan su evaluación y, finalmente, de las restricciones donde se va a situar la acción didáctica.
- **Fase 2 – Análisis de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas:** esta fase corresponde a la búsqueda de significados a raíz de la información recopilada en los análisis preliminares, se identifican las variables (macro y micro didácticas), los medios o herramientas requeridas para la estructuración, forma y dimensión de la estrategia a diseñar. Es decir en el análisis a priori se describen los hallazgos, se analizan y posteriormente se prevén los pasos a seguir y lo que pudiese ocurrir, por lo tanto, este análisis comprende una parte descriptiva y una parte predictiva, ambas centradas en las características de la situación a diseñar.
- **Fase 3 – Experimentación:** en esta fase se explican los instrumentos a utilizar y su contexto, se implementan los instrumentos y se recopilan los datos que informan sobre los fenómenos identificados en el análisis a priori, registrando las observaciones pertinentes en cada ámbito.
- **Fase 4 – Análisis a Posteriori y Evaluación:** en esta etapa se presenta el registro de las observaciones obtenidas durante la experimentación, se fundamenta en un análisis del contenido de los datos recopilados y se confrontan con el análisis a priori.

Como se mencionó con anterioridad esta metodología cuenta con una fase de validación, la cual es interna, en donde se confrontan los análisis a-priori y a-posteriori. Cabe resaltar que se puede validar o refutar la hipótesis de investigación en esta etapa.

2.2 DEFINICIÓN DEL CÁLCULO

Cada vez que se habla de cálculo se entiende la idea de un resultado correspondiente a la acción de calcular o contar a través de algún procedimiento. La idea es entender la definición más simple y clara de este término, por lo que se recurrirá a la Real Academia de la Lengua Española.

Según la Real Academia de la Lengua española:

“Cómputo, cuenta o investigación que se hace de algo por medio de operaciones matemáticas.” “Conjetura”

Esta definición se desglosa según el “apellido” que este concepto lleve:

Algebraico: cálculo que se hace con letras que representan las cantidades, aunque también se emplean algunos números.

Aritmético: cálculo que se hace con números exclusivamente y algunos signos convencionales.

Diferencial: parte de las matemáticas que opera con las diferencias infinitamente pequeñas de las cantidades variables.

Infinitesimal: conjunto de cálculos diferencial e integral.

Integral: parte de las matemáticas que trata de obtener una función a partir de su derivada.

Proposicional: parte de la lógica formal que estudia las estructuras deductivas de las implicaciones lógicas y sus relaciones axiomáticas.

Prudencial: cálculo que se hace a bulto, con aproximación y sin buscar la exactitud.

También la medicina define este concepto, pero en esta ocasión no será necesario mencionarla.

Bueno sin indagar más allá por el momento cada vez que se hable de Cálculo se hará referencia al Cálculo Diferencial, como área de las matemáticas y si es que se le desea dar otra connotación, esta se aclarará en el momento.

2.3 EVOLUCIÓN DEL CÁLCULO

Las primeras nociones de Cálculo surgieron en trabajos de aproximaciones hechos por Arquímedes quien para encontrar el área bajo el arco de una parábola utilizó la sumatoria de una serie infinita obteniendo un valor extremadamente cercano a Pi.

Ya en el siglo XVII es Newton y Leibniz quienes formalizan y relacionan la idea de hallar tangentes a curvas y la de calcular áreas bajo curvas a integral. A lo largo del tiempo otros matemáticos fueron interviniendo en el desarrollo del Cálculo tales como Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, Leonard Euler y Joseph Lagrange. Pero no fue hasta al siglo XIX que se establecieron los Fundamentos de las nociones y procesos del Cálculo por matemáticos como Bernhard Bolzano, Agustín Cauchy, Karl Weierstrass y Richard Dedekind. (Leithlod, 1998)

Se podría decir que los estudios y trabajos relacionados al Cálculo han tomado ya cerca de XX siglos para analizarse, comprenderse y establecerse aún quedando inconclusas muchas cosas, entonces surge la siguiente pregunta ¿Es posible incorporar el Cálculo o los preliminares de este en un semestre?, probablemente la respuesta sea que no, pero si se puede impartir un curso que entregue las nociones y los conceptos básicos necesarios para poder abordarlo con mayor profundidad en cursos superiores a la Educación Media.

En Chile todas las carreras relacionadas directamente con las matemáticas imparten al menos un curso de Cálculo, y hay que tener en consideración el tiempo que tomó a tantos matemáticos conceptualizarlo y generalizarlo cada vez que se quiera enseñar.

2.4 DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

La noción de Obstáculo epistemológico surge en la epistemología de las ciencias experimentales (Bachelard, 1938) que posteriormente fue retomada por Brousseau en 1976 y redefinida en las teorías de situaciones didácticas del mismo.

Esta teoría postula que un alumno adquiere un conocimiento, cuando enfrenta una situación-problema cuya solución exige ese conocimiento y es capaz de generarlo e forma de estrategia de resolución a la situación. Por lo tanto, el conocimiento es, el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones en las que es útil como estrategia de resolución. Entonces los conocimientos de un estudiante sobre una noción matemática dependen de la experiencia adquirida afrontando situaciones en las que dicha noción está aplicada.

En el proceso de enseñanza no se puede presentar a cada noción matemática el conjunto de todas las situaciones en las que ésta interviene, por lo que se hace una selección de situaciones que puedan dar espacio que el alumno adquiera una concepción. Esta concepción va modificando algunos de sus aspectos, para adaptarse a nuevas situaciones, es decir, las concepciones evolucionan a medida que se incorporan nuevas nociones, pero en ocasiones estas no pueden evolucionar

por lo que se rechazan y sustituyen por otras. Es entonces, cuando la ampliación del campo de problemas exige la sustitución de una concepción antigua; válida hasta ese momento; por una nueva y el sujeto que la posee se resiste a rechazarla, y trata de mantenerla, adaptarla localmente y de hacerla evolucionar se dice que la concepción es un **obstáculo**.

Brousseau presenta una clasificación de obstáculos, indicando que su origen debe estar en uno de los participantes del sistema didáctico – alumno, profesor y saber - o en la sociedad, lo que permite distinguir entre: obstáculo ontogenético, didáctico, epistemológico o cultural. Califica el obstáculo epistemológico cuando este se puede rastrear en la historia de las matemáticas y es reconocido en la comunidad matemática, tomando conciencia de él y de la necesidad de superarlo.

Duroux, propone una lista de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo a una concepción (Duroux, 1982), que a su vez cuenta con algunas modificaciones introducidas por Brousseau:

- Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
- El conocimiento produce respuestas adaptas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
- Fuera del contexto se engendran respuestas falsas. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.
- El conocimiento resiste a las contraindicaciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. O es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca.
- Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continúa manifestándose de forma intempestiva y obstinada.

Brousseau hace hincapié en la diferenciación entre obstáculo y dificultad:

*“Muy a menudo, es entre las “dificultades” donde hay que buscar los indicios de los obstáculos, pero para satisfacer la primera condición que dice que un **obstáculo es un conocimiento**, el investigador debería hacer un esfuerzo para reformular la “dificultad” que estudia en términos, no de una falta de conocimiento, sino de conocimiento (falso, incompleto. . .).”* (Brousseau, ‘Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, 1983)

2.4.1 DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas pueden surgir distintas y variadas dificultades en los estudiantes, estas a causa de una gran variedad de factores que influyen en el proceso.

Una de las más comunes en el área de las matemáticas es la discalculia, normalmente confundida con la acalculia, la primera corresponde a una dificultad en la realización de operaciones matemáticas o aritméticas presente en estudiantes de inteligencia normal, la segunda es una alteración en el procesamiento matemático debido a una enfermedad cerebral.

Según el artículo nº 16 de la Revista Digital de la Central Sindical Independiente y de Funcionarios de Andalucía (Siles, 2009) las dificultades en el aprendizaje matemático se pueden clasificar en tres bloques: las asociadas por la propia naturaleza matemática, las producidas por las circunstancias; es decir el profesorado, la metodología y la organización; y finalmente aquellas producidas por dificultades propias del estudiante.

En cuanto a las dificultades asociadas a la propia naturaleza de las matemáticas se hace referencia a la complejidad de los conceptos, la estructura jerárquica de los conocimientos, el carácter lógico y el lenguaje matemático, todos factores importantes que no deben ser pasados por alto a la hora de enseñar. Con relación a la Organización, enseñanza y metodología se menciona la enseñanza inadecuada en ocasiones al pasar por alto si los estudiantes cuentan con los conocimientos previos para la incorporación de nuevos contenidos, el nivel de de abstracción de los contenidos que en ocasiones no es adecuado para la etapa de desarrollo en que se encuentran los estudiantes lo que complejiza aún más la asignatura, y en algunas situaciones la ausencia de habilidad cognitiva para el desarrollo de la competencia, Y finalmente en cuanto a las dificultades generadas por el estudiante en sí, se menciona la influencia de creencias y aptitudes sobre las matemáticas; es decir la poca relación que hacen con la realidad, la creencia de que las matemáticas se basan fundamentalmente en mecanizar y que sólo existe un modo correcto para la resolución de problemas; también influyen las dificultades que se relacionan a los procesos del desarrollo cognitivo, es decir las asociadas a la adquisición de nociones básicas y principios numéricos, ya que si estas no se corrigen a tiempo probablemente se harán notar más adelante, las relacionadas a los conceptos de orden y cardinalidad, y finalmente las ligadas a la resolución de problemas, las que se hacen presente durante todo el proceso de aprendizaje de las matemáticas en muchas ocasiones independientemente de si se tienen o no los conocimientos necesarios para la resolución de estos.

Finalmente el artículo se dirige a las causas internas también asociadas al desarrollo cognitivo pero que están asociadas a posibles alteraciones neurológicas en los estudiantes, y que dentro de estas existe un número elevado de alteraciones asociadas al aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo pueden estar relacionadas con otras dificultades de aprendizaje como por ejemplo las relacionadas a *Dificultades en la Lectura* que se reflejan en problemas para reconocer palabras, leer sílabas, asociar sonidos con letras, etc. Ya sea en la comprensión de problemas, memorización de tareas que implican lenguaje y números. *Dificultades en aritmética y trabajo escrito* es decir problemas de aprendizaje de horarios, memoria a corto plazo, desarrollo de pruebas escritas. O *Trastorno por déficit atencional*, falta de concentración, atención, impulsividad.

Entonces queda claro que las dificultades en el aprendizaje de matemáticas pueden estar relacionadas a variados factores y pueden ser clasificadas de distintas maneras, pero en esta investigación se busca indagar en los específicos de la asignatura; es decir en las externas a cualquier factor neurológico que pueda influir y en especial a las relacionadas al desarrollo cognitivo de ciertos objetos, la epistemología y a la didáctica.

2.4.2 CLASIFICACIÓN DE LAS DIFICULTADES

Relacionado a lo que compete a esta investigación y siguiendo la línea de investigación Artigue (Michèle Artigue, 1995), es necesario diferenciar las dificultades relacionadas a tres objetos aquí identificados como básicos para el cálculo, los números, las funciones y las sucesiones, todas estas relacionadas al plano cognitivo, es decir en el aprendizaje que los estudiantes tienen en relación a estos conceptos.

A) DIFICULTADES RELACIONADAS A LOS NÚMEROS

A lo largo del estudio, enseñanza y aprendizaje de los números han surgido numerosas dificultades relacionadas a cada conjunto, es por eso que se desglosará este punto en las dificultades puntuales de los números enteros, racionales y reales, tomando los resultados obtenidos en la investigación “Errores y Dificultades en Matemática” (Raquel S. Abrate, 2006), que pasa a mostrarse a continuación.

- **Números Enteros**

Las dificultades asociadas a este conjunto numérico están ligadas principalmente a la existencia de los números negativos dentro de estos, tan compleja fue la aceptación de tal existencia que en un principio se consideraban como números ficticios, valores negados o soluciones de ecuaciones falsas. Grandes matemáticos dieron testimonio de la poca legitimidad que estos números negativos tenían por lo que no debe parecer nuevo que a los estudiantes les surjan las mismas dudas al respecto, ejemplo de esto es:

Descartes: *“No pueden existir números menores que la nada.”* citado en (González, 1991, pág. 32).

Pascal: *“He conocido a algunos que no podían entender que al restar cuatro de cero quede cero.”* citado en (González, 1991, pág. 32).

Carnot: *“-3 será menor que 2, mientras que $(-3)^2$ será más grande que 2^2 , es decir que entre dos cantidades desiguales el cuadrado de la más grande será menor que el cuadrado de la más pequeña, lo que está en contra de todas las ideas claras que se pueden formar de cantidad.”* (González, 1991, pág. 39)

Entonces se podría decir que al igual que a estos matemáticos cuando los estudiantes conocen los números enteros y en especial los números negativos les pueden surgir dudas de este tipo aunque uno los puede representar en geometría analítica como coordenadas de puntos o en mecánica como cantidades orientadas en sentido opuesto, la incorporación y aceptación de los números negativos presenta una dificultad para los estudiantes. Con esto surgen los comunes problemas en la operatoria con este conjunto numérico, la común confusión entre la representación de “-“, ya que suele confundirse entre sí representa una operación, el signo de un número o indica el opuesto de tal número.

Otra de las dificultades encontradas en la investigación fueron las asociadas a la resolución de ecuaciones n-ésimas de un número negativo, asumiendo que no tienen solución dentro del conjunto o que la solución adecuada es sólo un valor. Finalmente se menciona la complejidad al trabajar este conjunto numérico con factores literales, la ambigüedad del cero enseñado como la ausencia de algo y a la vez como origen, y en la interpretación de resultados expresados con valores dentro del conjunto.

- **Números Racionales**

En cuanto a los números racionales las dificultades están claramente asociadas a la poca aceptación de que un mismo número tiene diversas representaciones, y la operatoria con fracciones, en ambas ocasiones los resultados de la investigación de XX muestran que los estudiantes memorizan algoritmos o rutinas de desarrollo con baja fundamentación teórica, lo que los lleva a aplicar reglas para la resolución de algoritmos sin entender o saber lo que están haciendo, por lo que se inhibe la posibilidad de utilizar el concepto como instrumento de pensamiento lo que a su vez favorece el razonamiento matemático y crítico de los alumnos.

- **Números Reales**

La mayoría de las dificultades relacionadas a este conjunto hacen referencia al desarrollo de potencias con exponente no natural específicamente con exponente fraccionario y a situaciones que exponían operaciones con radicales.

En cuanto a las potencias con exponente no radical, los estudiantes nuevamente reflejaban un conocimiento de algoritmos pero no así de los conceptos tras esas operaciones, por lo que si la memoria fallaba el desarrollo también.

Con relación a los ejercicios que plantean operaciones con radicales, las mayorías de los errores estaban relacionados a asociaciones incorrectas en relación a estos. Tratando siempre de llegar a un solo valor y no comprendiendo que una expresión puede ser equivalente al valor buscado más cuando se trabaja con radicales. Por otra parte se reflejó una inclinación por parte de los estudiantes para trabajar con valores decimales en vez de fracciones, lo que en numeradas ocasiones se tiende a dar respuesta con valores aproximados perdiendo información en sus respuestas. Estas dificultades en el trabajo con radicales se asocian a la poca utilización que se les da a estas expresiones numéricas, lo que los aleja aún más de concepciones y razonamientos en relación a estos.

Entonces se puede concluir que las principales dificultades en relación a los números se asocian a la operatoria con números negativos y fracciones, potencias con exponente no natural y finalmente con operatorias con radicales.

B) DIFICULTADES RELACIONADAS A LAS FUNCIONES

Las funciones son conocidas por los estudiantes a partir de octavo básico, y desde ahí hasta Cuarto Medio estas son profundizadas, ya sea vinculándolas a otros conocimientos o incorporando conceptos relacionados tales como: dominio, recorrido, variables, dependencia, continuidad, crecimiento, representaciones, etc. Lo que genera una cierta complejidad, ya que comprender una función, significa a la vez relacionar todos estos conceptos.

Más allá del concepto de función, las diversas representaciones que se pueden tener de una función y que según Janvier (Janvier, C, 1987) los alumnos han integrado el concepto de función sólo cuando pueden pasar de una representación a otra de forma espontánea y flexible, realizando transferencias entre ellas, pero conservando su carácter global e inseparable. Una de las dificultades más comunes en este sentido según Peralta (Peralta García, 2002), los estudiantes suelen creer que la tabulación de una función corresponde a una herramienta para acceder a una representación de la función, y no a una representación en sí.

En cuanto a la enseñanza de estas, numerosos autores aseguran que la representación gráfica y la algebraica son las más abstractas y a su vez son las más utilizadas al momento de presentar el concepto de función a los estudiantes, siendo en la representación gráfica según la investigación de Abrate (Raquel S. Abrate, 2006) es la que presenta la mayor cantidad de errores por parte de los estudiantes, y admiten que la interpretación de esta representación es lo que le da sentido a la misma y a su vez donde se haya la mayor cantidad de errores.

Curcio – citado en (Batanero, Godino, Green, & Holmes, 1994) - describe tres niveles distintos de comprensión de una gráfica y son los siguientes:

- (a) **“Leer los datos”**: *este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo.*
- (b) **“Leer dentro de los datos”**: *incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.*
- (c) **“Leer más allá de los datos”**: *requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico*

De acuerdo con esto, la investigación de Abrate arrojó que la mayor cantidad de dificultades correspondían a los dos niveles superiores, “Leer dentro de los datos” y “Leer más allá de los datos”. Postulando a la vez que posiblemente esta dificultad radica en el tratamiento que se le dá al tema, promoviendo la creación de gráficos a partir de una función y pocas veces obtener información desde el gráfico para llegar a la función misma o inferir cosas.

Artigue distingue cuatro principales dificultades en su investigación (Michèle Artigue, 1995) :

- **El concepto de función:** identifica dificultades presentes en lo que de verdad es una función, lo que los estudiantes entienden por función y los criterios utilizados en el reconocimiento de funciones, puesto que los estudiantes entienden por función los criterios que utilizan para identificarlas.
- **La flexibilidad proceso-concepto:** atendiendo a la dualidad del concepto, se identifican dificultades para desarrollar la flexibilidad de la función vista como “proceso” y como “entidad conceptual”, status operacional y dinámico y status estructural y estático (Dubinsky, 1992). También hace referencia a la encapsulación o reificación del concepto, paso de una concepción en donde se pueden considerar y manipular procesos, a una percepción de entidad conceptual, es decir, independiente a los procesos a los que se le vincule como un elemento de una clase de objetos (clase de los objetos solución de tal o cual ecuación funcional, clase de los objetos objetos que poseen tal o cual propiedad – funciones derivables, continuas, etc.-).
- **Las articulaciones de los registros simbólicos:** se identifican dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las expresiones de función. El predominio en la enseñanza del registro algebraico y el status infra-matemático que se da al registro gráfico. Como ayuda a disminuir estas dificultades se hace énfasis en el uso de calculadoras gráficas y computadoras para presentar varios tipos de representaciones por medio de ventanas múltiples.
- **El status de herramienta y los cambios de cuadro:** dificultades al considerar la función como herramienta del trabajo matemático y la utilización de estas en problemas planteados en otros cuadros matemáticos (numérico, geométrico, o externos a las matemáticas) los que necesitan de una traducción para poder ser resueltos.

C) DIFICULTADES RELACIONADAS A LAS SUCESIONES

Al igual que con las funciones, la conceptualización de las sucesiones es uno de los principales problemas que se identifican en los estudiantes, puesto que son poco formalizadas dentro del aula. En la investigación de Naranjo se indica que para comprender el concepto de sucesión se deben reconocer diversos conceptos, y los dividen en tres niveles: **Hechos** (términos, notación, convenios y resultados) es decir identificar los términos de una sucesión, su notación, ciertos convenios matemáticos relacionados, **Conceptos** formados por términos ya conocidos los que aúnan en sí varias unidades de información y finalmente las **Estructuras Conceptuales** que representan sistemas de conceptos conectados junto con sus relaciones. Entonces según la investigación de Naranjo (Naranjo, 2012) para lograr comprender la idea de sucesión, se deben reconocer los tres niveles ya nombrados, ya que al igual que en las funciones comprender una sucesión, significa relacionar estos niveles y unificarlos.

En cuanto a las diversas representaciones de las sucesiones se puede incorporar una nueva representación, la verbal, (ej.: “sucesión de números pares), la cual es muy común por parte de los profesores y a su vez muy compleja de “llevar al papel” por los estudiantes. También están las representaciones Algebraicas, Gráficas, Tabulares y Numéricas que son poco mencionadas y definidas, pero bastante utilizadas por los estudiantes. No hay investigaciones relacionadas a las dificultades en esta área, pero se puede deducir que las principales se encuentran en la conceptualización formal de sucesión, y la distinción de estas con series, y a su vez la poca relación de las diversas representaciones para estas.

A continuación se presentan tres tablas que resumen las dificultades con los objetos básicos del cálculo:

Números	Descripción
Epistemología	La noción de número surge (S. III a.C.) con la necesidad que presentaban los hombres de medir. Los números naturales han estado presentes en todas la civilizaciones y en distintas representaciones, primero se consideraban desde el 1 al 9, hasta que dos siglos más tardes surge la existencia del cero en representación de la “nada”. En el siglo VI d.C. surge el sistema decimal de posición y ya cerca del siglo XVII d.C. se acepta el “-” como símbolo de la resta y negatividad de números. Finalmente en 1872 Dedekin logró capturar la continuidad de la

	recta numérica.
Enseñanza Tradicional	La enseñanza de los conjuntos numéricos según los planes y programas de estudio se inicia en la educación pre-escolar, pero es en séptimo básico cuando se amplía el conjunto de los números naturales hasta los enteros, esto se realiza en un principio desde una perspectiva comparativa entre estos, es decir, se da paso a los números enteros desde la resolución de problemas que no tienen solución en el conjunto de los números naturales presentando la necesidad de ampliarse a un nuevo conjunto, así sucesivamente se da paso a los demás conjuntos numéricos hasta llegar a los números complejos en tercer año medio. Luego de cada ampliación de un conjunto a otro, se incorporan las propiedades de estos, la resolución de operaciones básicas y resaltando la resolución de potencias dentro de lo que el conjunto permite.
Dificultades y Obstáculos	<p>Números Enteros: Existencia de los números negativos, resolución de ecuaciones con resultados dentro del conjunto, factores literales expresados dentro del conjunto e interpretación de resultados expresados como números negativos.</p> <p>Números Racionales: Diversas representaciones de un mismo número dentro del conjunto, operatoria con fracciones, conocimiento del desarrollo de algoritmos, pero no de los conceptos tras ellos.</p> <p>Números Reales: Desarrollo de potencias con exponente no natural y la poca relación entre los diversos conjuntos que componen a los números Reales.</p>

Funciones	Descripción
Epistemología	En un principio las funciones fueron concebidas intuitivamente por los babilónicos como variación cuando intentaban identificar regularizaciones en las tabulaciones de fenómenos naturales para después aritmetizar y generalizar esas observaciones. Por los griegos fueron concebidas como proporciones, pues estos veían la matemática como estática por lo que no podían utilizar

los términos de variable pero sí de incógnitas. Ya en la Edad Media se busca dar una explicación cuantitativa de los fenómenos naturales, a través de gráficos, donde surge la concepción de la función como gráfica, más adelante Fermat y Descartes descubren la representación analítica conectando dos ramas de la matemática: la Geometría y el Álgebra lo que lleva a entender la función como curva. Recién en 1976 se utiliza por primera vez el término de función, Euler y Bernoulli proponen la letra f para representar una función escribiendo por primera vez $f(x)$ de donde surge una de las primeras definiciones: “una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes”. Finalmente la concepción de función arbitraria, aparece en los últimos trabajos de Euler, considerando funciones más generales que las funciones analíticas, tomando en cuenta funciones especiales, no derivables, con picos, que denomina discontinuas o mixtas.

Enseñanza tradicional El inicio de la enseñanza de las funciones es en octavo básico, en una primera instancia modelando situaciones para después introducir el concepto de funciones e identificar variables dependientes e independientes, dominio y recorrido. Luego se da paso a la función lineal y afín, sus representaciones y a la composición de funciones, posteriormente se van introduciendo otras funciones como son la función exponencial, logaritmo, raíz cuadrada, cuadrática y potencia, todas estas presentadas y posteriormente presentadas sus gráficas.

Dificultades y obstáculos	• Tabulación como herramienta y no como representación	El reconocimiento de los estudiantes de la tabulación como herramienta para acceder a una representación, y no como una representación de función.
	• Concepto de función	Poca claridad en la concepción de función, aceptando una definición de este a través de criterios para identificarla no así como lo que

		verdaderamente es una función.
<ul style="list-style-type: none"> Flexibilidad concepto 	proceso-	Dualidad del concepto, poca claridad en la diferenciación del concepto como proceso y como objeto matemático.
<ul style="list-style-type: none"> Articulación de los registros simbólicos 		Poca relación entre los variados registros simbólicos de una función, predominancia en la enseñanza del registro algebraico y el status infra-matemático (fuera de las matemáticas) que se le da al registro gráfico.
<ul style="list-style-type: none"> Status de herramienta y cambio de cuadro 		Considerar las funciones como herramientas y a la vez utilizarlas en la resolución de problemas en otros cuadros matemáticos

Sucesiones	Descripción
Epistemología	Una sucesión matemática es un conjunto ordenado de objetos matemáticos que generalmente son números. Pitágoras comenzó a construir sucesiones infinitas luego de comenzar a armar polígonos con piedras y contar la cantidad que utilizaba, es así como surgieron los números poligonales. Fibonacci por su parte introduce los números de Fibonacci. Así mismo, existen diversos tipos de sucesiones entre ellas, las finitas, infinitas y vacías.
Enseñanza tradicional	Es en cuarto año medio formación diferenciada donde según los programas de estudio corresponde la enseñanza de la unidad “procesos infinitos”, donde se plantea la enseñanza de series y sucesiones y el estudio de la convergencia de estas, pero revisando con meticulosidad el programa, en el desarrollo de la

unidad estos contenidos se omiten.

Dificultades y Obstáculos	• Conceptualización de Sucesión	Identificar los términos de una sucesión, su notación, ciertos convenios matemáticos relacionados.
	• Diferenciación entre Series y Sucesiones	Poca claridad entre la diferenciación de una sucesión con una serie.
	• Relación entre las diversas representaciones	Falta de identificación de las diversas representaciones de una sucesión y la relación entre estas.

2.5 CONCEPCIÓN DEL LÍMITE

El concepto de “límite” representa un pilar fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje del campo conceptual del cálculo, es por eso que ligadas a este concepto surgen variadas dificultades que Medina (Medina, 2001) clasifica en dos según su carácter: estructural e Instrumental. El primer carácter hace referencia a que el “límite” como concepto, constituye el eje central y concepto básico sobre el cual se construye la estructura del Cálculo diferencial e Integral y otros conceptos de otras ramas de la matemática. El carácter instrumental hace mención a la utilización de este concepto como herramienta para la solución de problemas tanto en las matemáticas, como en ciencias aplicadas así como la Física e Ingeniería y como objeto matemático utilizado en diferentes contextos: Geométrico, aritmético, métrico, topológico y asociado a otros objetos matemáticos.

Para lograr reconocer dificultades epistemológicas en cuanto al concepto de límite, primero es necesario reconocer los obstáculos epistemológicos relacionados, que son la raíz de estas dificultades, y antes de abordarlos hay que es necesario acudir a la noción de obstáculo introducida por G. Bachelard quien dice que estos son dificultades psicológicas que no permiten una correcta apropiación del conocimiento objetivo y también menciona que el conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo, ni lineal, sino que es el resultado del rechazo de formas previas de conocimiento que se constituyen en obstáculos epistemológicos, por lo tanto el concepto de obstáculo epistemológico no se refiere a las dificultades

desorganizadas o derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos. Con todo lo anterior se puede recurrir a Artigue (1998) y Cornu (1983), quienes concuerdan en la identificación de algunos obstáculos que se mencionan a continuación:

- Sentido común de la palabra límite (Barrera infranqueable o último término de un proceso).
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción; relacionado al razonamiento ligado al infinito.
- Los conceptos de cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas.

Y mencionada anteriormente la dualidad o doble dimensión que tiene este concepto (proceso-objeto u operacional-estructural). Se logran identificar las posibles dificultades epistemológicas relacionadas al concepto de límite, ya que han estado presentes dentro de la historia de éste.

A continuación se presenta una tabla resumen de lo anteriormente presentado:

Plano Epistemológico		
Contenido	Principales Dificultades	Desarrollo de las dificultades
Límite	<ul style="list-style-type: none"> • Sentido común de la palabra límite 	Entendimiento de la palabra límite como una barrera infranqueable, fin de un camino, etc.

- Dualidad del concepto de Carácter estructural, visto el límite como concepto y eje central del cálculo y carácter instrumental del límite, es decir, la utilización de este como herramienta u objeto matemático.

2.6 RUPTURAS EN EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Es sabido que los procesos matemáticos ligados al Cálculo, están directamente relacionados con el álgebra y sus desarrollos, pero a su vez, están ligados a rupturas en estas mismas prácticas. Cuando se habla de rupturas, se hace referencia a las rupturas epistemológicas, que marcan un punto sin retorno a partir del cual comienza una nueva ciencia⁸.

M. Legrand (Legrand, 1993) es de los pocos investigadores que ha ahondado en esta área, haciendo énfasis en las rupturas necesarias en el nivel del tratamiento de la igualdad, y en las formas de razonamiento. Es decir, dejar el razonamiento; que los estudiantes acostumbran a hacer; a través de equivalencias para demostrar una igualdad, para entrar en rodeos con la definición, para posteriormente entender que en una vecindad a , $f(x) < g(x)$, sin tener que desarrollar la desigualdad sino que hay que encontrar un intervalo dentro de centro a , donde se pueda garantizar la vecindad. Entonces el estudiante debe pasar de razonamientos por equivalencias a razonamientos por condiciones suficientes. Todo este cambio en el razonamiento claramente no es un proceso natural lo que hace que no sea fácil para los estudiantes, ya que los modos de razonamiento ligados al trabajo en el Cálculo son nuevos para los estudiantes y las técnicas matemáticas ligadas a este tipo de trabajo son cada vez más delicadas y condicionadas.

Artigue (Michèle Artigue, 1995), ejemplifica el tema de las rupturas a través del tratamiento que se da en el cálculo a las: desigualdades e inecuaciones, a la alternancia de cuantificadores, a las aproximaciones, al simbolismo, al lenguaje, a los razonamientos, y en particular a las demostraciones. Todas estas prácticas rompen con las formas de trabajo que los estudiantes de cuarto año medio han visto en cursos anteriores.

⁸ Expresión atribuida a F. Regnault que usan Fichant y Pécheux para describir la ruptura epistemológica, en un curso en 1967-1968 en París, según aparece en la advertencia inicial de Oscar Landi al libro de Fichant y Pécheux (1969/1975, pp. 7-8; ver definición I, p. 9, y la nota 6 de la p. 12).

No se puede afirmar que al pasar del álgebra al cálculo se da una ruptura epistemológica, pero sí se afirma, que hay una ruptura en cuanto a prácticas, simbolismo, lenguaje, modos de demostración y argumentación, respecto a lo que habitualmente se hace en los cursos de álgebra y lo que se empieza a trabajar en el cálculo. Es por eso que suele ser muy complejo para los estudiantes comenzar a relacionarse con el Cálculo y sus prácticas.

A continuación se presenta una tabla resumen de lo anteriormente presentado:

Plano Didáctico		
Contenido	Principales Dificultades	Desarrollo de las dificultades
Rupturas en el pensamiento algebraico	<ul style="list-style-type: none"> Relacionadas a las prácticas 	Tratamiento de desigualdades en el álgebra, distintas al que se le da en el cálculo (equivalencia a demostraciones bajo condiciones), alternancia de cuantificadores, aproximaciones, simbolismos, lenguaje y particularmente a las demostraciones.
	<ul style="list-style-type: none"> Ligadas al Razonamiento Matemático 	Dejar los razonamientos puramente algebraicos, para avanzar a los razonamientos ligados a aproximaciones, acotaciones, condiciones y demostraciones, para cumplir con equivalencias u obtener valores representativos.

2.7 PROGRAMAS DE ESTUDIO CHILENOS SECTOR MATEMÁTICA

Antes de comenzar con los análisis de los Planes y Programas de Estudio parece necesaria ver la definición que el Ministerio de Educación entrega para estos dos instrumentos curriculares:

*“Los **planes de estudio** definen la organización del tiempo de cada nivel escolar. Consignan las actividades curriculares que los alumnos y las alumnas deben cursar y el tiempo semanal que se les dedica”. (MINEDUC, 2009)*

*“Los **Programas de estudio** entregan una organización didáctica del año escolar para el logro de los **Objetivos Fundamentales** definidos en el Marco Curricular. En los programas de estudio del Ministerio de Educación se definen aprendizajes esperados, por semestre o por unidades, que corresponden a objetivos de aprendizajes acotados en el tiempo. Se ofrecen además ejemplos de actividades de enseñanza y orientaciones metodológicas y de evaluación para apoyar el trabajo docente de aula. Estos ejemplos y orientaciones tienen un carácter flexible y general para que puedan adaptarse a las realidades de los establecimientos educacionales. (MINEDUC, 2009)*

Dentro de los últimos 4 años, desde el Curriculum Nacional ha surgido una serie de modificaciones que han influido en los contenidos de la enseñanza media debido a las nuevas exigencias educacionales

Es por esto que dadas las modificaciones en el mundo laboral, se vio necesario modificar los **Objetivos Fundamentales Terminales** de la Formación Diferenciada Técnico Profesional, y ante la necesidad de unificar y simplificar conceptos y orientaciones curriculares se considera modificar la Organización general de Curriculum y los **Objetivos Fundamentales Transversales** de la Educación Media. Dentro de los sectores modificados se incluye el área de las Matemáticas.

En el caso de la Educación Media Humanístico-Científica, son los establecimientos quienes deben definir sus planes de estudio, según los sectores que ellos estimen conveniente profundizar y que a su vez los estudiantes decidan dedicar un tiempo adicional para expandir o profundizar sus aprendizajes siguiendo sus intereses, aptitudes o expectativas de salida de la Educación Media y Continuidad de estudios, para lo cual el Ministerio entrega los **Objetivos y Contenidos** adicionales a la Formación General, los que hasta el momento no presentan ajuste alguno, y son los publicados en el año 2005.

Con respecto a la Fundamentación que se entregó por parte del Ministerio de Educación, relacionada con el Ajuste en el Sector de Matemáticas cabe resaltar los siguientes puntos:

- **Concepción acerca del conocimiento matemático;** ya que este forma parte del acervo cultural de nuestra sociedad, respondiendo y resolviendo situaciones provenientes de los más variados ámbitos. Es decir el conocimiento matemático se ve como una construcción cultural que influye en la enseñanza y aprendizaje de la disciplina.

- **Concepción acerca del aprendizaje de la matemática;** se enfatiza en que esta disciplina se aprende haciéndola, reflexionando y confrontando actuación propia con el conocimiento. Es decir, la enseñanza de las matemáticas debe dar oportunidades para hacerla y para razonar matemáticamente (resolver problemas, formular conjeturas, verificar la validez de procedimientos y relaciones, razonar bajo hipótesis). Así, si estos son los aprendizajes que se esperan en cuanto a las matemáticas, claramente la enseñanza debe estar enfocada a estos puntos.
- **Aportes de la matemática a la formación humana;** se argumentan los siguientes puntos: enriquece la comprensión de la realidad, contribuye a la autovaloración personal, apoya el desarrollo afectivo y la autonomía del pensamiento.
- **Enseñanza de la Matemática,** con respecto a este punto, es necesario tomar en cuenta los anteriores para poder realizar una práctica eficiente y útil.

Dentro del desarrollo de capacidades y habilidades esperadas en los Programas de Estudio, un punto importante de resaltar para esta investigación es la idea de desarrollar el pensamiento lógico matemático en todos los niveles que aquí se analizan, es decir a nivel nacional y general. Desarrollar un pensamiento lógico matemático como habilidad y capacidad de los estudiantes chilenos es una de las finalidades de la enseñanza de las matemáticas.

El análisis que se realizará a los Programas de estudio, es en una primera instancia para identificar si los contenidos que esta investigación reconoce como Objetos Básicos del Cálculo están presentes en el proceso de enseñanza en Educación Media, y además se incorporan al análisis los dos últimos cursos de Educación General Básica, ya que en estos se comienza la profundización con respecto a Números y se inicia el estudio de las Funciones. Ya en una segunda instancia este análisis se utilizará para la formulación de los instrumentos de evaluación que más adelante se presentarán. Los Programas de Estudio de Séptimo Básico hasta Segundo Medio aquí estudiados, ya presentan el Ajuste Curricular. En el caso de Tercero Medio, este no ha sido publicado aún, pero sí se han implementado este año, para lo cual el Mineduc publicó una Sugerencia de Planificación, que en esta ocasión fue el instrumento analizado. En cuanto al último nivel de Educación Media, Cuarto Medio, se analizarán los dos textos, es decir el Programa de Estudio sin Ajuste y el Ajuste Curricular 2009, donde se presentan los Contenidos Mínimos Obligatorios para todos los niveles de Educación Media, que a partir del año 2014

comenzarán a regir en Cuarto año Medio. Este análisis se presentará en una tabla de resumen por nivel y contenido (para ver el análisis completo revisar anexos).

Nivel	Números	Funciones	Sucesiones
Séptimo Básico	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto \mathbb{Z} . - Operatoria básica en \mathbb{Z}. - Potencias con base 10 y exponente Entero. - Raíz cuadrada en \mathbb{Z}. 		
Octavo Básico	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto \mathbb{Z} . - Profundización de operatoria básica en \mathbb{Z}. - Potencias con base entera y exponente natural y su relación con las propiedades de potencias con base fraccionaria, decimal positiva y exponente natural. 	<ul style="list-style-type: none"> - Ecuaciones con 2 variables. - Modelar situaciones. - Introducción del concepto Función. - Identificación de Variables dependientes e independientes. 	
Primero Medio	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto \mathbb{Q} . - Orden en la recta numérica. - Operatoria Básica. - Potencias con Base Racional y Exponente Entero. 	<ul style="list-style-type: none"> - Casos conocidos de la función lineal. - Función afín. - Representaciones de función lineal y afín. - Composición de Funciones. 	
Segundo Medio	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto \mathbb{I} . - Aproximación, orden y representación en la recta 	<ul style="list-style-type: none"> - Función Exponencial, Logarítmica y Raíz 	

	<p>numérica y sus propiedades.</p> <p>- Conjunto \mathbb{R}.</p>	<p>cuadrada.</p> <p>- Grafica de las tres funciones.</p> <p>- Estudio de Dominio y Rango.</p>
Tercero Medio	<p>- Identificación de la unidad imaginaria.</p> <p>- Relación entre un número imaginario y los números complejos</p> <p>- Conjunto \mathbb{C}.</p> <p>- Suma, resta, multiplicación, división y potencias en \mathbb{C}.</p> <p>- Conjugado y módulo de un complejo.</p>	<p>- Función cuadrática.</p> <p>- Representación y análisis gráfico de la función cuadrática.</p>
Cuarto Medio sin Ajuste Curricular		<p>- Función potencia, logarítmica y exponencial.</p>
Cuarto Medio con Ajuste Curricular		<p>- Función potencia.</p> <p>- Análisis de los parámetros.</p> <p>- Funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas e inversa cuando proceda.</p>
Tercero Medio Plan Diferenciado		<p>- Programación Lineal.</p>

<p>Cuarto Medio Plan Diferenciado</p>	<p>- Funciones polinomiales y trigonométricas.</p>	<p>- Procesos infinitos. - Sumatoria, progresiones aritméticas y geométricas, series geométricas y sucesiones. - Convergencia de series geométricas y sucesiones.</p>
--------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Queda establecido luego de este análisis que los Objetos Básicos del Cálculo, están presentes en la Educación Chilena, por lo que se puede dar paso a la Metodología de Investigación.⁹

⁹ Todas las imágenes recogidas en el análisis de los Programas de Estudio Chilenos, fueron obtenidas de los mismos todos publicados en la página: www.curriculumnacional.cl

CAPITULO III

ELEMENTOS DEL MARCO METODOLÓGICO

3.1 PARADIGMA O ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN

El término paradigma significa “el modo en el que vemos el mundo”. Estos contienen reglas y regulaciones que hacen establecer o definir fronteras, y el modo de comportarse dentro de estas. El paradigma es un esquema teórico, o una vía de percepción y comprensión del mundo, que un grupo de científicos ha adoptado.

Thomas Kuhn en su obra “La estructura de las revoluciones científicas” (Kuhn, 1962), lo define como “es una concepción general del objeto de estudio de una ciencia, de los problemas que deben estudiarse, del método que deben emplearse en la investigación y de las formas de explicar, interpretar o comprender, según el caso, los resultados obtenidos por la investigación”.

Dentro de los tipos de paradigmas que hay, esta investigación se encasilla en la utilización del **Paradigma Interpretativo**, del cual se da una breve explicación a continuación:

Este paradigma intenta comprender las prácticas educativas desde los significados e intenciones de los sujetos y participantes que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en donde se toma las realidades de estos para llevar un estudio más acabado.

Esta investigación utiliza el paradigma interpretativo puesto que para encontrar las principales dificultades de acceso al Cálculo, dentro de estas dificultades se puede identificar las dificultades asociadas a los objetos básicos del Cálculo no sólo en un contexto teórico, sino que también en un contexto real, por lo que se estudiarán estas dificultades (sólo de acceso al cálculo) en un curso de cuarto año medio de un Liceo Científico-Humanista de la Región Metropolitana, específicamente en la Comuna de Macul. Entonces se elige este paradigma ya que busca conocer un fenómeno dentro de la educación, pero no realiza un cambio en lo que investiga, sólo informa del suceso a investigar.

En palabras de Sadín *“la investigación cualitativa es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos”* (Sadín, 2003). Según los objetivos generales y específicos y la

definición de Sadín aquí mencionada, el enfoque de esta investigación tiene un carácter cualitativo.

Dentro de las principales características que identifican una investigación cualitativa se pueden identificar las siguientes: estudia pequeños grupos en los que es posible una observación directa por parte del investigador, el objeto de estudio es considerado como totalidad en su totalidad, las técnicas asociadas son la observación, grabaciones de videos, entrevistas en profundidad, trabajos de alumnos entre otros, siendo el más utilizado dentro de este el **estudio de caso**.

Con relación a la metodología de investigación, la epistemología de la palabra metodología viene del griego y se puede definir como camino a la meta de estudio, lo que hace referencia al conjunto de procedimientos utilizados para alcanzar una gama de objetivos que rigen en una investigación científica.

Los objetivos de esta investigación no buscan obtener resultados medibles, sino que pretenden identificar los procesos de aprendizaje que viven los individuos, es decir, los procedimientos que los estudiantes realizan al enfrentarse a la resolución de problemas, la concepción que tienen acerca de conceptos, las estrategias y herramientas con las cuentan en relación a ciertos contenidos específicos, etc. Es entonces que a pesar de utilizar análisis estadísticos producto de evaluaciones externas la intención no será medir productos finales, sino obtener información a través de estos, lo que requiere de una metodología cuya validación sea interna.

Dado lo anterior, la metodología que se considera más adecuada para esta investigación y que ya se ha mencionado con anterioridad es la Ingeniería Didáctica, la cual sigue un enfoque cualitativo.

3.2 UNIVERSO Y MUESTRA

Como ya se mencionó en capítulos anteriores, el universo que se estudió en esta investigación corresponde a un Cuarto año medio de un liceo Científico-Humanista, ubicado en la Región Metropolitana, Comuna de Macul con dependencia Particular Subvencionado y que pertenece a la Iglesia Católica. Esta institución entrega educación en para todo los niveles, es decir, Educación Pre-básica, Básica y Media.

La cantidad de evaluados corresponde a la totalidad de estudiantes que forman el curso, es decir 47 estudiantes de Cuarto año Medio.

La muestra con la que esta investigación trabaja corresponde al tipo no probabilística o también llamada no dirigida, ya que la elección de los elementos no depende de la probabilidad, sino que dependen de las condiciones que permiten hacer el muestreo. Aunque suelen considerarse como poco rigurosas y carentes de base teórica, son bastante utilizadas, más aún en ocasiones es más conveniente usar un muestreo no probabilístico y es el caso de los estudios de casos, de poblaciones heterogéneas, o estudios dirigidos a poblaciones y grupos específicos, es decir en estudios donde interesa una cuidadosa y controlada selección de sujetos con determinadas características.

De acuerdo con Hernández (Hernández, 2002), hay varios tipos de muestras no probabilísticas y entre las más utilizadas se pueden identificar: muestra de sujetos voluntarios, muestra de expertos, muestra de sujetos-tipo, la muestra por cuotas y muestra dirigida. En este caso la muestra no probabilística utilizada corresponde a la muestra dirigida, las que son válidas en cuanto a que un determinado diseño de investigación así las requiere; sin embargo, los resultados se aplican nada más que a la muestra en sí o a muestras similares e tiempo y lugar (transferencia de resultados), pero esto último con suma precaución. No son generalizables a una población, lo que claramente no es interés de este tipo de investigación.

Junto con lo anteriormente señalado, el estudio realizado en esta investigación no corresponde a una investigación de laboratorio, sino de campo, lo que se presenta mediante el estudio de una variable externa no comprobada, en condiciones rigurosamente controladas, con el fin de describir de qué modo o por qué causas se produce una situación o acontecimiento.

Esta muestra corresponde a la etapa de experimentación de la investigación, la que se utilizará para contrastar las dificultades establecidas teóricamente con las encontradas en este grupo de estudiantes.

3.3 FUNDAMENTACIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO

En una investigación cualitativa el término *diseño* adquiere un significado distinto al que posee dentro de un enfoque cuantitativo, puesto que la investigación cualitativa no se planea con detalle y está sujeta a las circunstancias de cada ambiente o escenario en particular. Según Hernández (Hernández, 2002) un estudio cualitativo es por sí mismo un diseño de investigación, es decir, no hay dos investigaciones iguales o equivalentes, ya que pueden haber estudios que compartan diversas similitudes, pero no réplicas, pues el sólo hecho de que el investigador sea el

instrumento de recolección de los datos y que el contexto o ambiente evolucione con el transcurrir del tiempo, hacen a cada estudio único.

En el enfoque que sigue esta investigación el diseño se refiere al camino general que se utiliza en el proceso de investigación Álvarez (J, 2003) lo denomina marco interpretativo.

Existen variados tipos de diseños en la investigación cualitativa, se enunciaran a continuación los principales y más utilizados dentro de este enfoque:

- **Teoría Fundamentada:** su propósito es desarrollar teoría basada en datos empíricos y se aplica a áreas específicas.
- **Diseños Etnográficos:** Pretenden describir y analizar ideas, creencias, significados, conocimientos y prácticas de grupos, culturas y comunidades.
- **Diseños Narrativos:** El investigador recolecta datos sobre las historias de vida y experiencias de ciertas personas para describirlas y analizarlas.
- **Diseños de Investigación-Acción:** Su propósito fundamental se centra en aportar información que guíe la toma de decisiones para programas, procesos y reformas estructurales.

La Ingeniería Didáctica es calificada como un diseño de Investigación-Acción, puesto que el investigador sigue un rol de profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de programas, estrategias o estructuras de enseñanza-aprendizaje para una población determinada de alumnos y como bien indica la definición, esta investigación busca aportar información que guíe la toma de decisiones para programas, en este caso herramientas que permitan enfrentar estas dificultades de acceso al Cálculo.

Este diseño consta de tres fases esenciales: observar, pensar y actuar. Tres etapas que no están explícitas dentro de las fases de la ingeniería didáctica, pero si están implícitamente, en la parte de experimentación y análisis de los resultados, y en los análisis a posteriori. Por lo que queda claro que si están presentes en esta investigación.

Creswell (Creswell, 2003), identifica dos diseños fundamentales de la investigación-acción: Práctico y Participativo. Los que se describen a continuación.

- **Práctico:** Estudia prácticas locales de un grupo o comunidad, involucra indagación individual o en equipo, se centra en el desarrollo y aprendizaje de

los participantes, implementa un plan de acción, ya sea para resolver el problema, introducir la mejora o generar el cambio.

- **Participativo:** Estudia temas sociales que constriñen las vidas de las personas de un grupo o comunidad, resalta la colaboración equitativa de todo el grupo o comunidad, se enfoca en cambios para mejorar el nivel de vida y desarrollo humano de los individuos.

Entonces, el diseño de esta investigación corresponde a una investigación-acción práctica, ya que se estudian las prácticas de un grupo de estudiantes centrándose en el desarrollo y aprendizaje de estos y busca dar respuesta a los problemas estipulados y así mejorar y generar un cambio en el aprendizaje del Cálculo en los estudiantes Universitarios.

3.4 FUNDAMENTACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE TÉCNICAS E INSTRUMENTOS

En una investigación cualitativa la recolección de datos es fundamental para obtener conclusiones a futuro, pero a diferencia de la investigación cuantitativa el propósito no es medir variables, sino obtener datos que se conviertan en información de personas, grupos, comunidades, contextos o situaciones, para analizarlos y comprenderlos y así responder a la pregunta de investigación. Esta recolección de datos debe ocurrir en el ambiente natural y cotidiano de los participantes o unidades de análisis. Según Hernández (Hernández, 2002) el instrumento de recolección de datos en una investigación cualitativa es el investigador o investigadores, ya que el observa, entrevista, revisa documentos, conduce sesiones, etc. para así capturar lo que las unidades o casos expresan y así entender el fenómeno estudiado.

Esta investigación ha utilizado una técnica de recolección de información que consiste en la aplicación de un test, el cual busca hallar significados en los estudiantes, es formado por tres ítems, selección múltiple, respuesta abierta y desarrollo de conceptos, el cual tiene como finalidad identificar las dificultades que tienen los estudiantes de tercero y cuarto medio con relación a los objetos básicos del cálculo aquí estipulados.

En educación los diagnósticos se utilizan para recopilar información sobre un hecho educativo en particular relativo a un sujeto o un grupo de sujetos, con la intención de utilizarlos para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje ya sea reforzando las debilidades y preparando los en base a los resultados obtenidos las siguientes etapas del proceso. En el caso de este estudio se utiliza para identificar las principales dificultades de acceso al cálculo que tiene un grupo de estudiantes de

tercero y cuarto medio. En esta investigación los resultados serán utilizados para contrastarlos con los obtenidos en los análisis a priori y así acotar las posibles dificultades obtenidas en relación a los objetos básicos del Cálculo.

Las preguntas del Ítem de selección múltiple y de respuesta abierta fueron extraídas del test de diagnóstico contenido en el libro “Calculus. Early Transcendentals” de James Stewart (Stewart, 2008). Las dos preguntas correspondientes al Ítem desarrollo de conceptos fueron formuladas por el investigador.

3.5 MODELO DE INSTRUMENTO A EMPLEAR

A continuación se presentará el modelo del instrumento aplicado y utilizado para recopilar información. En este se le solicita el nombre a cada participante con el fin de que se desarrolle a conciencia y disminuir las omisiones por parte de estos, pero para el análisis de los resultados serán considerados como anónimos. Para ver el formato, preguntas y demases ir a anexos.

3.6 VALIDEZ Y CONFIABILIDAD

Para Hernández Sampieri y Mendoza (2008) y Cuevas (2009) en una investigación cualitativa es preferible utilizar el término rigor en lugar de validez o confiabilidad, dadas las características de este tipo de investigación. Distinguiendo ciertos términos para tener en consideración como parte de la rigurosidad de la investigación y para que esta sea validada, por lo que a continuación se describirán algunos:

- **Credibilidad:** Mertens (2005) la define como la correspondencia entre la forma en que el participante percibe los conceptos vinculados con el planteamiento y la manera como el investigador retrata los puntos de vista del participante.

Coleman y Unarau (2005) hacen las siguientes recomendaciones para incrementar la credibilidad: evitar que las creencias y opiniones del investigador afecten la interpretación de datos, considerar importantes todos los datos, privilegiar a todos los participantes por igual buscar evidencia positiva y negativa por igual. Por su lado Franklin y Ballau (2005) consideran que la credibilidad se logra mediante: **Corroboración estructural** es reunir los datos para establecer conexiones o vínculos que crean un todo,

adecuación referencial un estudio la posee cuando proporciona cierta habilidad para visualizar características que se refieren a los datos y que el investigador no ha notado.

- **Transferencia:** hace referencia a la aplicabilidad de resultados, pero no se la generalización de los resultados, siendo también denominada traslado (Mertens, 2005) puesto es sabido que es muy difícil transferir una investigación cualitativa a otro contexto, pero se pueden dejar las pautas para determinar el grado de similitud entre el contexto de estudio y otros contextos, para dejar abierta la posibilidad de aplicar ciertas soluciones en otros contextos. La transferencia no la hace el investigador sino el usuario o lector del estudio.
- **Confirmación o confirmabilidad:** se refiere a demostrar que se han minimizado los riesgos y tendencias del investigador. Implica rastrear los datos en su fuente y la explicitación de la lógica utilizada para interpretarlos.

Todos estos criterios deben estar claramente estipulados dentro de la investigación, no es necesario que sea explícito pero sí deben hacerse notar.

Por otra parte, como esta investigación cuenta con una parte exploratoria en la que se utiliza un instrumento aquí denominado como Test para darle credibilidad y validez con relación al estudio, se le solicitó a dos profesores de la Universidad Católica Silva Henríquez que lo validen. Los validadores son Carlos Alberto Gómez Castro y Jorge Ávila Contreras, ambos docentes permanentes de la Escuela de Educación Matemáticas e Informática Educativa de la Universidad anteriormente mencionada. Ambas validaciones se presentan en los anexos de esta investigación.

CAPITULO IV

TRABAJO DE CAMPO O RECOGIDA DE INFORMACIÓN

En una Ingeniería didáctica, la recogida de información consta de dos partes, la primera corresponde a los análisis preliminares donde el investigador debe hacer un análisis teórico de los sucesos asociados a los objetivos de investigación, es decir, se puede analizar por ejemplo: epistemológicamente los contenidos contemplados en la enseñanza, la enseñanza tradicional y sus efectos, las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y obstáculos y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica, entre otros. Y en una segunda instancia se realiza la fase de experimentación, en donde a raíz de los resultados obtenidos en la primera recogida de información, se busca una herramienta que permita experimentar corroborar o contrastar la información anteriormente obtenida para posteriormente hacer el análisis a posteriori.

Entonces, en esta investigación la primera recogida de información se hizo a medida que se construyó el Marco Teórico, se indagó sobre las dificultades asociadas a los Objetos Básicos del Cálculo, la concepción del Límite y las rupturas en las prácticas de los estudiantes en el paso del Álgebra al Cálculo.

La segunda recogida de información se realizó en la etapa de experimentación, la construcción del instrumento implementado se hizo a base de la información obtenida en el Marco Teórico asociada a los Objetos Básicos del Cálculo en donde se reconocieron las principales dificultades asociadas y se realizó un test enfocado a estas, para identificar si en este caso, la teoría coincide con la realidad de la muestra estudiada. La experimentación se realizó en una sesión en la que se implementó el test inicialmente pensado para 90 minutos, pero que en la práctica se utilizaron no más de 45 minutos.

Durante el proceso de recogida de información, uno de los facilitadores del proceso fue conocer el establecimiento en el cual se realizó la investigación, por lo que conseguir las autorizaciones tanto de directivos como del profesor de asignatura fue más factible y menos complejo, hay que destacar que el hecho de conocer el establecimiento no implica conocer a los estudiantes que participaron de la implementación. Una de las dificultades que se enfrentó en el proceso de recogida fue conseguir un día en que el curso no tuviese actividades relacionadas al final de su etapa escolar, puesto que el colegio fomenta mucho esas actividades en sus estudiantes y además estar en cuarto medio, en especial en ese establecimiento,

implica perder muchas clases por salidas a universidades, actividades extra-programáticas y demases. La otra dificultad fue lograr implementar un día en que la asistencia fuese completa, para poder obtener conclusiones del curso en general sin excepciones.

En relación a la aplicación del instrumento, en ese momento dentro de la sala de clases habían tres supervisores: el profesor de asignatura, la practicante que lo acompaña a sus clases y la investigadora, por lo tanto se logró mantener un ambiente serio y tranquilo dentro de la sala de clases, el curso en sí no tiene muy buen comportamiento, pero se tomaron en serio la actividad y respondieron a lo pedido.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE LOS HALLAZGOS DE INVESTIGACIÓN

A continuación se presentarán los resultados de los análisis realizados en esta investigación, para presentarlos de manera ordenada y según la metodología aquí utilizada, se presentará fase a fase la información recopilada, es decir: Análisis Preliminares, Análisis de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, Experimentación y finalmente análisis a posteriori y evaluación.

5.1 ANÁLISIS PRELIMINARES

Los análisis preliminares se desarrollaron en función del análisis de programas de estudio, historia de las matemáticas, investigaciones relacionadas a los temas en cuestión para posteriormente organizar los resultados obtenidos y avanzar a la siguiente fase, donde se postulan las interpretaciones de estos y los pasos a seguir.

En Chile, los profesores tienden a pensar que los programas de estudio representan una guía de trabajo en donde no se debe enseñar más de lo que ahí se indica, y utilizando las estrategias entregadas por estos. Es por eso que se realizó el análisis de los programas de estudio, para reconocer desde que perspectiva se aborda la enseñanza de los objetos básicos del cálculo y además si es que estos son enseñados en la enseñanza media.

Números	Descripción
Epistemología	La noción de número surge (S. III a.C.) con la necesidad que presentaban los hombres de medir. Los números naturales han estado presentes en todas las civilizaciones y en distintas representaciones, primero se consideraban desde el 1 al 9, hasta que dos siglos más tarde surge la existencia del cero en representación de la “nada”. En el siglo VI d.C. surge el sistema decimal de posición y ya cerca del siglo XVII d.C. se acepta el “-” como símbolo de la resta y negatividad de números. Finalmente en 1872 Dedekind logró capturar la continuidad de la recta numérica.
Enseñanza	La enseñanza de los conjuntos numéricos según los planes y

Tradicional	programas de estudio se inicia en la educación pre-escolar, pero es en séptimo básico cuando se amplía el conjunto de los números naturales hasta los enteros, esto se realiza en un principio desde una perspectiva comparativa entre estos, es decir, se da paso a los números enteros desde la resolución de problemas que no tienen solución en el conjunto de los números naturales presentando la necesidad de ampliarse a un nuevo conjunto, así sucesivamente se da paso a los demás conjuntos numéricos hasta llegar a los números complejos en tercer año medio. Luego de cada ampliación de un conjunto a otro, se incorporan las propiedades de estos, la resolución de operaciones básicas y resaltando la resolución de potencias dentro de lo que el conjunto permite.
--------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Dificultades y Obstáculos	Números Enteros: Existencia de los números negativos, resolución de ecuaciones con resultados dentro del conjunto, factores literales expresados dentro del conjunto e interpretación de resultados expresados como números negativos.
	Números Racionales: Diversas representaciones de un mismo número dentro del conjunto, operatoria con fracciones, conocimiento del desarrollo de algoritmos, pero no de los conceptos tras ellos.
	Números Reales: Desarrollo de potencias con exponente no natural y la poca relación entre los diversos conjuntos que componen a los números Reales.

Funciones	Descripción
Epistemología	En un principio las funciones fueron concebidas intuitivamente por los babilónicos como variación cuando intentaban identificar regularizaciones en las tabulaciones de fenómenos naturales para después aritmetizar y generalizar esas observaciones. Por los griegos fueron concebidas como proporciones, pues estos veían la matemática como estática por lo que no podían utilizar los términos de variable pero sí de incógnitas. Ya en la Edad

Media se busca dar una explicación cuantitativa de los fenómenos naturales, a través de gráficos, donde surge la concepción de la función como gráfica, más adelante Fermat y Descartes descubren la representación analítica conectando dos ramas de la matemática: la Geometría y el Álgebra lo que lleva a entender la función como curva. Recién en 1976 se utiliza por primera vez el término de función, Euler y Bernoulli proponen la letra f para representar una función escribiendo por primera vez $\langle fx \rangle$ de donde surge una de las primeras definiciones: “una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes”. Finalmente la concepción de función arbitraria, aparece en los últimos trabajos de Euler, considerando funciones más generales que las funciones analíticas, tomando en cuenta funciones especiales, no derivables, con picos, que denomina discontinuas o mixtas.

Enseñanza tradicional El inicio de la enseñanza de las funciones es en octavo básico, en una primera instancia modelando situaciones para después introducir el concepto de funciones e identificar variables dependientes e independientes, dominio y recorrido. Luego se da paso a la función lineal y afín, sus representaciones y a la composición de funciones, posteriormente se van introduciendo otras funciones como son la función exponencial, logaritmo, raíz cuadrada, cuadrática y potencia, todas estas presentadas y posteriormente presentadas sus gráficas.

Dificultades y obstáculos	<ul style="list-style-type: none"> • Tabulación como herramienta y no como representación 	El reconocimiento de los estudiantes de la tabulación como herramienta para acceder a una representación, y no como una representación de función.
	<ul style="list-style-type: none"> • Concepto de función 	Poca claridad en la concepción de función, aceptando una definición de este a través de criterios para identificarla no así como lo que verdaderamente es una

		función.
<ul style="list-style-type: none"> • Flexibilidad concepto 	proceso-	Dualidad del concepto, poca claridad en la diferenciación del concepto como proceso y como objeto matemático.
<ul style="list-style-type: none"> • Articulación de los registros simbólicos 		Poca relación entre los variados registros simbólicos de una función, predominancia en la enseñanza del registro algebraico y el status infra-matemático (fuera de las matemáticas) que se le da al registro gráfico.
<ul style="list-style-type: none"> • Status de herramienta y cambio de cuadro 		Considerar las funciones como herramientas y a la vez utilizarlas en la resolución de problemas en otros cuadros matemáticos

Sucesiones	Descripción
Epistemología	Una sucesión matemática es un conjunto ordenado de objetos matemáticos que generalmente son números. Pitágoras comenzó a construir sucesiones infinitas luego de comenzar a armar polígonos con piedras y contar la cantidad que utilizaba, es así como surgieron los números poligonales. Fibonacci por su parte introduce los números de Fibonacci. Así mismo, existen diversos tipos de sucesiones entre ellas, las finitas, infinitas y vacías.
Enseñanza tradicional	Es en cuarto año medio formación diferenciada donde según los programas de estudio corresponde la enseñanza de la unidad “procesos infinitos”, donde se plantea la enseñanza de series y sucesiones y el estudio de la convergencia de estas, pero revisando con meticulosidad el programa, en el desarrollo de la unidad estos contenidos se omiten.

Dificultades y Obstáculos	• Conceptualización de Sucesión	Identificar los términos de una sucesión, su notación, ciertos convenios matemáticos relacionados.
	• Diferenciación entre Series y Sucesiones	Poca claridad entre la diferenciación de una sucesión con una serie.
	• Relación entre las diversas representaciones	Falta de identificación de las diversas representaciones de una sucesión y la relación entre estas.

Plano Epistemológico

Contenido	Principales Dificultades	Desarrollo de las dificultades
Límite	<ul style="list-style-type: none"> • Sentido común de la palabra límite 	Entendimiento de la palabra límite como una barrera infranqueable, fin de un camino, etc.
	<ul style="list-style-type: none"> • Dualidad del concepto 	Carácter estructural, visto el límite como concepto y eje central del cálculo y carácter instrumental del límite, es decir, la utilización de este como herramienta u objeto matemático.

Plano Didáctico

Contenido	Principales Dificultades	Desarrollo de las dificultades
Rupturas en el pensamiento algebraico	<ul style="list-style-type: none">• Relacionadas a las prácticas	Tratamiento de desigualdades en el álgebra, distintas al que se le da en el cálculo (equivalencia a demostraciones bajo condiciones), alternancia de cuantificadores, aproximaciones, simbolismos, lenguaje y particularmente a las demostraciones.
	<ul style="list-style-type: none">• Ligadas al Razonamiento Matemático	Dejar los razonamientos puramente algebraicos, para avanzar a los razonamientos ligados a aproximaciones, acotaciones, condiciones y demostraciones, para cumplir con equivalencias u obtener valores representativos.

5.2 ANÁLISIS A PRIORI Y CONCEPCIONES

Según las fases ya mencionadas de la Ingeniería Didáctica tanto en el Marco Teórico como en el Marco Metodológico, el proceso de identificar las variables macro y micro didácticas están enfocadas a la formulación de una futura propuesta didáctica, como ese no es el caso de esta investigación estas no se identificaran puesto que no son parte de lo que se desea lograr.

Ya identificadas teóricamente las dificultades planteadas, surge la necesidad de identificar los medios o herramientas requeridas para la finalidad buscada. Entonces como esta investigación busca identificar las dificultades de acceso al Cálculo que presentan los estudiantes de Cuarto año Medio, sólo se puede diseñar un instrumento enfocado a los conocimientos que hasta ese nivel tienen los estudiantes, por lo tanto sólo se puede identificar las dificultades relacionadas al plano cognitivo, es decir, a los objetos básicos del Cálculo. Por lo que se buscó en textos de cálculo, preguntas de pre cálculo, para formular un test diagnóstico a implementar en 4º cuarto año medio, este completamente alejado a las dificultades ya identificadas enfocado a las creencias y prácticas del investigador, con la finalidad de contrastar los resultados obtenidos a base teórica con los obtenidos en la implementación del instrumento.

Puesto que si bien los primeros resultados son coherentes y resuenan a factores comunes, la intencionalidad es estudiar a un grupo reducido de estudiantes, por lo que pueden surgir dificultades nuevas, o acotar las ya identificadas. El instrumento utilizado fue presentado en el Capítulo III de esta investigación, y su diseño está presente en los anexos.

5.3 EXPERIMENTACIÓN

De un total de 47 estudiantes pertenecientes al curso intervenido, participaron en la experimentación 47 estudiantes, es decir, la totalidad del curso lo que permitirá concluir y hacer observaciones reales en cuanto al curso en general.

La forma en que se organizará la información recopilada a través de la implementación del test será mediante la tabulación de respuestas, indicando por cada pregunta la alternativa correcta, las incorrectas y las omitidas, para posteriormente interpretar los resultados obtenidos.

Cada análisis se hará en el mismo orden en que se presentaron las preguntas en el test. La organización de la información se presenta a continuación:

Análisis del Ítem de selección múltiple según el diseño del instrumento anexado.

Ítem I, selección Múltiple.

Pregunta nº1:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Reducir la fracción.

Al reducir a su mínima expresión $\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$ se obtiene:	
a) $\frac{5}{3}$	Resuelve las sumas, restas y divisiones de fracciones correctamente.
b) $\frac{15}{64}$	Desarrolla correctamente las sumas y restas de fracciones, al realizar la división de fracciones multiplica los numeradores y multiplica los denominadores.
c) 1	Al estar los mismos valores en el numerador y en el denominador se asume que es 1.
d) 0	Al sumarse en el numerador y restarse en el denominador el mismo valor y viceversa se asume que el resultado es cero.



Alternativas	Cantidad de estudiantes
a	42
b	0
c	1
d	0
omitidas	4

En la pregunta nº 1, de la totalidad de los diagnósticos en 42 se desarrolló de manera correcta la reducción de la expresión y sólo en un diagnóstico se cometió uno de los errores estipulados como posibles en el desarrollo de esta pregunta, quien justamente indicó que el numerador con el denominador se anulaban por lo tanto el resultado es 1. En cuanto a la cantidad de omisiones en esta pregunta el porcentaje fue bajo, lo que quiere decir que la mayoría de los estudiantes se sentía seguro de tener los conocimientos para abordarla.

Pregunta nº2:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Identificar si los estudiantes saben Racionalizar y simplificar correctamente una expresión.

Al racionalizar y simplificar la expresión $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ resulta:	
a) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$	Se separa el denominador en las dos expresiones ahí presentes, obteniendo dos fracciones resultantes, estas se desarrollan de manera correcta.
b) $\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{4\sqrt{5}-9}$	Para racionalizar la expresión se utiliza el mismo binomio y se desarrolla un cuadrado de binomio en el denominador.
c) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$	Racionaliza y simplifica correctamente.
d) $\sqrt{50} + 2\sqrt{10}$	Racionaliza de forma correcta, pero no se desarrolla la raíz de 50



Alternativas	Cantidad de estudiantes
a	0
b	8
c	15
d	8
omitidas	16

De los ocho diagnósticos en los que se indicó como correcta la alternativa “**b**” seis realizaron el desarrollo del ejercicio y los dos restantes sólo indicaron la alternativa. Los seis diagnósticos en los que se desarrolló el ejercicio en la hoja todos cometieron el mismo error ya estipulado, es decir utilizaron el mismo binomio que presentaba el denominador desarrollaron los productos y simplificaron la expresión obtenida.

Por otra parte los ocho diagnósticos en los que se seleccionó la alternativa “**d**” en todos se desarrollaron correctamente los procesos, lo único que no se desarrolló en completitud fue la simplificación del resultado obtenido.

Finalmente cabe mencionar en dos diagnósticos se seleccionaron dos alternativas, la alternativa “**c**” y “**d**”, la respuesta se incluyó dentro de la categoría de respuestas correctas, esto muestra que los estudiantes también fueron capaces de relacionar la equivalencia que existe entre las expresiones de ambas alternativas.

Pregunta nº3:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Aplicar Operatoria combinada con fracciones.

El resultado de $\frac{14}{21} * \left(\frac{2}{5-\frac{1}{3}}\right)^2$:	
a) $\frac{6}{49}$	Desarrolla correctamente la operatoria combinada en los números racionales.
b) $\frac{24}{49}$	Sólo eleva al cuadrado el numerador dentro del paréntesis y desarrolla correctamente todos los demás procesos.
c) $\frac{9}{49}$	Se desarrollan el cuadrado de la fracción, pero en el denominador el binomio no se desarrolla correctamente, todos los demás procesos siguen un curso correcto.
d) $\frac{12}{49}$	Al los valores del denominador dentro del paréntesis se hace directo, es decir, el entero "5" se ve como un numerador y se conserva el denominador "3". Luego la expresión se desarrolla correctamente.



alternativas	Cantidad de estudiantes
a	21
b	1
c	1
d	0
Omitidas	24

En un solo diagnóstico se indicó como correcta la alternativa “b”, se llegó a ese valor, ya que al desarrollar el cuadrado del paréntesis sólo se elevó al cuadrado el numerador de la fracción dentro de este, todos los demás procesos fueron desarrollados correctamente, por lo que se deduce que se desconoce el proceso asociado al desarrollo de potencias de una fracción, concurriendo a la común

creencia de que sólo se desarrolla la potencia en el numerador.

Con respecto a la alternativa “c”, también sólo un diagnóstico presento la selección de esa alternativa, el error aquí cometido también se relaciona al desarrollo del cuadrado de la fracción, pero en esta ocasión se desarrollo tanto el numerador como el denominador, pero al desarrollar el binomio que conforma el denominador se hace elevando al cuadrado el primer término restándole el cuadrado del segundo, no se desarrolla el cuadrado del binomio sino que sólo se elevan al cuadrado los términos que lo componen, esta práctica es muy común por parte de los estudiantes al desarrollar cuadrados de un binomio.

En esta ocasión la cantidad de omisiones por parte de los participantes fue superior a la cantidad de respuestas entregadas por los mismos.

Pregunta nº4:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Identificar equivalencias entre expresiones a través de Factorizaciones y simplificaciones.

Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$	
a) $\frac{(x-5)(x-1)}{x-3}$	Factoriza la expresión recurriendo a valores incorrectas para el numerador.
b) $x + 2$	Factoriza correctamente el numerador y luego simplifica.
c) $x - 2$	Separa la fracción en dos, factores literales en una fracción respetando su orden y números en la otra, luego se resuelven.
d) 2	En el numerador resta los factores literales, luego divide el numerador por el denominador sólo observando los factores numéricos obteniendo 2.



Alternativas	Cantidad de Estudiantes
a	10
b	23
c	3
d	1
omitidas	10

En la mitad de los diagnósticos se respondió correctamente la pregunta cuatro de los 24 diagnósticos restantes tan solo diez omitieron su respuesta.

En cuanto a quienes indicaron la alternativa “a”, más de la mitad de los diagnósticos no presentaron desarrollo por lo que se deduce que la respuesta fue intuitiva, en la otra mitad se desarrolló los dos binomios obtenidos en el numerador al momento de multiplicarlos no se respetaban las operatorias por lo que se lograba llegar al resultado esperado.

De los tres diagnósticos en los que se indicó la alternativa “c” en uno no se realizó el desarrollo, en el segundo se restó, es decir, asoció los factores literales restando los exponentes, y luego se simplificaron los factores numéricos. En el tercer diagnóstico se factorizó la expresión que conforma el numerador de manera correcta, simplificando los binomios incorrectamente.

Finalmente, en el test que se indicó la alternativa “d” no se presentó el desarrollo de lo que hizo, por lo que se puede deducir que se hizo al “azar” o intuitivamente.

Pregunta n°5:

Competencia que aborda: Análisis de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Analizar la equivalencia de expresiones algebraicas.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones es verdadera?	
a) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$.	Desarrolla el cuadrado de binomio elevando al cuadrado el primer término y sumándolo con el cuadrado del segundo término.
b) $\frac{1+TC}{c} = 1 + T$	Multiplica la ecuación por “c”, quedando en el lado izquierdo 1+ TC y al lado derecho (1 + t) * c, distribuyendo mal los términos.
c) $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$	Separa el denominador de la fracción algebraica del lado izquierdo en dos términos que se restan ambos dividiendo a uno.
d) $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{a-b}$.	Desarrolla correctamente la fracción algebraica.



Alternativas	Cantidad de estudiantes
a	3
b	2
c	8
d	23
omitidas	11

De tres test en los que se marcó la alternativa “a” y dos personas en los que se indicó la alternativa “b” no se hizo desarrollo alguno por lo que no se puede definir los errores cometidos por lo que solamente se conserva la primera teoría especificada en el diseño de la pregunta expuesto un poco más arriba.

Con respecto a los ocho diagnósticos en los que se seleccionó la alternativa “c” se desarrolló lo esperado, es decir, se separó el denominador de la fracción y se obtuvieron dos fracciones “equivalentes” al razonamiento realizado.

Pregunta n°6:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Aplicar operatoria con racionales y simplificación, a expresiones algebraicas.

Al simplificar la siguiente expresión racional $\frac{\frac{y-x}{x-y}}{\frac{1-\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{x}}}$ se obtiene:	
a) $x - y$	Desarrolla correctamente las fracciones algebraicas, simplificando correctamente la última expresión, distribuyendo mal el factor que multiplica al binomio resultante. $-(x+y) = x - y$
b) $-(x - y)$	Luego de desarrollar el numerador y el denominador correctamente, al factorizar la expresión que resulta como numerador no se respeta el orden de los factores literales obteniendo un binomio incorrecto.
c) $-(x + y)$	Simplifica correctamente la expresión.
d) $y - x$	Desarrolla correctamente las fracciones algebraicas, simplificando correctamente la última expresión, distribuyendo mal el factor que multiplica al binomio resultante. $-(y+x) = y - x$

Alternativas	Cantidad de estudiantes
a	4
b	1
c	13
d	9
omitidas	20



Como se estipuló con anterioridad en los test en que indicaron la alternativa “a” se cometió exactamente el error esperado.

El test en el cual se marcó la alternativa “b” no realizó el desarrollo de su ejercicio por lo que no se puede inferir los procedimientos o errores enfrentados.

En los que se seleccionó la alternativa “d” también se realizaron los procesos esperados, puesto que se desarrolló correctamente el numerador y el denominador, luego se factorizó una expresión por “menos uno” simplificando correctamente los binomios y finalmente distribuyendo erróneamente el “menos uno”.

Finalmente surge la necesidad de destacar que en algunos de los diagnósticos en los que se omitió la respuesta, se desarrolló un procedimiento similar al esperado para la alternativa “d”, sólo que no se factorizó por “menos uno” y se simplificaron expresiones que no eran equivalentes entre sí, obteniendo como resultado “x+y” un valor no propuesto en las alternativas lo que probablemente llevó a una omisión.

Pregunta n°7:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Desarrollar desigualdades expresando su resultado como un intervalo solución.

La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x+1} \leq 1$ corresponde a:	
a) $[\infty, 4[$	Resuelve la inecuación, expresando inadecuadamente el intervalo solución.
b) $[4, \infty[$	Resuelve la inecuación correctamente expresando de manera incorrecta la solución de esta.
c) $]\infty, 4]$	Resuelve la inecuación expresando correctamente el intervalo solución
d) $[-4, \infty[$	Desarrolla la inecuación de manera incorrecta.



En donde se indicó la alternativa “a” como correcta se le dio valor uno a “x” y se obtuvo un valor menor a uno, la alternativa que se seleccionó indicaba

Alternativas	Cantidad de estudiantes
a	1
b	3
c	19
d	2
omitidas	22

correctamente los valores para los cuales se cumple la desigualdad, solo que la expresión de este resultado fue la incorrecta.

Con respecto a la alternativa “b” se desarrolló el tratamiento de la desigualdad correctamente, por lo que el error que se presentó está asociado a la escritura de una respuesta obtenida, puesto que el resultado se obtuvo de manera algebraica y el paso de esta solución a una representación en intervalos fue el incorrecto.

En los dos test que se marcó la alternativa “d” se realizó una representación gráfica de la solución de la inequación, en ambos casos se tomó como punto de partida el valor “-4” y ambas gráficas apuntaban desde ese valor a los extremos opuestos, por lo que también se expresó lo que gráficamente se obtuvo como intervalo solución.

De los veintidós diagnósticos en los que se omitió respuesta, en dos se realizaron los procesos algebraicos obteniendo un resultado que posteriormente se expresó como intervalo solución de manera correcta y aún así no se marcó la respuesta dentro de las alternativas por lo que se presume que fue un olvido.

En general en el ítem de selección múltiple el alto porcentaje de omisión para cada pregunta resta información para los resultados de esta investigación. Este alto porcentaje se presume puede estar relacionado a la cercanía de los estudiantes con la Prueba de Selección Universitaria en donde es preferible omitir que responder mal puesto que eso baja el puntaje final en el trabajo.

A continuación se analizarán las respuestas del segundo ítem del test de diagnóstico, que corresponde a cinco preguntas de respuesta abierta, en donde los estudiantes cuentan con el espacio y libertad de dar respuesta según lo que ellos creen a cada enunciado planteado. Para clasificar las respuestas se indicarán categorías por pregunta todas mutuamente excluyentes entre sí.

Ítem de respuesta abierta

Pregunta nº1:

Competencia que aborda: Análisis de contenidos C.

Objetivo de Pregunta: Analizar la sucesión entregada y aproximar el valor n-ésimo de esta.

Dada la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$, ¿Se puede definir a que valor se acerca la sucesión?

Hay que mencionar que esta pregunta tiene una doble intencionalidad, puesto que busca identificar como los estudiantes se acercan de manera intuitiva al límite.

En esta ocasión las respuestas de los estudiantes se organizarán por categorías, las cuales son: en blanco, correctas, incorrectas 1, incorrectas 2, otros.

En blanco: corresponden a todos los diagnósticos en que no se respondió, ni se intentó dar respuesta a la pregunta.

Correctas: corresponden a todos los diagnósticos en los que a través de diversos análisis y procedimientos válidos se dio una respuesta correcta a la pregunta.

Incorrectas 1: corresponden a todos los diagnósticos en los que como respuesta se entregó el n-ésimo término de la sucesión como expresión algebraica.

Incorrectas 2: corresponden a todos los diagnósticos en los que se entregó como respuesta el quinto término de la sucesión, se expresó que la sucesión divergía por diversos motivos ó se indicó con palabras lo que ocurría entre un término y el siguiente.

Otros: corresponden a los diagnósticos en los que no se dio respuesta alguna, pero si presentan “garabatos” (Entendiéndose por garabatos a dibujos o procedimientos no relacionados a la pregunta).



Respuestas	Cantidad de estudiantes
En blanco	17
Correctas	7
Incorrectas 1	4
Incorrectas 2	17
otros	2

Todos los test en los que se respondió que sí se puede definir el valor al cual se acerca la sucesión y se definió correctamente se utilizaron los valores entregados y se realizó la división representada por cada fracción y luego se probó con valores más grandes para deducir a cual valor tendía, sólo en un diagnóstico se indicó que la sucesión se acerca demasiado pero no logra llegar al valor exactamente.

En cuatro test se dio como respuesta la expresión algebraica del n-ésimo término de la sucesión, de los que tres la expresaron iniciando con $n=0$ y el otro estudiante la expresó con $n=1$, donde se hace un mea culpa de la no especificidad de ese detalle aunque para la pregunta no sea relevante debió haberse definido.

De las respuestas correspondientes a la categoría incorrectas 2, nueve indicaron como respuesta el término siguiente a los valores entregados, es decir, el quinto término de la sucesión, cuatro indicaron que si se puede definir puesto que el numerador aumenta en uno y el denominador aumenta en uno, dos estudiantes indicaron que tiende a infinito y los demás que tiende a cero, los dos últimos hallazgos se obtuvieron a través de la realización de las divisiones que representaba cada fracción.

Con respecto a la categoría Otros representa a los diagnósticos que presentaban procedimientos azarosos en cuanto a la sucesión y poco relacionados a lo pedido.

Pregunta nº2:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos B.

Objetivo de Pregunta: Evaluar la función en valores algebraicos.

2.- Dada la función $f(x) = 2x^2 - x$. Hallar $f(x + h)$ y $\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$, donde x y h son números reales y $h \neq 0$.

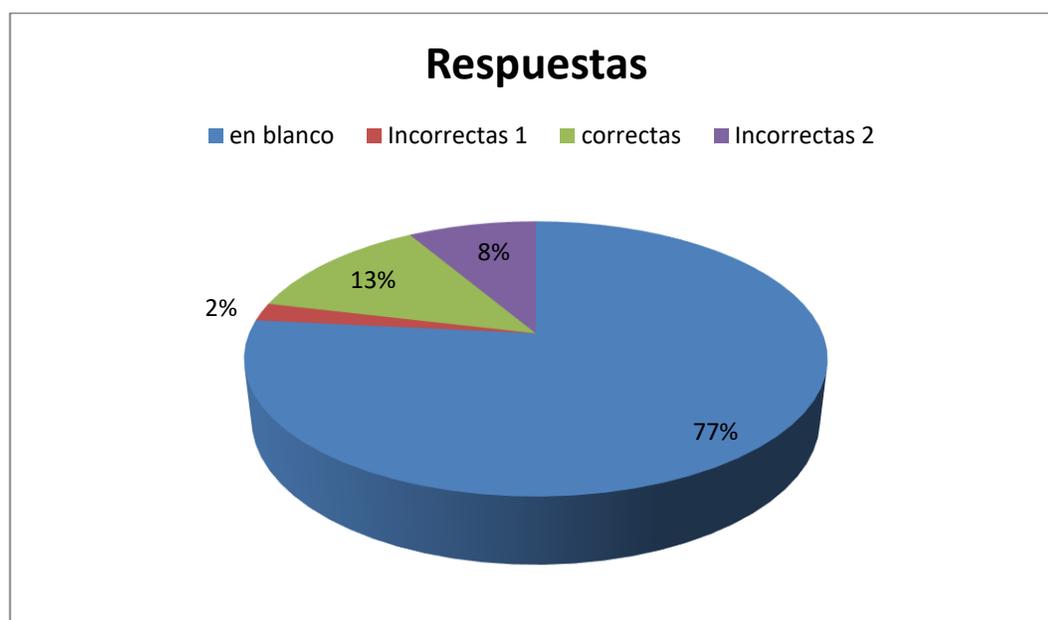
Para el análisis de esta pregunta se definieron 4 categorías mutuamente excluyentes entre sí y son las siguientes: en blanco, incorrectas 1, correctas, incorrectas 2.

En blanco: corresponden a todos los diagnósticos en que no se respondió, ni se intentó dar respuesta a la pregunta.

Incorrectas 1: corresponden a todos los diagnósticos en los que se expresó algebraicamente lo pedido de manera correcta, pero los desarrollos continuos fueron erróneos.

Correctas: corresponden a todos los diagnósticos en los que se indicó correctamente la respuesta, ya sea solo expresándolas algebraicamente o en los que se expresó y desarrolló correctamente hasta obtener la expresión algebraica reducida.

Incorrectas 2: corresponden a todos los diagnósticos en los que se presentaron desarrollos algebraicos y expresiones algebraicas incorrectas.



Categorías	Cantidad de estudiantes
en blanco	36
Incorrectas 1	1
correctas	6
Incorrectas 2	4

De los test que dieron respuesta correcta a lo pedido, en dos solamente se expresó la función resultante sin desarrollar los paréntesis y por lo mismo sin simplificar la expresión, en los cuatro diagnósticos restantes se expresó, desarrolló y simplificó correctamente lo pedido en las instrucciones.

En un diagnóstico se expresó correctamente la función resultante, pero los procesos de simplificación siguientes para las dos peticiones fueron desarrollados de manera incorrecta.

Las cuatro respuestas consideradas dentro de la categoría incorrecta presentan desarrollos en los que sólo se realizó la primera parte de lo pedido en el enunciado y sólo muestran un tratamiento a la función inicial, es decir, sólo se factorizó por "x" la función entregada.

La gran cantidad de omisiones para esta pregunta complejiza el análisis puesto que se entregaron los espacios en blanco, a excepción de dos test en los que se expresó verbalmente lo siguiente "nunca entendí funciones".

representada por “dividir por siete” en donde se dividió sólo el último valor agregado a la expresión en vez de haber dividido toda la expresión.

Incorrectas 2: corresponden a todos los diagnósticos en los que se modeló toda la situación planteada, pero no se incorporó el último proceso “dividir por siete”.

Incorrectas 3: corresponden a todos los diagnósticos en los que se modelaron todas las situaciones por separado sin tomar en cuenta las que antecedían.

Otros: corresponden a todos los diagnósticos en los que se respondió incorrectamente fuera de las categorías anteriormente mencionadas.



Alternativas	Respuestas de los estudiantes
En blanco	4
Correctas	32
Incorrectas 1	6
Incorrectas 2	2
Incorrectas 3	2
otros	1

Gran porcentaje de los diagnósticos estaban contestados correctamente lo que indica que los estudiantes no tienen problemas para modelar situaciones. La cantidad de diagnósticos en blanco recibidos es mínima, por lo que muestra la seguridad de los estudiantes con relación al contenido y objetivo de la pregunta.

Los diagnósticos representantes de la categoría Incorrectas 1, son en los cuales se modeló correctamente la situación, pero la no utilización de paréntesis en los casos en que se escribió linealmente la respuesta hace que esta esté incorrecta. Fuera de eso en dos casos se dividió la última acción realizada por siete, es decir se obtuvo la expresión: $(a^2 - 10)^2 - \frac{5}{7}$. Esta categoría muestra que los estudiantes presentan problemas con las reglas de escritura en las matemáticas.

En los diagnósticos categorizados como Incorrectas 2, se modeló correctamente casi toda la situación, puesto que no se incorporó el último proceso surge la duda de si esto ocurrió por olvido, puesto lo demás está correctamente planteado.

Con relación a los diagnósticos categorizados como incorrectos 3, son en los cuales se dio respuesta modelando la situación pero por separado e independientes unas de otras, es decir, a la variable "a" se le aplicaron por separado todas las operaciones mencionadas y en cada ocasión se iniciaba con "a", por lo que no se entendió como un proceso sino que por opciones.

En la categoría otros, entra el diagnóstico en el cual sólo se utilizaron los valores numéricos entregados y se desarrollaron, pero no se relacionaron a lo pedido.

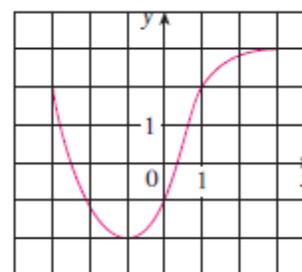
Pregunta nº4:

Competencia que aborda: Análisis de contenidos B.

Objetivo de Pregunta: Analizar la función a través de información entregada por la gráfica.

La siguiente imagen muestra la gráfica de una función $f(x)$, sólo con la información ahí entregada responda los siguientes enunciados:

- Indicar el valor de $f(-1)$
- Estime el valor de $f(2)$
- ¿Para qué valor o valores se cumple $f(x) = 2$?
- Estimar el valor en que se cumple $f(x) = 0$
- Indicar el Dominio y recorrido de la función



Las categorías para esta pregunta son sólo dos: en blanco e incorrectas y se definen a continuación.

En blanco: corresponden a todos los diagnósticos en los que se modeló correctamente la situación planteada.

Incorrectas: corresponden a todos los diagnósticos en los que se intentó dar respuesta, pero estas fueron incorrectas.

Correctas: corresponden a todos los diagnósticos en los que se respondió de manera correcta a cada pregunta asociada a la gráfica.



Categorías	Cantidad de estudiantes
En blanco	34
Incorrectas	13
Correctas	0

La alta cantidad de diagnósticos en los que se dejó en blanco la respuesta solicitada, preocupa y resuena puesto que en la pregunta 2 de este ítem, también relacionada a las funciones ocurrió lo mismo lo que demuestra un desconocimiento por parte de los estudiantes con respecto a este contenido.

Los diagnósticos categorizados como incorrectos se subdividen en dos, puesto que en todos se intentó dar respuesta e interpretar la gráfica entregada, sólo dos diagnósticos mostraron una correcta interpretación de la información y por lo mismo

respondieron correctamente a las preguntas asociadas a excepción de las relacionadas al dominio y recorrido de la función. Los once diagnósticos restantes presentaron análisis incorrectos, mostrando un desconocimiento no absoluto de lo que se estaba preguntando.

No hay que pasar por alto, que a diferencia de todas las otras preguntas de este test en esta ocasión no hubo diagnóstico que presentara una respuesta correcta a lo que se pedía, lo que preocupa.

Pregunta nº5:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos B.

Objetivo de Pregunta: Evaluar la función y obtener la gráfica de esta.

5.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ evaluar $f(-2)$ y $f(1)$. Bosqueje la gráfica para $f(x)$.

Para esta pregunta se formularon 5 categorías: en blanco, correctas, incorrectas 1, incorrectas 2, otros. Las cuales se definen a continuación:

En blanco: corresponden a todos los diagnósticos en los que se modeló correctamente la situación planteada.

Correctas: corresponden a todos los diagnósticos en los que se representó la gráfica de la función correctamente. Fuera de los procesos por los cuales se accedió a esta.

Incorrectas 1: corresponden a todos los diagnósticos en los que se representó una gráfica lineal para la función.

Incorrectas 2: corresponden a todos los diagnósticos en los que se dio por respuesta la valorización de la función.

Otros: corresponden a todos los diagnósticos en los que solamente se dibujó un plano cartesiano y en él cualquier figura, todas lejanas a la función entregada.



Categorías	Cantidad de estudiantes
En blanco	31
Correctas	7
Incorrectas 1	2
Incorrectas 2	3
otros	4

Nuevamente la cantidad de omisiones supera considerablemente a quienes dieron respuesta ya sea correcta o incorrectamente, lo que afirma lo anteriormente dicho, puesto que dentro de este ítem hay tres preguntadas relacionadas a las funciones, y en las tres más del 60 % no respondió, ni intentó hacerlo.

Siete diagnósticos presentaron gráficamente la función y de manera correcta, la forma de obtenerla en todos los casos fue a través de la valorización de la función en distintos puntos, en unos casos se especificó de manera escrita donde la función cambiaba.

Los diagnósticos categorizados como Incorrectos 1, se valorizaron las funciones en distintos puntos, pero se trazó de forma lineal la función, demostrando un desconocimiento de las particularidades de cada rama que la compone.

Los tres diagnósticos que conforman la categoría Incorrectas 2, dieron como respuesta la valorización de la función en “-2” y “1” obteniendo un resultado de manera correcta, pero sin utilizar los valores para presentar algún tipo de gráfica.

Finalmente los cuatro diagnósticos correspondientes a la categoría otros, presentan dibujos de líneas sobre un plano cartesiano, pero no entregan información alguna y no se relación a la función entregada.

Para organizar la información obtenida en este ítem, se organizará una tabla y se sintetizarán los hallazgos encontrados:

Pregunta	Contenido que aborda	Hallazgos
Pregunta nº1	Sucesiones	<ul style="list-style-type: none"> • Conocimiento de conceptos asociados a sucesión, como divergencia, tendencia, n-ésimo término. • Desconocimiento de los procesos asociados a la sucesión para obtención de valores dentro de ella.
Pregunta nº2	Funciones	<ul style="list-style-type: none"> • Desconocimiento de cómo evaluar expresiones algebraicas en una función. • Problemas en los desarrollos de los procesos algebraicos.
Pregunta nº3	Funciones	<ul style="list-style-type: none"> • Problemas en la escritura matemática.
Pregunta nº4	Funciones	<ul style="list-style-type: none"> • Problemas con la interpretación de la representación gráfica de una función. • Problemas con el planteo del dominio y recorrido de una función dada su gráfica.
Pregunta nº5	Funciones	<ul style="list-style-type: none"> • Desconocimiento de las gráficas de distintas funciones. • Asociación del paso de una representación algebraica a una gráfica a través de la valorización de la función, dando linealidad a la figura obtenida.

Entonces a continuación, se realizará el último análisis de preguntas correspondiente al ítem de conceptos. En esta ocasión se indicará cuantos diagnósticos presentaron en blanco la respuesta para esta pregunta y separarán las respuestas obtenidas según la definición entregada.

Pregunta n°1:

Competencia que aborda: Comprensión de contenidos B.

Objetivo de Pregunta: Expresar lo que entienden por el concepto Función

a) Defina con sus palabras el concepto función.

Definición de Función	Relacionadas con ...	Cant. de estudiantes
Conjuntista	Elementos de un conjunto A que tienen una imagen en un conjunto B. Si un elemento del conjunto A no tiene imagen en B no es función.	6
Relación	Es una relación que se establece entre un conjunto de números "x" y otro conjunto "y", donde el segundo es el resultado de una ecuación del primero.	2
Máquina	Función es una herramienta parecida a una máquina que convierte un número a otro, pasando por una serie de procesos.	1
representación algebraica	Forma algebraica de representar: parábolas, rectas y paralelas, circunferencias, un gráfico.	5
Procedimiento	Procedimiento Matemático que determina un resultado.	3
Para lo que sirve	Sirve para representar puntos en un plano cartesiano	2
Término	Termino utilizado para darle valor a la "x" en una ecuación determinada.	1
Modelo	Es un modelo a través del cual se obtiene un resultado.	2
Otros	Algo que funciona, ecuación de un gráfico en el cual se intercambian los valores, método de solución de inecuaciones de segundo grado, la especificidad de acción de algo.	7

En esta ocasión sólo 18 diagnósticos estaban en blanco lo que es bajo en consideración a las preguntas anteriores.

Hay que hacer la indicación de que en la categoría maquina el estudiante indicó que para darle un sentido más didáctico y no tan matemático hace la comparación con el concepto de función.

De las diversas definiciones entregadas en los diagnósticos muestran una lejanía con la definición formal de función y con la comprensión de lo que es una función, muchas de las definiciones hacen referencias a que es un procedimiento y a que es una representación de rectas, paralelas, parábolas y gráficos.

Pregunta nº2:

Competencia que aborda: Comprensión de contenidos C.

Objetivo de Pregunta: Expresar con sus palabras el concepto Sucesión.

b) Defina con sus palabras el concepto sucesión.

Definición de Sucesión	Relacionadas con...	Cant. de estudiantes
Secuencia de Números	Una secuencia de números en un orden establecido.	10
Serie numérica	Es una serie de valores consecutivos que pueden ir en una escala ascendente o descendiente.	4
Función	Es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.	2
Razón	Números consecutivos de acuerdo a un valor constante.	4
Secuencia de Fracciones	Secuencia de fracciones que tienden a acercarse a un valor, pero nunca llegan a él.	1
Operación	Es una operación matemática que se puede dar en un conjunto representado matemáticamente con un resultado en los números reales.	1

otros	Lo posterior a algo, número que viene próximo a un número ya dicho, lo siguiente a algo, continuidad de algo, algo que sucede a otra cosa.	5
--------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

Al igual que en la pregunta anterior, la lejanía con una definición formal por parte de los estudiantes se refleja claramente, la confusión o poca diferenciación con el término serie también se hace notar, y la asociación de sucesión a la razón entre los términos de esta hace hincapié en que si bien los estudiantes pueden reconocer el proceso o lo que se debe cumplir, no saben lo que están haciendo.

La más cercana y asertiva definición encontrada, es la relacionada a una secuencia de números en un orden establecido, pero aún así hace falta completarla y entregar argumentos que hagan de las sucesiones y la concepción de estas una definición única, clara y cercana para los estudiantes.

5.4 ANÁLISIS A POSTERIORI Y EVALUACIÓN

Análisis final entre los hallazgos obtenidos mediante los análisis a priori y a posteriori.

Contenido	Principales Dificultades
Números	<ul style="list-style-type: none"> Números Enteros con factores literales Números Racionales con factores literales Números Reales con factores literales Interpretación de resultados en los tres conjuntos Representación de números en los tres conjuntos
Funciones	<ul style="list-style-type: none"> Concepto de función Tabulación como herramienta y no como representación Flexibilidad proceso-concepto Articulación de los registros simbólicos

-
- Status de herramienta y cambio de cuadro

- Interpretación de datos desde una representación gráfica

- Evaluación de valores algebraicos en la función

Sucesiones

- Conceptualización de Sucesión
- Diferenciación entre Series y Sucesiones
- Relación entre las diversas representaciones

Entonces este análisis a posteriori con relación a los objetos básicos del cálculo, comprueba los hallazgos obtenidos en la investigación teórica, y a la vez entrega ciertos puntos no identificados en cuanto a los números y las funciones, y a la vez valida los análisis a priori, dándoles un sentido real y contextualizado.

Como ya se mencionó con anterioridad, en esta ocasión no se pueden indagar los planos epistemológicos ni didácticos, puesto que no son contenidos vistos en la enseñanza media aún. Por lo que se conservan los hallazgos obtenidos en los análisis a priori, sin poder ser validados debido al contexto en el cual se realizó la experimentación.

Con respecto a los hallazgos encontrados en la fase de experimentación, claramente son dificultades que se pueden reducir o enfrentar no sólo en cuarto año medio, sino que desde que los estudiantes comienzan a relacionarse con estos.

Con respecto a los Números se debe mencionar que la falta de rigurosidad por parte de los participantes tanto en las prácticas algebraicas como en las relacionadas a las operaciones básicas llama la atención, puesto que hay manipulación de este como objeto matemático, pero la falta de rigurosidad en el manejo representa una dificultad clara.

En cuanto a las Funciones, claro está el carácter procedimental que se asimila a estas, la lejanía con una definición y más que nada con una comprensión de lo que es una función. También destacó la lejanía con la representación gráfica de una función, tanto en la construcción de esta desde un registro algebraico, como la interpretación de esta.

Con respecto a las sucesiones, nuevamente la conceptualización y comprensión de estas son una dificultad que reluce al instante, la no diferenciación entre lo que es una serie y una sucesión también destacan, y finalmente la lejanía con las prácticas asociadas a las sucesiones como identificación del n -ésimo término, creciente o decreciente, o de la tendencia de esta también relucieron, puesto que no se presentó un desconocimiento absoluto, pero sí una confusión.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

No se puede pasar por alto que un profesor cada vez que desee incorporar contenidos nuevos a un cierto grupo de estudiantes, deberá enfrentar las dificultades que estos presentan en estos tres planos, es decir, en cuanto a los objetos básicos de lo que se desea enseñar, los ejes centrales del contenido a enseñar y las rupturas en las prácticas asociadas a lo que se sabe y lo que se aprenderá.

De acuerdo a la realidad mencionada anteriormente, se estudió la problemática que surge en el acceso al Cálculo, por lo que se estudiaron las dificultades de acceso al cálculo de estudiantes de un cuarto año medio formación diferenciada sector matemáticas, de un establecimiento científico-humanista de la comuna de Macul en la Región Metropolitana.

La búsqueda de estas dificultades se dividió en tres planos, Cognitivo, Epistemológico y Didáctico. En el plano cognitivo se estudiaron las dificultades asociadas a los objetos; aquí estipulados; como básicos del Cálculo: Números, Funciones y Sucesiones, en el plano epistemológico se analizaron las dificultades asociadas a la conceptualización del Límite como eje central del Cálculo y en el plano didáctico se estudiaron las dificultades asociadas a las rupturas didácticas necesarias en las prácticas algebraicas para pasar a las prácticas en el trabajo del Cálculo.

Con respecto al primer plano mencionado, los hallazgos indicaron que las principales dificultades asociadas a los números se enfocan en tres conjuntos numéricos: los números enteros, la existencia de los números negativos y los desarrollos de estos en diversos procesos matemáticos; los números racionales, sus diversas representaciones y las relaciones entre estas, y el desarrollo de fracciones; los números reales, su completitud conformada por otros conjuntos numéricos y las diversas expresiones de estos. Con respecto a la integración de factores literales dentro de los tres conjuntos mencionados y la interpretación de resultados dentro de ellos también representan parte de estas dificultades.

En cuanto a las funciones se identificaron problemas asociados a: la conceptualización y por lo tanto a la comprensión de lo que es y significa una función, ya sea desde una definición formal o informal no se refleja interiorización por parte de los estudiantes y el carácter procedimental que se le da a esta; la

utilización de la tabulación como herramienta y no como una representación de función; la articulación de los registros simbólicos, es decir, el paso de una representación a otra sin perder información; la interpretación de datos desde la representación gráfica; la evaluación de valores algebraicos en la función y finalmente el poco reconocimiento de esta como herramienta matemática que puede ser utilizada en distintos cuadros, es decir en la geometría, el algebra, la física, economía, etc. En cuanto a las dificultades asociadas a las Sucesiones se basan en la poca conceptualización de ésta, en la diferenciación entre sucesión y series; y en la identificación del n-ésimo termino.

Con respecto al plano epistemológico y la conceptualización del límite como eje central del cálculo, las principales dificultades radican en la poca claridad del concepto de límite debido a la dualidad de este, también la relación con procesos infinitos ligados a valores infinitamente pequeños e infinitamente grandes.

Finalmente relacionado al plano didáctico y a las rupturas necesarias en las prácticas algebraicas para pasar al mundo del Cálculo, principalmente las dificultades en esta área se reducen al tratamiento de desigualdades e inecuaciones, dejando atrás los desarrollos puramente algebraicos y bajo equivalencias para desenvolverse en función de condiciones, acotaciones, con valores aproximados, simbolismos y otro tipo de lenguaje, lo que se deban dejar de lado los conocimientos previos con los que vienen, pero si es necesario el desarrollo de un razonamiento matemático.

Como es sabido, la finalidad de toda investigación es dar respuesta a la Pregunta y las sub-preguntas de investigación, y junto a eso afirmar o contrastar las hipótesis o supuestos confeccionados, en este caso la pregunta de investigación es la siguiente:

¿Cuáles son las principales dificultades para acceder al Cálculo que presentan los estudiantes cuarto año medio formación diferenciada sector matemáticas, en un establecimiento Científico-Humanista de la región metropolitana?

Y las sub-preguntas asociadas son:

¿Cuáles son las principales dificultades asociadas a los objetos básicos del cálculo que presentan estos estudiantes?

¿Cuáles son las principales dificultades en la conceptualización del límite como pilar fundamental del cálculo?

¿Cuáles son las principales rupturas para pasar de un pensamiento puramente algebraico, a las especificidades del trabajo técnico del Cálculo?

En cuanto a las sub-preguntas de investigación, las respuestas ya están claras y definidas, con respecto a la pregunta de investigación como tal, se puede decir que las principales dificultades para acceder al Cálculo que presentaron los estudiantes de cuarto año medio de un establecimiento Científico-Humanista de la Región Metropolitana, se asocian directamente a uno de los tres planos analizados, al plano cognitivo en relación a los Objetos Básicos del Cálculo, puesto que estos son los conocimientos con los que los estudiantes cuentan y por lo obtenido en la fase de experimentación, específicamente las dificultades se asocian a la conceptualización tanto de función como sucesión, y en general a las diversas representaciones de estas dos y de los números. También en las prácticas algebraicas asociadas a estos tres ejes principales funciones, sucesiones y números cuando son desarrollados con factores literales, lo que implícitamente acerca a las dificultades al plano didáctico y las rupturas en el pensamiento puramente algebraico, puesto que para poder realizar estas rupturas estas prácticas deben estar interiorizadas y comprendidas en su mayoría, y al presentarse las dificultades asociadas a éstas complejiza aún más la tarea de entrar en el trabajo técnico del cálculo, conservando estas prácticas y la vez modificándolas.

Con respecto al Plano Epistemológico y la concepción del Límite, estas no son dificultades que hayan podido identificar en los estudiantes de cuarto año medio, pero se puede postular que si dentro de las principales dificultades de acceso al Cálculo se encuentran la de definición de conceptos como funciones y sucesiones, probablemente estos mismos estudiantes muestren dificultades al conceptualizar el límite, puesto que la dualidad de este concepto es similar a que se forja con las funciones.

En cuanto a los tres supuestos planteados en esta investigación:

Al identificar las dificultades de acceso al cálculo se puede lograr una didáctica de un pre-cálculo que las utilice para lograr contribuir en los aprendizajes del último nivel de enseñanza de la Educación Media Formación diferenciada Sector Matemáticas.

Los objetos básicos del Cálculo, la conceptualización del límite y las rupturas necesarias en un pensamiento algebraico, son la base de un pre-cálculo.

El paso de las representaciones y prácticas comúnmente enseñadas y aprendidas como estáticas en relación al álgebra, a unas de tipo dinámicas es un pilar fundamental para entrar al mundo del cálculo.

En relación a los supuestos se puede decir que claramente al identificar las dificultades de acceso al cálculo se puede lograr una didáctica de un pre-cálculo que las utilice en el último nivel de enseñanza media formación diferenciada sector matemáticas, pues identificándolas como ya se hizo en esta investigación, e identificando los objetos básicos del cálculo, la conceptualización del límite y las rupturas necesarias en un pensamiento algebraico como la conformación de este pre-cálculo se puede minimizar la brecha entre la universidad y el colegio, y a la vez enfrentar estas dificultades de manera que la complejidad de esta área de las matemáticas al ingresar a la educación superior sea menos lejana y quizás compleja de lo que hasta el momento es para los estudiantes universitarios.

Con respecto al último supuesto, se puede decir que efectivamente el paso de las prácticas algebraicas aprendidas y enseñadas como estáticas a unas de tipo dinámicas es fundamental para entrar al mundo del Cálculo, lo que puede ser minimizado en la Educación Media fomentando un Razonamiento Matemático en los estudiantes.

Como esta tesis tiene un carácter cualitativo no generaliza los resultados para todos los estudiantes de cuarto año medio, pero sí es transferible en cuanto a los análisis preliminares, es decir, los resultados encontrados en la investigación teórica son fijos, por lo que se pueden utilizar y a la vez formular un nuevo test según la población que se desea investigar. Por lo tanto se puede utilizar esta tesis como guía para una continuación, es decir, para una nueva tesis que evalúe las dificultades de acceso al Cálculo que presentan los estudiantes de primer año de Kinesiología y Fonoaudiología de la Universidad Católica Silva Henríquez, esto a causa de la cantidad de estudiantes que reprueban el curso de Matemáticas 1 en ambas carreras, lo que probablemente arroje la necesidad inmediata de la implementación de un curso de pre-cálculo para estos estudiantes, y por qué no para estudiantes de otras carreras que necesiten de la realización de esta actividad curricular o una equivalente.

Finalmente se puede decir que es clave para poder acceder al Cálculo o a cualquier nueva área dentro de las matemáticas, minimizar las dificultades asociadas a los contenidos previos necesarios para la incorporación de los nuevos, en este caso esa es tarea de los profesores y profesoras de matemáticas de enseñanza media, pues es ahí donde se enseñan los objetos básicos del Cálculo. No hay que pasar por alto tampoco la responsabilidad de los estudiantes, pero en esta ocasión ese no fue el foco de estudio. Ya identificadas las dificultades asociadas a los objetos básicos del Cálculo es necesario formular estrategias para enfrentarlas o minimizarlas, lo que claramente puede ser el pie de inicio para una nueva tesis.

En general, minimizando o enfrentando las dificultades principalmente asociadas a los contenidos previos para la incorporación del Cálculo, y preparando a los estudiantes para las rupturas en las prácticas algebraicas dentro de la Educación Media, las dificultades de acceso al Cálculo se minimicen, o enfoquen principalmente en la conceptualización del Límite y así minimizar de apoco estas dificultades, puesto que utilizar la palabra erradicar, abarca demasiado y en un proceso tan complejo como es el de enseñanza-aprendizaje es prácticamente imposible que esto ocurra, pero si se puede estar preparado para enfrentarlas y mejorar el proceso desde adentro articulando todos los niveles de enseñanza, y preparando a los estudiantes tanto para lo que tienen que saber en el momento como para lo que aprenderán a futuro.

Bibliografía

- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie Philosophique . Paris: J. Vrin.
- Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., & Holmes, P. y. (1994). *Errores y Dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales*. International Journal of Mathematics.
- Brousseau, G. (1983). 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (2) , 165-198.
- Brousseau, G. (1976). La problématique et l'enseignement des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2) , 164 - 198.
- Brousseau, G. (1987). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: AIQUE.
- Coleman, H. y. (2005). *Social work: Research and evaluation. Quantitative and qualitative approaches*. Nueva York: Oxford University Press.
- Cornu, B. (1991). *Limits. En: Advanced Mathematical Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Creswell, J. (2003). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (2nd Edition)*. Thousand Oaks: CA: Sage Publications.
- Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M .*
- Dubinsky, E. y. (1992). The concept of Function: Some aspects of Epistemology and Pedagogy. *MAA Notes nº 25 .*
- Duroux, A. (1982). *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure*. Publications de l'IREM: Burdeos.
- Eisenberg, T. (1991). *Functions and associated learning difficulties*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gloria García, C. S. (1999). Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva al cálculo. *Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología Nº 5 , 51-55.*
- González, J. L. (1991). *Los Números Enteros*. MADRID: Síntesis.
- Hernández, F. y. (2002). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.
- J, Á. -G. (2003). *Como hacer investigación Cualitativa. Fundamentos y Metodología*. México: Paidós Ecuador.

- Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates .
- Kuhn, T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.
- Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM*, 10, 123-159.
- Leithlod, L. (1998). *El Cálculo*. México: OXFORD UNIVERSITY PRESS.
- Lienhardt, G. . (1990). Functions graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* , 1-64.
- Medina, A. C. (2001). *Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas*. Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Mertens, D. (2005). *Research and evaluation methods in special education*. Thousand Oaks: Cowin Press/Sage.
- Michèle Artigue. (1998). Enseñaza y Aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa N°1* , 44-55.
- Michèle Artigue, R. D. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- MINEDUC. (2009). *Fundamentos del Ajuste Curricular en el sector de Matemática*. Santiago.
- MINEDUC. (2009). *Modifica decreto supremo nº 220, de 1998, del Ministerio de Educación que establece los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media y fija normas para su Aplicación*. Santiago.
- MINEDUC. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica Y Media Actualización 2009*. Santiago.
- Naranjo, L. J. (2012). *Enseñanza de sucesiones numéricas para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado cuarto de básica primaria*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- Peralta García, J. (2002). *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal*. *Memorias de la XII semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. México: Universidad de Sonora.
- Raquel S. Abrate, M. D. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.
- Sadín, E. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación. Fundamentos y Tradiciones*. Madrid: Mc Graw and Hill Interamericana de España .
- Siles, B. C. (2009). Dificultades en el Aprendizaje Matemático. *Csif Revista Digital Autónoma* (16), 1-10.

Stewart. (2008). *Calculus.Eary Transcendentals. Sixth Edition.* Belmont, USA: Thomson Brooks/Cole.

ANEXOS

- ◆ Carta de Solicitud al Director
- ◆ Carta de Solicitud al Profesor
- ◆ Diseño del Instrumento
- ◆ Validación de Instrumentos
- ◆ Análisis de textos escolares

Señor:



UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Padre Juan Carlos Zura

Director Colegio Camilo Ortúzar Montt

Presente.

La Universidad Católica Raúl Silva Henríquez, con sede en calle General Jofré N° 462 Santiago, es un establecimiento de Educación Superior destinado a la formación de Profesionales de las áreas de Educación. Con el fin de dar cumplimiento a los planes de estudio de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, específicamente en la actividad Curricular Seminario de Grado, se solicita a la autoridad que dirige el establecimiento Colegio Camilo Ortúzar Montt, su consentimiento para la realización de un test a los alumnos de tercio y cuarto medio formación diferenciada sector matemáticas, realizada por la tesisista Valentina Pruskaya Díaz Castro, en favor de la investigación que realiza sobre "Principales dificultades que presentan los estudiantes para acceder al cálculo, de cuarto año medio de un establecimiento científico humanista. Una ingeniería didáctica", para el seminario de grado, el cual dará el grado de Licenciado en Educación y el título de Profesor de Educación Media en Matemática e Informática Educativa.

Esta encuesta está dirigida a los estudiantes de cuarto medio pertenecientes al plan diferenciado sector matemática. La aplicación de este test diagnóstico abarcará un período de 90 minutos y los resultados que arroje sólo serán utilizados con los fines que la tesis propone. La oportunidad de desarrollar la referida actividad significará un valioso aporte para el desarrollo de la tesis.

De antemano muchas gracias.

Saluda cordialmente:

Valentina Pruskaya Díaz Castro

Rut: 17.314.680 – 9

Director (a)

PADRE JUAN CARLOS ZURA

Señor:

Juan Santis



UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Profesor Colegio Camilo Ortúzar Montt

Presente.

La Universidad Católica Raúl Silva Henríquez, con sede en calle General Jofré N° 462 Santiago, es un establecimiento de Educación Superior destinado a la formación de Profesionales de las áreas de Educación. Con el fin de dar cumplimiento a los planes de estudio de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, específicamente en la actividad Curricular Seminario de Grado, se solicita al profesor del establecimiento Colegio Camilo Ortúzar Montt, su consentimiento para la realización de un test a los alumnos de tercio y cuarto medio formación diferenciada sector matemáticas, realizada por la tesista Valentina Pruskaya Díaz Castro, en favor de la investigación que realiza sobre “Principales dificultades que presentan los estudiantes para acceder al cálculo, de cuarto año medio de un establecimiento científico humanista. Una ingeniería didáctica”, para el seminario de grado, el cual dará el grado de Licenciado en Educación y el título de Profesor de Educación Media en Matemática e Informática Educativa.

Esta encuesta está dirigida a los estudiantes de cuarto medio pertenecientes al plan diferenciado sector matemática. La aplicación de este test diagnóstico abarcará un período de 90 minutos y los resultados que arroje sólo serán utilizados con los fines que la tesis propone. La oportunidad de desarrollar la referida actividad significará un valioso aporte para el desarrollo de la tesis.

De antemano muchas gracias.

Saluda cordialmente:

Valentina Pruskaya Díaz Castro

Rut: 17.314.680 – 9

Profesor (a)

JUAN SANTIS

Test

NOMBRE:.....

CURSO:.....

Indicaciones:

- El test consta de 3 ítems.
- Cada ítem presenta sub preguntas, las cuales deben ser desarrolladas.
- Los resultados serán para el investigador y no para la asignatura en que se implementa, por lo tanto, esta evaluación no influirá en las calificaciones del curso.

I.- Ítem de selección Múltiple. Desarrolle cada pregunta y encierre en un círculo la alternativa que considere correcta, si su respuesta es correcta y no tiene desarrollo será considerada como incorrecta.

1.- Al reducir a su mínima expresión $\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$ se obtiene:

a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{15}{64}$

c) 1

d) 0

2.- Al racionalizar y simplificar la expresión $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$ resulta:

a) 10

b) $\frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{10}}{4\sqrt{5} - 9}$

c) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$

d) $\sqrt{50} + 2\sqrt{10}$

3.- El resultado de $\frac{14}{21} * \left(\frac{2}{5-\frac{1}{3}}\right)^2$ es:

a) $\frac{6}{49}$

b) $\frac{24}{49}$

c) $\frac{9}{49}$

d) $\frac{12}{49}$

4.- Cual de las siguientes expresiones es equivalente a $\frac{x^2-x-6}{x-3}$:

a) $\frac{(x-5)(x-1)}{x-3}$

b) $x + 2$

c) $x - 2$

d) $\frac{1}{x-3}$

5.- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es verdadera?

a) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$

b) $\frac{1+TC}{C} = 1 + T$

c) $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

d) $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{a-b}$

6.- Al simplificar la siguiente expresión racional $\frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}$ se obtiene:

a) $x - y$

b) $-(x - y)$

c) $-(x + y)$

d) $y - x$

7.- La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x+1} \leq 1$ corresponde a:

a) $[\infty, 4[$

b) $[4, \infty[$

c) $] \infty, 4]$

d) $[-4, \infty[$

II. Ítem de respuesta abierta. Responda en el espacio indicado

1.- Dada la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$, ¿Se puede definir a que valor se acerca la sucesión?

--

2.- Dada la función $f(x) = 2x^2 - x$. Hallar $f(x+h)$ y $(\frac{f(x+h)-f(x)}{h})$, donde x y h son números reales y $h \neq 0$.

--	--

5.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ evaluar $f(-2)$ y $f(1)$. Bosqueje la gráfica para $f(x)$.

III. Ítem de conceptos.

a) Defina con sus palabras el concepto función.

b) Defina con sus palabras el concepto sucesión.

Diseño del Instrumento

Composición del Instrumento evaluativo en función de las competencias y los contenidos a evaluar.

Contenidos:

A.- Números y Álgebra

B.- Funciones

C.- Sucesiones

			Competencia			
			Comprensión	Análisis	Aplicación	Total
			21.5%	21.5%	57%	100%
C O N	A	50%	0	1	6	7
	B	35.7%	2	1	2	5
	C	14.3%	1	1	0	2
	Total		3	3	8	14

- Composición del Instrumento Evaluativo por pregunta.

Ítem I, Selección Múltiple.

Pregunta n°1:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Reducir la fracción.

Al reducir a su mínima expresión $\frac{\frac{1-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{7}{8}}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{7}{8}}$ se obtiene:	
a) $\frac{5}{3}$	Resuelve las sumas, restas y divisiones de fracciones.
b) $\frac{15}{64}$	Desarrolla correctamente las sumas y restas de fracciones, al realizar la división de fracciones multiplica los numeradores y multiplica los denominadores.
c) 1	Al estar los mismos valores en el numerador y en el denominador se asume que es 1.
d) 0	Al sumarse en el numerador y restarse en el denominador el mismo valor y viceversa se asume que el resultado es cero.

Pregunta n°2:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Racionalizar y simplificar la expresión

Al racionalizar y simplificar la expresión $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ resulta:	
a) $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$	Se separa el denominador en las dos expresiones ahí presentes, obteniendo dos fracciones resultantes, estas se desarrollan de manera correcta.
b) $\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{4\sqrt{5}-9}$	Para racionalizar la expresión se utiliza el mismo binomio y se desarrolla un cuadrado de binomio en el denominador.
c) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$	Racionaliza y simplifica correctamente.
d) $\sqrt{50} + 2\sqrt{10}$	Racionaliza de forma correcta, pero no se desarrolla la raíz de 50

Pregunta n°3:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Aplicar Operatoria combinada con fracciones.

El resultado de $\frac{14}{21} * \left(\frac{2}{5-\frac{1}{3}}\right)^2$:	
a) $\frac{6}{49}$	Desarrolla correctamente la operatoria combinada en los números racionales.
b) $\frac{24}{49}$	Sólo eleva al cuadrado el numerador dentro del paréntesis y desarrolla correctamente todos los demás procesos.
c) $\frac{9}{49}$	Se desarrollan el cuadrado de la fracción, pero en el denominador el binomio no se desarrolla correctamente, todos los demás procesos siguen un curso correcto.
d) $\frac{12}{49}$	Al los valores del denominador dentro del paréntesis se hace directo, es decir, el entero "5" se ve como un numerador y se conserva el denominador "3". Luego la expresión se desarrolla correctamente.

Pregunta n°4:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Identificar equivalencias entre expresiones a través de Factorizaciones y simplificaciones.

Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $\frac{x^2-x-6}{x-3}$	
a) $\frac{(x-5)(x-1)}{x-3}$	Factoriza la expresión recurriendo a valores incorrectas para el numerador.
b) $x + 2$	Factoriza correctamente el numerador y luego simplifica.
c) $x - 3$	Separa la fracción en dos, factores literales en una fracción respetando su orden y números en la otra, luego se resuelven.
d) 2	En el numerador resta los factores literales, luego divide el numerador por el denominador sólo observando los factores numéricos obteniendo 2.

Pregunta n°5:

Competencia que aborda: Análisis de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Analizar la equivalencia de expresiones algebraicas.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones es verdadera?	
a) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$.	Desarrolla el cuadrado de binomio elevando al cuadrado el primer término y sumándolo con el cuadrado del segundo término.
b) $\frac{1+TC}{c} = 1 + T$	Multiplica la ecuación por "c", quedando en el lado izquierdo $1+ TC$ y al lado derecho $(1 + t) * c$, distribuyendo mal los términos.
c) $\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$	Separa el denominador de la fracción algebraica del lado izquierdo en dos términos que se restan ambos dividiendo a uno.
d) $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{a-b}{x}} = \frac{1}{a-b}$.	Desarrolla correctamente la fracción algebraica.

Pregunta n°6:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Aplicar operatoria con racionales y simplificación, a expresiones algebraicas.

Al simplificar la siguiente expresión racional $\frac{\frac{y-x}{x}-\frac{y}{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$ se obtiene:	
a) $x - y$	Desarrolla correctamente las fracciones algebraicas, simplificando correctamente la última expresión, distribuyendo mal el factor que multiplica al binomio resultante. $-(x+y) = x - y$
b) $-(x - y)$	Luego de desarrollar el numerador y el denominador correctamente, al factorizar la expresión que resulta como numerador no se respeta el orden de los factores literales obteniendo un binomio incorrecto.
c) $-(x + y)$	Simplifica correctamente la expresión.
d) $y - x$	Desarrolla correctamente las fracciones algebraicas, simplificando correctamente la última expresión, distribuyendo mal el factor que multiplica al binomio resultante. $-(y+x) = y - x$

Pregunta n°7:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos A.

Objetivo de Pregunta: Desarrollar desigualdades expresando su resultado como un intervalo solución.

La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x+1} \leq 1$ corresponde a:	
a) $[\infty, 4[$	Resuelve la inecuación, expresando inadecuadamente el intervalo solución.
b) $[4, \infty[$	Resuelve la inecuación correctamente expresando de manera incorrecta la solución de esta.
c) $]\infty, 4]$	Resuelve la inecuación expresando correctamente el intervalo solución
d) $[-4, \infty[$	Desarrolla la inecuación de manera incorrecta.

Ítem II. Ítem de respuesta abierta.

Pregunta n°1:

Competencia que aborda: Análisis de contenidos C.

Objetivo de Pregunta: Analizar la sucesión entregada y aproximar el valor n-ésimo de esta.

Dada la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$, ¿Se puede definir a que valor se acerca la sucesión?

Pregunta n°2:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos B.

Objetivo de Pregunta: Evaluar la función en valores algebraicos.

2.- Dada la función $f(x) = 2x^2 - x$. Hallar $f(x + h)$ y $(\frac{f(x+h)-f(x)}{h})$, donde x y h son números reales y $h \neq 0$.

Pregunta nº5:

Competencia que aborda: Aplicación de contenidos B.

Objetivo de Pregunta: Evaluar la función y obtener la gráfica de esta.

5.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ evaluar $f(-2)$ y $f(1)$. Bosqueje la gráfica para $f(x)$.

Ítem de Desarrollo. Ítem de conceptos.

Pregunta nº1:

Competencia que aborda: Comprensión de contenidos B.

Objetivo de Pregunta: Expresar lo que entienden por el concepto Función

a) Defina con sus palabras el concepto función.

Pregunta nº2:

Competencia que aborda: Comprensión de contenidos C.

Objetivo de Pregunta: Expresar con sus palabras el concepto Sucesión.

b) Defina con sus palabras el concepto sucesión.

Validación del Profesor Carlos Alberto Gómez Castro:

Datos Experto.

Nombre: CARLOS ALBERTO GÓMEZ CASTRO.
Título profesional: Profesor de Matemática.
Grado Académico: Licenciado en Educación
Cargo: Académico Permanente

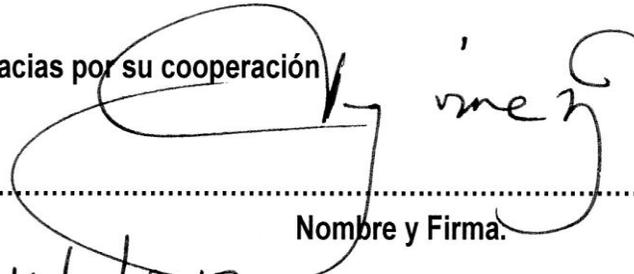
Le rogaría consignar si los instrumentos revisados para validar, se ajustan a alguna de las siguientes categorías: (marcar la categoría)

- Muy bien.
- ✓ Bien.
- Suficiente.
- Insuficiente

Observaciones:

Sería deseable más preguntas abiertas

Muchas gracias por su cooperación



Nombre y Firma.

Santiago,

11/11/2013

Validación del Profesor Jorge Ávila Contreras:

Datos Experto.

Nombre: Jorge Ávila Contreras
Título profesional: Licenciado en Matemática
Grado Académico: Magíster en Ciencias en Matemática Educativa
Cargo: Académico Jornada Completa

Le rogaría consignar si los instrumentos revisados para validar, se ajustan a alguna de las siguientes categorías: (marcar la categoría)

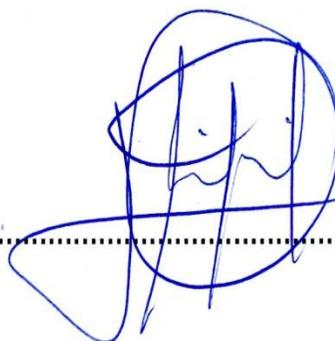
- Muy bien.
- Bien.
- Suficiente.
- Insuficiente

Observaciones:

.....
.....
.....
.....
.....

Muchas gracias por su cooperación

Jorge Ávila Contreras
Nombre y Firma.



Santiago,

ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES

PROGRAMA DE SEPTIMO BÁSICO

En este nivel, en relación al eje Números y Álgebra, se puede ver que se abre camino en el estudio de estos, dando paso a la enseñanza de los Números Enteros, enfocándose en el orden, suma, resta e interpretación de los resultados obtenidos en este Conjunto numérico.

Los indicadores de estos Aprendizajes Esperados, hacen referencia en un principio a la diferenciación entre números naturales y números enteros, comparándolos a través de ejemplos contextualizados, y también a resolución e interpretación de la operatoria básica en este conjunto numérico. Más adelante en el mismo nivel se articula la relación entre los números enteros y las potencias con base 10 y exponente entero, multiplicaciones y divisiones de estas y finalmente con raíces cuadradas de números enteros positivos.

En cuanto a los otros objetos básicos, funciones y sucesiones en este nivel aún no se trabajan por lo que sólo podemos identificar la enseñanza de los Números enteros en Séptimo Básico.

Unidad 1

Números y Álgebra

AE 01

Identificar problemas que no admiten solución en los números naturales y que pueden ser resueltos en los números enteros.

AE 02

Establecer relaciones de orden entre números enteros y ubicar estos números en la recta numérica.

AE 03

Sumar y restar números enteros e interpretar estas operaciones.

AE 04

Reconocer propiedades relativas a la adición y sustracción de números enteros y aplicarlas en cálculos numéricos.

Unidad 3

Números y Geometría

AE 01

Interpretar potencias de exponente natural cuya base es un número fraccionario o decimal positivo.

AE 02

Interpretar potencias de base 10 y exponente entero.

AE 03

Conjeturar y verificar algunas propiedades⁷ de las potencias de base y exponente natural.

AE 04

Calcular multiplicaciones y divisiones de potencias de base y exponente natural.

AE 05

Calcular multiplicaciones y divisiones de potencias de base 10 y exponente entero.

AE 06

Comprender el significado de la raíz cuadrada de un número entero positivo.

AE 07

Determinar y estimar el valor de raíces cuadradas.

PROGRAMA DE OCTAVO BÁSICO

Unidad 1

Números y álgebra

AE 01

Establecer estrategias para calcular multiplicaciones y divisiones de números enteros

AE 02

Utilizar estrategias para determinar el valor de potencias de base entera y exponente natural

AE 03

Determinar propiedades de multiplicación y división de potencias de base entera y exponente natural

AE 04

Verificar qué propiedades de potencias de base entera y exponente natural se cumplen en potencias de base fraccionaria positiva, decimal positiva y exponente natural

AE 05

Resolver problemas que involucren las operaciones con números enteros y las potencias de base entera, fraccionaria o decimal positiva y exponente natural

En el último nivel de la Educación General Básica, se profundiza en los números enteros, entregando estrategias para multiplicarlos y dividirlos, calcular potencias con base entera y exponente natural, relacionando las propiedades de estas con las potencias de base fraccionaria positiva, decimal positiva y exponente natural contextualizando estas estrategias en la resolución de problemas que las involucren, ampliando los números enteros a todas sus facetas y utilidades. Con respecto a Funciones, es en este último nivel de la Educación General Básica cuando se inician los estudiantes. En un principio, presentando ecuaciones con dos variables, despejando una en “función” de la otra, involucrando estas operaciones en situaciones de la vida cotidiana. Modelan situaciones para establecer el término de función, identifican las variables dependientes e independientes, dominios y rangos y finalmente se representan situaciones en contextos cotidianos a través de las funciones. Entonces es en Octavo año Básico, cuando se da inicio al estudio de las funciones, sus elementos y la utilización de estas como representantes de diversas situaciones. No se profundiza en los tipos de funciones ni en sus variadas representaciones, sólo se formaliza el concepto y se generaliza con respecto a la notación, la identificación de variables y la entrega de diversos ejemplos que las representen.

Unidad 4

Álgebra

AE 01

Plantear ecuaciones que representan la relación entre dos variables en diversos contextos

AE 02

Reconocer funciones en diversos contextos, identificar sus elementos y representar diversas situaciones a través de ellas

AE 03

Identificar variables relacionadas en forma proporcional y no proporcional

AE 04

Analizar, mediante el uso de softwares gráficos, situaciones de proporcionalidad

AE 05

Resolver problemas en diversos contextos que impliquen proporcionalidad directa y problemas que impliquen proporcionalidad inversa

PROGRAMA DE PRIMERO AÑO MEDIO

Al igual que en séptimo básico, el paso de los números enteros a los números racionales es a través de problemas que no tienen solución en el primer conjunto mencionado, pero sí en los segundos. Dando paso a una formalización de este conjunto, identificando las diversas representaciones de estos, el orden en la recta numérica, operatoria básica y resolución de potencias de base racional y exponente entero.

Con respecto a las funciones, se reconoce la proporcionalidad directa como un caso de la función lineal reconociendo relaciones entre esta función y la física, se modelan situaciones que representen la función a fin y se identifican las distintas representaciones de estas funciones. Se da paso a la composición de funciones y a algunas propiedades algebraicas relacionadas a esta operación definiendo el dominio y rango para las funciones resultantes de dicha composición.

Unidad 1	Unidad 2
Números	Álgebra
AE 01 Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.	AE 01 Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias.
AE 02 Justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales.	AE 02 Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias.
AE 03 Establecer relaciones de orden entre números racionales.	AE 03 Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales.
AE 04 Representar números racionales en la recta numérica.	AE 04 Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.
AE 05 Utilizar la calculadora para realizar cálculos reconociendo sus limitaciones.	AE 05 Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.
AE 06 Verificar la densidad de los números racionales.	AE 06 Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.
AE 07 Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales.	Tiempo estimado 70 horas pedagógicas
AE 08 Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.	
AE 09 Resolver problemas en contextos diversos que involucren números racionales o potencias de base racional y exponente entero.	

PROGRAMA DE SEGUNDO AÑO MEDIO

Se vuelve a repetir la metodología para dar paso de números racionales a irracionales, se enseña: aproximación, orden y representación de estos en la recta numérica y sus propiedades. Se entiende que los números reales comprenden a los números racionales más los irracionales, a través de demostraciones se presentan las propiedades y se calculan raíces dentro de este conjunto.

Entonces, con respecto a los números reales ya en segundo año medio este conjunto numérico es enseñado en su completitud.

Unidad 1

Números

AE 01

Comprender que los números irracionales permiten resolver problemas que no tienen solución en los números racionales.

AE 02

Aproximar números irracionales por defecto, por exceso y por redondeo.

AE 03

Ordenar números irracionales y representarlos en la recta numérica.

AE 04

Conjeturar y verificar propiedades de los números irracionales.

AE 05

Comprender que los números reales corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

AE 06

Demostrar algunas propiedades de los números reales.

AE 07

Analizar la existencia de las raíces en el conjunto de los números reales.

AE 08

Utilizar relaciones entre las potencias y raíces para demostrar propiedades de las raíces.

AE 09

Establecer relaciones entre los logaritmos, potencias y raíces.

AE 10

Deducir propiedades de los logaritmos.

AE 11

Resolver problemas en contextos diversos relativos a números reales, raíces y logaritmos.

En cuanto a las funciones, en este nivel se presentan las siguientes: Exponencial, Logarítmica y Raíz cuadrada, para las tres se analizan las gráficas, es decir se reconoce el movimiento en relación a los parámetros asociados a estas, incluyendo el estudio del Dominio y Rango.

Unidad 3

Álgebra

AE 01

Analizar gráficamente la función exponencial, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

AE 02

Analizar gráficamente la función logarítmica, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

AE 03

Analizar gráficamente la función raíz cuadrada, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

PROGRAMA DE TERCER AÑO MEDIO

Como se mencionó con anterioridad para este nivel se analizó la sugerencia de calendarización entregada por el MINEDUC. En relación al eje Números, se da paso a los números imaginarios como respuesta a la necesidad de calcular raíces de números negativos, relacionándolos con los números complejos. Así entonces, en Tercero Medio se finaliza el Eje de números dentro de la Educación Chilena, habiendo estudiado en completitud los números tanto reales como complejos, lo que representa para esta investigación que los estudiantes ya en este curso cuentan con uno de los Objetos Básicos del Cálculo que son los números. Con respecto al Eje Algebra, se aborda la Función Cuadrática, Dominio, Rango, representaciones de esta y se analiza la grafica, nuevamente llevándola a modelar situaciones cotidianas que permitan utilizarla.

Unidad 1	Unidad 2
<p>1. Identificación de situaciones matemáticas que muestran la necesidad de ampliar los números reales. (Página 9)</p> <p>2. Identificación de la unidad imaginaria como solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y su utilización para expresar raíces cuadradas de números reales negativos. Operatoria con los números imaginarios. (Páginas 14 -18)</p> <p>3. Relación entre un número imaginario y los números complejos. Caracterización de un número complejo. (Páginas 19 - 22)</p> <p>4. Adición, sustracción, multiplicación, división y potencia en los números complejos. (Páginas 23- 26)</p> <p>5. Conjugado y módulo de un número complejo. (Páginas 37 - 42)</p> <p>6. Resolución de problemas y aplicación de números complejos. Páginas (50 - 72)</p>	<p>1. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita por completación de cuadrados, por factorización o por inspección, con raíces reales o complejas. Interpretación de las soluciones y determinación de su pertenencia al conjunto de los números reales o complejos. (Páginas 81-92)</p> <p>2. Deducción de la fórmula de la ecuación general de segundo grado.(Páginas 93-95)</p> <p>3. Resolución de problemas asociados a ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto en que se plantea el problema. (Páginas 96-97)</p> <p>4. Caracterización de la función cuadrática. Representación y análisis gráfico de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, para distintos valores de a, b y c. Uso de ellas para que su gráfica intersecte el eje X (ceros de la función). Uso de software para el análisis de las variaciones de la gráfica de la función cuadrática a partir de la modificación de los parámetros. Resolución de problemas que involucran funciones cuadráticas. (Páginas 99-117)</p>

PROGRAMA DE CUARTO AÑO MEDIO

A) SIN AJUSTE CURRICULAR

En este programa, se muestra la enseñanza de las Funciones Potencia, logarítmica y exponencial y la modelación de fenómenos naturales a través de estas. En cuanto al eje números no son estudiados en este nivel.

Unidades		
1 Estadística y probabilidad	2 Funciones potencia, logarítmica y exponencial	3 Geometría

B) CON AJUSTE CURRICULAR

Para ver los contenidos que se estudiarán en este nivel según el ajuste curricular, se revisaron los contenidos que este propone para cuarto medio que a partir del próximo año comenzarán a regir. Aquí se plantea el estudio de la Función Potencia, sus parámetros y situaciones que la representan. También se da paso a la enseñanza de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas, dando la posibilidad de determinar la función inversa cuando proceda, es decir ya desde el próximo año y, al igual que en los anteriores en cuanto al plan común de Matemáticas, es en el último nivel cuando se finaliza el área de funciones, sin abordar las funciones trigonométricas, pero sí incluyendo un estudio más profundo de las funciones incluidos los conceptos de inyección, sobreyección y biyección con respecto a las funciones.

ÁLGEBRA:

1. Análisis de la función potencia $f(x)=ax^n$ con a y x en los reales y n entero, en situaciones que representen comparación de tasas de crecimiento aritmético y geométrico y cálculo de interés compuesto, mediante el uso de un software gráfico.
2. Identificación de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas y determinación de la función inversa cuando proceda.

Ya estudiados los programas de estudio de Séptimo Básico a Cuarto año Medio, es necesario indagar qué pasa con los programas del plan diferenciado Humanístico-Científico, ya que en el mismo ajuste curricular se enuncian dos condiciones para estos: 1º se puede hacer uso de la flexibilidad curricular y cada colegio planificar su propio programa de estudio, y 2º los que no lo deseen planificar los propios deben regirse por los publicados en la página del Ministerio de Educación¹⁰. Esta necesidad surge a causa de haber encontrado en completitud el estudio de números y funciones, dos de los tres objetos básicos completos en los programas de estudio, por lo que es necesario saber si los estudiantes pertenecientes al plan diferenciado, que en esta investigación son el objeto de estudio cuentan con los conocimientos asociados a sucesiones.

PROGRAMA DE TERCER AÑO MEDIO FORMACIÓN DIFERENCIADA HUMANÍSTICO CIENTIFICA SECTOR MATEMÁTICA

Más que nada en este nivel, se ve lenguaje algebraico lugares geométricos y programación lineal, lo que si bien no representan los objetos básicos del cálculo, la unidad de profundización en lenguaje algebraico es una herramienta clave y necesaria para el desarrollo de éste.

Unidades		
1	2	3
Profundización en lenguaje algebraico	Lugares geométricos	Programación lineal

¹⁰ Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media. Actualización 2009. MINEDUC (pág. 305)

PROGRAMA DE CUARTO AÑO MEDIO FORMACIÓN DIFERENCIA HUMANÍSTICO CIENTIFICA SECTOR MATEMÁTICA

La Primera unidad de este programa abarca los procesos infinitos, es decir resolución de problemas que involucren: sumatoria, progresiones aritméticas y geométricas, series geométricas, sucesiones, dando paso al estudio de la convergencia de estas dos últimas. Esta unidad es un pilar fundamental para poder incorporar el cálculo dentro de este mismo nivel, puesto que los procesos infinitos y los estudios de la convergencia de estos, dan paso al estudio del cálculo. Junto con lo anterior, en esta unidad se finaliza con la enseñanza de los objetos básicos del Cálculo aquí señalados, por lo que se podría afirmar que todos los estudiantes de cuarto año medio plan común, tienen los conocimientos de números y funciones, y quienes pertenecen a la formación Diferenciada Humanístico Científica también en este nivel, además manejan los conocimientos necesarios para desarrollar y conocer las sucesiones y otros procesos infinitos. No está demás señalar que la Tercera unidad corresponde al estudio de funciones trigonométricas tales como: función seno, coseno y tangente, dominio y rango, periodicidad, identidades fundamentales y la gráfica.

Unidades		
1	2	3
Procesos infinitos	Funciones polinomiales	Funciones trigonométricas
Contenidos		
<p>a. Planteo de algunos problemas geométricos, de probabilidades o de matemáticas financieras que involucren la noción de sumatoria; introducción del símbolo sumatoria. Propiedades de linealidad, asociatividad y propiedad telescópica. Aplicación de éstas al cálculo de algunas sumas concretas, por ejemplo, de los primeros n números naturales, de sus cuadrados, de los números impares.</p> <p>b. Progresiones aritméticas y geométricas, suma de sus términos. Aplicación a la resolución de algunos problemas geométricos, de interés compuesto, de decaimiento radioactivo, de poblaciones.</p> <p>c. Series geométricas y telescópicas. Convergencia intuitiva de sucesiones y series.</p> <p>d. Iteraciones. Nociones acerca de fractales. Ejemplo de áreas finitas con perímetro infinito.</p> <p>e. Uso de programas computacionales para manipulación algebraica, gráfica y simulación de procesos.</p>	<p>a. Polinomios de una variable con coeficientes reales. Grado. Algoritmo de la división. Función polinomial asociada a un polinomio. Raíces o ceros de polinomios. Condición para que un polinomio sea divisible por $x-a$: Teorema del factor y Teorema del resto.</p> <p>b. Factorización de polinomios como producto de factores lineales y cuadráticos. Raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros. Aplicación a la resolución de algunas ecuaciones de grado superior a 2.</p> <p>c. Notas históricas sobre las ecuaciones de 3° y 4° grado. Comentarios sobre las ecuaciones de grado superior o igual a cinco.</p>	<p>a. Medición de ángulos; radian. Funciones seno, coseno y tangente en el círculo unitario. Periodicidad. Demostración de las identidades fundamentales: $\text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A = 1$; $\text{sen}(A + B)$ y $\text{cos}(A + B)$.</p> <p>b. Gráfico de las funciones seno, coseno y tangente. Valores de estas funciones para algunos ángulos; valores para los ángulos complementarios. Preimágenes para algunos valores de la función y resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas. Uso de calculadora científica.</p>