FACULTAD DE EDUCACIÓN
Escuela de Educación en Matemáticas
e Informática Educativa

UN DISEÑO DE ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD DESDE UN ENFOQUE AXIOMATICO

SEMINARIO PARA OPTAR ALGRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:
OSORIO CANALES, FRANCISCO
PINO ARAYA, NIBALDO

PROFESOR GUÍA:
LEONORA DÍAZ MORENO

SANTIAGO, CHILE
2014

AGRADECIMIENTOS

Por los buenos y malos momentos en los cuales he sentido tu apoyo incondicional, para mi amada Agustina Escobar.

A Francisca, Sergio, Elvira, Francisco, abuelos, tíos, primos y amigos por el apoyo prestado estos cinco años mostrado desde la más débil sonrisa hasta un abrazo reparador.

A Patricia, Camila y Pablo por su apoyo y contagiosa alegría que sin darse cuenta se volvieron una parte importante de mi vida.

A mi compañero y amigo Nibaldo, la vida es sabia y pone las personas precisas en los mejores momentos, espero forjemos nuestra amistad mas allá de lo académico.

Finalmente a las personas que ya partieron pero que fueron un apoyo muy importante en su momento y que sin ellos nada de esto sería posible.

Francisco O. Canales.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio constituye el final de una etapa y como todas, no se puede llegar a buen puerto sin la presencia de todos aquellos que forman parte de nuestro circulo cercano. Es por ello que quisiera dedicar esta investigación y también agradecer, en primer lugar a mis padres, Ericka y Nibaldo, quienes gracias a su esfuerzo, a todo lo que dejaron y dieron por mí, hoy soy quien soy, estoy donde estoy y llegaré tan lejos como pueda en esta noble misión de educar.

También agradecer a quienes creyeron en mi. A quienes me dieron una oportunidad laboral para costear mis estudios y me apoyaron cuando lo necesite.

A Francisco, amigo y compañero. con quien decidimos continuar juntos en esta senda de la educación. Nuestra amistad a de perdurar, ahora está en nuestras manos.

A Leticia Oliva, Profesora de Lenguaje, quien ha sido un apoyo fundamental en la construcción de este estudio. Gracias por todo tu apoyo y confianza.

A mis amigos, quienes en todo momento confiaron en mí.

Finalmente a ti… Gracias por siempre estar, por escucharme, por entenderme y comprenderme, por ser parte de mi vida. Gracias.

Nibaldo Pino Araya

RESUMEN

El siguiente estudio se enmarca en el paradigma cualitativo y tiene como objetivo describir prácticas socioescolares antes y después de una experiencia didáctica con base en la implementación de una propuesta didáctica innovadora para la enseñanza de las probabilidades desde un enfoque axiomático (Jiménez, 1986). Se entiende por prácticas socioescolares a toda actividad humana que ocurre en la microecología escolar (Díaz, 2013).

Es a través de la adaptación y reconstrucción de una propuesta didáctica con desde un enfoque axiomático que se busca establecer enlaces entre la matemática de lo cotidiano y el constructo escolar, respondiendo a problemáticas de sentido e intenciones de las matemáticas del aula y su democratización, ya que, ellas aún juegan un papel de auto-segregación, es decir las personas se consideran no aptas para aprender esta asignatura.

Esta investigación se sitúa en el eje de la socioepistemología, entendida como una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la construcción del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003).

A través de este estudio, se consigue dar cuenta de que es posible que ocurran cambios pasando de prácticas socioescolares tradicionales en el tratamiento de las probabilidades, que datan del siglo XVIII y entienden la probabilidad como un valor, un cociente obtenido entre el número de casos favorables para un seceso y el número de casos posibles de un experimento aleatorio equiprobable, y se enseña en la sala de clases por medio de la repetición de un modelo, a una más fresca y constructivista que en este caso es la visión axiomática, la que busca propiciar el cuestionamiento y la proyección de experiencias de aprendizajes diferentes basadas en la interacción, el trabajo colaborativo, la experimentación y la argumentación y por otra parte propician la configuración de lo probabilístico en los estudiantes con base en las acciones de levantar conjeturas, predecir, realizar figuraciones, determinar variaciones y modos de variar.

ABSTRACT

The following study is framed in the qualitative paradigm and aims to describe social practices before and after an educational experience based on the implementation of an innovative methodological approach to the teaching of probabilities from an axiomatic approach (Jiménez, 1986). It is understood by social practices to every human activity that occurs on school's microecology (Diaz, 2013).

It is through the adaptation and reconstruction of a didactic proposal from an axiomatic approach that seeks to establish links between mathematics of everyday life and school construct, responding to issues of meaning and intentions of mathematics in the classroom and its democratization, because of the role of self-segregation, ie those considered unfit to learn this subject.

This research is at the core of the socioepistemology, understood as a theoretical approach that can treat systemic nature phenomena production and dissemination of knowledge from multiple perspectives, to incorporate the study of the interactions between the construction of knowledge, sociocultural dimension, the associated cognitive processes and mechanisms of institutionalization via teaching (Cantoral and Farfan, 2003).

Through this study, we get to realize that changes may occur to students moving from traditional practices in the treatment of probabilities, dating from the eighteenth century and who understand the probability as a value, obtained by dividing the number of cases favorable for an event and the number of possible cases of an equally probable random experiment, and taught in the classroom through the repetition of a pattern, to a fresher and constructivist which in this case is the axiomatic view, which seeks to encourage questioning and screening of different learning experiences based on interaction, collaborative work, experimentation and argumentation and otherwise conducive setting the probabilistic in students based on actions to raise conjecture, predict, perform configurations, determine variations and different modes.

INDICE

INTRODUCCIÓN

En la actualidad el termino probabilidad es de uno cotidiano en las vida de las personas, así aparece la palabra probabilidad en los medios de comunicación, discursos y conversaciones informales, generando la falsa idea de comprensión del concepto de probabilidad en su dimensión matemática, lo que conlleva a un error en la sala de clases, en la que se da por sentado que los estudiantes tienen una clara comprensión del concepto y por ende se trabaja a partir de ese supuesto de manera abstracta generando la repetición del error conceptual del término probabilidades.

Actualmente al interior de las aulas se puede observar en los docentes la predominancia de un enfoque clásico del concepto de probabilidades, lo que se refleja en la forma en que enseñan dicho contenido, es decir, como la proporción entre el número de casos favorables sobre el número de casos posibles para un suceso A de un experimento aleatorio en donde todos los resultados posibles son equiprobables, siendo esta regla establecida por el matemático francés Pierre Laplace en 1779 . Esto es definido:

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ al\ suceso\ A}{número\ de\ casos\ posibles\ del\ experimento}$$

Sin embargo esta visión clásica del término ha conllevado a un resultado negativo en la interpretación del concepto, porque el objetivo final de aprender probabilidades es tan sólo representar con un número la posibilidad de ocurrencia de un suceso, dejando fuera lo intrínseco del concepto matemático y las implicancias que estas pudieran tener en la experimentación de un suceso. En cuanto a la transposición didáctica podemos ver que el profesor no cumple el rol de agente interpretativo, de manera que enseña el concepto de probabilidad por reproducción de modelo, vale decir, está repitiendo lo mismo que él en su momento aprendió, sin lograr el proceso de transformación de la materia que implica la transposición didáctica propiamente tal.

Con esa premisa se realizó una investigación teórica, en busca de una mirada diferente para la enseñanza de las probabilidades contextualizada a la realidad de las aulas chilenas.

Las matemáticas tienen un rol innegable en la sociedad actual, sin embargo en las salas de clases existe un retraso en cuanto a su enseñanza de al menos un siglo, es por ello que se adaptó la visión de la enseñanza de las probabilidades propuesta por Riveros (2013), que presenta una mirada actual para la enseñanza de las probabilidades desarrollando un enfoque axiomático en su tratamiento metodológico y se desarrolló una adaptación de su propuesta de actividades para la enseñanza de este eje de aprendizaje, siguiendo la visión antes mencionada.

En el capítulo uno se plantean los antecedentes, con respecto a la investigación aquí expuesta, luego la problemática del estudio, la justificación, las limitaciones, la hipótesis y los objetivos, tanto general como específicos.

En el capítulo dos se expone el marco teórico, que expone la evolución de tratamiento de las probabilidades desde el curriculum chileno, distintos enfoques del concepto de probabilidad hasta llegar a la concepción axiomática de lo estocástico, estableciendo su enlace con el constructivismo.

En el capítulo tercero se aborda el marco metodológico, el cual plantea el enfoque de estudio, el universo y la muestra, la descripción del diseño, las técnicas e instrumentos utilizados, la validez y la confiabilidad.

En el capítulo cuatro, se expone la recogida de la información, las etapas, lo que se efectuó en cada una de ellas, los obstaculizadores y los facilitadores, y los procedimientos realizados en el análisis de la información.

En el capítulo cinco entonces se desarrolla el análisis de los resultados obtenidos a partir de los instrumentos aplicados.

Luego de presentados los cinco capítulos, se siguen las conclusiones de la investigación efectuada.

GLOSARIO

- **Aprendizaje por Descubrimiento**. El aprendizaje debe ser descubierto activamente por el alumno más que pasivamente asimilado. Los alumnos deben ser estimulados a descubrir por cuenta propia, a formular conjeturas y a exponer sus propios puntos de vista (Bruner, 1961).

- **Concepciones Probabilísticas.** Se trata de postulados filosóficos y de los mecanismos de cuantificación de probabilidades de las principales concepciones de la Probabilidad, concepciones que pueden conducir a diferentes asignaciones de probabilidad para las distintas alternativas de un mismo proceso aleatorio. Estas concepciones se pueden clasificar en dos grandes grupos atendiendo al tipo de evidencia que utilizan en la cuantificación de probabilidades. Así, por un lado, estarían la concepción clásica y la concepción frecuencialista, quienes para asignar probabilidades a los posibles resultados de un proceso aleatorio sólo tienen en cuenta información empírica y objetiva, y por otro, estaría la concepción subjetiva, que puede incorporar tanto la información que sobre el experimento tenga el investigador, como la que proviene de otros experimentos anteriores relacionados.

- **Determinista**. se denomina un sistema determinista a aquel en que el azar no está involucrado en el desenvolvimiento de los futuros estados del sistema. Un modelo determinista producirá siempre la misma salida a partir de las mismas condiciones de partida o el estado inicial. A diferencia de los estocásticos o aleatorios en los que los estados futuros no están determinados por los previos (como la secuencia de caras y cecas de una moneda no cargada), en los deterministas, cada estado futuro del sistema está determinado por el previo en tanto se desprende de cómo queda afectado dadas las variables de entorno y el previsto comportamiento ante los cambios en ese ambiente.

- **Enfoque Axiomático.** La definición axiomática de probabilidad es quizás la más simple de todas las definiciones y ciertamente la menos controvertida ya que, esencialmente, es una definición basada en un conjunto de axiomas que establecen los requisitos mínimos para dar una definición de probabilidad. La ventaja fundamental de la definición axiomática de la probabilidad es que nos permite llegar a un desarrollo riguroso y matemático de la probabilidad. Esta aproximación axiomática de la probabilidad fue introducida inicialmente, por el matemático ruso A.N. Kolmogorov y posteriormente por estadísticos y matemáticos en general.

- **Enfoque Tradicional o Clásico.** Si en un experimento pueden producirse N resultados igualmente posibles y si dentro de estos N resultados el evento A puede ocurrir $n(A)$ veces, la probabilidad del evento A está dada por:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{N}}$$

Esta definición se aplica únicamente a experimentos cuyo espacio muestral esté constituido por un número finito de resultados, los cuales deben de ser igualmente posibles, o sea que a cada resultado se le asigna la misma probabilidad (espacio muestral equiprobable) y es igual a $\frac{1}{\mathrm{N}}$, por lo que el cálculo de probabilidades se reduce a contar los elementos de que consta el evento del cual se quiere calcular la probabilidad (función de conjunto aditivo del evento) y multiplicarlo por $\frac{1}{\mathrm{N}}$.

- **Estocástico.** Se denomina estocástico al sistema cuyo comportamiento es intrínsecamente no determinista. Un proceso estocástico es aquel cuyo comportamiento es no determinista, en la medida que el subsiguiente estado del sistema está determinado tanto por las acciones predecibles del proceso como por elementos aleatorios.

- **Prácticas socioescolares**. Es toda actividad humana que ocurre en la microecología escolar (Díaz, 2013).

- **Zona de Desarrollo Próximo**: “No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz.” (Vygotsky, 1979).

CAPÍTULO I

Problemática

1. PROBLEMÁTICA

1.1. ANTECEDENTES EMPÍRICOS OBSERVADOS

Si bien, es sabido que las probabilidades hacen referencia a la incertidumbre o certeza de la ocurrencia de un suceso estudiado, en la enseñanza de esta rama de la matemática existen diferentes concepciones o enfoques de las Probabilidades, aquel al que este adscrito el docente determinará la propuesta didáctica que desarrolle para la enseñanza de dicho concepto.

Al buscar el significado de Probabilidad es posible encontrar lo siguiente: "*Es una medida de las posibilidades de que ocurra un suceso futuro. Es el estudio de experimentos aleatorios o libres de determinación. Probabilidad de un suceso es la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siempre que nada obligue a creer que alguno de estos casos debe tener lugar de preferencia a los demás, lo que hace que todos sean, para nosotros, igualmente posibles.*" (Alvarado, SF)

Pero desde el campo de la enseñanza es posible vincular la teoría con la practica en pos de obtener resultados más favorables, por lo que es necesario comprender las diferentes concepciones del concepto de probabilidad para así establecer las deficiencias y errores que presenta el curriculum educativo vigente y las consecuencias que se generan en los estudiantes.

Dentro del marco curricular vigente se engloba el contenido de probabilidades dentro del eje de Datos y Azar, durante todos los años de enseñanza, tanto básica como media, cuya finalidad es proponer y desarrollar conceptos y técnicas propios de la estadística y teoría de probabilidades para el tratamiento de datos y modelos de situaciones de incerteza.

Según lo anteriormente planteado, se evidencia en los planes y programas, otorgados por el Ministerio de Educación (MINEDUC, 2009), que el eje de Datos y Azar aborda las probabilidades desde un enfoque clásico y/o frecuentista, lo que obliga al estudiante a conducir su aprendizaje por un camino en donde el objetivo final es demostrar matemáticamente que la probabilidad de obtener un "oro" de una baraja de naipe español, el cual tiene 40 cartas, es igual a $\frac{1}{4}$, lo que se aleja totalmente del concepto intrínseco de probabilidad, en donde la repetición de un experimento aleatorio conlleva a un valor, el cual corresponde a la relación entre el numero de "oros" obtenidos y el número total de extracciones, que es próximo a $\frac{1}{4}$, lo que concuerda con nuestra intuición y experiencia, por lo que asignamos esta probabilidad al suceso de obtener un "oro".

Por lo tanto es propósito de los investigadores presentar una propuesta metodológica en pos de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de tercer año de enseñanza media en el eje curricular de Datos y Azar, específicamente en el contenido de probabilidades, con un enfoque axiomático del concepto.

Sobre prácticas socioescolares

En este apartado se referirá a las prácticas socioescolares como: “Toda actividad de las personas en la microecología escolar y la cultura asociada a ella” (Díaz, 2013).

Interesa en este estudio, realizar un cambio en la implementación habitual en las practicas metodológicas de la enseñanza de probabilidades, que ocurre al cambiar el paradigma del docente, desplazándose de lo tradicional a lo axiomático con el fin único de construir un claro concepto de probabilidad en lo que a los sucesos estocásticos y el azar se refiere. (Riveros, 2014)

Las prácticas escolares del aula de matemáticas se caracterizan, entre otros aspectos por (Boch M. y Gascón J, 2001):

1. Períodos rutinarios de exposición de la materia por el profesorado para seguir con ejercitación por parte del estudiantado. Períodos que pueden ser reversibles, es decir, inician con ejercicios y siguen con la exposición docente. Estos aspiran a poner en escena aspectos de institucionalización y un acercamiento inductivo a las materias.
2. Privilegiar el trabajo individual por sobre uno cooperativo.

3. La gestión de la unidad educativa privilegia "la total cobertura curricular", es decir, cumplir con el 100% de Contenidos Mínimos y Obligatorios de los planes y programas, contenidas en las planificaciones entregadas a inicio de año con objeto de solo transmitir los contenidos sin privilegiar los aprendizajes.

La enseñanza de probabilidades es una disciplina relativamente nueva para muchos profesores que, por lo general, no han tenido una formación adecuada en este tema en el marco de sus estudios universitarios iniciales o de una formación continua, como tampoco han contado con cursos de didáctica para el adecuado desarrollo de este eje. Algunos estudios muestran que los profesores tienen nociones muy limitadas, y a menudo erróneas, de ideas básicas como muestreo y probabilidad.

Un informe conjunto IASE-ICMI sugiere asegurarse de que los futuros profesores tengan un curso obligatorio de estadística, con énfasis en la comprensión conceptual, la exploración de datos y el uso de tecnología apropiada. Es fundamental que posean al menos un conocimiento sólido de los principios y conceptos que subyacen a las prácticas del análisis de datos que en la actualidad son llamados a enseñar. Para ejemplos de programas de capacitación ver Batanero, Godino y Roa (2004), Garfield y Everson (2009) y Kvatinsky y Even (2002).

Además de un conocimiento profundo del contenido por parte del profesor, en el sentido de Ma (1999), es relevante la manera en que estos conocimientos se transmiten al alumno. La formación de los profesores debe concentrarse tanto en las áreas del conocimiento Probabilístico como en elección de una visión, ya que esta determinará la selección de actividades a la que expondrá a sus estudiantes, como indica Ortiz, Serrano y Mohamed (2009).

Ortiz et al. (2009) sugieren presentar a los futuros profesores "una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del significado global de la probabilidad"; en esta misma línea, Batanero et al. (2004) sostienen que es necesario preparar a los profesores en las competencias didácticas básicas, mostrándoles situaciones de uso en el aula, metodologías y aspectos cognitivos en juego.

De manera que sean los alumnos quienes obtengan conclusiones y evalúen nuevas conjeturas e investigaciones. Tal como lo propone la visión axiomática de la enseñanza de probabilidades, buscando, además, crear espacios interdisciplinarios, tanto en la interacción con otros colegas como en la investigación. A través de la experimentación y la simulación, el profesor debe promover en sus alumnos la formulación de hipótesis, la comprobación de conjeturas y la modificación de sus supuestos o elecciones a la luz de nueva información.

1.2. ANTECEDENTES TEÓRICOS

1.2.1. Breve Historia de la Probabilidad

Los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 40.000 años; así por ejemplo, los dados se utilizaron tanto en el juego como en ceremonias religiosas. Las civilizaciones antiguas explicaban el azar mediante la voluntad divina. En el Renacimiento el abandono progresivo de explicaciones teológicas conduce a una reconsideración de los experimentos aleatorios (Montero, M., 2012).

Ya en el siglo XVI, los matemáticos italianos comenzaron a interpretar los resultados de experimentos aleatorios simples y a finales del siglo XVI, existía un análisis empírico de los resultados aleatorios.

El desarrollo del análisis matemático de los juegos de azar se produce lentamente durante los siglos XVI y XVII. El cálculo de probabilidades se consolida como disciplina independiente en el período que transcurre desde la segunda mitad del siglo XVII hasta comienzos del siglo XVIII.

La historia de la probabilidad comienza en el siglo XVII cuando Fermat y Pascal tratan de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar. Aunque algunos marcan sus inicios cuando Cardano escribió sobre 1520 El Libro de los Juegos de Azar (aunque no fue publicado hasta más de un siglo después, sobre 1660) no es hasta dicha fecha que comienza a elaborarse una teoría aceptable sobre los juegos. (Montero, M., 2012)

La teoría de la probabilidad fue aplicada con buenos resultados a las mesas de juego y con el tiempo a otros problemas socioeconómicos.

Durante el siglo XVIII el cálculo de probabilidades se extiende a problemas físicos y actuariales (seguros marítimos). El factor principal impulsor es el conjunto de problemas de astronomía y física que surgen ligados a la contrastación empírica de la teoría de Newton. Estas investigaciones van a ser de importancia fundamental en el desarrollo de la Estadística.

La industria de los seguros, que nació en el siglo XIX, requería un conocimiento exacto del riesgo de perder pues de lo contrario no se podían calcular las pólizas.
Posteriormente, se estudia la probabilidad como un instrumento que permitiría entender
los fenómenos sociales.

La necesidad de comparar con exactitud los datos observados con la teoría requería un tratamiento riguroso del mismo, que va a dar lugar a la teoría de errores.

Durante el siglo XVIII, debido muy particularmente a la popularidad de los juegos de azar, se publicaron varios documentos de este tipo. Jacob Bernouilli (1654-1705) Ars Conjectandi (publicado en 1713 aunque escrito sobre 1690) y Auguste De Moivre (1667-1754) contribuyeron de forma importante a este desarrollo (Montero, M., 2012).

Jacob Bernoulli proporciona la primera solución al problema de estimar una cantidad desconocida a partir de un conjunto de mediciones de su valor que, por el error experimental, presentan variabilidad. Fue pionero en la aplicación del cálculo infinitesimal al cálculo de probabilidades.

También, además de Abraham de Moivre, el reverendo Thomas Bayes y Joseph Lagrange inventaron fórmulas y técnicas de probabilidad.

El impulso fundamental proviene de la obra de Pierre Simon, Marqués de Laplace, publicó Théorie analytique des probabilités en el que expone un análisis matemático sobre los juegos de azar, y fue quien indujo la primera definición explícita de probabilidad. También desarrolló la ley normal como modelo para describir la variabilidad de los errores de medida, formuló y estimó el primer modelo explicativo estadístico. Por su parte, Gauss hizo su aportación en la estimación de modelos estadísticos (Montero, M., 2012).

Bravais, geólogo y astrónomo, es el primero en considerar la relación entre errores de medida dependientes entre sí; Benjamín Pierce propone el primer criterio para rechazar observaciones heterogéneas con el resto y S. Newcomb, el más famoso astrónomo americano del siglo XIX, introduce los primeros métodos de estimación cuando hay errores fuertes en algunos datos (Estimación Robusta).

Desde los orígenes la principal dificultad para poder considerar la probabilidad como una rama de la matemática fue la elaboración de una teoría suficientemente precisa como para que fuese aceptada como una forma de matemática. A principios del siglo XX el matemático ruso A. Kolmogórov la definió de forma axiomática y estableció una teoría más amplia como es la teoría de la medida.

En la actualidad la teoría matemática de la probabilidad constituye el fundamento de las aplicaciones estadísticas tanto en la investigación social como en la toma de decisiones.

1.2.2. Diferentes Concepciones del concepto de Probabilidad

Existen diferentes visiones del concepto de probabilidades, la visión que el docente tenga del concepto de probabilidad, determina la elección de propuesta metodológica que el presentará a sus estudiantes para que ellos aprendan el contenido, de manera que, no es un detalle menor, cual es el paradigma que subyace a la concepción del docente.

Existen al menos tres concepciones de probabilidad, a continuación se presentan sus características más determinantes:

a) Concepción clásica

La noción de aleatoriedad ha estado ligada a las diferentes concepciones sobre la probabilidad (Véase Godino, Batanero y Cañizares, 1987). En una concepción clásica, la probabilidad de un suceso es el "cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles, siempre que todos los eventos sean equiprobables" definición que introdujo Laplace a finales del siglo XVIII.

En esta acepción de la probabilidad, consideramos que un objeto (o un suceso) es un miembro aleatorio de una cierta clase de objetos (población), si la probabilidad de obtener este objeto (en un sorteo u otro experimento) es igual que la de cualquier otro miembro de su clase. En la lotería nacional o el sorteo de excedentes de cupo en el servicio militar, cada número (o cada mozo) sería un miembro aleatorio del conjunto de miembros en el sorteo.

Esta definición de aleatoriedad fue considerada suficiente en una primera etapa, donde el cálculo de probabilidades se limitaba a los juegos de azar basados en dados, monedas, cartas, extracción de bolas en urnas, etc, sin embargo, pronto se le aplicaron algunas críticas, así como a la concepción de probabilidad en que se apoya.

Hay en esta definición una circularidad difícil de evitar, lo que haría también difícil usarla para discriminar un miembro aleatorio o no aleatorio en una clase dada.

Por ejemplo, ¿como sabemos que una ruleta dada o un dado, no están ligeramente sesgados? ¿O qué el sorteo de excedentes de cupo es realmente equitativo? Además sólo podríamos decir que un objeto es un miembro aleatorio de una clase, si la clase es finita. Si fuese infinita, la probabilidad de cada miembro de la clase siempre sería nula (por tanto idéntica), aunque el método de selección fuese sesgado.

¿Qué ocurriría, finalmente, en el caso de sucesos elementales no equiprobables? Si aplicamos esta definición, no podríamos considerar que el color del pelo o el grupo sanguíneo sea una característica aleatoria, ya que hay mayor proporción de personas morenas que rubias en la población y hay menos personas con Rh negativo. A pesar de estos problemas, la idea de equiprobabilidad se usa todavía para definir la aleatoriedad en situaciones como definir una muestras aleatoria -todos los elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos- o la asignación aleatoria de sujetos a los experimentos - cada sujeto tiene la misma probabilidad de ser asignado al grupo experimental o al control.

Sin embargo en un gran número de aplicaciones es imposible determinar la probabilidad de los sucesos, vía la definición frecuentista, repitiendo el experimento un numero “suficiente” de veces, en tales casos, la única alternativa que nos queda es usar la definición clásica como una “hipótesis de trabajo”, y aceptar esta hipótesis si las consecuencias observables validan la experiencia, y rechazarla en otro caso.

Por tanto esta definición no permite la construcción y desarrollo de una teoría matemática de la probabilidad, lo que justifica el rechazo que tuvo durante mucho tiempo, y la necesidad de encontrar una definición satisfactoria.

b) Concepción frecuencial

Cuando queremos aplicar la idea de probabilidad a situaciones del mundo físico o natural, como la meteorología, el resultado de elecciones, accidentes, etc. Nos encontramos con que no podemos aplicar el principio de equiprobabilidad . Usando la concepción frecuencial de la probabilidad, podríamos considerar que un objeto es un miembro aleatorio de una clase si pudiéramos elegirlo mediante un método que proporcionase a cada miembro de la clase una cierta frecuencia relativa "a priori" a la larga.

Esta definición es muy útil cuando disponemos de datos estadísticos sobre un gran número de casos, como en los ejemplos citados, aunque tenemos el problema teórico de decidir cuántos experimentos se necesitan para considerar que, a partir de este número, habríamos probado suficientemente el carácter aleatorio del objeto.

Esta definición de la probabilidad no proporciona, además, un valor exacto de la probabilidad, sino sólo una estimación del mismo.

Este concepto frecuentista está apoyado por la Ley Empírica del Azar (teorema de Bernoulli), publicado en 1713 en su obra póstuma “Ars Conjectandi”: cuando el numero de realizaciones de un experimento aleatorio crece mucho la frecuencia relativa del suceso asociado se va acercando cada vez mas y mas a un cierto valor.

Esta definición no pudo darse por válida por mucho tiempo porque presentaba varios inconvenientes:

1. No da ningún indicio del grado de aproximación entre la frecuencia relativa y la probabilidad.
2. Tampoco da indicio acerca del numero de experimentos que se deben realizar para conseguir una aproximación previamente establecidas.
3. Su validez se fundamenta únicamente en la experiencia. Sin embargo es interesante observar tres de las propiedades

c) Concepción subjetiva

En los dos casos anteriores la aleatoriedad y la probabilidad son propiedades "objetivas" que se asignan al suceso o elemento de una clase, como podría asignársele una profesión, estado civil o nacionalidad, si se trata de una persona. Kyburg (1974) critica esta visión e indica que la idea de aleatoriedad está compuesta de cuatro términos:

- el objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase;
- el conjunto del cual el objeto es un miembro aleatorio (población o colectivo);
- la propiedad con respecto a la cual el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada;
- el conocimiento de la persona que decide si el objeto es aleatorio o que asigna una probabilidad.

La decisión sobre si consideramos que un objeto es o no un miembro aleatorio de una clase, depende de nuestro conocimiento sobre el mismo. Lo que puede ser aleatorio para una persona puede no serlo para otra. y la aleatoriedad no es una propiedad física "objetiva", sino que tiene un carácter subjetivo. Utilizamos ahora la concepción subjetiva de la probabilidad, por la que todas las probabilidades serían condicionales y es más conveniente en las situaciones en que poseemos cierta información que puede cambiar nuestro juicio sobre la aleatoriedad o la probabilidad de un suceso.

Hay algunas situaciones que todo el mundo consideraría aleatorias y donde el uso de la idea de equiprobabilidad para definir un suceso aleatorio parece claro y no controvertido. Por ejemplo, en el caso de un dado equilibrado, cualquier lanzamiento es simplemente un ejemplo de cualquier otro posible lanzamiento. No hay nada nuevo que podamos conocer acerca del dado que nos permita predecir otra probabilidad diferente de $\frac{1}{6}$ para un resultado particular del dado.

En otros casos la situación no es tan clara. Consideremos, por ejemplo, la probabilidad de que un chico apruebe el examen de conducir. Si tenemos que dar un valor para esta probabilidad, nuestras estimaciones serán muy diferentes en caso del examinador o de su profesor de la autoescuela, que ha estado observando cómo conduce a lo largo de los últimos dos meses.

d) Concepción axiomática

La axiomática de Kolmogórov (1933) viene dada por los siguientes tres axiomas:

- ***Axioma 1**: A todo suceso A le corresponde un único número no negativo, P(A), al que llamaremos probabilidad de A*
- ***Axioma 2**: La probabilidad del suceso seguro es 1*
- ***Axioma 3**: Sean A y B dos sucesos tales que la intersección entre ambos es ∅. Entonces:*

$$P(AUB) = P(A) + P(B)$$

1.3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Existen diferentes visiones del concepto de probabilidad, aquella a la que se adscriba el docente determinara la forma en que enseña dicho concepto, tal como ocurre al adherir a una teoría del aprendizaje, en la que se puede ser constructivista o conductista, de igual manera se puede reconocer en las acciones del docente la visión que subyace a su comprensión del concepto probabilístico.

A partir de la observación se cuenta con evidencias suficiente de que existen confusiones que entran en la escena del aula de matemáticas con ocasión de estudiar el concepto de probabilidades. Entre estas se pueden reconocer: confundir las nociones de combinatoria, permutación y variación; experimentos aleatorios determinísticos versus no determinísticos; y, el recurso a la disyunción con el recurso a la conjunción en actividades que involucran algebra de eventos. Dado que configurar el pensamiento de lo probabilístico requiere establecer relaciones claras entre conceptos precisos de combinatoria, permutación y variación; lo determinístico y lo no determinístico y la disyunción y conjunción para operar con álgebra de eventos, interesa validar un diseño de enseñanza que supere confusiones como las antes mencionadas y conforme con los planes y programas vigentes en lo correspondientes al eje de datos y azar, y con especial atención a que este eje de contenidos será incorporado en la PSU a partir del año 2017.

1.4. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

A partir de lo planteado anteriormente se desprenden las siguientes preguntas orientadoras de la investigación:

1. ¿Qué ocurre con la forma en la que se enseña el concepto de probabilidad, al cambiar el paradigma del docente, desplazándose de lo tradicional a lo axiomático?

De esta pregunta, se pueden desprender otras dos preguntas que orientan nuestra investigación:

2. ¿Qué implica construir un diseño de enseñanza de las probabilidades aplicando un enfoque no tradicional?

3. ¿Cuál sería el enfoque no clásico, que mejor se ajusta a un modelo constructivista, y permite construir un concepto adecuado a la comprensión de lo estocástico y el azar de acuerdo a los planes y programas vigentes?

1.5. HIPÓTESIS

Si se cambia la visión del estudio de las probabilidades a la que está adscrito el profesor, de una visión clásica a una concepción axiomática, esto repercutirá directamente en las actividades de aprendizaje que él desarrolla en la sala de clases, permitiendo una mejor adquisición de los conceptos por parte de los estudiantes.

1.6. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.6.1. Objetivo general

Plantear una propuesta didáctica innovadora para la enseñanza de las probabilidades un diseño de enseñanza de la probabilidad, entendida esta desde un enfoque axiomático y constructivista.

1.6.2. Objetivos específicos

1. Proponer un modelo innovador de aprendizaje-enseñanza de la probabilidad, desarrollado según las características contextuales de la realidad socio-escolar observada y analizada.

2. Identificar y caracterizar comparativamente los desempeños, mostrados por dos grupos de estudiantes, del plan diferenciado de estudios, uno del plan humanista y otro del plan científico.

3. Comparar la efectividad de la propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad, entendida esta desde un enfoque axiomático aplicado, con base en los desempeños desplegados por los estudiantes.

1.7. JUSTIFICACIÓN

Los lineamientos curriculares vigentes (MINEDUC, 2009), relevan la importancia de empoderar a la ciudadanía con el pensamiento estocástico, toda vez que la mayor parte de los procesos en los que participan los sujetos son modelados y descritos con herramientas del azar y las probabilidades: Los sondeos de opinión informan las decisiones comerciales, económicas, empresariales, político-partidarias, de políticas educativas, de salud, de transporte, entre otros campos de decisión. A estos sondeos recurre cada ciudadano como entidades institucionales. En lo cotidiano su uso pasa desde los juegos de los niños (juegos de rol, cartas, juegos de mesa…) hasta la decisión de los jefes de hogar por los planes de salud de los miembros de la familia.

De acuerdo a Neef, Elizalde y Hopenhayn (1986): *“cada estudiante tiene la necesidad de satisfacer su "derecho al entendimiento" -Matriz de Necesidades y Satisfactores*” (Díaz, 2002). Se requiere validar diseños didácticos para que los estudiantes de todos los estratos sociales se apropien de conocimientos matemáticos poderosos que les permitan tener una vida más interesante, productiva y participativa. Estos tres objetivos se relacionan con objetivos formativos más generales, a saber: su naturaleza cultural (una vida más interesante) su función económica (una vida más productiva) y su objetivo político (una vida con más participación ciudadana) (Cajas, 2001).

Es indispensable entonces, generar nuevos diseños de aula que aporten a los objetivos mencionados, diseños que no acepten el sacrificio social tanto para estudiantes actuales, como de generaciones futuras, los cuales no podrían aspirar a lograr unos saberes que les permitan una vida más productiva, participativa e interesante (Díaz, 2013).

1.7.1. Dificultades en el aprendizaje de los alumnos

Por su carácter conceptual más que operacional, la complejidad de muchos conceptos estadísticos y probabilísticos hace imperativo comenzar su enseñanza desde la educación preescolar. Pasar de los datos individuales a su comportamiento conjunto es sorprendentemente difícil para los alumnos, lo que se traduce en un obstáculo para comprender las tablas y gráficos. Aunque estos últimos son herramientas que facilitan la comprensión de la información contenida en las tablas, los alumnos suelen inicialmente verlos como meras ilustraciones.

Para enfrentar las dificultades mencionadas hay que reflexionar en profundidad sobre la naturaleza y el desarrollo del pensamiento estadístico, así como sobre qué significa entender y aprender los conceptos estadísticos. Generalmente se subestima la dificultad que tienen los alumnos para comprender conceptos básicos de probabilidad y estadística.

Pueden ser complejos y contrarios a la intuición, lo que induce a los alumnos a cometer errores. Otra dificultad es que los alumnos, y también los profesores, equiparan la estadística con la matemática y esperan, por tradición escolar, que el foco esté en los números y cálculos, en una respuesta “correcta”.

Sin embargo, el foco en estadística es muy distinto y hace uso intensivo de la escritura y de las habilidades de comunicación (Estrella y Del Pino, 2012).

1.8. LIMITACIONES

Si bien durante esta investigación fue posible analizar los cambios ocurridos en la sala de clases al aplicar un modelo axiomático, no será posible establecer generalizaciones a poblaciones más amplias, se podrá suponer que los resultados podrían ser similares en establecimientos con iguales características socioculturales, pero es imposible estandarizar un modelo de enseñanza axiomático para una población mayor, debido a la reducida de la muestra de trabajo.

Así mismo, la implementación en aula de un modelo didáctico con base en una visión axiomática de las probabilidades se desarrollaron durante un breve periodo de tiempo, de manera descontextualizada, por lo que no se puede concluir a ciencia cierta el nivel de impacto que un cambio en el paradigma del docente en la enseñanza de probabilidades puede significar.

1.9. ALCANCES

La experiencia en aula, ha brindado a quienes la han realizado (Profesor - Investigador) una oportunidad única para generar cambios en sus propias practicas socioescolares, ya que la reflexión generada a partir de la construcción de toda la investigación lo hace consiente de la importancia de conocer los modelos y teorías que subyacen a su propia practica pedagógica, haciendo evidente la necesidad de constante actualización de los conocimientos y autocritica a su propio quehacer en el aula, para así siempre estar validando hipótesis, reformulando ideas y generando de esta manera cambios significativos en el profesor que culmina su formación.

CAPÍTULO II

Marco Teórico

2. MARCO TEÓRICO

En este punto se inicia con una presentación de los progresos que ha tenido en el curriculum chileno la enseñanza de las probabilidades, explicando brevemente como este aprendizaje se ha ido haciendo más sistemático con el paso de los años. Posteriormente se explicará en qué consiste el enfoque axiomático, núcleo central del presente trabajo y sus implicancias y relaciones con las diversas teorías del aprendizaje, caracterizando así las practicas socioescolares que se desarrollaron para el presente estudio.

Finalmente se presenta una propuesta metodológica vigente y adaptada a la realidad del Chile actual, la cual se pretende validar.

2.1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO CHILENO

En Chile, a fines de la década de los noventa se realizó un cambio curricular que permitió contar con un marco curricular para la educación básica desde 1996 y para la educación media desde 1998. La asignatura de Matemática se organizó en torno a tres ejes: álgebra y funciones, geometría, y estadística y probabilidad. La existencia de este último eje fue una innovación curricular en ese tiempo al incluir Estadística y Probabilidad. Posteriormente, en el año 2002 se efectuó una actualización del currículo, aunque se incorporó la estadística solo en seis niveles de escolaridad: del nivel 6 al nivel 8 de educación básica como Tratamiento de la Información, y del nivel 10 al nivel 12 de enseñanza media como Estadística y Probabilidad.

En el año 2009 se propuso un ajuste curricular, que incluyó en Matemática una interesante y ambiciosa inserción de la estadística descriptiva, la estadística inferencial y la probabilidad a través del eje denominado “datos y azar” durante toda la trayectoria escolar, desde el nivel 1 de educación básica hasta el nivel 12 de enseñanza media (para una síntesis de contenidos y objetivos del eje, refiérase a Estrella, 2008, 2010). Ese mismo año el Ministerio de Educación publicó el Mapa de progreso del aprendizaje referido a datos y azar en concordancia con la propuesta de ajuste curricular, el cual depende del currículo y está diseñado con el fin de que los docentes tengan la posibilidad de analizar y monitorear el logro de los aprendizajes de sus alumnos y atender a la diversidad al interior del curso (MINEDUC, 2009a, 2009b).

En el presente año, y como instrumento principal del proceso de reforma del currículo nacional, aparecen las nuevas *Bases curriculares* chilenas (MINEDUC, 2012) para los niveles del 1 al 6, las que establecen el eje denominado “datos y probabilidades”. Este eje se enfoca en la estadística descriptiva y responde a la necesidad de que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades.

2.2. TEORÍAS Y CONCEPCIONES EN LA ENSEÑANZA DE PROBABILIDADES.

La palabra probabilidad afecta hoy en día a un amplio abanico de situaciones en nuestra vida. Cual se desprende del abundante uso que se hace de esta palabra en todos los medios de comunicación, en nuestras cosas y en todo el mundo científico. Y si bien tenemos una idea de que es la probabilidad, muchas veces resulta difícil definirla de una manera que se aplique a cada situación donde usamos el término y en la que estemos de acuerdo la mayoría de las personas. La definición que Kolmogórov establece en 1933 resuelve el problema desde un punto de vista formal y práctico y es, sin duda alguna, que ha configurado el gran desarrollado de la teoría de la probabilidad a partir de ese momento.

El problema que nos concierne es como hacer llegar este bello concepto altamente abstracto en su expresión formal, a personas de otras disciplinas que no tienen una base matemática para entenderlo. Para ella basta recordar que muchos modelos matemáticos parten de un simple hecho de la vida que deseamos explicar. Y muchas veces sucede que se desarrolla toda una teoría a partir de ese modelo abstracto, y luego resulta aplicable a muchas y muy variadas situaciones. Este es el caso de la probabilidad.

Quizás en algún momento también sucedió que nos hemos quedado atrapados en los “modelos” , y hemos perdido la belleza subyace tras ellos, y posiblemente en muchos casos hemos perdido la capacidad de comunicar la idea a personas que no hablan en nuestro lenguaje, pero que con toda certeza, pueden beneficiarse de su comprensión y su utilización. Este también puede ser el caso de la probabilidad.

Como P. Chebyshev adicho: *"La aproximación entre la teoría y la práctica asegura los resultados más favorables y no solo la práctica se beneficia con esto; las ciencias se desarrollan bajo el influjo de la práctica, que descubre nuevos objetos a investigar, o facetas desconocidas de los objetos ya conocidos… si la teoría gana mucho aplicando un método viejo, o sus modificaciones, gana más creando métodos nuevos, y en este caso, la ciencia cuenta con un guía certero en que su quehacer" (Jimenes, N., 1986).*

Con el objeto de clarificar la definición de probabilidad vamos a relacionarla con las nociones intuitivas e interpretaciones fundamentales que constituyen la base para las aplicaciones del concepto.

2.2.1. Concepto intuitivo de probabilidad.

En el pensamiento popular abundan nociones imprecisas, pero intuitivas, de probabilidad. En este sentido, la palabra probabilidad indica una apreciación de la facilidad que se atribuye a que ocurra cierto acontecimiento aleatorio (suceso aleatorio) partiendo de una tendencia (más o menos inconsciente) a pensar que unos hechos son más verosímiles que otros. Incluso en este tipo de pensamiento, la probabilidad se considera como un numero P que se le asigna a un suceso A, que puede ocurrir como resultado de algún experimento.

Esta idea de que la probabilidad del suceso aleatorio A admite, bajo ciertas condiciones, una estimación cuantitativa mediante un número, fue desarrollada en el siglo XVII, en las obras de P. Fermat, B. Ch. Huygens y, en especial, de J. Bernoulli. Y es precisamente este deseo querer medir de una forma más objetiva la probabilidad lo que llevaría a Kolmogórov a establecer su axiomática varios siglos después (Jiménez Saavedra,1986*).*

2.2.2. *Concepto axiomático de la probabilidad.*

En la definición axiomática de Kolmogórov surge a partir de la acumulación de diferentes hechos y desarrollo de otras disciplinas científicas de matemáticas con esto el autor coloca en su lugar natural conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, conceptos que hasta este momento se consideraron bastantes peculiares. No obstante, es importante señalar que esta construcción axiomática arranca de las propiedades fundamentales de la probabilidad, que surgen del análisis de las definiciones frecuentistas y clásica anteriormente descritas, y que además, estas definiciones quedan totalmente justificadas a partir de estos axiomas.

El sistema de axiomas establecido por Kolmogórov, cuando tratamos con las probabilidades de **solo un número finito de sucesos**, es el siguiente:

Sea Ω una colección de elementos, llamados sucesos elementales, y sea F un conjunto de subconjuntos de Ω a los elementos del conjunto F se les llama "Sucesos Aleatorios", F es un algebra de conjuntos.

I. F contiene el conjunto $\emptyset$
II. A cada conjunto A de F se le asigna un número real no negativo $P(A)$. Este número $P(A)$ se llama probabilidad de suceso A.
III. $P\ (\Omega) = 1$
IV. Si A y B son disjuntos, entonces $P(A + B) = P(A) + P(B)$
V. Un sistema de conjunto F, con una asignación definida de números P(A) que satisfaga los axiomas I – IV se llama algebra de probabilidades.

Nota de Kolmogórov: *Un sistema de conjuntos se llama Algebra si la suma, producto de la diferencia de dos conjuntos del sistema también pertenece al mismo sistema, por $A + B$ se entiende el conjunto compuesto por los elementos de Ω contenido en $A\ o\ B$, o bien en $A\ y\ B$ simultáneamente; por AB el conjunto de elementos de Ω pertenecientes a $A\ o\ B$, o bien en la $A\ y\ B$ al mismo tiempo; y, finalmente, por $A * (B *)$ se entiende el conjunto de elementos de Ω no contenidos en $A\ (o\ en\ B)$.* (Kolmogórov, 1933)

En muchos experimentos aleatorios pueden surgir complicaciones técnicas cuando queremos asignar probabilidades a los diferentes sucesos, dado que, por ejemplo, pueden no ser siempre posible considerar todos los subconjuntos de Ω como sucesos, pues podría pasar que descartemos o cometamos errores en medir alguna información que sea el resultado de alguno de los experimentos realizados $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$, de modo que para un subconjuntos A de Ω a pueda no ser posible dar una respuesta SÍ o NO a la pregunta ¿Esta $\boldsymbol{\omega}$ $en\ A$?

De aquí surge la importancia y la necesidad, como se manifiesta en el axioma I de Kolmogórov, de considerar una clase particular F de subconjuntos de Ω, que por razones, de consistencia matemática, requeriremos que sea un algebra (δ-Algebra, en el caso infinito). Así, por ejemplo, si la pregunta ¿Ocurrió A_n? Tiene una respuesta definida para $n = 1, 2, 3, \ldots k$, también tendrán respuesta definida las preguntas: ¿Ocurrió al menos uno de los A_n ? Y ¿Ocurrieron todos los A_n?

2.2.3. Los axiomas de Kolmogórov: Fundamentos de la teoría de probabilidad.

Ahora aplicando los axiomas de Kolmogórov, sí estaríamos en condiciones de asignar probabilidades a los elementos de F, sí A ∈ F la probabilidad P(A) debería reflejar la frecuencia relativa de del suceso A en un gran número de repeticiones independientes del experimento. Por tanto, P(A) debería ser numero entre 0 y 1 y P(Ω) debería ser 1.

Consecuentemente, definimos la probabilidad, con nuestra notación actual y para el caso en que Ω sea finito, como una función P: F →R que asigna un numero P(A) a cada conjunto A del álgebra F, y que satisface las siguientes condiciones (obsérvese la total analogía entre estos tres axiomas y las propiedades de las frecuencias relativas):

1. P (A) ≥ 0, ∀ A ∈ F
2. P (Ω) = 1
3. Si son conjuntos disjuntos de F, entonces:

$$P\ (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ \ldots + \ P(A_n)$$

2.2.4. Justificación acerca de la teoría axiomática.

La dificultad básica con las definiciones frecuentistas y clásicas es que se encaminan a tratar de probar matemáticamente que , por ejemplo, la probabilidad de sacar un "oro" de una baraja española de 40 cartas perfectamente barajadas es de ¼. y esto no se puede hacer. Todo lo que podemos decir es que, si cogemos una carta de manera aleatoria y la reemplazamos, y repetimos el proceso una y otra vez, la relación entre el número de oros que se obtiene y el número total de extracciones estará próxima a ¼, de acuerdo a nuestra intuición y nuestra experiencia física. Por lo tanto, deberíamos asignar una probabilidad de ¼ al suceso de obtener un "oro". De esta manera, las conciencias estarían de acuerdo con nuestra experiencia. Y si consideramos que existe alguna razón misteriosa por la que el "el Rey de copas" sale más veces que una mayor probabilidad al "Rey de Copas". Y así, el desarrollo matemático de la teoría no se vería afectado, aunque las conclusiones que obtengamos puedan discordar con la experiencia. *(Jiménez, N.,1986)*

Nunca podemos usar realmente las matemáticas para probar un hecho específicamente físico. Por ejemplo, no podemos probar matemáticamente que existe una cantidad física llamada "velocidad", que satisfaga una cierta ecuación diferencial; es decir, podemos construir una colección de resultados matemáticos que, interpretados de una manera apropiada, dan una descripción razonable de un cierto fenómeno físico. Igualmente, en la teoría de la probabilidad nos podemos encontrar con situaciones que nos sugieren ciertos resultados. La intuición y experiencia nos sirven para asignar probabilidades a los sucesos.

Nuestra esperanza es desarrollar resultados matemáticos que, cuando son interpretados y relacionados con la experiencia física, nos ayudaran a hacer precisas ideas como la relación entre número de oros que se obtienen y el número total de extracciones, en un muy gran número de extracciones independientes, estará próxima a ¼".

Consecuentemente, la definición axiomática de Kolmogórov no descarta las definiciones frecuentistas y clásicas, sino más bien las valida y les confiere una forma más precisa.

2.2.5. Lo axiomático y su vinculación con el constructivismo.

De acuerdo a lo planteado por Kolmogórov en 1933, el concepto de probabilidades es una construcción a partir de la realidad, para llevar a cabo dicha construcción la persona requiere vivenciar actividades que le permitan la experimentación, el dialogo y la reflexión, de manera que pueda extrapolar lo observado en el entorno a una idea que será posteriormente el conocimiento desarrollado.

De manera que esta forma de adquirir un concepto de probabilidad se vincula directamente con la teoría del aprendizaje constructivista, dando al docente un rol de mediador del aprendizaje del alumno, pues acompaña a este último en su descubrimiento, aportando experiencias, situaciones problemáticas, diálogos, etc., que le permitan formar el concepto de probabilidad.

2.3. RELACIÓN: SITUACIÓN DIDÁCTICA / SITUACIÓN A-DIDÁCTICA

La Situación A- Didáctica es el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en una micro-comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el saber adquirido (Chavarría, 2006).

La Situación Didáctica, por otra parte, comprende el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento. De lo anterior se deduce que la situación didáctica engloba las situaciones a-didácticas, de esta forma, Situación Didáctica consiste en la interrelación de los tres sujetos que la componen. En resumen, la interacción entre los sujetos de la Situación Didáctica acontece en el medio didáctico que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento (situación didáctica) y pueda el estudiante, a su vez, afrontar aquellos problemas inscritos en esta dinámica sin la participación del docente (situación a-didáctica) (Chavarría, 2006).

2.4. CONSTRUCTIVISMO

El constructivismo es una corriente pedagógica , en esta se postula la necesidad de entregar al estudiante las herramientas (andamiaje) que le faciliten la construcción de sus propios conceptos, esto implica que el alumno sea capaz de cambiar y modificar sus ideas preconcebidas después de una experiencia de aprendizaje.

El constructivismo es un proceso de enseñanza social, dinámico que requiere de espacios de participación interactiva entre la persona que aprende y el que enseña, de modo que el conocimiento que se genere sea didáctico en la enseñanza orientada a la acción.

2.4.1. Constructivismo Social.

Constructivismo Social es aquel modelo basado en el constructivismo, que dicta que el conocimiento además de formarse a partir de las relaciones ambiente-yo, es la suma del factor entorno social a la ecuación: Los nuevos conocimientos se forman a partir de los propios esquemas de la persona producto de su realidad, y su comparación con los esquemas de los demás individuos que lo rodean.

El constructivismo social es una rama que parte del principio del constructivismo puro y el simple constructivismo es una teoría que intenta explicar cuál es la naturaleza del conocimiento humano.

El constructivismo busca ayudar a los estudiantes a internalizar, reacomodar, o transformar la información nueva. Esta transformación ocurre a través de la creación de nuevos aprendizajes y esto resulta del surgimiento de nuevas estructuras cognitivas (Grennon y Brooks, 1999), que permiten enfrentarse a situaciones iguales o parecidas en la realidad.
Así ¨el constructivismo¨ percibe el aprendizaje como actividad personal enmarcada en contextos funcionales, significativos y auténticos.

2.4.2. El constructivismo de Vigotsky o Constructivismo Social.

De acuerdo a Méndez (2002) Lev Vigotsky filósofo y psicólogo ruso que trabajó en los años treinta del Siglo XX, es frecuentemente asociado con la teoría del constructivismo social que enfatiza la influencia de los contextos sociales y culturales en el conocimiento y apoya un "modelo de descubrimiento" del aprendizaje. Este tipo de modelo pone un gran énfasis en el rol activo del maestro mientras que las habilidades mentales de los estudiantes se desarrollan "naturalmente" a través de varias "rutas" de descubrimientos. Sólo en un contexto social se logra aprendizaje significativo.

El intercambio social genera representaciones inter-psicológicas que, eventualmente, se han de transformar en representaciones intra-psicológicas.

El origen de todo conocimiento no es la mente humana, sino una sociedad dentro de una cultura dentro de una época histórica. El lenguaje es la herramienta cultural de aprendizaje por excelencia. El individuo construye su conocimiento porque es capaz de leer, escribir y preguntar a otros y preguntarse a si mismo sobre aquellos asuntos que le interesan. Aun más importante es el hecho de que el individuo construye su conocimiento no porque sea una función natural de su cerebro sino porque literalmente se le ha enseñado a construir a través de un dialogo continuo con otros seres humanos. No es que el individuo piense y de ahí construye, sino que piensa, comunica lo que ha pensado, confronta con otros sus ideas y de ahí construye. Desde la etapa de desarrollo infantil, el ser humano está confrontando sus construcciones mentales con su medio ambiente. (Vigostky, 1934)

Hay un elemento probabilístico de importancia en el constructivismo social. No se niega que algunos individuos pueden ser más inteligentes que otros. Esto es, que en igualdad de circunstancias existan individuos que elaboren estructuras mentales más eficientes que otros. Pero para el constructivismo social esta diferencia es totalmente secundaria cuando se compara con el poder de la interacción social. La construcción mental de significados es altamente improbable si no existe el andamiaje externo dado por un agente social. La mente para lograr sus cometidos constructivistas, necesita no sólo de sí misma, sino del contexto social que la soporta. La mente, en resumen, tiene marcada con tinta imborrable los parámetros de pensamiento impuestos por un contexto social.

2.4.3. Principios Vigotskianos.

Los principales principios Vigotskianos en el aula son:

- El aprendizaje y el desarrollo son una actividad social y colaborativa que no puede ser "enseñada" a nadie. Depende del estudiante construir su propia comprensión en su propia mente.

- La Zona de Desarrollo Próximo puede ser usada para diseñar situaciones apropiadas durante las cuales el estudiante podrá ser provisto del apoyo apropiado para el aprendizaje óptimo.

- El docente debe tomar en consideración que el aprendizaje tiene lugar en contextos significativos, preferiblemente el contexto en el cual el conocimiento va a ser aplicado.

En palabras del propio Lev Vygotsky: *¨Un proceso interpersonal queda transformado en otro intrapersonal. En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a escala social, y más tarde, a escala individual; primero, entre personas (interpsicológica), y después, en el interior del propio niño (intrapsicológica). Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones psicológicas superiores se originan como relaciones entre seres humanos¨. (Vigotsky, 1934).*

2.4.4. Zona de desarrollo próximo

La zona de desarrollo próximo, está determinada socialmente. Se aprende con la ayuda de los demás, se aprende en el ámbito de la interacción social y esta interacción social como posibilidad de aprendizaje es la zona de desarrollo próximo. (Frawley, 1997).

La teoría Vigotskyana es muy específica respecto a cómo se deben estudiar las perspectivas del crecimiento individual en cualquier caso de actividad ínter subjetiva. Esto se hace examinando la zona del desarrollo próximo (ZDP). La ZDP surge generalmente como el contexto para el crecimiento a través de la ayuda de otros para alcanzar conocimientos que por si mismos no se lograrían, aquí el rol del docente como mediador es fundamental, así como también lo es el brindar a los estudiantes instancias de interacción y diálogos con los pares.

Conceptos esenciales en la obra de Vigotsky (1978) según sus propios términos son:

- La zona de desarrollo próximo: ¨No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema¨.

- EL Nivel de desarrollo potencial: es determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con un compañero más capaz.

- El tipo y calidad de estos instrumentos determina el patrón y la tasa de desarrollo.

- Los instrumentos deben incluir: adultos importantes para el estudiante, la cultura y el lenguaje.

2.5. EL APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO: JEROME BRUNER

Bruner plantea que el aprender es un proceso activo en el cual los aprendices, en este caso estudiantes, construyen las nuevas ideas o conceptos basados en sus experiencias, las previas y las vividas durante el proceso de enseñanza- aprendizaje, de esta manera, el aprender es un proceso activo, social en el cual los estudiantes construyen nuevas ideas o los conceptos basados en conocimiento actual. El estudiante selecciona la información, origina hipótesis, y toma decisiones en el proceso de integrar experiencias en sus construcciones mentales existentes.

Por lo que la instrucción, el instructor debe intentar y animar a los estudiantes a que descubran principios y conceptos por sí mismos. El instructor y el estudiante deben desarrollar un diálogo activo.

Por tanto, en el aprendizaje por descubrimiento de Bruner, el maestro organiza la clase de manera que los estudiantes aprendan a través de su propia participación activa. Usualmente, se hace una distinción entre el aprendizaje por descubrimiento, donde los estudiantes trabajan en buena medida por su parte y el descubrimiento guiado en el que el maestro proporciona su dirección.

En la mayoría de las situaciones, es preferible usar el descubrimiento guiado. Se les presenta a los estudiantes preguntas intrigantes, situaciones ambiguas o problemas interesantes. En lugar de explicar cómo resolver el problema, el maestro proporciona los materiales apropiados, alienta a los estudiantes para que hagan observaciones, elaboren hipótesis y comprueben los resultados.

CAPÍTULO III

Marco Metodológico

3. MARCO METODOLÓGICO

El presente estudio se desarrolla en el marco de un paradigma cualitativo y se consideró el amplio marco de la investigación- acción. En este marco existe un constante ir y venir entre la reflexión y la acción de quien investiga. A decir de Pérez Serrano, la I-A "se caracteriza por leer, percibir y aprehender la praxis cotidiana que emerge cada vez de forma diferente.

Se caracteriza también por valorar aquello que es nuestra forma más y modo más ordinario de vivir, por estudiar y analizar los grupos y las necesidades en las que se desarrolla normalmente nuestra existencia" (Pérez Serrano, 1990).

3.1. PARADIGMA CUALITATIVO

Tal como se ha mencionado, la presente tesis surge a partir de un paradigma cualitativo; entendiendo este como la teoría que organiza una reflexión en y desde la praxis, ya que la realidad está constituida no sólo por hechos observables y externos, sino por significados y símbolos e interpretaciones elaboradas por el propio sujeto a través de una interacción con los demás.

El objeto de la investigación de este paradigma es la construcción de teorías prácticas, configuradas desde la misma praxis y constituida por reglas y no por leyes. (Identificación de las reglas que subyacen, siguen y gobiernan los fenómenos sociales). Insiste en la relevancia del fenómeno, frente al rigor (validez interna) del enfoque racionalista.

Así mismo, intenta comprender la realidad dentro de un contexto dado, por tanto, no puede fragmentarse ni dividirse en variables dependientes e independientes. Describiendo el hecho en el que se desarrolla el acontecimiento, esto es optar por una metodología cualitativa basada en una rigurosa descripción contextual de un hecho o situación que garantice la máxima intersubjetividad en la captación de una realidad compleja mediante una recogida sistemática de datos que posibilite un análisis e interpretación del fenómeno en cuestión.

Se vincula directamente con la estrategia de Investigación- Acción , ya que, aboga por la pluralidad de métodos y la adopción de estrategias de investigación específicas, singulares y propios de la acción humana. (Observación participativa, estudio de casos, investigación acción).

3.2. ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN- ACCIÓN

La investigación acción es una metodología de las ciencias sociales que se propone favorecer procesos de diálogo y participación entre los investigados y los investigadores. Busca generar caminos y estrategias para comprender una realidad concreta, cotidiana, con miras a proponer una intervención que mejore las condiciones de vida de una determinada población.

El enfoque de la I-A surge en el campo de la antropología en la década de los 40'. Su origen se relaciona con la propuesta metodológica del antropólogo norteamericano Kurt Lewin que realizó en una investigación sobre hábitos y alimentación encargada por el gobierno de Estados Unidos de la época. Uno de los aspectos que resaltó en su trabajo fue la preocupación por la participación de los actores sociales en la transformación de sus prácticas.

De esta manera, durante la segunda mitad del siglo XX, la I-A se expandió a diversas ciencias sociales y también al área de la medicina y los estudios de salud pública.

Desde la perspectiva de Pérez Serrano, la I-A "se caracteriza por leer, percibir y aprehender la praxis cotidiana que emerge cada vez de forma diferente. Se caracteriza también por valorar aquello que es nuestra forma más y modo más ordinario de vivir, por estudiar y analizar los grupos y las necesidades en las que se desarrolla normalmente nuestra existencia".

3.2.1. El rol del investigador

Uno de los principios de este enfoque es la redefinición del rol del investigador. Éste se involucra con la comunidad investigada y favorece la participación de la misma en los procesos de análisis y reflexión del tema investigado. Se rompe la distinción entre sujeto que investiga y sujeto investigado con miras a la refundación de una relación más dialógica que reconoce en los participantes una voz legítima para analizar y reflexionar sistemática y rigurosamente sus problemas. De aquí que el conocimiento y la comprensión ganados estén al servicio de la transformación social de los propios participantes de la comunidad.

La I-A incluye más activamente a los actores sociales en los procesos de producción del conocimiento social, así como a las dinámicas argumentativas de los sujetos investigados.

La finalidad de la I-A es la acción. Si bien, investigar ya supone acción, la peculiaridad del enfoque radica en su intencionalidad de intervenir en lo social. El conocimiento y la información producidas en un determinado estudio están al servicio de proponer acciones que transformen una realidad determinada. La teoría está profundamente vinculada a la práctica, pues las ideas producidas están en constante revisión y cuestionamiento a partir de las acciones que propone o la disponen.

En síntesis, la I-A presenta las siguientes características:

- Es una experiencia concreta, real, de un grupo de sujetos; no es una formulación a-priori o estrictamente teórica.
- La problemática se construye a partir de procesos deliberativos y se asienta en una diagnóstico participativo que se construye con los propios implicados.
- Los investigadores trabajan con sujetos en contextos reales.
- Busca un cambio concreto en los sujetos con los que trabaja e investiga.
- En la formulación de los objetivos, la comunidad investigada participa, opina y se vincula activamente en la propuesta de investigación.
- Los investigadores no solo observan, además participan y se comprometen con la realidad que están investigando.
- Es una investigación de escala reducida, local.
- Levanta información que puede ser sistematizada y servir para explicar fenómenos más generales.
- Propone líneas de acción para intervenir en la realidad analizada.
- Se somete permanentemente a los juicios de los implicados (investigadores/sujetos investigados).

3.2.2. Modelos de I-A

Existen modelos diferentes de Investigación - Acción. Algunos promueven estilos más directivos por parte del investigador; otros, ponen el acento en los procesos deliberativos y otros, insisten en la triangulación de los datos y la información recopilada. El consenso es que el investigador construye con la comunidad el problema que se investigará y que se busca intervenir.

Para fines de este estudio se seleccionó el modelo de construcción - Acción que siguiendo el planteamiento de Elliott (1993) se define como: *"Construcción de un plan de acción: Este plan comienza revisando el problema inicial a la luz de los nuevos diálogos y conversaciones que se gesten en el proceso investigativo".*

Debe contener claridad sobre los medios y los recursos con los que se cuenta para actuar sobre el problema diagnosticado, planificar los instrumentos y estrategias necesarias para recopilar más información, contener sistemas de evaluación y seguimiento permanentes para cautelar la rigurosidad del trabajo y, a la vez, la participación de los actores implicados.

De forma genérica podemos decir que la investigación acción se desarrolla siguiendo un modelo en espiral en ciclos sucesivos que incluyen diagnóstico, planificación, acción, observación y reflexión – evaluación. El proceso de investigación acción es descrito con matizaciones diferentes según autores, variando en cuanto a su complejidad (Elliott, 1993).

Todo este proceso se resume en cuatro fases (Kemmis McTaggart,1988):

1. Diagnóstico y reconocimiento de la situación inicial.
2. Desarrollo de un plan de acción, críticamente informado, para mejorar aquello que ya está ocurriendo.
3. Actuación para poner el plan en práctica y la observación de sus efectos en el contexto que tiene lugar.
4. La reflexión en torno a los efectos como base para una nueva planificación.

Según Rincón y Rincón (2000) en general, el planteamiento de un proceso de mejora en el ámbito educativo suele basarse en la actuación de equipos docentes que se constituyen en grupos de revisión y mejora y revisiones sucesivas.

3.3. UNIVERSO Y MUESTRA

Para efectos de esta investigación se consideró como población de estudio a los cursos de tercero medio del plan de estudios científico humanista, de colegios urbanos de la región metropolitana.

El escenario donde se realizó el estudio es un colegio Particular subvencionado de la comuna de Maipú, que cuenta con jornada escolar completa y atiende a 1.357 alumnos, distribuidos en educación parvularia, enseñanza básica y enseñanza media Científico – Humanista.

En la muestra se trabaja con dos cursos de tercero medio del Colegio Anglo Maipú, uno con electivo científico y el otro electivo humanista. En promedio asistieron 45 alumnos a cada curso, durante la experimentación que se realizó en 8 sesiones pedagógicas, distribuidas en 4 horas pedagogías de clases, durante un periodo de 5 semanas.

Los profesores a cargo del curso de matemáticas en los dos bloques de experimentación corresponden a los investigadores del presente estudio.

3.4. ESTRATEGIAS DE GENERACIÓN DE INFORMACIÓN

La recogida de información se efectuará utilizando diversos instrumentos, previstos en el diseño de investigación del propio plan de trabajo. Para la recogida de información se han utilizado dos instrumentos básicos: evaluaciones diagnósticas y las observaciones realizadas al grupo de estudio.

3.4.1. Evaluación Diagnostica

Para una recogida inicial de información se diseñó un instrumento diagnostico que busca recoger datos sobre los conocimientos previos que los estudiantes manejan del concepto de probabilidades, así como también, identificar el modelo de enseñanza bajo el cual dichos conceptos fueron adquiridos.

3.4.2. Evaluación Formativa

A lo largo de cada una de las sesiones de trabajo, se realizaron preguntas y actividades orientadas a medir el porcentaje de logro del objetivo ideal de esa sesión de trabajo, la realización de estas preguntas permiten al profesor_ Investigador, generar cambios en la propuesta de trabajo, así como también mediar de manera más directa, generando interacciones enriquecedoras en pos del logro del objetivo general, que es lograr que los estudiantes construyan por si mismos un concepto de probabilidades mediante una visión axiomática.

3.4.3. Cuestionario (post- Test)

Al igual que en la evaluación inicial, se realiza una recogida de información, luego de haber aplicado una propuesta didáctica para el desarrollo del concepto de probabilidades con una visión axiomática.

Este test final, contiene preguntas orientadas a conocer la visión del estudiante y busca medir el impacto de la intervención, evidenciando en las respuestas recogidas la construcción o no del concepto de probabilidades, así como el apreciar si los estudiantes percibieron un cambio metodológico tras la experiencia de estudio. Vale decir, evidenciar las diferencias entre un modelo tradicional de enseñanza de probabilidades y el modelo aplicado con una visión axiomática, orientado por el constructivismo social de Vigotsky

3.4.4. Los Instrumentos empleados.

Los instrumentos empleados durante las etapas de desarrollo del diseño de la propuesta didáctica corresponden a una adaptación del cuaderno de actividades "Probabilidades: Conceptos Combinatorios y Probabilísticos" (Riveros, 2001).

Las etapas desarrolladas durante la implementación de la propuesta didáctica, fueron las siguientes:

1. Diagnostico Inicial.
2. Guía de Trabajo: Combinatoria, Variación y Permutación.
3. Guía de Trabajo: Regla de Laplace.
4. Guía de Trabajo: Regla de Laplace y Probabilidad Simple.
5. Guía de Trabajo: Probabilidad Simple.
6. Guía de Trabajo: Probabilidad Condicional y Eventos Independientes.
7. Guía de Trabajo: Eventos Independientes y Regla de la Multiplicación.
8. Post-Test.

3.5. FUNDAMENTACIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO

Este estudio es un diseño cuasi experimental, entendiendo este tipo de diseño como una derivación de los estudios experimentales, en los cuales la asignación de los participantes (estudiantes) no es aleatoria aunque el factor de exposición es manipulado por el investigador (Cabrera, 2009). Se seleccionó este modelo porque se llevaron a cabo un conjunto de procedimientos y estrategias de investigación orientadas a la evaluación del impacto ocurrido en la sala de clases, luego del desarrollo de la intervención metodológica.

Además se desarrolla en el marco de la Investigación - Acción, entendida como una metodología de investigación orientada hacia el cambio educativo y se caracteriza entre otras cuestiones por ser un proceso que como señalan Kemmis y MacTaggart (1988); Se construye desde y para la práctica, pretende mejorar la práctica a través de su trasformación, al mismo tiempo que procura comprenderla, demanda la participación de los sujetos en la mejora de sus propias prácticas, implica la realización de análisis crítico de las situaciones y se configura como una espiral de ciclos de planificación, acción, observación y reflexión.

Entre los puntos clave de la investigación – acción, Kemmis y Mctaggart (1988) destacan la mejora de la educación mediante su cambio, y aprender a partir de la consecuencias de los cambios y la planificación, acción, reflexión nos permite dar una justificación razonada de la labor educativa ante otras persona porque se puede mostrar de qué modo las pruebas que se obtienen y la reflexión crítica que se llevan cabo han ayudado a crear una argumentación desarrollada, comprobada y examinada críticamente a favor de lo que se ha hecho.

Al iniciar la investigación el Investigador- Docente cuenta con un enfoque paradigmático para la enseñanza de las probabilidades, en este caso, la visión Axiomática de Kolmogórov que guía su trabajo, además de una corriente teórica del aprendizaje que determina su manera de diseñar y realizar una clase, en el presente estudio, tal como se ha mencionado, se tiene como referencia el constructivismo social de Vigotsky y el aprendizaje por descubrimiento de Bruner, esto nos lleva a presentar la siguiente secuencia de actividades.

El interés del investigador, estará centrado en la manera como los estudiantes van construyendo un concepto adecuado de probabilidad desde una visión axiomática y el como esta se relaciona con los diferentes conocimientos estocásticos, mientras que se aplican instrumentos especialmente desarrollados para estos fines.

El investigador tendrá un rol de mediador, al trabajar a la par de los estudiantes siendo así, una fuente de información y ayuda fundamental para llevar al alumno desde un concepto intuitivo de probabilidad a uno formal.

A continuación se presenta una descripción de las distintas etapas desarrolladas durante el proceso de Investigación- Acción en que se trabajaron a lo largo de este estudio:

a) Se realizó una investigación empírica que consta de una observación de las metodologías utilizadas por los profesores dentro de la sala de clases con estudiantes de tercer año medio para la enseñanza de las probabilidades, en paralelo se realizó una investigación bibliográfica que busca dar cuenta de la presencia del contenido de probabilidades a lo largo del curriculum chileno.

b) Se desarrolla una investigación bibliográfica orientada a la búsqueda de diferentes metodologías y visiones de la enseñanza de las probabilidades. Identificando la visión axiomática de Kolmogórov, como la más pertinente para el desarrollo de las habilidades y destrezas propuestas para la nueva reforma de educación.

c) Esto se llevara a cabo en los terceros años medio del Colegio Anglo Maipú, Científico y Humanista, A y B respectivamente, en donde se estudiarán en paralelo los resultados obtenidos, comparando la adquisición de lenguaje matemático y las habilidades logradas, para evaluar si un cambio conceptual en el profesor, es significativo en el interior de la sala de clases
d) Se realizó una propuesta didáctica, a partir de reuniones de trabajo con Riveros, autor del cuaderno de actividades "probabilidades, conceptos combinatorios y probabilísticos", a partir del cual se realizó una adaptación contextualizada a la realidad concreta de este estudio, vale decir los terceros medios del colegio Anglo Maipú, esta consta de 8 sesiones, separadas en 3 etapas:

  - **Etapa 1**: Aplicación de diagnóstico en donde se evidenciara la adquisición y el dominio del eje de datos y azar durante los años anteriores, identificando la visión del concepto de probabilidades utilizada por el o los docentes que intervinieron en el proceso.

  - **Etapa 2**: Se desarrollara la adquisición de los conceptos combinatorios y probabilísticos con un modelo inductivo mediante la presentación de situaciones problemáticas a los estudiantes, de modo tal que sean los propios estudiantes los que construyen tales conceptos.

- **Etapa 3**: Refuerzo, evaluación y remedial de los contenidos y aprendizajes menos logrados, entiendo por aprendizajes las habilidades esperadas al término de la unidad de probabilidades tratada durante las etapas anteriores.

3.6. ESTRATEGIAS DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Para la presente investigación se utilizaron 4 instrumentos orientados a la búsqueda, y análisis de la información.

Las preguntas y situaciones problemáticas presentadas a los estudiantes corresponden a una adaptación del cuaderno de actividades "probabilidades, conceptos combinatorios y probabilísticos" (Riveros 2001), de manera que reflejen, a través de las respuestas de los estudiantes, el progreso de la adquisición de competencias probabilísticas al inicio y su avance al término de la experiencia.

El diseño corresponde a un instrumento validado por Riveros (2014) en persona, y sigue la propuesta axiomática para el estudio de probabilidades que el autor propone. Siendo el mismo autor quien guía las etapas de experimentación presencial de las 8 sesiones.

3.7. ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN DE INFORMACIÓN

Una investigación tiene un alto nivel de "validez" si al observar, medir o apreciar una realidad, se observa, mide o aprecia esa realidad y no otra; es decir, que la validez puede ser definida por el grado o nivel en que los resultados de la investigación reflejan una imagen clara y representativa de una realidad o situación dada.

El concepto tradicional de "confiabilidad" implica que un estudio se puede repetir con el mismo método sin alterar los resultados, es decir, es una medida de la replicabilidad de los resultados de la investigación (Martínez et al, 2000).

Por esta razón el estudio se realizó de manera paralela en dos cursos del mismo establecimiento que aunque presentan diferentes características, poseen también similitudes altamente significativas.

CAPÍTULO IV

Recogida de la Información

4. RECOGIDA DE LA INFORMACIÓN

A partir de los instrumentos aplicados, se procede a recoger la información recopilada, para posteriormente ser analizada. La recogida de datos consta de cinco pasos los cuales son descritos a continuación:

4.1. ETAPAS Y LO QUE SE EFECTUÓ EN CADA UNA DE ELLAS

4.1.1. Etapa 1: Aplicación de Diagnostico

Aplicación de diagnóstico en donde se evidenciara la adquisición y el dominio del eje de datos y azar durante los años anteriores, identificando la visión del concepto de probabilidades utilizada por el o los docentes que intervinieron en el proceso.

ETAPA	ACCIÓN	APRENDIZAJE ESPERADO
Diagnóstico.	Se aplica un diagnóstico, en el cual se busca observar el nivel de las habilidades que deberían manejar los estudiantes.	Reconocer la profundidad de los contenidos estadísticos aprendidos hasta tercer año medio.

4.1.2. Etapa 2: Procesos Combinatorios y Probabilísticos

Se desarrollara la adquisición de los conceptos combinatorios y probabilísticos con un modelo inductivo mediante la presentación de situaciones problemáticas a los estudiantes, de modo tal que sean los propios estudiantes los que construyen tales conceptos.

ETAPA	ACCIÓN	APRENDIZAJE ESPERADO
Combinatoria, variación y permutación.	En esta sesión se reforzara la última unidad vista por los estudiantes durante este año (se anexan fotos de cuadernos).	Reconocer el correcto uso del lenguaje estadístico por parte de los estudiantes.

Regla de Laplace.	En esta sesión se utilizaran conceptos vistos en la sesión anterior para construir de manera intuitiva la regla de Laplace.	Madurar los conceptos de combinación, permutación y variación.
Regla de Laplace y probabilidad simple.	Se formalizan los conceptos involucrados en la regla de Laplace, mediante el trabajo en equipo y posterior plenario.	Resolver posibles errores existentes en su vocabulario.
Probabilidad simple.	Se trabaja en grupos de 5 estudiantes un conjunto de ejercicios desafiantes y posteriormente son revisados y formalizados en un plenario.	Conceptualizar y operar de manera apropiada los conceptos básicos necesarios para trabajar probabilidad simple.
Probabilidad condicional y eventos independientes.	Se continúa en la modalidad de trabajo por equipos y un posterior plenario, se trabaja una guía y posteriormente se formalizan los contenidos con la ayuda de la experiencia de lo trabajado.	Reconocer los posibles cambios que puede tener el espacio muestral. Descubrir las condiciones mínimas para la independencia de eventos.
Eventos independientes y regla de la multiplicación.	Mediante el trabajo en equipo, se propondrán preguntas desafiantes para descubrir los alcances de la regla de multiplicación, cada grupo defenderá sus resultados encontrados.	Aplicar el concepto de eventos independientes para entender la regla de la multiplicación.

4.1.3. Etapa 3: Evaluación y Remedial de los Aprendizajes

Evaluación de los conceptos construidos posterior al refuerzo realizado en la octava Remedial y refuerzo de los contenidos y aprendizajes menos logrados, entiendo por aprendizajes las habilidades esperadas al término de la unidad de probabilidades tratada durante las etapas anteriores.

ETAPA	ACCIÓN	APRENDIZAJE ESPERADO
Post.Test.	Se aplica un test, con la finalidad de observar los alcances obtenidos con la aplicación de la secuencia.	Reconocer los avances logrados por los estudiantes, comparando los resultados obtenidos en el primer diagnóstico con los del diagnóstico final.

4.2. FACILITADORES Y OBSTACULIZADORES

El principal facilitador de la recogida de la información es el hecho de que el investigador corresponde al profesor de la asignatura en los bloques de trabajo, es decir, no hubo presencia de otros integrantes de la comunidad educativa que pudiesen intervenir.

Durante el desarrollo del estudio se presentaron diversos obstáculos que se mencionan a continuación:

1. De las horas 4 horas destinadas a la asignatura de matemáticas, de acuerdo al plan común, el establecimiento educacional se encontraba en época de actividades extra programáticas, en donde la principal preocupación era la realización de la Kermesse anual, con fecha para el 15 de noviembre, lo que nos impidió, en ocasiones, darle la continuidad deseada al diseño de clases.

2. Al ser el III° año medio A el curso humanista, o grupo control, se encontraban en proceso de realización de "Tesinas", actividad impuesta por los cursos humanistas que han sido escogidos por cada uno de los estudiantes, de acuerdo al plan diferenciado de la escuela.

4.3. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

4.3.1. Procedimientos

El procedimiento utilizado en el análisis de los datos se sustenta en la estadística descriptiva, para lo cual se procedió al levantamiento de tres categorías de análisis, las cuales corresponden a No Logrado (NL), Logrado Parcialmente (LP) y Logrado Exhaustivamente (LE).

Tales categorías se entiendes como:

CATEGORÍAS	ESCALA DE CLASIFICACIÓN
LE: Logrado Exhaustivamente	Nivel excepcional de desempeño, excediendo lo esperado. Propone o desarrolla nuevas acciones. Demuestra total comprensión del problema. Todos los requerimientos de la tarea están incluidos en la respuesta.
LP: Logrado Parcialmente	Nivel de desempeño estándar. Los errores no constituyen una amenaza. Demuestra comprensión parcial del problema. La mayor cantidad de requerimientos de la tarea están comprendidos en la respuesta.
NL: No Logrado	No satisface prácticamente nada de los requerimientos de desempeño. No comprende el problema. No aplica los requerimientos para la tarea. No responde. No intentó hacer la tarea.

Posteriormente se procedió al estudio de las varianzas y medias de los datos recogidos, siendo sometidos estos a la prueba T, considerando que son muestras independientes con varianzas conocidas.

4.3.2. Las variables

A continuación se presenta una lista de las variables consideradas para el análisis del diagnostico, post test y del diseño de las actividades realizadas.

1. Valoración de la matemática
2. Percepción de la clase de matemática
3. Emocionalidad del estudiante en la clase de matemática
4. Aspectos a valorar en la clase de matemática.
5. Utilidad de la matemática
6. Trabajo colaborativo
7. Valoración del descubrimiento
8. Valoración y Rol del profesor
9. Valoración de los errores
10. Valoración de actividades realizadas
11. Percepción frente al método de trabajo

CAPÍTULO V

Análisis de la Información

5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

5.1. CONFIGURACIONES INICIALES

5.1.1. Análisis del diagnostico. (Anexo 1)

Aplicación de un diagnostico de entrada para dos terceros medios del colegio anglo Maipú, de la comuna de Maipú, estos serán el III°A (curso humanista, compuesto por 30 damas y 16 varones) y el III°B (curso matemático, compuesto por 18 damas y 28 varones) de aquí en adelante los llamaremos A y B.

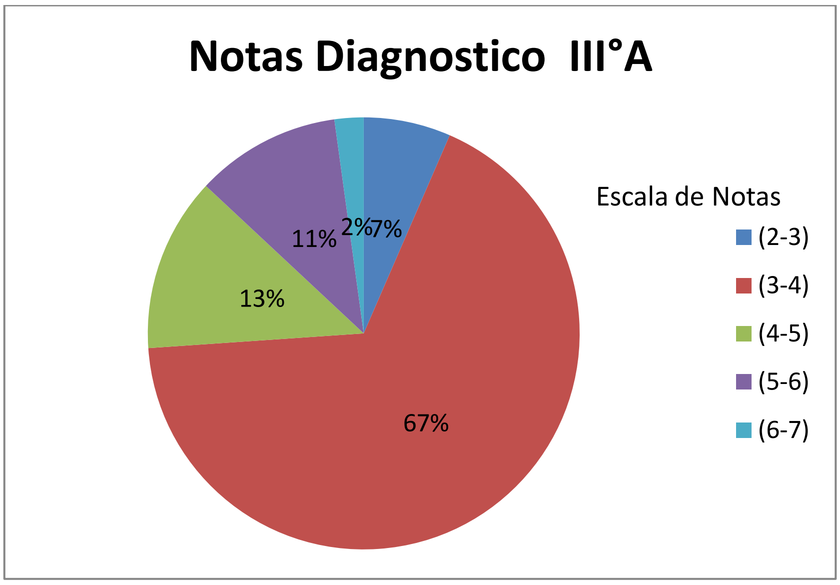
El objetivo del diagnostico es evidenciar el déficit en cuanto al lenguaje estadístico y conocimientos previos madurados en cursos que no reciben formación matemática en profundidad, luego de aplicar el diagnostico de entrada a ambos terceros medios, tanto en el cual se aplicara el diseño y en el que no, obteniendo los resultados declarados en la Tabla 5.1 (anexo 1).

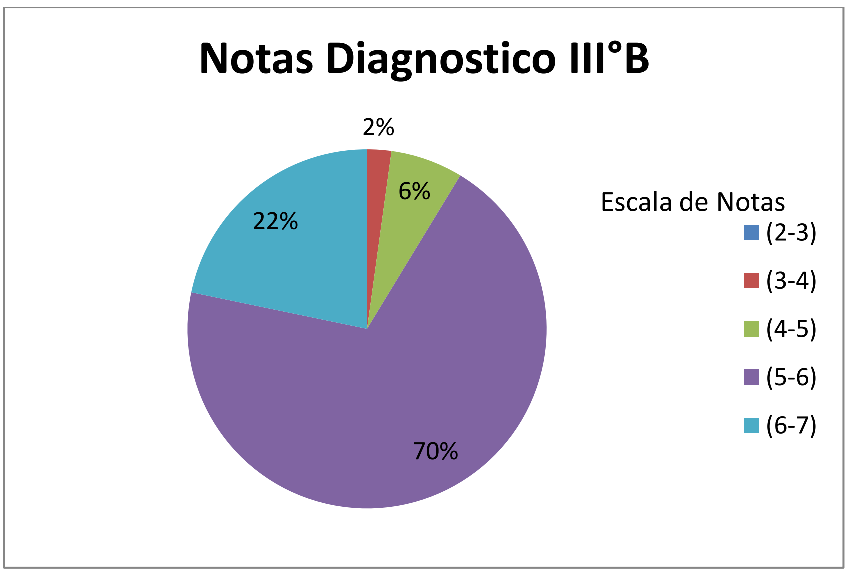
De dichos resultados se puede concluir:

a) En el III°A los contenidos trabajados anteriormente no representan significancia para los estudiantes, esto se evidencia en que por ítem muy pocos consiguen obtener un nivel de logro exhaustivo.

b) En cuanto al razonamiento lógico-matemático y el trabajo conjuntista el III°B tiene mayor logro que el III°A esto se puede deber al hecho que el III°B es científico y en los cursos diferenciados al plan común, refuerzan lógica y teoría de conjuntos.

5.1.2. *Comparación de Resultados obtenidos en Diagnostico por curso.*

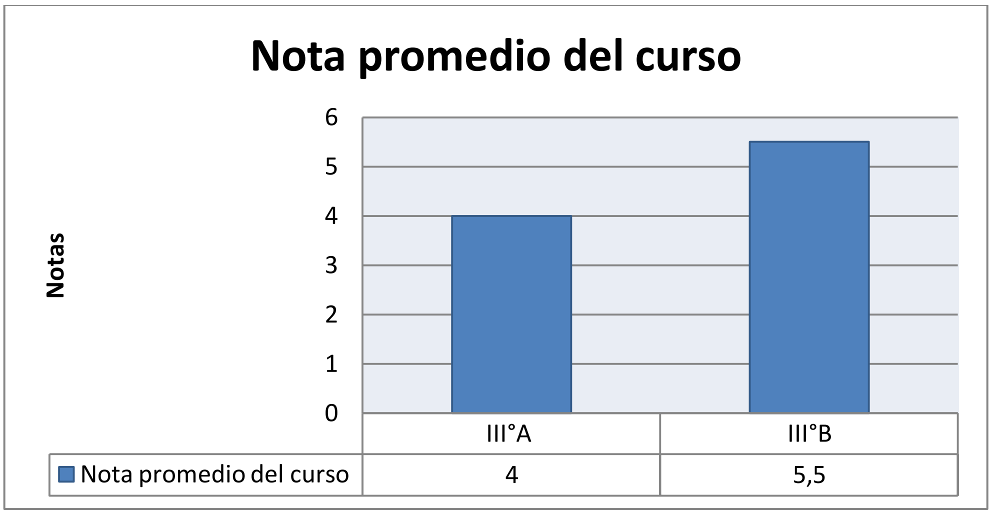




Al comparar los resultados obtenidos entre ambos cursos queda en evidencia la disparidad existente en el aprendizaje, en relación al concepto de probabilidades. El III°A, curso perteneciente al plan humanista, tiene un 84% de sus estudiantes en la categoría No Logrado (NL) evidenciando la no comprensión del concepto a tratar.

En el segundo gráfico, el III°B, de elección científica, muy por el contrario presenta un 28% de sus estudiantes en la categoría de Parcialmente Logrado (PL) y un 70% de ellos en la categoría de Logrado Exhaustivamente (LE), dejando solo un 2% de los alumnos en la categoría de NL, donde por contraste, se concentra la mayor parte del curso paralelo.

Se desprende de lo anterior el siguiente grafico, para el cual se debe considerar que las varianzas obtenidas III°A corresponde a 0,81 y para el III°B fue de 0,65.



A partir de este gráfico se puede concluir que:

a) En el III°B la media de los estudiantes es superior que en III°A y sus datos están menos dispersos.
b) A partir de la desviación típica y de la varianza se puede concluir que el nivel de logro de los estudiantes de III°B es homogéneo en comparación con el logrado por el III°A.
c) Los estudiantes de III°A poseen una maduración de los conceptos y aplicación matemática muy diferentes, esto queda en evidencia por la varianza.

5.1.3. Análisis post test. (anexo 1)

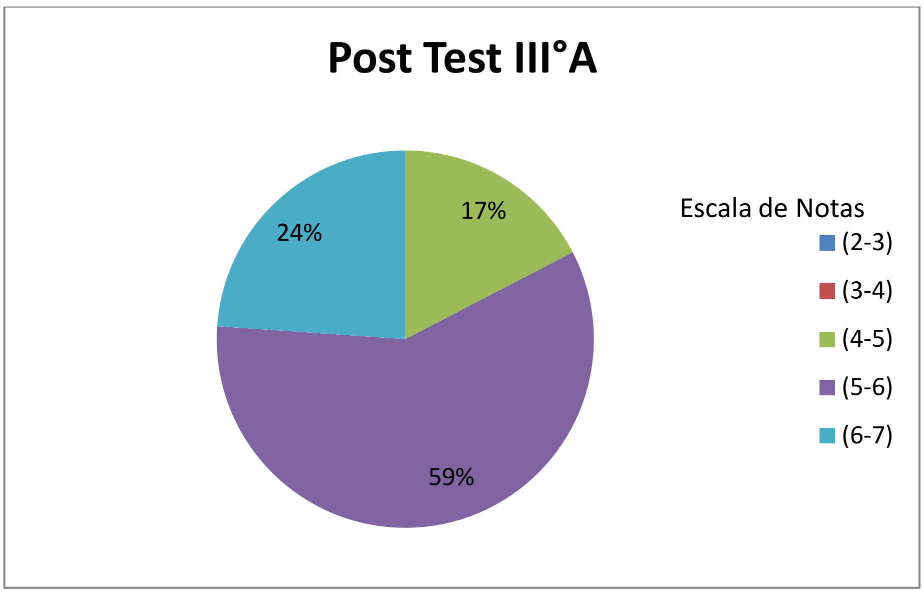
Luego de la aplicación del diseño se vuelven a contrastar ambos terceros medios en esta ocasión mediante un post test se busca validad de manera externa los resultados conseguidos, reflejados en la Tabla 5.2 (anexo 1).

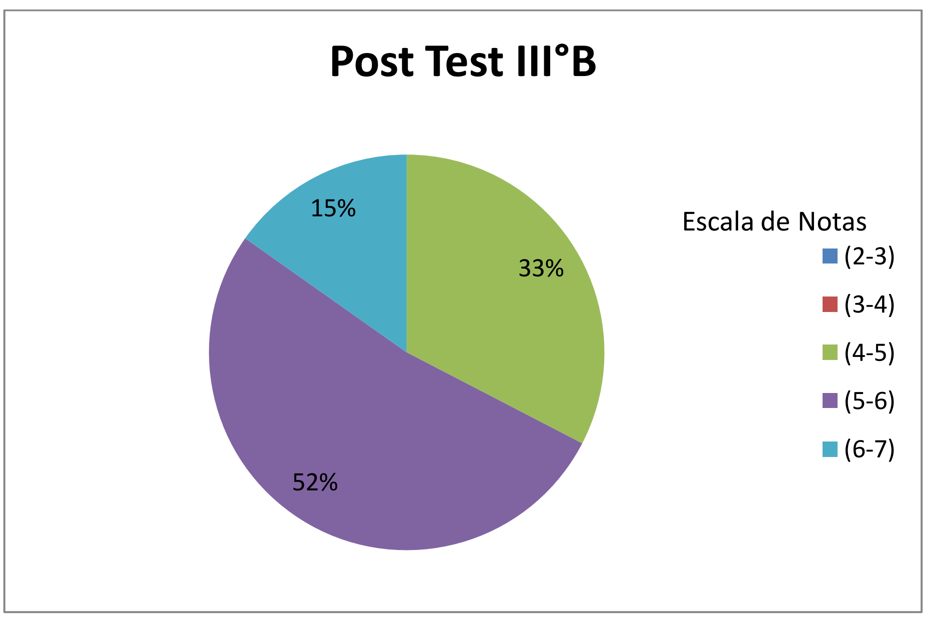
A partir de los resultados obtenidos se desprende el siguiente análisis:

a) En lo referente a contextualización el III°A logra duplicar el logro exhaustivo del otro curso.
b) En cuanto al razonamiento lógico-matemático y el trabajo conjuntista el III°B tiene mayor logro que el III°A, esto se relaciona directamente con el hecho que el III°B corresponde al plan científico y en los cursos diferenciados al plan común, refuerzan los contenidos relacionados a lógica y teoría de conjuntos.

5.1.4. Comparación de Resultados obtenidos en Post Test por curso.

Los siguientes gráficos sintetizan lo anteriormente expuesto.



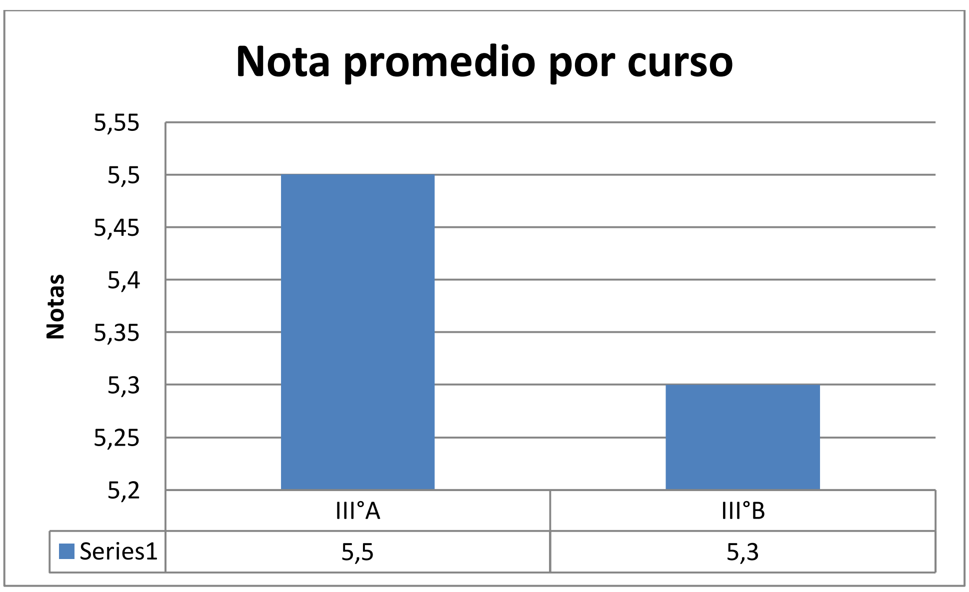


Al realizar el análisis comparativo a nivel general desde los cursos que formaron parte de la muestra de esta investigación se concluye que, la dispersión de los datos para cada curso es igual a: III°A 0,60 y III°B fue 0,66.

Si se comparan los resultados obtenidos por el III°A, de plan humanista, en el post test con los resultados obtenidos por el mismo curso al momento del diagnostico, se puede apreciar un avance innegable en la adquisición del concepto de probabilidades, pues iniciaron con el 86% del curso en la categoría NL y finalizaron sin ningún estudiante en dicha categoría, mientras que el 76% de los estudiantes finalizo el proceso de aprendizaje en la categoría PL y un 24% de ellos en la categoría EL, en contraste con el 0% obtenido al momento del diagnostico.
En virtud de tales resultados podemos concluir que la propuesta tuvo un impacto altamente positivo en los estudiantes.

De igual manera si se comparan los resultados entre el grupo intervenido, III°A, plan humanista, con el grupo control, III°B, plan científico, podemos ver que el grupo muestra supera a sus paralelos en la categoría EL.

En relación al análisis comparativo entre el diagnostico y el post test del III°B, podemos decir que no se aprecian grandes avances al aplicar el modelo tradicional de la enseñanza de las probabilidades, si bien todos los alumnos salieron de la categoría NL, se observa una disminución del 7% en los estudiantes ubicados en la categoría EL.



Del análisis anteriormente realizado es posible concluir lo siguiente:

a) La media del III°A es superior a la media de III°B
b) Se aprecia que la dispersión de los datos es menor en III°A, dejando en evidencia que el grupo de alumnos, desde el punto de vista de su aprendizaje, es homogéneo y alcanzan niveles de logro similares.
c) Se infiere que el diseño aplicado y a su vez las estrategias constructivistas usadas dieron resultado.
d) A partir de la desviación típica y de la varianza se puede concluir que el nivel de logro de los estudiantes de III°A es homogéneo en comparación con el logrado por el III°B.

5.2. VARIABLES Y VALORACIÓN OBTENIDA

5.2.1. Valoración de la matemática

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿son divertidas para ti las matemáticas? ¿Por qué?

- **Valoración positiva**

Veinticuatro estudiantes tienen una valoración positiva de las matemáticas, algunos de los argumentos presentados por ellos son los siguientes: "Las matemáticas son entretenidas cuando no se presentan de forma monótona y representan un desafío " ,"Sí porque es lo más humanista de las matemáticas".

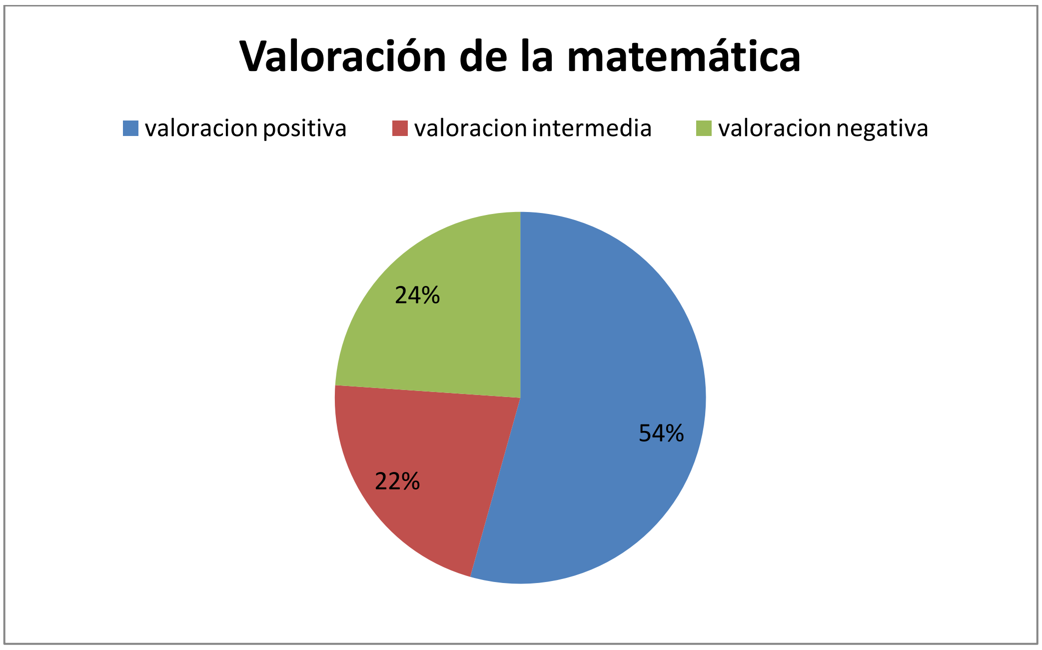
En la primera respuesta se ve reflejado que el gusto por las matemáticas es a partir de un desafío presentado por el profesor, esto es tomado como una motivación extrínseca. En el segundo caso se refleja que la unidad trabajada es lo que le gusta y no todos los contenidos trabajados en el semestre.

- **Valoración intermedia**

Diez estudiantes tienen una valoración intermedia, señalan que "no es necesario saber tanto de probabilidades, quizás para otros sí pero para mí no mucho quizás lo básico", "considero que los números no es lo mío, pero esto es interesante, pero no para gustarme mucho". En la primera respuesta queda de manifiesto que aprende probabilidades netamente porque se lo piden, pero se desconoce su importancia. En la segunda respuesta se desprende que despierta su interés pero que no es algo que le apasione.

- **Valoración negativa**

Once personas consideran que no es útil para ellos saber probabilidades una de las respuestas más frecuentes es la siguiente: "soy humanista, entre menos números mejor para mí", "es complicado cuando tengo que manejar espacios muéstrales y no me da lo que al profe, me frustro". En el primer argumento el estudiante señala que por ser humanista los números y la matemática en general no es para él, se limita en lo que puede aprender, vemos aparecer así uno de los prejuicios más comunes que existen en relación a las matemáticas y su vínculo con las asignaturas humanistas. En el segundo argumento el estudiante señala que le frustra el hecho de que los cálculos realizados no tengan el mismo resultado que los hechos por el profesor, esta disparidad, en vez de actuar como un motivador extrínseco que genere en el alumno un desafío de aprendizaje, termina generando rechazo y por ende desmotivación.



En síntesis, queda en manifiesto que más de la mitad de los estudiantes tienen una valoración positiva respecto al diseño en el cual participaron, quedando en evidencia que se divirtieron durante la experiencia, aun así casi un cuarto del curso (24%) tiene una valoración negativa de la experiencia.

5.2.2. Percepción de la clase de matemática

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿Cómo fueron para ti las ultimas clases de matemática? Explica

- **Percepción positiva**

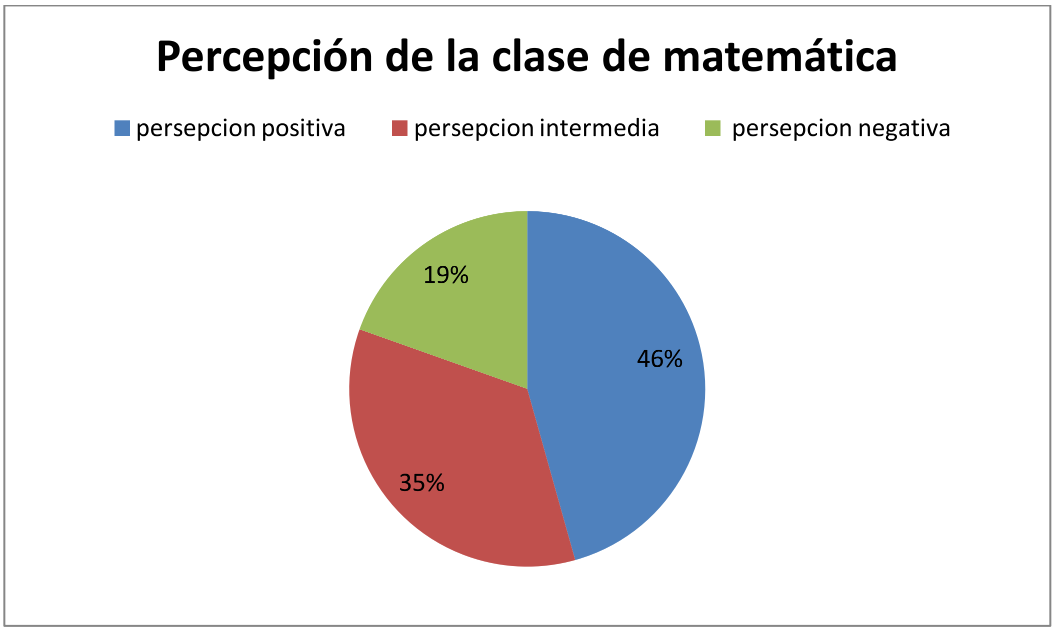
Veintiún estudiantes consideran que las últimas clases han sido muy entretenidas, algunos de los argumentos más relevantes son: "me han gustado mucho las clases porque puedo trabajar con mis compañeras, y puedo entender algunas cosas que me dan vergüenza preguntar", "es genial poder sentir que soy protagonista e importa lo que digo". En el primer argumento se desprende que la aceptación de las clases está íntimamente relacionada con el cómo trabajan, es decir, la metodología desarrollada en la propuesta didáctica y porque se sienten apoyados por sus compañeros (proceso de mediación). En el segundo testimonio podemos asegurar que el trabajo en clases en donde participan es lo que les gusta, sentirse protagonista lo hace sentir importante, de esta manera queda en evidencia que la propuesta de ser constructores de su aprendizaje les resulta altamente motivantes.

- **Percepción intermedia**

Dieciséis estudiantes poseen una valoración intermedia de las últimas clases, esto se ve reflejado en que su percepción de la matemática es poco clara, dentro de los argumentos más relevantes podemos considerar los siguientes: "creo que no podría decir si fueron malas o buenas mi grupo era muy hablador". "Creo que algunas clases aprendí mucho y otras no aprendí tanto porque me dedique a hablar algunas clases ". La primera respuesta, deja en evidencia que la clase para él depende del entorno de clase y dependen mucho del cómo se comporten sus pares. En el segundo testimonio el estudiante señala que para él su aprendizaje dependía de si ponía o no atención en clases. De ambas percepciones se destaca que quizás en esos grupos fue más necesaria una mediación directa por parte del docente, para así guiar los diálogos en la dirección correcta.

- **Percepción negativa**

Nueve estudiantes señalan que para ellos no fueron significativas las últimas clases dentro de sus argumentos se encuentran los siguientes: "no me gustan las matemáticas, no me interesa entenderlas", "da lo mismo si cambia la forma de enseñar para mí la matemática es compleja, me dicen todo el tiempo en la casa que soy malo para los números". En el primer caso, el estudiante por su preferencia personal señala que no le gustan las matemáticas, por ende no le interesa poner atención en clases. En el segundo caso se cumple la profecía de la familia del estudiante, al repetirle que es malo en algo el termina creyendo que no es capaz de entenderlo y simplemente no lo intenta.



En síntesis, queda en manifiesto que veintiún estudiantes, equivalentes al 46%, poseen una valoración positiva del diseño aplicado, señalando que es de su agrado la metodología empleada, por otra parte nueve estudiantes, representando el 19%de los miembros del curso, señalan que no fue de su agrado la metodología de clases empleada.

5.2.3. Emocionalidad del estudiante en la clase de matemática

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿Te sentiste a gusto en las clases de matemática? ¿Por qué?

- **Percepción positiva**

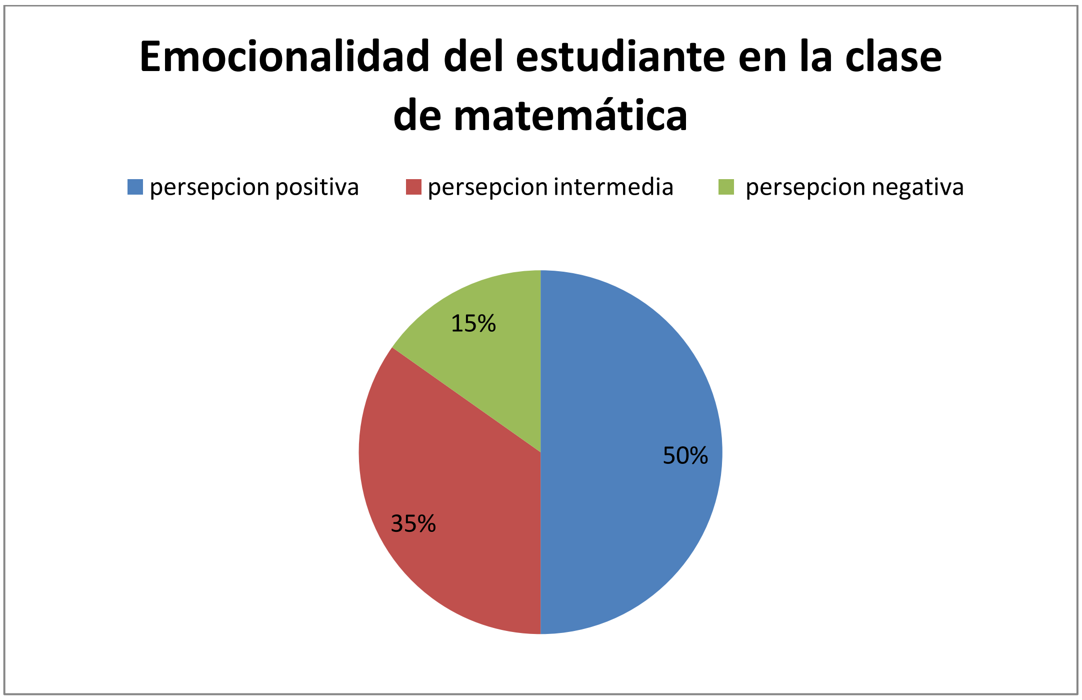
Veintitrés estudiantes se sintieron a gusto en las clases de matemática, dentro de los testimonios más significativos podemos encontrar los siguientes: "al momento de superar los desafíos que se presentaban en clases sentía satisfacción personal", "estaba súper contento de poder trabajar con mis compañeros, además de eso sentía que aprendía". En el primer testimonio se hace evidente que sentirse a gusto en la clase dependía para este estudiante de cuan satisfecho se sentía por su desempeño y poder avanzar en el trabajo realizado en clases. En el segundo testimonio el estudiante señala que para él sentirse a gusto estaba relacionado por el poder trabajar con sus compañeros y además aprender. El aspecto social dentro de las actividades cobra un lugar de alta relevancia como parte de la motivación de los alumnos.

- **Percepción intermedia**

Dieciséis estudiantes presentan respuestas difusas acerca de cómo fueron para ellos las clases, a juicio de los investigadores los testimonios más significativos son los siguientes: "creo que la actividad era buena en muchos momentos pero en otros mis compañeros no me dejaban hacer mucho ", "no puedo decir como lo pase porque no siempre ponía de mi parte y mi disposición no siempre era la mejor". En el primer testimonio se señala que él lo hubiera pasado mejor si sus compañeros lo hubieran dejado hacer más. En el segundo testimonio se evidencia que el trabajo realizado por su parte no siempre fue de la mejor manera pero cuando ponía de su disposición lo pasaba bien.

- **Percepción negativa**

Siete estudiantes señalan no sentirse a gusto en clases, algunos testimonios más significativos son los siguientes: "falte a muchas clases y cuando iba mis compañeros me hacían sentir tonto, en ningún momento me sentí cómodo", "sentí que sólo pase rabias, mis compañeros de grupo no hacían nada, con suerte llevaban un lápiz a clases". En el primer testimonio se evidencia que no se sintió a gusto motivado por sus reiteradas ausencias a clases y al trato recibido por sus compañeros. En el segundo testimonios queda en evidencia que lo paso mal debido al poco compromiso por parte de sus compañeros de grupos, esto provoco llevarse todo el peso de las actividades.



En síntesis la mitad del curso señala que se sintió a gusto con el tipo de clases, esto debido a que podían trabajar en equipos libremente elegidos, por otra parte siete estudiantes señalan que por diversos motivos no se sentían a gusto en las clases en donde se aplico el diseño.

5.2.4. Aspectos a valorar en la clase de matemática.

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿Son más cosas las que te gustan de las clases de matemática de las que no te gustan?

- **Percepción positiva**

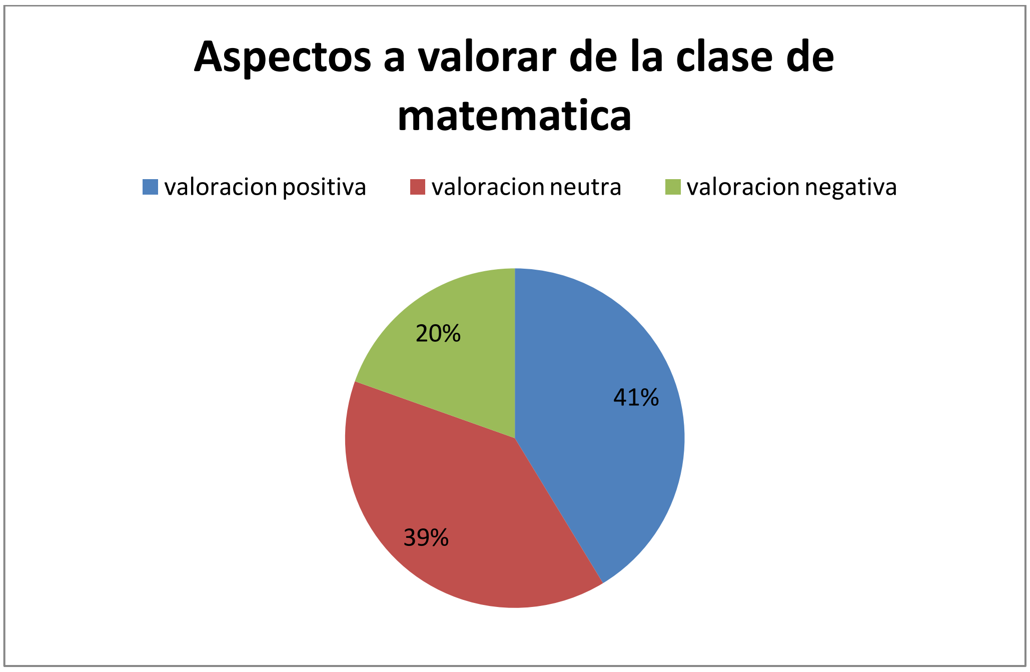
Diecinueve estudiantes señalan que las cosas que más le gustan superan a las que menos, dentro de los testimonios más relevantes se encuentran los siguientes: "en esta unidad hay muchas cosas que me gustan, por lo general no me gusta hacer grandes cálculos pero me motiva el saber que llegare a respuestas interesantes", "Siempre hay cosas que no gustan pero creo que el profe nos propone una nueva manera de mirar las cosas y eso lo hace más interesante". Del primer testimonio se puede desprender que lo que las cosas que más le gustan son mucho más que las que menos, esto es motivado por el hecho de sentir interés por los resultados que se obtendrán. En el segundo testimonio queda en evidencia que el cómo se enseñan las cosas es un factor importante al momento de decidirse por cómo es su percepción, una vez más el interés despertado marca la diferencia.

- **Percepción intermedia**

Dieciocho estudiantes no están muy claros sobre la naturaleza de su percepción, dentro de los testimonios más relevantes se encuentran los siguientes: "me gusto mucho lo de las combinación pero cuando empezamos a verlo con conceptos más complejos ya no era divertido", "en un inicio no eran las clases muy agradables y no sentía que me gustaran, pero cuando cambie de grupo sentí que disfrutaba un poco". En el primer testimonio el cómo percibía las clases pasaba por si podía o no hacer las cosas, cuando se volvió un poco más complejo se volvió difícil el cómo valorar la clase.

- **Percepción negativa**

nueve estudiantes señalan que las cosas que no le gustaban superaban a las que sí, dentro de sus testimonios se encuentran los siguientes: "No me gustaron las clases, no me gusta trabajar en grupo, solo retrasan mi trabajo", "No me gusto que mis compañeros siempre me eligieran para el plenario, mi disposición no fue la mejor porque no lo pasaba bien". En el primer testimonio el estudiante señala que no le gusta trabajar en grupo, motivo por el cual no lo pasaba bien. De esto podemos desprender que quizás, este estudiante necesitara un grupo con un nivel un poco más avanzado para que no todo el trabajo recayera en él. En el segundo testimonio el estudiante señala que no le gustaba representar siempre a sus compañeros de grupo, por lo cual su disposición no fue la mejor y disfrutaba estando en clases.



En síntesis diecinueve estudiantes señalan que son más las cosas que le agradan que las que no dentro de la clase de matemática, esto principalmente porque presenta un desafío para ellos, por otra parte aproximadamente uno de cada cinco estudiantes señala que hay muchas más cosas que le disgustan de la clase de matemática, puesto que se sentían obligados a participar.

5.2.5. Utilidad de la matemática

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿Crees que las matemáticas son útil en la vida cotidiana? ¿Por qué?

- **Valoración positiva**

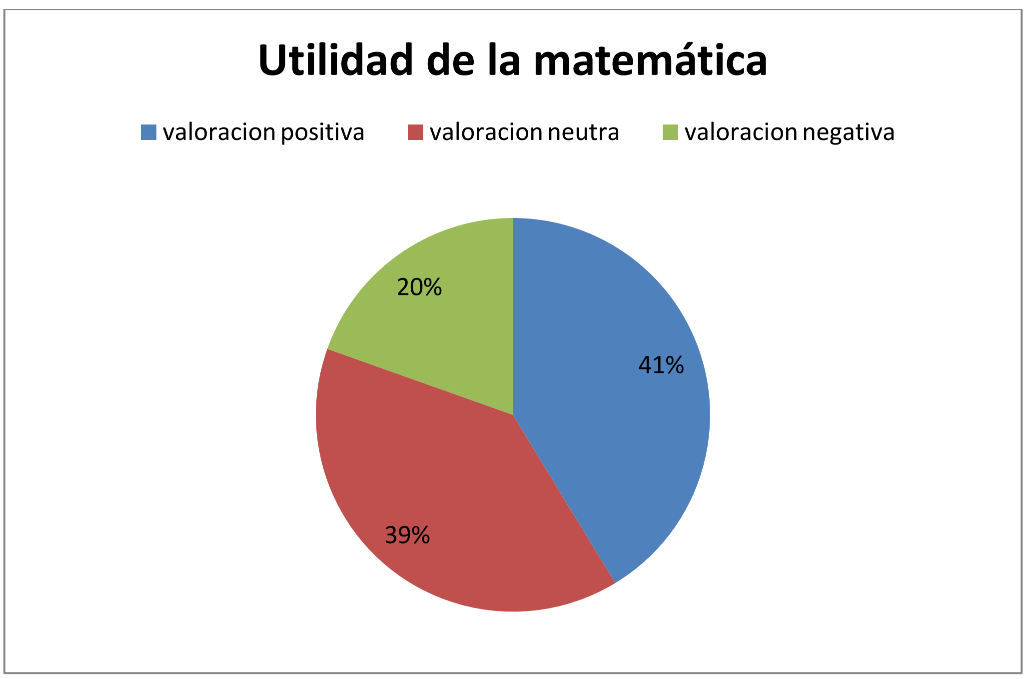
Veintidós estudiantes señalan que las matemáticas son útiles, algunos testimonios son los siguientes: "creo que sirven de mucho en la vida, mas las probabilidades, siento que ahora entiendo muchas cosas que antes no", "conversando con mi familia en la casa me di cuenta que las probabilidades son súper necesarias, ahora creo saber porque suben los planes de salud". En el primer testimonio queda en evidencia que su valoración pasa por la utilidad encontrada a lo visto en clases. En el segundo testimonio la utilidad de las matemáticas es compartida por la familia y el estudiante análoga lo aprendido con la realidad.

- **Valoración neutra**

Quince estudiantes presentan respuestas difusas, algunos de sus testimonios son los siguientes: "deben ser útiles para alguien que la ocupa toda la vida, yo quiero ser actor no las necesito", "creo que algunas personas las necesitan más que otras, para mi útil es solo lo básico, esto de las probabilidades a lo más la usare para jugar loto". En el primer testimonio el estudiante considera que son útiles pero le resta valor al decir que para él no lo son porque él quiere ser actor. El segundo testimonio deja en evidencia que lo visto en las últimas sesiones para el no es útil porque para él solo es útil lo más básico.

- **Valoración negativa**

Nueve estudiante señalan que la matemática para ellos no es útil, el argumento más potente es el siguiente: "no entiendo porque el profe pierde el tiempo enseñando tantas cosas de probabilidades, se cómo se hacen, pero no es algo que en la vida cotidiana me salve la vida". En el testimonio es estudiante considera necesario solo lo que le pueda salvar la vida, para el enseñar algo que no le salve la vida es una pérdida de tiempo.



En síntesis, casi el 41% de los estudiantes señalan que las matemáticas, en particular las estadísticas son útil para su vida, por otra parte, casi el 20% señala que no representan mayor utilidad dentro de su vida , por no tratarse de algo de vida o muerte, según sus expresiones.

5.2.6. Trabajo colaborativo

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿es útil para ti el trabajo en equipo? ¿Por qué?

- **Valoración positiva**

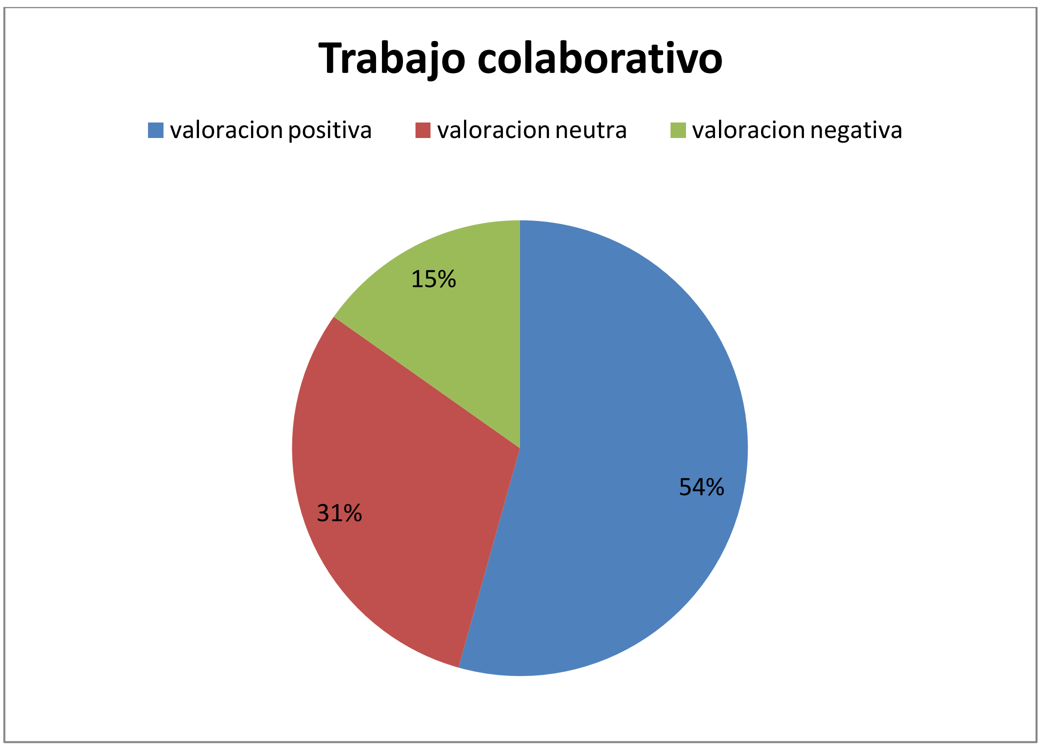
Veinticinco estudiantes ven en el trabajo colaborativo una herramienta útil para la construcción y descubrimiento del aprendizaje, dentro de los testimonios de los estudiantes se pueden encontrar los siguientes: "para mi trabajar en equipo es muy genial, nos respondemos dudas y aprendemos juntos, creo que por eso nos fue mejor en la última prueba", "ojala todas las clases fueran en grupos, creo que se trabaja más a gusto y se aprende mas si el trabajo se toma en serio". En el primer testimonio queda en evidencia que el trabajo en grupo para el estudiante es productivo, el cree que aprende mas debido a que entre todos se responden las dudas. En el segundo testimonio el estudiante señala que sería importante para el que todas las clases fueran en grupos, pero que el cómo sea el resultado depende del grupo.

- **Valoración neutra**

Catorce estudiantes señalan respuestas difusas respecto de si es útil o no el trabajo en grupo dentro de sus respuestas se encuentran las siguientes: "debe ser bueno el trabajo en grupo cuando el grupo se pone las pilas", "en una de esas es bueno pero deberían ser grupos más parejos, fue una mala elección trabajar con mis amigas". En el primer testimonio el estudiante deja en claro que su trabajo de grupo no fue el mejor, por lo mismo señala que un trabajo en grupo requiere participación por parte de todos los integrantes. El segundo testimonio la estudiante señala que fue un error trabajar con sus amigas, porque se sentía en desventaja en relación con los otros grupos.

- **Valoración negativa**

Siete personas señalan que el trabajo colaborativo no es útil para ellos, dentro de sus testimonios se encuentran los siguientes: "es una pérdida de tiempo, no alcanzo a terminar las cosas a tiempo, por tener que trabajar con personas que no les interesa hacerlo", "no me gusta porque mis compañeros no me dejan hacer nada porque ellos son más inteligentes": El primer testimonio evidencia que para el estudiante el trabajo en grupos representa para él un obstáculo más que un aporte. El segundo estudiante señala que su grupo de trabajo no lo deja hacer nada, el mismo se considera inferior a sus compañeros y no un aporte.



En síntesis, más de la mitad del curso señala valorar el trabajo en equipo como un facilitador del aprendizaje, en cambio casi un 31% señala que el trabajo colaborativo para ellos no representa una mayor significancia.

5.2.7. Valoración del descubrimiento

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿te sientes a gusto cuando encuentras por tu cuenta alguna regularidad?¿por qué?

- **Valoración positiva**

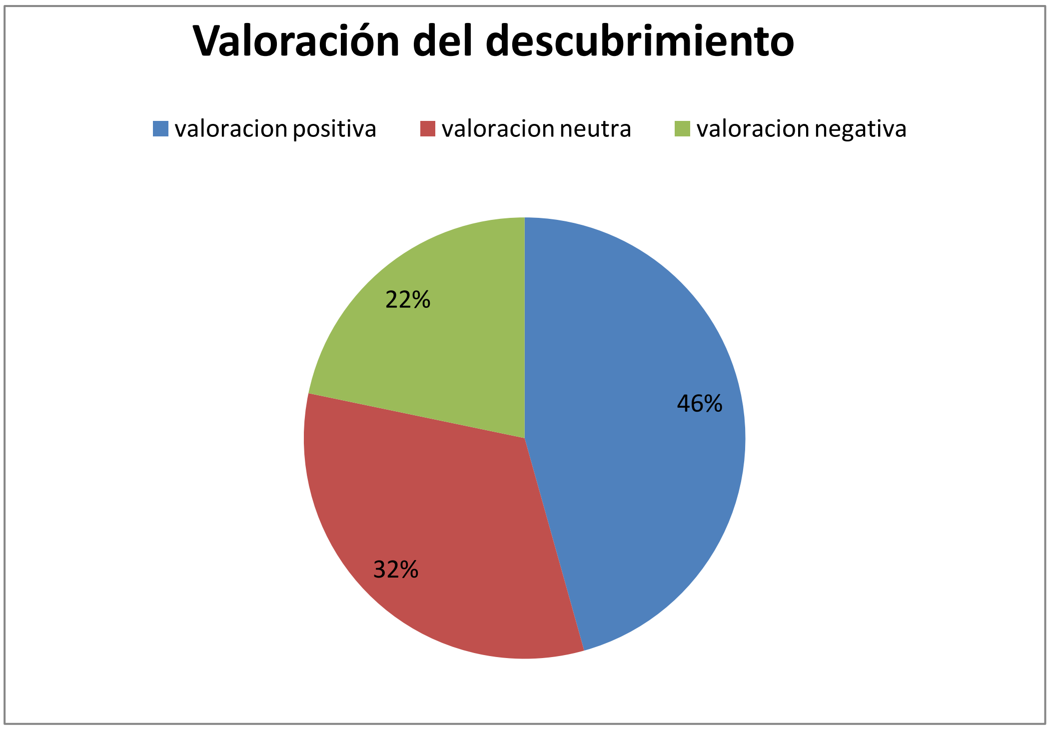
Veintiuno estudiantes consideran que para ellos el descubrir cosas por su cuenta es muy significativo, dentro de sus testimonios se encuentran los siguientes: "para mi encontrar respuesta a las problemáticas puestas en clases es muy gratificante, esto creo que es porque trabajo con mis compañeros", "es divertido poder encontrar las cosas solo, porque así le explico a mi grupo de trabajo". El primer testimonio señala que para él es importante el trabajo en grupo para poder descubrir algo. En el segundo testimonio la importancia de descubrir algo radica en el hecho de poder explicar a sus pares.

- **Valoración neutra**

Para quince estudiantes la valoración es neutra, esto se ve reflejada en el tenor de sus respuestas: "me siento bien y mal, bien por poder encontrarlo y mal porque tendré que explicarle a mis compañeros", "me siento a gusto cuando lo logro, pero me frustra el no poder hacerlo". En el primer testimonio, se evidencia que para el estudiante es poco práctico el tener que enseñarle a sus compañeros. En el segundo testimonio se evidencia que para el estudiante el sentirse a gusto o no pasara por su desempeño.

- **Valoración negativa**

Diez estudiantes presentan una valoración negativa de aprender descubriendo:"para mi es mejor que me digan cómo hacer las cosas a tener que descubrirlas", "nunca puedo descubrir algo solo, me frustro". En el primer testimonio el estudiante señala que para el descubrir no es algo relevante, para él lo relevante es que le digan cómo hacer las cosas. En el segundo testimonio para el estudiante es frustrante el no poder descubrir cosas nuevas.



En síntesis, casi el 46% de los estudiantes señala que el aprendizaje por descubrimiento, es importante y facilitado por el trabajo en equipo, en este punto cobra importancia lo propuesto por Bruner y Vygotsky, por otra parte cerca de un 22% señala sentirse frustrado al momento en que le piden descubrir algo a partir de su experiencia.

5.2.8. Valoración del profesor y rol del profesor

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿Considerar que el profesor de probabilidades es importante?

- **Percepción positiva**

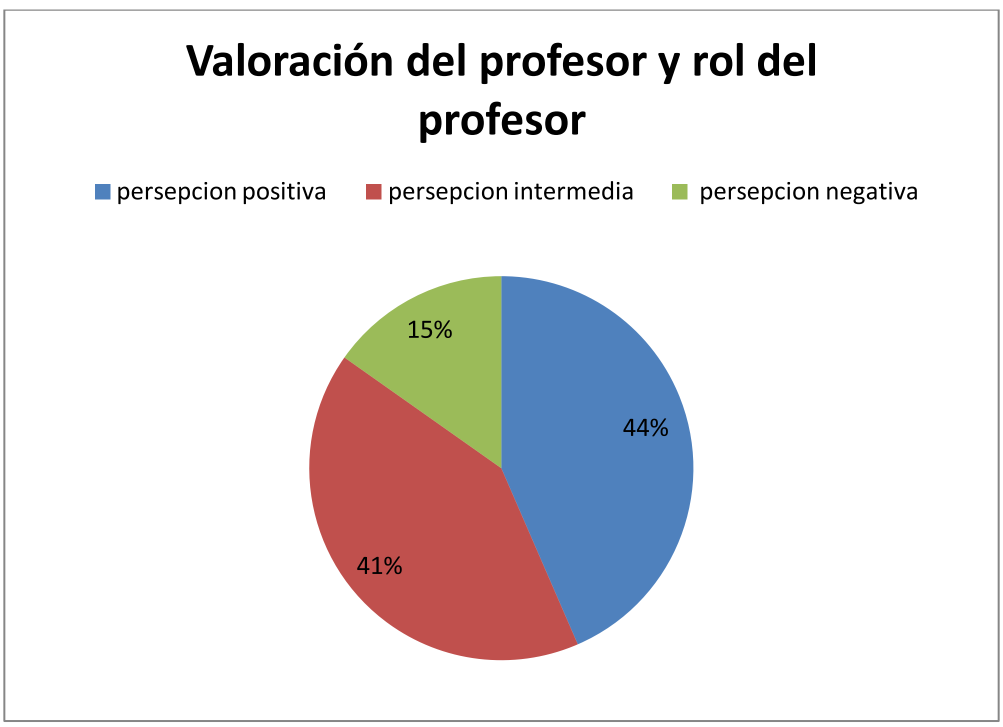
Para veinte estudiantes el rol del profesor es importante:"el profe nos explica y nos ayuda en todo lo que puede, si no entendemos nos explica más de una vez", "es súper simpático el profe, confía en que podemos hacer las cosas". En el primer testimonio el rol del profesor es importante porque les explica y se encarga de explicarle las veces que sean necesarias. En el segundo testimonio el profesor es importante porque deposita la confianza en ellos para poder hacer las cosas.

- **Percepción neutra**

Para diecinueve estudiantes la valoración es algo difusa: "hay veces que el profesor es importante, en lo que hacen en probabilidades pasan a segundo plano", "creo que el profe se pierde a ratos en la sala, cuando trabajamos solos pero en los plenarios ayuda harto ". En el primer testimonio el profesor para ellos no es tan importante, esto debido a que el diseño está enfocado a el aprendizaje por descubrimiento y al trabajo en equipo. En el segundo testimonio el estudiante considera que el profesor se pierde en la sala mientras ellos trabajan, pero en los plenarios el profesor es importante porque modera los tiempos.

- **Percepción negativa**

Siete estudiantes señalan que el rol del profesor no es importante, el testimonio más significativo es el siguiente: "el profe se pasea por la sala pero no enseña nada, mis compañeros explican las cosas en los plenarios, además no pasa en la pizarra". En el testimonio el estudiante considera que el profesor no hace nada en la sala esto porque el profesor no está todo el tiempo en la pizarra y espera que construyan los conceptos para formalizar.



En síntesis, casi un 44% ve en el profesor un aporte significativo y un apoyo para su aprendizaje, según sus propios testimonios, Casi un 15% señala que genera rechazo el hecho de no estar en una clase tradicional y esto los descoloca.

5.2.9. Valoración de los errores

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿sientes que aprendes de los errores que cometes en matemática? ¿por qué?

- **Percepción positiva**

Veintiséis estudiantes consideran que aprenden de los errores cometidos en clases, dentro de sus testimonios se encuentran los siguientes: "creo que el diagnostico me hizo sentir mal al principio, pero cuando lo revisamos en la última clase, siento que aprendí mucho" ,"es importante aprender de lo que te equivocas". En el primer testimonio el estudiante señala que el siente que aprendió de los errores cometidos en el diagnostico. El segundo estudiante señala que es importante aprender de los errores, esta popular frase para el cobro sentido en el diseño aplicado a su curso.

- **Percepción neutra**

Para quince de los estudiantes el aprender de sus errores es algo difuso: "está bien que tengamos que aprender de los errores pero entre más errores más cosas tengo que aprender y me da flojera", "es bueno aprender de los errores, pero cuando estos te importan". El primer estudiante señala que para él es mucho trabajo tener que aprender de todos los errores que comete en matemática. Para el segundo testimonio, el cree que solo tiene que aprender lo errores que para él son importantes.

- **Percepción negativa**

Cinco estudiantes consideran que aprender de los errores no es significativo: "si me equivoco es porque no se, como aprender de algo que no manejo", "me da lo mismo si me equivoco o no". Para el primer estudiante aprender de los errores es imposible, porque él no aprenderá de algo que no sabe nada. Para el segundo testimonio el aprender de los errores no es opción, aprender o no es algo que para él no es relevante.

En síntesis casi un 56% de los estudiantes señala que han aprendido de los errores cometidos en el primer diagnostico y señalan que fue importante el hecho de revisarlo posteriormente, pues ellos sentían que aprendieron, por otra parte casi un 11% señala que el hecho de aprender lo expuesto en el diseño para ellos no es significativo, según sus testimonios.

*5.2.10. **Valoración** de las actividades realizadas*

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿Te gustaron las actividades realizadas en clases?, ¿por qué?

- **Valoración positiva**

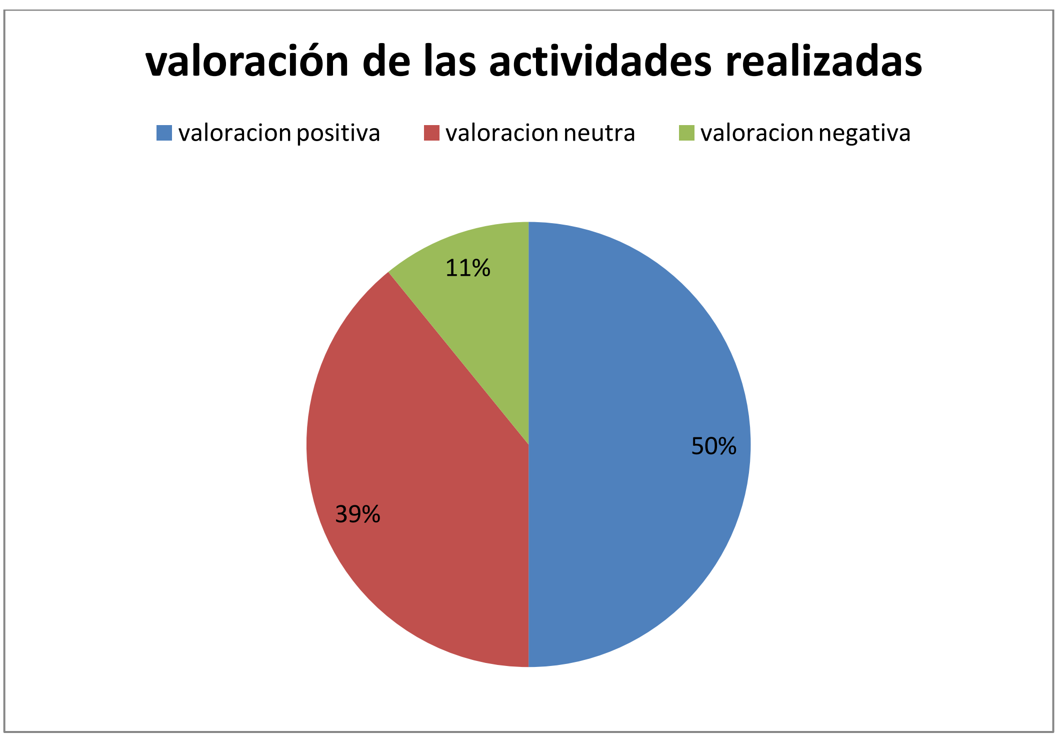
Para veintitrés estudiantes, las actividades realizadas en clases fueron divertidas: "lo pase súper bien, ojala poder trabajar siempre con mis compañeros en grupo", "me gusto mucho, repito siento que aprendí demasiado, genial el poder aprender y divertirse". El primer testimonio señala que fue divertido para el trabajar junto con sus compañeros, que para él fue grata la experiencia. El segundo testimonio señala que para él fue significativo, porque se divirtió y además aprendió.

- **Valoración neutra**

Dieciocho personas presentan una respuesta poco clara, el caso más relevante es el siguiente: "trabaje mucho en clases y de verdad me esforcé, pero no me gusto el hecho de que no me fuera tan bien en la última prueba". El estudiante señala que para él su trabajo en clases no se vio reflejado en la evaluación final, que para el esfuerzo puesto tendría que haberle ido mucho mejor.

- **Valoración negativa**

Cinco estudiantes presentan un rechazo a la actividad, el testimonio más relevante es el siguiente: "nos hacían trabajar mucho y la verdad es que me cansaba mucho, prefiero las clases normales en donde quedan espacios para tirar la talla con mis compañeros". El testimonio señala que para él fue muy cansadora la actividad, que no tubo espacios para bromear y prefiere un modelo en donde si pase eso.



En síntesis. la mitad del curso señala haberlo pasado bien a lo largo de las clases, esto debido que sumado al trabajo en equipo además aprendieron, según sus propios testimonios, casi un 11% señala que trabajaron mucho y eso genero rechazo, pues en las clases tradicionales generalmente quedan espacios en blanco, los cuales se prestan para el desorden.

5.2.11. Percepción frente al método de trabajo

Datos obtenidos a partir de la pregunta: ¿te gusto la metodología de trabajo, crees que fue diferente? ¿por qué?

- **Percepción positiva**

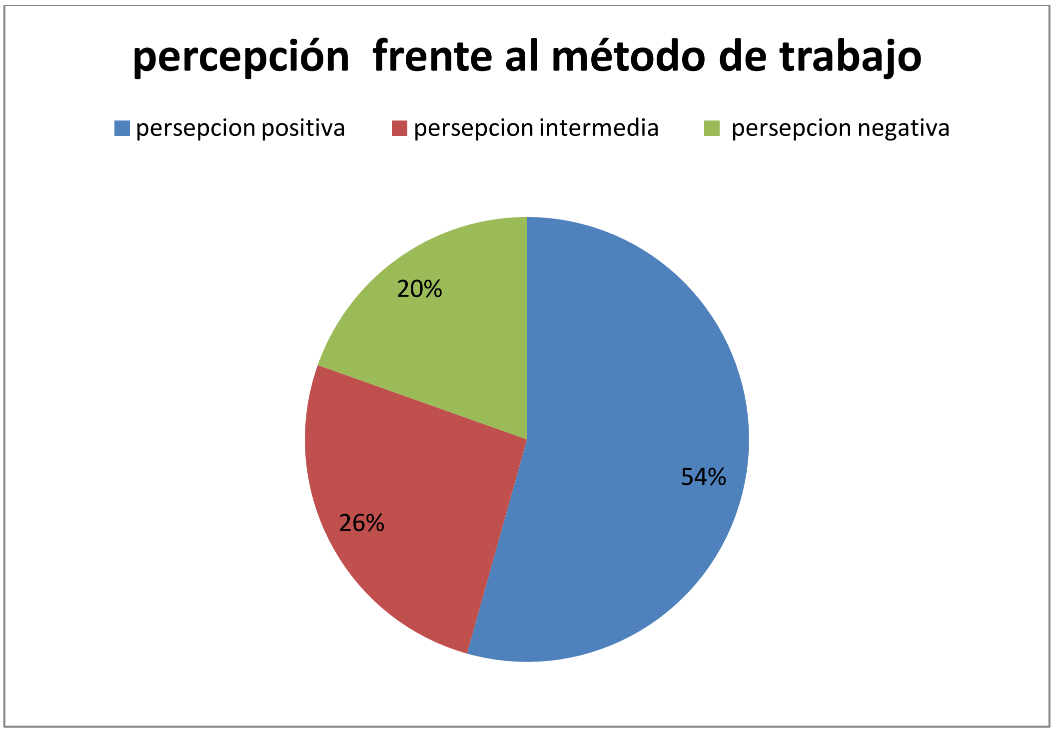
Para veinticinco estudiantes la Percepción fue positiva, dentro de sus testimonios se encuentran los siguientes: "me gusto el cómo se desarrollo el trabajo del profe, fue divertido tener una evaluación antes y otra después", "fue diferente y eso me gusto mucho". El primer testimonio señala que fue grato para el poder tener dos evaluaciones para poder medir lo que había aprendido a lo largo de las clases. El segundo testimonio señala que por ser diferente la metodología le gusto mucho.

- **Percepción neutra**

Para doce estudiante el si les gusto o no la metodología de trabajo es difuso, entre sus testimonios están los siguientes: "creo que el profe exagero en hacer dos pruebas para lo mismo, pero creo que es diferente la metodología", "creo que la metodología es diferente pero me gusta más cuando las clases son normales": Para el primer estudiante fue mucho tener un diagnostico y un post test pero lo novedosa de la metodología fue valorada. Para el segundo estudiante también es novedosa la metodología, pero prefiero el método tradicional de clases.

- **Percepción negativa**

Para nueve estudiantes la percepción de la metodología es negativa dentro de los comentarios el más significativo es el siguiente: "creo que las clases normales son mejores, me exigen menos y me divierto mas". En este testimonio el estudiante considera que la metodología de trabajo no es buena porque no tiene tiempo para bromear y la exigencia es muy alta.



En síntesis, casi el 54% de los estudiantes señalan que la metodología del diseño fue muy interesante, debido a la presencia de dos evaluaciones y el trabajo continuo de guías realizado durante las sesiones, y el hecho de existir un momento donde podían ser protagonistas, esto según sus propios testimonios, casi un 20% señala que prefieren la metodología tradicional de clases, puesto que la exigencia es muy alta.

CAPÍTULO VI

Conclusiones

6. CONCLUSIONES

La presente tesis tuvo como objetivo central el proponer y desarrollar una propuesta innovadora para la enseñanza del concepto de probabilidad, entendida esta desde un enfoque axiomático y constructivista.

Para demostrar esto, se sometió a observación durante un periodo de tiempo diferentes tipos de clases y la forma en que los docentes enseñaban las probabilidades en el aula, prestando especial atención a los modelos implícitos que subyacen a la concepción de probabilidades y de los diferentes conceptos combinatorios adyacentes del profesor. En paralelo, se realizó una investigación bibliográfica para comprender y sustentar los diferentes enfoques de los conceptos estocásticos trabajados y construidos desde el aula de clases, buscando verificar si estos son realmente construidos en las aulas, a partir de las diferentes estrategias de enseñanza empleadas por los profesores.

Al finalizar la etapa de observación y concluir que las metodologías de trabajo se arraigan a una postura tradicionalista y por repetición de la enseñanza de probabilidades que data del siglo XVIII, consideramos necesario cambiar el enfoque de enseñanza de los constructos estocásticos, para así refrescar las clases de matemáticas, incorporando una propuesta didáctica desarrollada con lineamientos constructivistas que se vieron reflejados en el trabajo realizado por los estudiantes de la muestra.

Para dar inicio a la investigación se seleccionó una muestra conformada por estudiantes de III° Medio, a ellos se les aplicó un diagnostico con el fin de identificar los aprendizajes previos en relación a los conceptos combinatorios y probabilísticos que han sido tratados a lo largo de su educación formal en matemáticas. Tras la lectura de los resultados, se seleccionó el grupo más deficitario para aplicar en él la propuesta didáctica con un enfoque no tradicional, que propone un cambio en la manera de desarrollar la clase por parte de sus principales actores, ya que es el estudiante quien debe ser capaz de construir los diferentes conceptos a desarrollar, mientras que el docente toma el rol de mediador activo en dicha construcción, facilitando al alumno las herramientas que este requiera para su trabajo.

Dentro del desarrollo de la investigación se aplicó al III°A, plan humanista, al que llamaremos grupo muestral más deficitario, una propuesta didáctica orientada por un modelo axiomático de la enseñanza de las probabilidades, en la que los estudiantes construían su propio conocimiento a partir de lo sus aprendizajes previos, en donde fue fundamental la elaboración de las guías de trabajo utilizadas, ya que ellas fueron construidas y orientadas por las teorías del aprendizaje de Bruner y Vigostky. El diseño de estas actividades fue facilitadas y guiadas por el profesor Ricardo Riveros de la Universidad Central, quien actuó como docente guía en este proceso.

A partir del desarrollo de la propuesta didáctica aplicada en aula, se hizo una recogida final de información, comparando nuevamente los dos grupos participantes de la investigación.

El análisis de las variables vistas en ambos cuestionarios arrojó importantes resultados en cuanto al objetivo de la investigación. Estos pueden ser apreciados en la siguiente síntesis:

Como primer punto es importante señalar que es posible el generar innovaciones pedagógicas al interior de la sala de clases, apartándonos de las posturas más tradicionales de la enseñanza de las probabilidades, para llevar a cabo dichos cambios es necesario cambiar la visión del docente, pues es éste el encargado de realizar las propuestas didácticas, las innovaciones pedagógicas, apartar al docente de un rol de catedrático, para llevarlo al rol de mediador, en la que él sea el facilitador que brinda a los estudiantes las herramientas y oportunidades para que estos construyan su aprendizaje, se puede lograr, tal como quedó demostrado con la aplicación de la propuesta de esta investigación.

Los cambios metodológicos propios de una visión axiomática, en la que el alumno es actor y constructor de su propio aprendizaje, se vuelve sumamente relevante en la valoración que los estudiantes hacen de la asignatura, pues les permite acercar las matemáticas a su vida cotidiana, así como iniciar procesos de meta cognición, al reflexionar por ejemplo, a partir de sus propios errores, ser capaces de darse cuenta que es necesario explicar o pensar adecuadamente la pregunta para ser mediado.

Dentro de la misma metodología, el trabajo en grupo, les permitió a la mayoría de los estudiantes validarse en sus propios aprendizajes, así como generar vínculos emocionales que actuaron como motivadores intrínsecos, dando una mejor disposición para enfrentar las clases y los desafíos que en ellas se proponían.

En el caso de la percepción de la clase de matemática, los estudiantes dan cuenta de las diferencias establecidas entre las clases de matemáticas a las cuales estaban habituados, y las presentadas en esta propuesta didáctica que fueron altamente significativas, incluso para aquellos estudiantes que tuvieron una valoración negativa de la metodología empleada, ya que al justificar su desagrado, dejan entrever que con este sistema de clases, en el que el estudiante tiene un rol protagónico, le significa mucho más trabajo y menos tiempo de ocio, lo que sigue resultando un aspecto positivo para fines de esta investigación.

En relación al trabajo de los estudiantes llegaron a diferentes soluciones de un problema con base en conjeturas, entendiéndolas como los supuestos que plantearon los equipos sobre posibles respuestas. En segundo lugar, lograron realizar predicciones, es decir, los estudiantes fueron capaces de anticipar eventos con cierta racionalidad. En tercer lugar, los estudiantes consiguieron construir conceptos y establecer interrelaciones con posteriores conceptos a tratar, reconociendo que existe una relación entre los diferentes conceptos combinatorios y probabilísticos. En cuarto lugar, se destacó la importancia de aprender de los errores, dando pie a procesos meta cognitivos que les permiten reflexionar a partir de su propio aprendizaje. Los estudiantes logran hacer una articulación unidireccional, en base a lo solicitado en el diseño, estos es, dan significado concepto de probabilidades. Cabe destacar que a nivel de resultados, el grupo muestral que inicio siendo el más bajo, fue capaz de evidenciar en el Pos Test, avances significativos, llegando a superar al grupo control.

En suma, los estudiantes desplegaron estrategias cognitivas de orden superior, tales como conjeturar, predecir, determinar variaciones y modos de variar.

Si bien los resultados no son absolutamente concluyentes, dan indicios de que la validez de la hipótesis: “Si se cambia la visión del estudio de las probabilidades del profesor, de una visión clásica a una concepción axiomática, esto repercutirá directamente en las actividades de aprendizaje que él desarrolla, permitiendo una mejor adquisición de los conceptos por parte de los estudiantes".

Tal como queda demostrado por el significativo avance que tuvo el grupo muestral mas deficitario, III°A, en la adquisición del concepto de probabilidad al comparar el diagnostico y el post test en el que se observa un avance en los aprendizajes de más del 86%.

Podemos decir además que tras realizar las intervenciones se lograron a cabalidad los objetivos propuestos para la investigación, los cuales fueron:

- ✓ *Proponer un modelo innovador de aprendizaje-enseñanza de la probabilidad, como lo es el axiomatico, y desarrollarlo según las características contextuales de la realidad socio-escolar observada y analizada.*
- ✓ *Identificar y caracterizar comparativamente los desempeños, mostrados por dos grupos de estudiantes, del plan diferenciado de estudios, uno del plan humanista y otro del plan científico.*
- ✓ *Desarrollar una propuesta innovadora para la enseñanza de la probabilidad, entendida esta desde un enfoque axiomático aplicado, con base en los desempeños desplegados por los estudiantes.*

Finalmente los desplazamientos en las prácticas socioescolares, si bien se evidenciaron lo anteriormente declarado, ello no implica – como se señalara en las limitaciones a este tipo de estudios- que estas se hayan constituido. Para ello se requieren experiencias de validación e implementación de la propuesta didáctica en futuras intervenciones, más prolongadas e intencionadas entre otros aspectos.

La experiencia en aula, ha brindado a quienes la han realizado (Profesor - Investigador) una oportunidad única para generar cambios en sus propias practicas socioescolares, ya que la reflexión generada a partir de la construcción de toda la investigación lo hace consiente de la importancia de conocer los modelos y teorías que subyacen a su propia practica pedagógica, haciendo evidente la necesidad de constante actualización de los conocimientos y autocritica a su propio quehacer en el aula, para así siempre estar validando hipótesis, reformulando ideas y generando de esta manera cambios significativos en el profesor que culmina su formación.

BIBLIOGRAFÍA

- Arias, R. M. (2009). Usos, aplicaciones y problemas de los modelos de valor agregado en educación. *Revista de Educación* , 217-250.
- Astorga, M. P. (s.f.). *Estadistica para todos*. Obtenido de http://www.estadisticaparatodos.es/bibliografias/laplace.html
- Batanero, C., Godino, J. D. & Roa, R. (2004). *Training teacher to teach probability*. Journal of Statistics.
- Bosch, Marianna y Gascón, Josep . (2001). *Las practicas docentes del profesor de matemáticas.* Barcelona.
- Bruner, J. (1961). *The act of discovery. Harvard Educational Review.* Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos.
- Cajas, F. (2001). Alfabetización científica y tecnológica: La transposición didáctica del conocimiento tecnológico. *Revista Enseñanza de las Ciencias* .
- Cantoral, R. y Farfán, R.M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Relime V6 N°1* , 27-40.
- Chavarria, J. (2006). Teoria de las situaciones didacticas. *Cuaderno de investigacion y formacion en eduacion matematica* .
- del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista De Investigación Educacional Latinoamericana* , 53-64.
- Diaz, L. (2002). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos.* Chile: Proyecto Diumce.
- Díaz, M. (2013). Una cartografía de estudios en Educación Matemática desde una matriz analítica. *Congreso VII Cibem.*
- Elliott, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción.* Madrid.
- Frawley, W. (1997). *Vygotsky y la ciencia cognitiva.* Barcelona.
- Garfield, J., & Everson, M. (2009). *Preparing teachers of statistics: a graduate course for future teachers.* Journal of Statistics Education.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad: Fundamentos didacticos y Propuestas curriculares.* Madrid.
- Jiménez Saavedra, N. (1986). La axiomática de Kolmogorov: fundamento de la teoría de la probabilidad. *Las matemáticas del siglo XX: una mirada en 101 artículos* , 185-190.

- Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción.* Madrid: La ertes.
- Kolmogórov, A. N. (1950). *Foundations of theory of probability.* Moscú.
- Kolmogórov, A. N. (1950). *Fundamentos de la Teoria de la Probabilidad.* Moscú.
- Kvatinsky, T. & Even, R. (2002). *Framework for teacher knowledge and understanding of probability.* Hawthorn, VIC, Australia:: International Statistical Institute.
- M.G. Grennon & B. J. Brooks. (1999). *The Courage to Be Constructivist. Educational.* Recuperado el 25 de noviembre de 2014, de http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/nov99/vol57/num03/TheCourage-to-Be-Constructivist.aspx
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Martínez, M. y. (2000). *Fundamentos metodológicos en Psicología y CC afines.*
- Ministerio de Educación de Chile, M. (2012). *Bases curriculares 2012. Matemática, educación básica.* Santiago.
- Ministerio de Educación de Chile, M. (2009a). *Mapas de progreso del aprendizaje. Sector matemática. Mapa de progreso de datos y azar.* Santiago: Ministerio de Educación.
- Ministerio de Educación de Chile, M. (2009b). *Propuesta ajuste curricular. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios. Matemática.* Santiago.
- Montero Alonso, M. (2012). *Historia de la Probabilidades.* Granda: Universidad de Granda.
- Ortiz, J., Serrano, L. y Mohamed, N. (2009). *Competencias de los futuros profesores de primaria sobre la probabilidad.* España: Universidad de Granada.
- Pérez Serrano, G. (1994). *Investigación Cualitativa : retos e interrogantes : técnicas y análisis de datos.* Madrid: La Muralla.
- Pozo, J. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid, España.: Facultad de Psicología. Ediciones Morata. Universidad Autónoma de Madrid.
- R.Mctaggart, S. &. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción.* Barcelona.

- Rincón, D. I. (2000). Revisión, planificación y aplicación de mejoras. *Revista Interuniversitaria del Profesorado* , 51-73.
- Vigotsky, L. (1934). *Pensamiento Y Lenguaje.* Moscú.
- Vigotsky, L. (1978). *Pensamiento Y Lenguaje.*

ANEXOS

ANEXO 1: ANALISIS DEL DIAGNOSTICO

Tabla 5.1

DESEMPEÑO PROMEDIO POR ÍTEM EN EL DIAGNOSTICO DE ENTRADA								
ÍTEM	III°A				III°B			
	NL	LP	LE	Prom	NL	LP	LE	Prom
I. conceptos básicos (21 puntos)	10	30	6	13,39	7	20	19	15,83
II. principio de y-lógico y de o-lógico (12 puntos)	16	26	4	6,96	4	19	23	9,65
III. De lenguaje usual a lenguaje conjuntista (15 puntos)	21	16	9	8,70	3	18	25	12,39
IV. De lenguaje conjuntista a lenguaje usual (15 puntos)	20	16	10	8,91	5	13	28	12,5

Tabla 5.2

DESEMPEÑO PROMEDIO POR ÍTEM EN EL POST TEST								
ÍTEM	III°A				III°B			
	NL	LP	LE	prom	NL	LP	LE	prom
I. conceptualización (12 puntos).	2	13	31	10,52	12	19	15	8,26
II. Probabilidad simple y condicional (15 puntos).	6	13	27	9,83	9	18	19	11,09
III. Eventos independientes (21 puntos).	8	10	28	17,04	5	16	25	17,04
IV. Regla de la multiplicación (15 puntos).	5	12	29	12,61	4	15	27	12,5

ANEXO 2: DIAGNOSTICO

DIAGNOSTICO

Nombre:

Problema I

Se encuentran dos amigos en una heladería y sostienen la siguiente conversación:

Patricio: El día de hoy hay muchas personas, con seguridad te puedo decir que es porque hace mucho calor.

Alberto: yo creo que es donde hay la mayor cantidad de sabores por lo tanto hay la mayor cantidad de combinaciones posibles de sabores

Patricio: si fuera por eso ninguna otra heladería

Alberto: Del universo de personas, gran parte prefiere esta heladería, por lo cual a la gente que viene acá o muestra le podemos preguntar porque prefiere este lugar que a otra heladería.

Patricio: Entonces preguntémosle a esa señora que está a punto de entrar y fin del asunto

Alberto: no podemos hacer eso Patricio, porque sería un muestreo no probabilístico en donde tu elegiste a alguien solo porque te pareció interesante, además no sabemos si entrara, si queremos hacer esto bien todos deben tener la misma posibilidad de ser elegidos de esa manera será un muestro probabilístico

Patricio: tú te dejas guiar por lo no determinístico, recuerda que soy físico y para mi importa más el cómo vas a lanzar un dado que la cara que se obtendrá

Alberto: Hablando de física me encontré por azar con Fernando y debo decirte que es un hombre con mucha suerte, se encontró 5000 pesos tirados en la calle

Patricio: Alberto ya se me hace tarde nos vemos otro día y podremos conversar de algo mas determinista que es lo que me gusta a mí.

a) ¿crees que entre más sabores de helados habrán más combinaciones posibles?
b) ¿puede ser algo probabilístico haber escogido a solo las mujeres del local?
c) ¿será representativo escoger una persona al azar?
d) ¿podremos saber que hubiera dicho la señora?

1. ¿Qué es para ti algo determinístico, de un ejemplo?

2. ¿Qué es para ti algo no determinístico, de un ejemplo?

3. ¿has visto alguno de los conceptos por los cuales se te pregunta antes, en qué momento?

Problema II

I. Matías viaja a La Serena para lo cual hay siete compañías de buses que realizan el servicio y tres líneas aéreas.

a) ¿de cuantas maneras diferentes puede realizar el viaje Matías?

b) qué pasaría si el destino final de Matías no fuera La Serena y fuera El valle de Elqui, en donde después de llegar a La Serena debe tomar otro bus, cuyo servicio lo prestan 4 líneas locales, ¿de cuantas formas puede llegar sabiendo que tiene que pasar necesariamente por La Serena?

1. ¿Qué es para ti él y lógico, de un ejemplo?
2. ¿Qué es para ti el o lógico, de un ejemplo

<u>Problema III</u>

En una escuela hay tres talleres, de ellos el 30% de los asistentes practica tenis (t), el 55% de los asistentes practica futbol (f) y los demás asistentes practican ajedrez (a).

a) si te preguntan por los siguientes enunciados que responderías:

   a. $P(t\ u\ a) =$
   b. $P(t\ u\ a\ u\ f) =$
   c. $P(a \cap f) =$
   d. $P(a \cap f \cap t) =$

b) ¿Lo podrías graficar?

<u>Problema IV</u>

Sean tres eventos A, B y C escriba con lenguaje conjuntista

a) Que ocurra solo A
b) Que no ocurra B
c) Que ocurran todos
d) Que no ocurra ninguno
e) ¿Ocupan estas expresiones en su vida cotidiana?

ANEXO 3: EJEMPLOS DE RESPUESTAS AL DIAGNOSTICO DEL CURSO III° A

A partir del diagnostico aplicado se muestran las respuestas más significativas y que reflejan la necesidad de la aplicación del diseño, a continuación se presentan los resultados del III°A

DIAGNOSTICO

Problema I

Se encuentran dos amigos en una heladería y sostienen la siguiente conversación:

Patricio: El día de hoy hay muchas personas, con seguridad te puedo decir que es porque hace mucho calor.

Alberto: yo creo que es donde hay la mayor cantidad de sabores por lo tanto hay la mayor cantidad de combinaciones posibles de sabores

Patricio: si fuera por eso ninguna otra heladería

Alberto: Del universo de personas, gran parte prefiere esta heladería, por lo cual a la gente que viene acá o muestra le podemos preguntar porque prefiere este lugar que a otra heladería.

Patricio: Entonces preguntémosle a esa señora que está a punto de entrar y fin del asunto

Alberto: no podemos hacer eso Patricio, porque sería un muestreo no probabilístico en donde tu elegiste a alguien solo porque te pareció interesante, además no sabemos si entrara, si queremos hacer esto bien todos deben tener la misma posibilidad de ser elegidos de esa manera será un muestreo probabilístico

Patricio: tú te dejas guiar por lo no determinístico, recuerda que soy físico y para mi importa más el cómo vas a lanzar un dado que la cara que se obtendrá

Alberto: Hablando de física me encontré por azar con Fernando y debo decirte que es un hombre con mucha suerte, se encontró 5000 pesos tirados en la calle

Patricio: Alberto ya se me hace tarde nos vemos otro día y podremos conversar de algo mas determinista que es lo que me gusta a mí.

a) ¿crees que entre más sabores de helados habrán más combinaciones posibles?

Si

b) ¿puede ser algo probabilístico haber escogido a solo las mujeres del local?

No, porque se debe elegir a todos los que estan en el local para que sea probabilístico, entre más personas pueden obtener sus resultados más creibles

c) ¿será representativo escoger una persona al azar?

No, porque seria un muestro no probabilístico.

d) ¿podremos saber que hubiera dicho la señora?

No, porque nunca se supo si la señora entro al local.

a) ¿crees que entre más sabores de helados habrán más combinaciones posibles?

Sí

b) ¿puede ser algo probabilístico haber escogido a solo las mujeres del local?

Sí

c) ¿será representativo escoger una persona al azar?

NO -

d) ¿podremos saber que hubiera dicho la señora?

NO

a) ¿crees que entre más sabores de helados habrán más combinaciones posibles?

Si, Porque hay más opciones.

b) ¿puede ser algo probabilístico haber escogido a solo las mujeres del local?

Si, Porque solo escogieron a solo mujeres de un total de hombre y mujeres.

c) ¿será representativo escoger una persona al azar?

Si, Porque tiene la Probabilidad

d) ¿podremos saber que hubiera dicho la señora?

a) ¿crees que entre más sabores de helados habrán más combinaciones posibles?

yo creo que sí.

b) ¿puede ser algo probabilístico haber escogido a solo las mujeres del local?

No, porque entre más personas escogidas es más creíble el resultado.

c) ¿será representativo escoger una persona al azar?

no, porque se debe establecer algún criterio para escoger.

d) ¿podremos saber que hubiera dicho la señora?

no.

1. ¿Qué es para ti algo determinístico, de un ejemplo?

algo que parará sin duda, se lanza una moneda.

2. ¿Qué es para ti algo no determinístico, de un ejemplo?

~~la que~~ el resultado de algo, está en duda, si sale cara o sello.

3. ¿has visto alguno de los conceptos por los cuales se te pregunta antes, en qué momento?

No.

1. ¿Qué es para ti algo determinístico, de un ejemplo?

~~No~~ algo que se puede determinar

2. ¿Qué es para ti algo no determinístico, de un ejemplo?

algo que no se puede determinar

3. ¿has visto alguno de los conceptos por los cuales se te pregunta antes, en qué momento?

Sí, en clases

1. ¿Qué es para ti algo determinístico, de un ejemplo?

Nose

2. ¿Qué es para ti algo no determinístico, de un ejemplo?

Nose

3. ¿has visto alguno de los conceptos por los cuales se te pregunta antes, en qué momento?

combinaciones - Azar

1. ¿Qué es para ti algo determinístico, de un ejemplo?

2. ¿Qué es para ti algo no determinístico, de un ejemplo?

3. ¿has visto alguno de los conceptos por los cuales se te pregunta antes, en qué momento?

Las probabilidades

Problema II

I. Matías viaja a La Serena para lo cual hay siete compañías de buses que realizan el servicio y tres líneas aéreas.

a) ¿de cuantas maneras diferentes puede realizar el viaje Matías?

$7+3=10$

b) qué pasaría si el destino final de Matías no fuera La Serena y fuera El valle de Elqui, en donde después de llegar a La Serena debe tomar otro bus, cuyo servicio lo prestan 4 líneas locales, ¿de cuantas formas puede llegar sabiendo que tiene que pasar necesariamente por La Serena?

a) ¿de cuantas maneras diferentes puede realizar el viaje Matías?

7 + 3 = 10 maneras diferentes

b) qué pasaría si el destino final de Matías no fuera La Serena y fuera El valle de Elqui, en donde después de llegar a La Serena debe tomar otro bus, cuyo servicio lo prestan 4 líneas locales, ¿de cuantas formas puede llegar sabiendo que tiene que pasar necesariamente por La Serena?

7 + 4 = 11 formas

a) ¿de cuantas maneras diferentes puede realizar el viaje Matías?

10

b) qué pasaría si el destino final de Matías no fuera La Serena y fuera El valle de Elqui, en donde después de llegar a La Serena debe tomar otro bus, cuyo servicio lo prestan 4 líneas locales, ¿de cuantas formas puede llegar sabiendo que tiene que pasar necesariamente por La Serena?

$10 \times 4 = 40$

a) ¿de cuantas maneras diferentes puede realizar el viaje Matías? 10

~~10!~~

~~10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 3.628.800~~

b) qué pasaría si el destino final de Matías no fuera La Serena y fuera El valle de Elqui, en donde después de llegar a La Serena debe tomar otro bus, cuyo servicio lo prestan 4 líneas locales, ¿de cuantas formas puede llegar sabiendo que tiene que pasar necesariamente por La Serena? $\boxed{25.200}$

$C^{10}_{4} \quad \dfrac{10!}{(10-4)\,4!} \quad \dfrac{10!}{6! \cdot 4!}$

1. ¿Qué es para ti él y lógico, de un ejemplo?

no lo se

2. ¿Qué es para ti el o lógico, de un ejemplo

no lo se

1. ¿Qué es para ti él y lógico, de un ejemplo?

no sé

2. ¿Qué es para ti el o lógico, de un ejemplo

no sé

1. ¿Qué es para ti él y lógico, de un ejemplo?

Cuando el trene que paso por la Serena y el valle de Elqui

2. ¿Qué es para ti el o lógico, de un ejemplo

Cuando el trene pue paso po la Serena o valle de Elqui

1. ¿Qué es para ti él y lógico, de un ejemplo?

no sé, nunca en mi vida escuche de eso

:'(

2. ¿Qué es para ti el o lógico, de un ejemplo

<u>Problema III</u>

En una escuela hay tres talleres, de ellos el 30% de los asistentes practica tenis (t), el 55% de los asistentes practica futbol (f) y los demás asistentes practican ajedrez (a).

a) si te preguntan por los siguientes enunciados que responderías:

a. $P(t \cup a) =$ P(30% U 15%)
b. $P(t \cup a \cup f) =$ P(30% U 15% U 55%)
c. $P(a \cap f) =$ P(15% ∩ 55%)
d. $P(a \cap f \cap t) =$ P(15% ∩ 55% ∩ 30%)

a. $P(t \cup a) =$ t se une con a
b. $P(t \cup a \cup f) =$ t se une con a y a se une con f
c. $P(a \cap f) =$ a se intersecta con f
d. $P(a \cap f \cap t) =$ a se intersecta con f y f se intersecta con t

a. $P(t \cup a) =$ La probabilidad de los que hacen tenis y ajedrez
b. $P(t \cup a \cup f) =$ La probabilidad de los que practican todo
c. $P(a \cap f) =$ Los que juegan ajedrez y futbol
d. $P(a \cap f \cap t) =$ Los que hacen las tres cosas

a. $P(t \cup a) =$ la union entre el tenis y el ajedrez.
b. $P(t \cup a \cup f) =$ la union de tenis, Ajedrez y futbol.
c. $P(a \cap f) =$ intersección entre el ajedrez y el futbol.
d. $P(a \cap f \cap t) =$ intersección entre el ajedrez, el futbol y el tenis.

Problema IV

Sean tres eventos A, B y C escriba con lenguaje conjuntista

b) ¿Lo podrías graficar, de qué manera?

Un gráfico de barras con Porcentaje o Mejor Aún un gráfico Circular

c) ¿has visto estos contenidos antes, en qué momento?

Nunca

b) ¿Lo podrías graficar, de qué manera?

c) ¿has visto estos contenidos antes, en qué momento?

Matemática, pero ya me olvido

oblema IV:

a) Que ocurra solo A

$\frac{1}{3}$

b) Que no ocurra B

$\frac{2}{3}$

c) Que ocurran todos

1

d) Que no ocurra ninguno

———

e) ¿Ocupan estas expresiones en su vida cotidiana?

NO

a) Que ocurra solo A

$P(A)$

b) Que no ocurra B

$P(B^c)$

c) Que ocurran todos

$P(A \cup B \cup C)$

d) Que no ocurra ninguno

$P(A^c \cup B^c \cup C^c)$

e) ¿Ocupan estas expresiones en su vida cotidiana?

NO

a) ¿crees que entre más sabores de helados habrán más combinaciones posibles?

Si, Porque hay Mas posibilidades de Sabores

b) ¿puede ser algo probabilístico haber escogido a solo las mujeres del local?

depende del criterio de eleccion

c) ¿será representativo escoger una persona al azar?

Si. Tiene la misma posibilidad que todos Si

d) ¿podremos saber que hubiera dicho la señora?

No, queda indeterminado que diria

ANEXO 4: EJEMPLOS DE RESPUESTAS AL DIAGNOSTICO DEL CURSO III°B

A partir del diagnostico aplicado se muestran las respuestas más significativas y que reflejan la necesidad de la aplicación del diseño, a continuación se presentan los resultados del III°B

DIAGNOSTICO

Problema I

Se encuentran dos amigos en una heladería y sostienen la siguiente conversación:

Patricio: El día de hoy hay muchas personas, con seguridad te puedo decir que es porque hace mucho calor.

Alberto: yo creo que es donde hay la mayor cantidad de sabores por lo tanto hay la mayor cantidad de combinaciones posibles de sabores

Patricio: si fuera por eso ninguna otra heladería

Alberto: Del universo de personas, gran parte prefiere esta heladería, por lo cual a la gente que viene acá o muestra le podemos preguntar porque prefiere este lugar que a otra heladería.

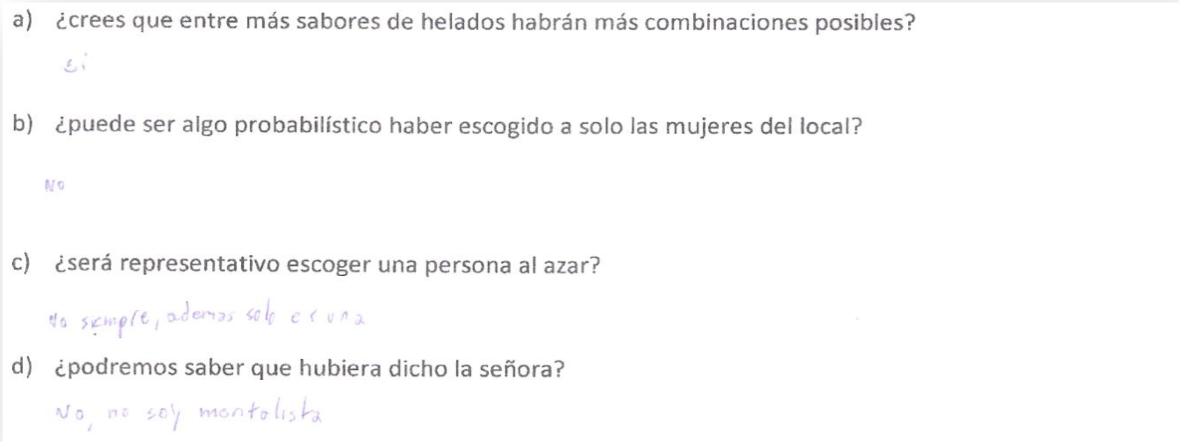
Patricio: Entonces preguntémosle a esa señora que está a punto de entrar y fin del asunto

Alberto: no podemos hacer eso Patricio, porque sería un muestreo no probabilístico en donde tu elegiste a alguien solo porque te pareció interesante, además no sabemos si entrara, si queremos hacer esto bien todos deben tener la misma posibilidad de ser elegidos de esa manera será un muestro probabilístico

Patricio: tú te dejas guiar por lo no determinístico, recuerda que soy físico y para mi importa más el cómo vas a lanzar un dado que la cara que se obtendrá

Alberto: Hablando de física me encontré por azar con Fernando y debo decirte que es un hombre con mucha suerte, se encontró 5000 pesos tirados en la calle

Patricio: Alberto ya se me hace tarde nos vemos otro día y podremos conversar de algo mas determinista que es lo que me gusta a mí.



a) ¿crees que entre más sabores de helados habrán más combinaciones posibles?

si

b) ¿puede ser algo probabilístico haber escogido a solo las mujeres del local?

No

c) ¿será representativo escoger una persona al azar?

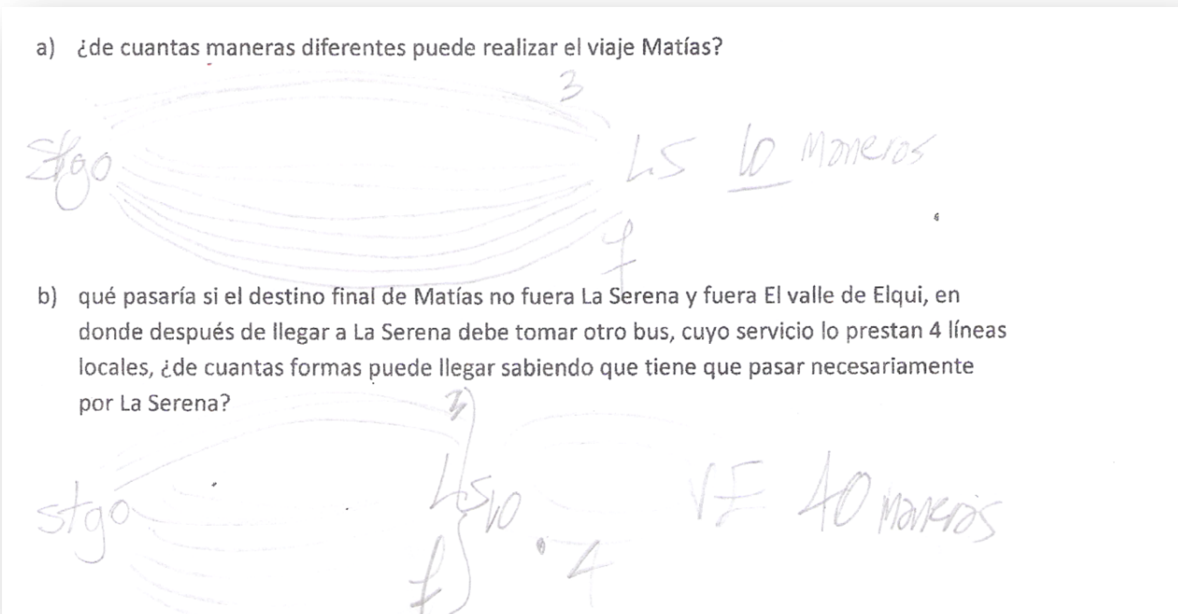
No siempre, ademas solo es una

d) ¿podremos saber que hubiera dicho la señora?

No, no soy montolista

Problema II

II. Matías viaja a La Serena para lo cual hay siete compañías de buses que realizan el servicio y tres líneas aéreas.



a) ¿de cuantas maneras diferentes puede realizar el viaje Matías?

b) qué pasaría si el destino final de Matías no fuera La Serena y fuera El valle de Elqui, en donde después de llegar a La Serena debe tomar otro bus, cuyo servicio lo prestan 4 líneas locales, ¿de cuantas formas puede llegar sabiendo que tiene que pasar necesariamente por La Serena?

1. ¿Qué es para ti algo determinístico, de un ejemplo?

   Un evento uisto dede la física, lanzar un dado y preocuparse por su velocidad

2. ¿Qué es para ti algo no determinístico, de un ejemplo?

   algo incierto, lanzar un dado y preocuparse porque cara saldra

3. ¿has visto alguno de los conceptos por los cuales se te pregunta antes, en qué momento?

   si, con mi papá

a) ¿de cuantas maneras diferentes puede realizar el viaje Matías?

$$C^1_{10} = \frac{10!}{(10-1)! \cdot 1} = \frac{10!}{9! \cdot 1} = \boxed{10}$$

b) qué pasaría si el destino final de Matías no fuera La Serena y fuera El valle de Elqui, en donde después de llegar a La Serena debe tomar otro bus, cuyo servicio lo prestan 4 líneas locales, ¿de cuantas formas puede llegar sabiendo que tiene que pasar necesariamente por La Serena?

$$C^1_{10} \cdot C^1_4 = 10 \cdot \frac{4!}{(4-1)! \cdot 1} = 10 \cdot \frac{4!}{3!} = 10 \cdot 4 = 40$$

1. ¿Qué es para ti algo determinístico, de un ejemplo?

   Para mi algo determinístico es cuando hay un resultado exacto.

2. ¿Qué es para ti algo no determinístico, de un ejemplo?

   algo no determinístico es cuando el resultado no es exacto.

3. ¿has visto alguno de los conceptos por los cuales se te pregunta antes, en qué momento?

   NO, hasta ayer (27 oct) y hoy (28 oct).

1. ¿Qué es para ti algo determinístico, de un ejemplo?

   fisica

2. ¿Qué es para ti algo no determinístico, de un ejemplo?

   Probabilidad

3. ¿has visto alguno de los conceptos por los cuales se te pregunta antes, en qué momento?

   si

1. ¿Qué es para ti él y lógico, de un ejemplo?

   interrupcion, el caso b

2. ¿Qué es para ti el o lógico, de un ejemplo

   union, el caso d

a) ¿crees que entre más sabores de helados habrán más combinaciones posibles?

   Si.

b) ¿puede ser algo probabilístico haber escogido a solo las mujeres del local?

   NO.

c) ¿será representativo escoger una persona al azar?

   Si

d) ¿podremos saber que hubiera dicho la señora?

   NO.

a) ¿de cuantas maneras diferentes puede realizar el viaje Matías?

$7+3=$ 10 maneras.

b) qué pasaría si el destino final de Matías no fuera La Serena y fuera El valle de Elqui, en donde después de llegar a La Serena debe tomar otro bus, cuyo servicio lo prestan 4 líneas locales, ¿de cuantas formas puede llegar sabiendo que tiene que pasar necesariamente por La Serena?

$7+3+4=14$ Formas

1. ¿Qué es para ti él y lógico, de un ejemplo?

2. ¿Qué es para ti el o lógico, de un ejemplo

a) si te preguntan por los siguientes enunciados que responderías:

No se

a. $P(t \cup a) =$
b. $P(t \cup a \cup f) =$
c. $P(a \cap f) =$
d. $P(a \cap f \cap t) =$

b) ¿Lo podrías graficar, de qué manera?

Un gráfico de barras con porcentaje o mejor aún un gráfico circular

c) ¿has visto estos contenidos antes, en qué momento?

Nunca

Problema III

En una escuela hay tres talleres, de ellos el 30% de los asistentes practica tenis (t), el 55% de los asistentes practica futbol (f) y los demás asistentes practican ajedrez (a).

1. ¿Qué es para ti él y lógico, de un ejemplo?

unir dos eventos

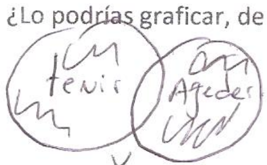
2. ¿Qué es para ti el o lógico, de un ejemplo

interceptar dos eventos

a) si te preguntan por los siguientes enunciados que responderías:

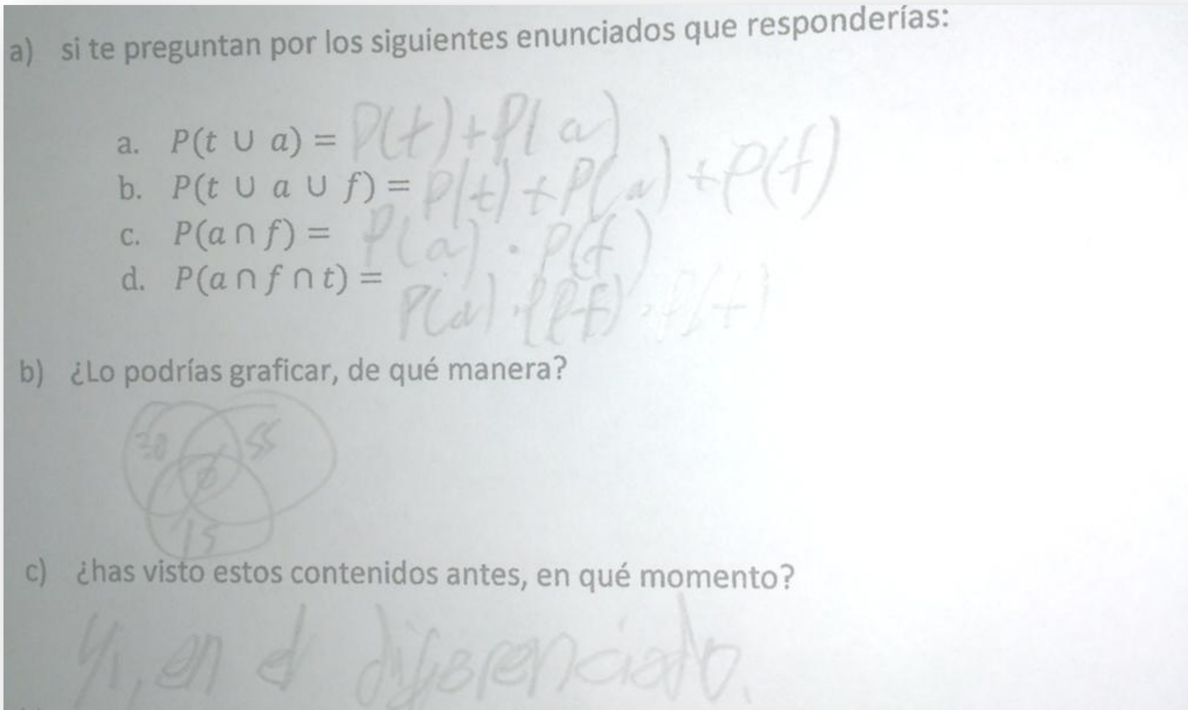
a. $P(t \cup a) =$ la union entre el tenis y el ajedez.
b. $P(t \cup a \cup f) =$ la union de tenis, Ajedez y futbol.
c. $P(a \cap f) =$ intersección entre el ajedréz y el futbol.
d. $P(a \cap f \cap t) =$ intersección entre el ajedrez, el futbol y el tenis.

b) ¿Lo podrías graficar, de qué manera?



c) ¿has visto estos contenidos antes, en qué momento?

No.



a) si te preguntan por los siguientes enunciados que responderías:

a. $P(t \cup a) =$ $P(t) + P(a)$
b. $P(t \cup a \cup f) =$ $P(t) + P(a) + P(f)$
c. $P(a \cap f) =$ $P(a) \cdot P(f)$
d. $P(a \cap f \cap t) =$ $P(a) \cdot P(f) \cdot P(t)$

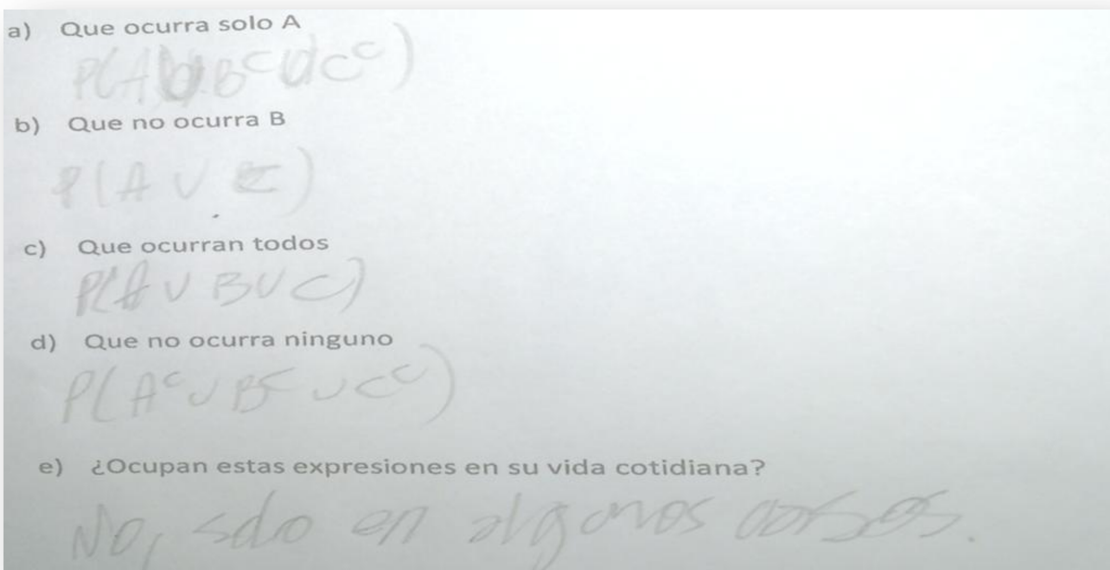
b) ¿Lo podrías graficar, de qué manera?

c) ¿has visto estos contenidos antes, en qué momento?

Si, en el diferenciado.

Problema IV

Sean tres eventos A, B y C escriba con lenguaje conjuntista



a) Que ocurra solo A

$P(A \cap B^c \cup C^c)$

b) Que no ocurra B

$P(A \cup C)$

c) Que ocurran todos

$P(A \cup B \cup C)$

d) Que no ocurra ninguno

$P(A^c \cup B^c \cup C^c)$

e) ¿Ocupan estas expresiones en su vida cotidiana?

No, solo en algunos casos.

a) Que ocurra solo A

b) Que no ocurra B

No Se
ñ

c) Que ocurran todos

d) Que no ocurra ninguno

e) ¿Ocupan estas expresiones en su vida cotidiana?

a) Que ocurra solo A

$P(A)$

b) Que no ocurra B

$P(B^c)$

c) Que ocurran todos

$P(A \cup B \cup C)$

d) Que no ocurra ninguno

$P(A^c \cup B^c \cup C^c)$

e) ¿Ocupan estas expresiones en su vida cotidiana?

NO

ANEXO 5: GUIA DE TRABAJO N°1: CONCEPTOS COMBINATORIOS

Los conceptos combinatorios son tres fundamentalmente, pero recordaremos las operaciones básicas de factoriales ya tratadas anteriormente, en los cursos de matemática.

- Debemos entender que el factorial de n, es igual al producto de los términos Naturales, sucesivos y decrecientes desde n a 1

  a. Calcular por definición y posteriormente usando calculadora
  b. 5! = 5*4*3*2*1 = 120.
  c. –3! No está definido en la teoría. ¿Por qué?
  d. (4/5)! No está definido. ¿Por qué?

Definición 1.
Sean n un Número Natural, con el elemento 0 incluido, **el factorial de n**, se denota por n! y se define como el producto de todos los enteros consecutivos de 1 hasta n inclusive, es decir:
n! = n*(n – 1) *(n – 2)* (n – 3) *……….*1

Aceptamos por definición i. 0! = 1

- Otra idea a recordar, es el valor del Numero Combinatorio: $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$, numéricamente podemos calcular un Numero Combinatorio, considerando el Numero Factorial en la forma

  a. $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{(5-2)!*2!} = 10$

  b. Determina $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ¿Qué ocurre con la notación?

  c. Determina $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ¿Qué es posible intuir?

  d. Determinar $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ¿Es posible determinar este valor?

- Calcular por definición y posteriormente usando calculadora
  a. 5C3 = $\dfrac{5!}{3!(5-3)!}$ = 10.
  b. C(4,0) = 1
  c. 8C10 = No definido.

Los Números Factoriales dan origen a una profunda teoría, solo para nuestro objetivo, será necesario recodar algunas propiedades. Los conceptos de la Teoría Combinatoria que analizaremos son Combinaciones, Variaciones y Permutaciones.

- Supongamos que en un curso ,se forma un grupo de 7 estudiantes donde 4 son hombres y 3 mujeres, podemos estar interesados:
  a. En formar turnos de 3 estudiantes, pero solo hombres.
  b. En formar turnos de 3 estudiantes , pero solo mujeres.
  c. En formar turnos de 2 estudiantes pero integrado por un hombre y una mujer.

En síntesis: en muchos casos estaremos interesados en el número de formas de seleccionar r objetos de entre n objetos, sin importar el orden. Estas agrupaciones o selecciones se llaman combinaciones.

Definición 2.

Un subconjunto de r elementos de un conjunto que tiene n elementos diferentes, se llama una **Combinación** de los elementos tomados de r en r.

El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de r en r, a la vez es:

- Para conformar una mesa directiva estudiantil se debe invitar a 6 personas, presidentes de curso de enseñanza media , de entre 8 presidentes en total. Sin importar las razones de su elección:
  a. ¿De cuantas formas distintas se podrán hacer las citaciones?
  b. Si, de entre el total de presidentes hay 2 que siempre asisten con el secretario. ¿De cuantas formas es posible hacer las citaciones?
  c. Si estos dos presidentes asisten siempre con su secretario y por medidas extraordinarias no deben estar juntos ¿De cuantas maneras en este caso se deberán hacer las citaciones?

a. # = C (8,6) = 28 formas posibles de realizar la citación.

b. i. No asiste ninguno de los 2 presidentes ni sus secretarios # = C(2,0) x C(6,6)
ii. Asiste uno de los presidentes y su secretario. # = C(2,1) x C(6,4)

iii. Asisten los dos pares de presidentes y secretarios # = C(2,2) x C(6,2)

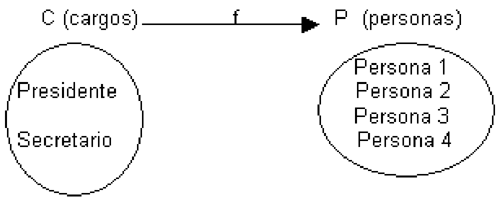
total = C(2,0) x C(6,6) + C(2,1) x C(6,4) + C(2,2) x C(6,2) =

c. Realice un planteamiento y solución.

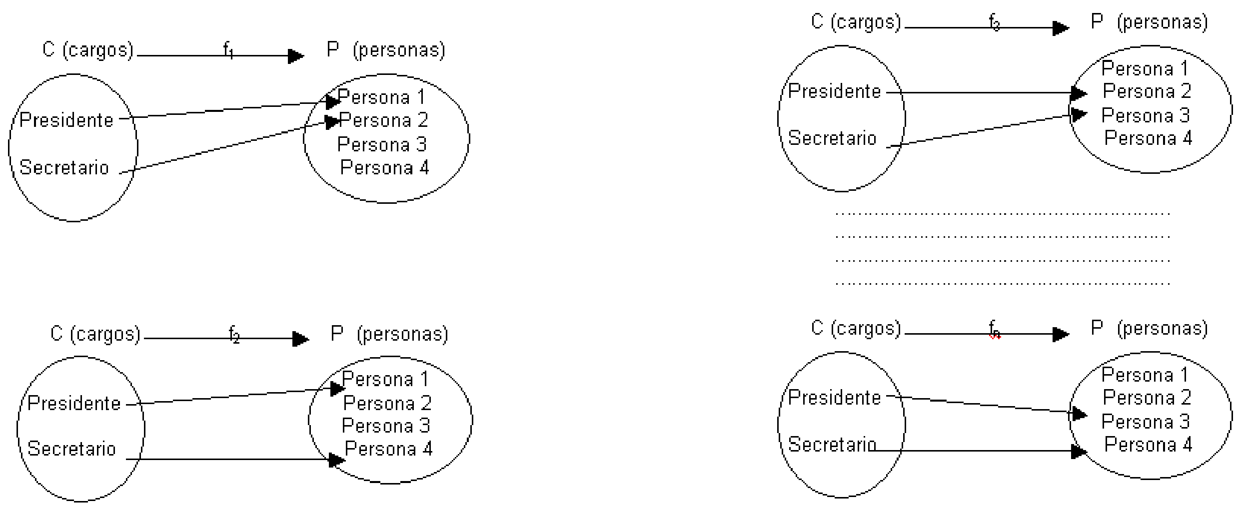
Otro concepto que ayuda a la cuantificación de eventos es la Variación, como su nombre lo indica, está señalando de cuantas maneras puede ocurrir un mismo evento.

- ❖ Supongamos que hay un conjunto de 4 persona y se desea elegir una directiva de 2 personas supongamos un presidente y un secretario.
  ¿De cuantas maneras se podría efectuar esta elección?

Distinguimos 2 conjuntos; los cargos y las personas podemos entender en un diagrama.



En otras palabras entendemos que una Variación es una función de modo que observamos:



El número de Funciones Inyectivas, es el número de Variaciones que se pueden hacer entre los 2 cargos y las 4 personas.

¿Cuántas funciones de estas características son posibles definir?

Definición 3.

Se llama la **Variación** de los n elementos de un conjunto tomados de r en r al número de Funciones Inyectivas que se podrán definir del conjunto de r elementos al conjunto de n elementos.

- Un carro de Metro tren, tiene capacidad para 37 pasajeros dispuestos en 8 filas de 4 y al final 4 asientos y al medio un asiento auxiliar, todas las filas tienen ventanillas laterales, con un pasillo al medio, como es de entender. Se desea ubicar a 20 pasajeros.

  a. ¿De cuantas formas se pueden disponer los 20 pasajeros?. Si se decide no ocupar los 5 asientos que están juntos?.

  b. ¿De cuantas formas se pueden disponer los 20 pasajeros?. Si un grupo de 5 personas desean ir juntos en los 5 asientos?

  c. ¿De cuantas formas se pueden disponer los 20 pasajeros? Si 12 prefieren los asientos con ventanilla?

  d. ¿De cuantas formas se pueden disponer los 20 pasajeros? Si 10 de los pasajeros, manifiestan que, solo quieren ir en asientos con ventanilla.

a. Distinguimos un conjunto de pasajeros y un conjunto de asientos y funciones, en que cada pasajero se asigna a un único asiento. Es decir se establece una Función Inyectiva.

Esto corresponde a la Variación de 20 pasajeros a disponer en 32 ya que hay una restricción de no ocupar 5 asientos.

$$V(32,20) = \frac{32!}{(32-20)!} = 5{,}49 \times 10^{26}$$

En la idea anterior, se presentan algunos casos en que la función es biyectiva, o sea en la Variación se tiene que n = r, es decir el número de elementos del Dominio es igual al número de elementos del Recorrido. Esta idea es lo que se llama una Permutación. Al decir 5 personas deciden ocupar los 5 asientos estamos en V(5,5) = 120

> Definición 4.
>
> Llamaremos una **Permutación** a un caso particular de Variación en que la Cardinalidad del Dominio es igual a la Cardinalidad del Recorrido
>
> Si n = r entonces V(n, n) = $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ diremos particularmente que Pn = n!

- Suponga que tenemos un conjunto de tres elementos A = {a, b, c} y estamos interesados en el número de arreglos o permutaciones, con los elementos del conjunto A.
  Las posibles permutaciones son: abc, acb, bac, bca, cab, cba, vemos que hay 6 permutaciones distintas.

  Se puede llegar a la misma respuesta sin tener que escribir todas las ordenaciones posibles, de la siguiente manera: Los arreglos de los 3 objetos son equivalente a disponerlos en 3 celdas, así:

3	2	1

P_3 = 3.2.1 = 6, 6 formas de ordenar los elementos del conjunto A.

Con estas tres ideas combinatorias es posible interpretar gran variedad de problemas, los que generalmente se presentan interrelacionados, o con alguna dificultad por la cantidad de restricciones de su enunciado.

- ¿De cuantas formas diferentes se podrán ordenar 6 personas en una fila?
  Debemos interpretar que se trata de una Variación, personas que se asignan a una fila, hay un orden, se establecen posiciones para cada elemento. Mas precisamente se trata de una Permutación, $P_6 = 6! = 720$, es decir 720 posiciones distintas, constituyendo cada una ordenación distinta.

- ¿De cuantas formas diferentes se podrán ordenar 6 personas en una fila, si 2 de ellas no deben quedar juntas?
  En este caso para cumplir la restricción debemos separar del grupo total a una de las personas con restricción, por tanto # = 5! x 4. La expresión 5! corresponde a las personas que quedan de haber sacado una, y, por, Principio Multiplicativo, 4, que corresponde a las 4 posiciones por las factorial formas puede tomas la persona, que se sacó inicialmente.

- ¿De cuantas formas diferentes se podrán ordenar 6 personas en una fila, si 3 de ellas deben quedar juntas?
  Explique cómo interpreta y resuelva.

Debemos tener presente una cantidad de particulares conceptos que se derivan de los anteriores, En nuestro estudio están estipulados los conceptos básicos pero para el cálculo de probabilidades con aplicaciones a múltiples ámbitos necesitamos nuevos conceptos de la Teoría Combinatoria para un eventual uso. Es decir los conceptos de; Factorial de un Numero, Numero Combinatorio, Combinación, Variación, Permutación, contenidos en los Principios Fundamentales de la o-combinación, la y-combinación y el Principio Aditivo y Multiplicativo serán ampliados para cuantificar eventos y Espacios Muéstrales algunos con mayor cardinalidad y/o complejidad en su constitución. Así en eeste estudio es que debemos considerarse de Teoría Combinatoria, teniendo presente situaciones en que eventos tienen elementos repetidos.

- Consideremos por ejemplo: Se tiene un rodamiento de 9 bolas el que permanentemente, al cabo de 185 días, presenta una fractura en una de sus bolas. El equipo de Ingeniería de la empresa que utiliza este dispositivo, cree que la fractura se registra siempre al contacto con una única componente de tope para estas bolas. Si quisieran determinar la veracidad de esta hipótesis.

¿De cuantas distintas formas es posible que se produzca esta situación?

Otro ejemplo: ¿De cuántas maneras se puede seleccionar tres libros de un total de 10? (10)3 = 10*9*8 = 720.

También podemos considerar una pregunta frecuente en probabilidad: ¿Cuántos grupos, esto es, sub-poblaciones de tamaño *r* pueden ser formados de una población total de tamaño *n*?

Por ejemplo, suponga que se tienen 6 pelotas numeradas, ¿cuántos grupos de tamaño 2 pueden ser formados?

12 23 34 45 56

13 24 35 46

14 25 36

15 26

16

Note que el resultado anterior es diferente del número de muestras ordenadas que pueden ser formadas

Sin reemplazo:	Con reemplazo
12 21 31 41 51 61	11 21 31 41 51 61
13 23 32 42 52 62	12 22 32 42 52 62
14 24 34 43 53 63	13 23 33 43 53 63

15 25 35 45 54 64	14 24 34 44 54 64
16 26 36 46 56 65	15 25 35 45 55 65
	16 26 36 46 56 66

Un problema que en lo sucesivo es necesario tener presente es si un experimento, fundamentalmente de extracción de una muestra, se hace sin reponer, el elemento seleccionado o se hace reponiendo, el elemento que fue extraído.

ANEXO 6: GUIA DE TRABAJO N°2: REGLA DE LAPLACE Y PROBABILIDAD SIMPLE

Regla de Laplace y probabilidad simple

Ahora ya estamos en condiciones de calcular una Probabilidad, porque podemos cuantificar eventos o sucesos.
Una forma simple de Probabilidades entender el concepto de la **Probabilidad Frecuencial,** situación que ya utilizamos en la sesión anterior.

- Recordemos una Distribución de Frecuencias, en donde se señalaba una encuesta acerca del consumo de un producto envasado en tarros, entrevista a compradores en la salida de un supermercado.

Estas 20 personas indicaron el número de tarros consumidos durante una semana, la información se ordenó en la siguiente tabla:

Cantidad de tarros Consumidos	0	1	2	3
Número de personas	4	6	8	2
Frecuencia Relativa.	0,20	0,30	0,40	0,10

a. ¿Cuál es la probabilidad que estas personas consuman 3 tarros?
b. ¿Cuál es la probabilidad que estas personas no consuman este producto?

Solución.

a. Tres tarros son consumidos por 2 personas de un total de 20 consumidores, o sea 2/20 = 0,10 o sea interpretamos que es un 10%.

b. Sin complicación entendemos que, P(que estas personas no consuman este producto) = 20%.

Definición 5.

Si A es un evento entonces **P[A] =** $\dfrac{Numero.de.Sucesos.favorables.a.A}{Numero.de.Sucesos.posibles} .=. \dfrac{\#.A}{\#.\Omega}$

Nuestra secuencia considera la probabilidad Axiomática o Matemática esto es un conjunto de axiomas definiciones propiedades que construirán la teoría.
En este esquema la probabilidad es una función matemática de modo que:

Definición 6.

Se llama la **Probabilidad de un Evento** A, $P:\Omega \to [0,1] \subseteq R$ tal que,

$A - -P[A] \in [0,1]$ y se verifica,

Axiomas: Ax.1 $0 \le P[A] \le 1,$ para cada evento A en Ω

Ax.2 $P[\Omega] = 1$

Ax.3 Para cualquier número finito k de Eventos Mutuamente Excluyentes en Ω es.

Asociando nuestros conocimientos, podemos entender que dado Ω un Espacio Muestral asociado a un experimento ε.

La probabilidad P, es una función que asigna a cada evento A (A,$\in$ $f(\Omega)$) , un número P[A], llamado la *probabilidad del evento A,* tal que cumple los axiomas: Ax.1, Ax.2, Ax.3.

En Teoría de Probabilidades, se considera una clase de subconjuntos de Ω, (no necesariamente todo $P(\Omega)$), que cumple ciertos axiomas, se llama $\sigma - a\lg ebra$

Las propiedades siguientes son consecuencia inmediata de los axiomas.

Propiedades

Para todo evento de un mismo Espacio Muestral se tiene:

a. Si ϕ es el evento imposible, entonces $P[\phi]=0$

b. Para cada evento A, se cumple que $P[\overline{A}]=1-P[A]$ ó $P[A]=1-P[\overline{A}]$.

c. Si A y B son eventos tales que $A\subset B$, entonces $P[A]\leq P[B]$.

d. Si A y B son dos eventos cualesquiera en Ω entonces $P[A\cup B]=P[A]+P[B]-P[A\cap B]$

Una consecuencia importante del teorema 4, es la siguiente $P[A\cup B]\leq P[A]+P[B]$, ya que $P[A\cap B]\geq 0$

e. Si A, B y C son tres eventos cualesquiera en Ω, entonces

$$P[A\cup B\cup C]=P[A]+P[B]+P[C]-P[A\cap B]-P[A\cap C]-P[C\cap B]+P[A\cap B\cap C]$$

Una de las habilidades o logros que se requieren de parte del alumno es el planteamiento de problemas y su resolución. A continuación se plantea una adecuada selección de problemas que por sus características y posibilidad de análisis, le resultarán una aproximación a lo requerido, esto es el concepto de probabilidad.

1. De un grupo de personas, el 30% práctica natación y el 40% juega bolos. De los nadadores el 50% juega boliche. Si se elige aleatoriamente una persona. ¿Cuál es la probabilidad que

a. Practique natación o bolos?
b. Practica sólo uno de estos deportes?

No practique ni natación ni bolos?

Solución

a. Definimos los eventos:

A: "la persona elegida es nadadora".

B: "la persona elegida juega bolos".

La probabilidad pedida es $A \cup B$. Antes recordemos una observación respecto a la probabilidad y porcentaje; que están relacionados por una factor 100, es decir, por, ejemplo el hecho de que el 30% de las personas practica natación, entonces al elegir una persona de este grupo, la probabilidad de que sea nadador es de 0.3, además como el 50% de los nadadores, o sea el 15% del total practica natación y bolos, tenemos $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0.3 + 0.4 - 0.15 = 0.55$

b. Sea C, el evento: "la persona elegida practica sólo uno de estos deportes".
El evento C se puede escribir así,

$$C = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$$

Los eventos $A \cap \overline{B}$ y $B \cap \overline{A}$ son Mutuamente Excluyentes, entonces

$$P[C] = P\left[A \cap \overline{B}\right] + P\left[B \cap \overline{A}\right] \quad \text{por Ax.3}$$

$$= 0.15 + 0.25 = 0.40.$$

Observe que $C = A.\Delta.B$

c. Sea D, el evento: "la persona elegida no practica ni natación ni bolos".

El evento D se escribe $D = \overline{A \cup B}$.

Luego $P[D] = P\left[\overline{A \cup B}\right]$

$= 1 - P[A \cup B]$

$= 1 - 0.55 = 0.45$

2. De un archivo que contiene 3 expedientes A, 4 expedientes B y 3 expedientes C, se extraen al azar 2 de estos documentos. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea del tipo C o sean distintos?

Solución:

El experimento aleatorio es "extraer dos expedientes"

El número de elementos del Espacio Muestral es $C_2^{10} = 45$

A: "de los 2 expedientes extraídos ninguno sea del tipo C o sean distintos".

B: "ninguna sea de tipo C". C: "sean distintos".

El evento A se escribe A = B $\cup$ C, y B $\cap$ C $\neq 0$. ¿Porque?

Luego $P[A] = P[B] + P[C] - P[B \cap C]$

Calcularemos:

a. $P[B]$.

$N(B) = C_7^2 = 21$

$P[B] = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

Observación la notación $\# = N = \text{N}$, se usa indistintamente en algunos textos. Al igual que la notación Combinatoria $C_7^2 = C_2^7$

b. $P[C]$

El evento C se puede escribir así $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde:

C_1: "un expediente es A y el otro B".

C_2: "un expediente es A y el otra C".

C_3: "un expediente es B y el otro C".

C_1, C_2, C_3 son Mutuamente Excluyente dos a dos, ¿Por qué?

Luego $P[C] = P[C_1] + P[C_2] + P[C_3]$

$N(C_1) = 3 \times 4 = 12$, luego $P[C_1] = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$;

$N(C_2) = 3 \times 3 = 9$, luego $P[C_2] = \frac{9}{45} = \frac{3}{15}$

$N(C_3) = 4 \times 3 = 12$. luego $P[C_3] = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$

Por lo tanto, $P[C] = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$

c. $P[B \cap C]$

Observe que $B \cap C = C_1$, luego $P[B \cap C] = P[C_1] = \frac{4}{15}$

Por lo tanto $P[A] = P[B] + P[C] - P[B \cap C]$

$$= \frac{7}{15} + \frac{11}{15} - \frac{4}{15} = \frac{14}{15}$$

Este problema tiene las características de lo que se considera un buen análisis, aun mas , es posible darle otro enfoque en la solución , esta vez , utilizaremos más recursos lógicos y lo que hemos dicho un lenguaje de primer nivel.

Otra forma de resolver el problema anterior.

A = $B \cup C$ esta era la expresión original anterior, que refleja el exacto planteamiento.

= “Que ningún expediente sea del tipo C o sean distintos”

entonces $\overline{A} = \overline{B \cup C} = \overline{B}\overline{C}$, es decir,

Lógicamente Equivalente = Es falso que, ninguno sea del tipo C o sean distintos

= Que algunos sean del tipo C y sean de igual tipo

$\overline{A}$: = Ambos deben ser de tipo C

N($\overline{A}$) = $C_3^2 = 3$

$$P[\overline{A}] = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

Por lo tanto, $P[A]=1-P[\overline{A}]=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.

3. Se tiene en una caja; 5 vales de US$ 100 cada uno, 3 vales de U$ 300 cada uno, 2 vales de U$ 500 pesos cada uno. Se escoge aleatoriamente 3 vales. Determinar la probabilidad que:

a. Al menos dos de ellas tenga el mismo valor.
La suma de los precios de los tres vales sea de U$ 700.

Solución:

El Experimento Aleatorio es, "Escoger 3 vales de los 10 que se tienen en la caja". entonces al Espacio Muestral es de C_{10}^{3} elementos.

Sean los siguientes eventos:

A: "al menos dos de los vales escogidos tengan el mismo valor".

B: "la suma de los precios de los tres vales sea de U$ 700 ".

a. Calcularemos primero la probabilidad del evento $\overline{A}$, ¿Cuál seria este evento?
Luego $\overline{A}$: "tengan valores diferentes".

Entonces, el número de elementos de $\overline{A}$ es $C_5^1 C_3^1 C_2^1$. Luego,

$$P[\overline{A}]=\frac{C_5^1 . . C_3^1 . . C_2^1}{C_{10}^3}$$

y $$P[A]=1-\frac{C_5^1 . . C_3^1 . . C_2^1}{C_{10}^3}=0.75.$$

b. Sea los siguientes eventos:
B_1: "un vale de U$ 500 y 2 de U$ 100 ".

B_2: "2 vales de U$ 300 pesos y uno de U$ 100 ".

Entonces, el evento B se escribe $B = B_1 \cup B_2$, donde B_1 y B_2 son Mutuamente Excluyentes; por lo tanto, $P[B] = P[B_1] + P[B_2]$.

El evento B_1 ocurre de $C_2^1 \; C_5^2$ formas, luego,

$$P[B_1] = \frac{C_2^1 C_5^2}{C_{10}^3}$$

El evento B_2 ocurre de $C_3^2 C_5^1$ formas, luego

$$P[B_2] = \frac{C_3^2 C_5^1}{C_{10}^3}$$

Por lo tanto, $$P[B] = \frac{C_2^1 C_5^1}{C_{10}^3} + \frac{C_3^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{C_2^1 C_5^2 + C_3^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{24}.$$

4. En una encuesta pública se determina que la probabilidad que una persona consuma un producto A es 0.50, que consuma el producto B es 0.37 que consuma el producto C es 0.30, que consuma A y B es 0.12, que consuma solamente A y C es 0.08, que consuma solamente B y C es 0.05 y que solamente C es 0.15.
Calcular la probabilidad que una persona consuma:

a. A ó B pero no C.

b. Solamente A.

Solución:

Los datos del problema son los siguientes: $P[A]=0.50$; $P[B]=0.37$; $P[C]=0.30$, $P[AB]=0.12$.

El evento solamente A y C, se escribe $AC\overline{B}$; Luego $P\left[AC\overline{B}\right]=0.08$

El evento solamente B y C, se escribe $\overline{A}$ BC; Luego $P\left[\overline{A}BC\right]=0.05.$

Y el evento solamente C, se escribe $\overline{A}\overline{B}C$; Luego $P\left[\overline{A}\overline{B}C\right]=0.15.$

a. Calcularemos la probabilidad del evento $(A\cup B)\overline{C}$.

Observe que $P\left[(A\cup B)\overline{C}\right]=1-P\left[\overline{A}\overline{B}\cup C\right]$.

Por otro lado, $P\left[\overline{A}\overline{B}\cup C\right]=P\left[\overline{A}\overline{B}\right]+P[C]-P\left[\overline{A}\overline{B}C\right]$.

Calculamos $P\left[\overline{A}\overline{B}\right]$.

$$P\left[\overline{A}\overline{B}\right]=P\left[\overline{A\cup B}\right]=1-P[A\cup B]$$

$$P[A\cup B]=P[A]+P[B]-P[AB]$$

= 0.50 + 0.37 - 0.12

= 0.75.

Reemplazando este valor en $P\left[\overline{A}\overline{B}\right]$, obtenemos $P\left[\overline{A}\overline{B}\right]=1-075=0.25$

Reemplazando este último valor en $P\left[\overline{A}\overline{B}\cup C\right]$, obtenemos $P\left[\overline{A}\overline{B}\cup C\right]$ = 0.25 + 0.30 - 0.15 = 0.40.

Reemplazando este valor en $P\left[(A\cup B)\bar{C}\right]$obtenemos la probabilidad pedida

$$P\left[(A\cup B)\bar{C}\right] = 1 - 0.40 = 0.60.$$

b. El evento solamente A, se escribe $A\bar{B}\bar{C}$. o también.

A = AB $\cup$ $A\bar{B}\bar{C}$ $\cup$ $A\bar{B}\ \bar{C}$, mutuamente excluyente.

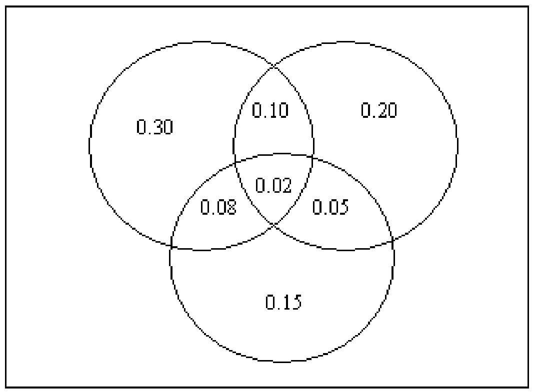
Luego $P[A] = P[AB] + P\left[AC\bar{B}\right] + P\left[A\bar{B}\bar{C}\right]$,

donde $P\left[A\bar{B}\bar{C}\right] = P[A] - P[AB] - P\left[AC\bar{B}\right]$

= 0.50 - 0.12 - 0.03

= 0.30.

Gráficamente



(a) $P\left[(A\cup B)\bar{C}\right]$ = 0.30 + 0.10 + 0.20 = 0.60.

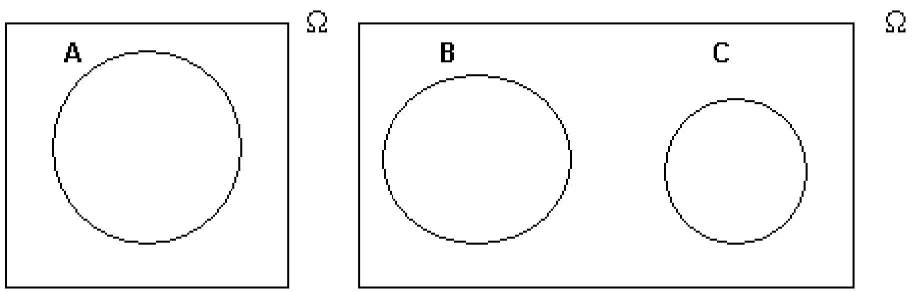
(b) $P\left[A\bar{B}\bar{C}\right] = 0.3$

ANEXO 7: GUIA DE TRABAJO N°3: PROBABILIDAD CONDICIONAL Y EVENTOS INDEPENDIENTES

Probabilidad condicional y eventos independientes.

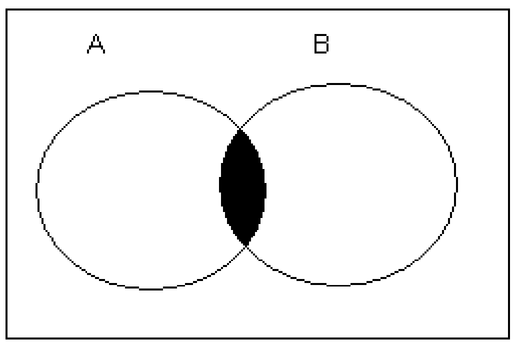
Generalmente, en muchos problemas, se pide determinar el **cálculo** de la probabilidad de un evento, en relación a la probabilidad de un evento del cual se conoce su probabilidad.

En nuestro estudio esta idea corresponde a la Probabilidad Condicional.



Estas ideas, sobre las que aplicamos una probabilidad son Probabilidades Simples P(A), P(A) + P(B) ó P(AUB)

Ahora si, sobre:



Podemos calcular lo que en lo sucesivo se llamara la **Probabilidad Condicional de A dado B**, escribimos P(A/B).

¿Cuál es la condición entre los eventos de Ω?

> Definición 7.
>
> Sean A , B eventos de un mismo Espacio Muestral tal que $A \cap B \neq \Phi$, se llama la **Probabilidad Condicional de A dado B** a $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\#(A \cap B)}{\# B}$, $P(B) > 0$

Los enunciados condicionales obedecen a variadas formas: A dado B, Si A entonces B, Se sabe A determine B, Sabiendo A cual es B. Recuerde siempre con sentido condicional.

1. Consideremos el siguiente problema:
La probabilidad que llueva en Santiago de Chile el 01/04 es de un 60%. La probabilidad que llueva los dos primeros días del mes es de un 30%. Si sabemos que llovió el día primero de Abril. ¿Cuál es la probabilidad que llueva el día 02/04?.
Solución:
Siempre en nuestra etapa de aprender es ir señalando paso a paso nuestra construcción. Definiremos los eventos:

A: "Que llueva el primer día de Abril "

B: "Que llueva el segundo día de Abril"

Interpretamos, $A \cap B$: "Que llueva los dos primeros días de Abril"

Anotamos la información :

P(A) = 0,60 , P(A$\cap$B) = 0,30

Anotamos la interrogante de nuestro problema y desarrollamos:

P(B/A) , según la definición P(B/A) = $\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ = 0,30 / 0,60 = 0,50

Es muy habitual decir que las propiedades de la Probabilidad Condicional son las mismas que las de la Probabilidad Simple. Esto claramente no es así ya que son conceptos diferentes, si bien existe cierta analogía será necesario formalizar tanto su definición como sus propiedades.

Definición 8.

Se llama la **Probabilidad de un evento A condicionado a B**

P : $\Omega \longrightarrow [\,0, 1\,] \subseteq \mathbb{R}$ tal que

A / B $\longrightarrow$ P[A/B] $\in$ [0 , 1] y se verifica los

Axiomas : Ax.1 $0 \le P[A/B] \le 1,$ para cada evento A en Ω

Ax.2 $P[\Omega/B] = 1$

Ax.3 Para cualquier número finito k de Eventos Mutuamente Excluyentes en Ω es

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i / B\right] = \sum_{i=1}^{k} P[A_i / B]$$

Análogamente como decíamos las propiedades también serán formalizadas para este concepto.

Propiedades

Si B es un Evento tal que P(B)>0 entonces P(*/B) verifica las siguientes propiedades.

a. $P(\phi/B) = 0$
b. $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$ o $P(A/B) = 1 - P(\overline{A}/B)$
c. Si $A \subseteq C \Rightarrow P(A/B) < P(C/B)$
d. $P(AUC/B) = P(A/B) + P(C/B) - P(A \cap C / B)$

2. En una comuna de Santiago de Chile se ha creado un conflicto, ya que dicho municipio, desea prolongar una calle y para tal efecto deberá perder una parte de territorio un parque natural existente, situación que los vecinos no desean. La construcción se deberá hacer en verano y de esta manera evitar oposición.

La probabilidad que la construcción de la calle se termine a tiempo es 0,85. La probabilidad que no haya oposición es 0,75. La probabilidad que la construcción se termine a tiempo dado que no hubo oposición es 14/15. La probabilidad que haya oposición y no se termine la construcción a tiempo es 10%.

¿Cuál es la probabilidad que:

a. La construcción se termine a tiempo y no haya oposición?
b. No haya oposición dado que la construcción se terminó a tiempo?
c. La construcción no se termine a tiempo si hubo oposición?
d. La construcción no se termine a tiempo si no hubo oposición?

Solución.

Los eventos, se recomienda definirlos, según el evento de mayor frecuencia, así:

A: "La construcción se termina a tiempo"

B: "No haya oposición"

Anotamos la información:

a. P(A) = 0,85 , P(B) = 0,75 , P(A/B) = 0.9333 , P($\bar{A} \cap \bar{B}$) = 0,10

P(B). P(A/B) = P(A$\cap B$)

0,75 . 0,9333 = 0,70 = P(A$\cap B$)

b. Plantear y calcular.
c. Plantear y calcular.
d. P($\bar{A}$/B) = P($\bar{A} \cap$B) / P(B) = 1 – [P(A$\cap$B) / P(B)] = 1/15

Del concepto de Probabilidad Condicional, obtenemos una fórmula para hallar la Probabilidad de la Intersección, o producto, de los eventos A y B.

$P[A \cap B] = P[B]\, P[A|B] = P[AB] \quad P(B) > 0$ y también $P[A \cap B] = P[A]\, P[B|A] = P[AB] \quad P(A) > 0$

ANEXO 8: GUIA DE TRABAJO N°4: EVENTOS INDEPENDIENTES, LA REGLA DE MULTIPLICACIÓN

Eventos independientes y regla de la multiplicación.

Estas expresiones se llaman **Regla de la Multiplicación o Probabilidad de la Intersección, o Probabilidad Conjunta** y se entiende como la probabilidad de que ocurran los eventos A y B.

1. Una caja contiene 5 bolas blancas y 5 negras. Se extrae 2 bolas.
   ¿Cuál es la probabilidad que las dos resulten blancas?

Solución

Caso 1. Se extraen las bolas, **sin reposición**.

Sean los eventos:

A_1 : "La primera bola resulta blanca"

A_2: "La segunda bola resulta blanca"

A: "Las dos bolas resulten blancas"

La probabilidad pedida es $A = A_1 \cap A_2 = A_1A_2$, A, es la intersección de los dos eventos y la ocurrencia de A1 influye en la de A2.

o sea $P[A] = P[A_1A_2] = P[A_1]\ P[A_2 | A_1] = \frac{5}{10} x \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$

En la caja hay 10 bolas de las cuales 5 son blancas, entonces $P[A_1] = \frac{5}{10}$

Después de la ocurrencia del evento A_1, quedan 9 bolas de las cuales 4 son blancas, luego $P[A_2|A_1] = \frac{4}{9}$

Caso 2. Se extraen las 2 bolas, **con reposición**.

Considerando los mismos eventos se tiene :

$P[A] = P[A_1A_2] = P[A_1]\ P[A_2 | A_1]$, pero ahora :

$$= \frac{5}{10} \text{x} \frac{5}{10}$$

5. El problema anterior se puede enfocar de otro punto de vista, resultando otro problema.
Como existe 5 + 5 = 10 bolas, él número de formas de seleccionar dos de ellas está dado por C(10,2) y cada una de estas formas tienen igual probabilidad de ocurrir. Él número de sucesos favorables al evento A, la obtenemos de la siguiente manera: como existen 5 bolas blancas, podemos elegir dos de ellas de C(5,2) formas diferentes, luego aplicando la definición:

$$P[A] = \frac{C(5,2)}{C(10,2)} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

Es posible extender la Regla de la Multiplicación al producto de 3 eventos:

Propiedades.

Si A, B, C, son eventos de, con $P(A) \neq 0$ y $P(A \cap B) \neq 0$ entonces $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B/A)\,P(C/A \cap B)$

6. El Departamento de Control Sanitario, para productos cárneos, está investigando la presencia de fiebre aftosa en 2 grupos de ganado. En el corral A hay 1.000 vacunos y un 20% tienen la enfermedad, en el corral B también con 1.000 vacunos, el 25% tiene esta enfermedad. Se escoge un vacuno al azar.

Si el 70% del ganado vacuno enfermo, es importado.

¿Cuál es la probabilidad que él ganado este en el corral A, sea enfermo y no sea importado?

Sean los eventos; A: El ganado escogido es del corral A.

B: El ganado escogido es del corral B.

E: El ganado escogido tiene la enfermedad

N: El ganado escogido no es importado

La probabilidad pedida, es del evento: $P(A \cap E \cap N) = P(A)\,P(E/A)\,P(N/A \cap E)$

$= (1.000/2.000).0{,}20.\,(60/200) = 0{,}03$

Todas las probabilidades que a continuación se desarrollan están en un Espacio Muestral Particionado .

Recordemos que se dice que la colección de eventos B1, B2, ...,Bk, en Ω, es una Partición del Espacio Muestral Ω , si se cumplen las condiciones:

a. Los eventos B_1, B_2,..........B_k, son Mutuamente Excluyentes, En símbolos: $\bigcap_{i=1}^{k} Bi = \phi$, i=1,2,3,............,k

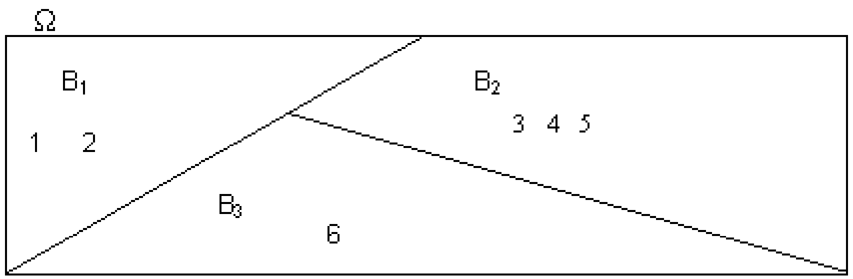
b. Los eventos B_1, B_2,..........B_k, son Colectivamente Exhaustivos, En símbolos: $\bigcup_{i=1}^{k} Bi = \Omega$, i=1,2,3,.........,k

Para construir nuestra teoría agregamos:

c. P $[B_i] > 0$, i = 1,2,.......,k

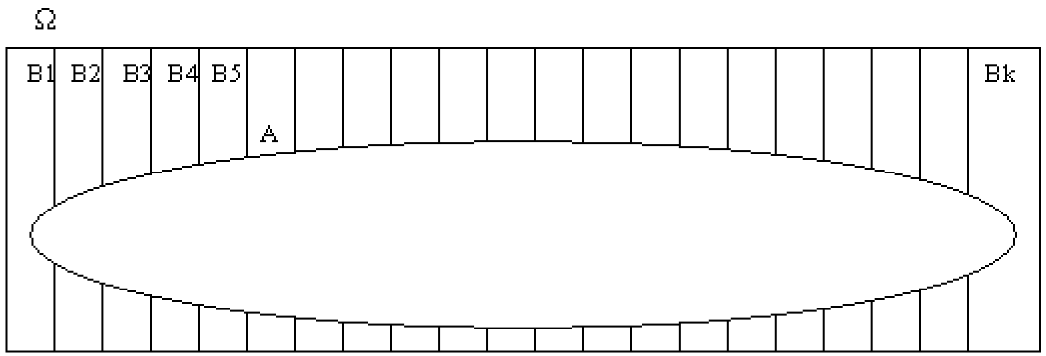
En el lanzamiento de un dado $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4,5\}$, $B_3 = \{6\}$

B_1, B_2, B_3, representa una Partición del Espacio Muestral Ω.



Los tres modelos siguientes son de gran abstracción y a veces difíciles de comprender en su formulación matemática.

Construyamos un modelo teórico, en donde gráficamente observemos todos los eventos constituyentes del modelo matemático.



ANEXO 9: POST-TEST

¿Cuánto Aprendí?

Nombre:

I. Define en tus propias palabras y da un ejemplo para cada caso

a) combinatoria:

b) probabilidad condicional:

c) Regla de Laplace:

d) regla de la multiplicación:

II. calcula las siguientes probabilidades pedidas

1. Consideremos una urna que contiene 4 bolita rojas y 5 blancas. De las 4 bolita rojas, 2 son lisas y 2 rayadas y de las 5 bolita blancas, 4 son lisas y una sola es rayada. Supongamos que se extrae una bolita y, sin que la hayamos mirado, alguien nos dice quela bolita es roja,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea rayada?

b) ¿Cuál es la probabilidad que la bolita sea roja y rayada?

2. Se seleccionan dos semillas aleatoriamente, una por una, de una bolsa que contiene 10 semillas de flores rojas y 5 de flores blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) La primera semilla sea roja

b) La segunda semilla sea blanca dado que la primera fue roja

c) Cuál es la probabilidad de sacar una roja o una blanca dado que la primera fue blanca

III. Eventos independientes

a. Si se tiran dos dados: uno verde y uno rojo, y se observa los números orientados hacia arriba. Tome A: la suma es 7 y B: el dado rojo sale par. ¿son estos dos sucesos independientes?

b. En una escuela el 20% de los alumnos tiene problemas visuales, el 8% tiene problemas auditivos y el 4% tienen tanto problemas visuales como auditivos, ¿Son los dos eventos de tener problemas visuales y auditivos, eventos independientes?

c. El evento sacar tres copas de una baraja española, ¿es independiente?, ¿por qué?

d. invente un problema de eventos independientes

e. Resuelva el ejercicio que usted mismo creo y justifique porque es de eventos independientes.

f. Sacas una carta de un mazo de 52 cartas, y luego lanzas un dado. ¿cuál es la probabilidad de sacar un 2 y luego lanzar y que en el dado salga un 2?

g. Marta está jugando un juego de cartas. Empieza con 10 cartas, numeradas del 1 a 10, y están boca abajo por lo cual no puede ver los números. Ella escoge una carta al azar (de forma aleatoria) y la voltea. Si la carta es mayor o igual a 5, la carta es "ganadora" y la pone en el montón de las cartas "ganadoras" y si es menor que 5 pone la carta en el montón de las "perdedoras", ella ganara si junta tres cartas en el montón de las cartas ganadoras antes que en el montón de las perdedoras.

   ¿Este evento es independiente? ¿por qué?.

IV. Regla de la multiplicación

a) En una prueba existe una pregunta de verdadero y falso y luego una pregunta de selección múltiple (cinco alternativas), ¿cuál es la probabilidad que las dos preguntas estén correctas?

b) En una corporación se decide formar una directiva compuesta por tres personas, si entre los postulantes hay 7 hombres y 5 mujeres,

   a) ¿cuál es la probabilidad de que la directiva este compuesta por un hombre y dos mujeres?

   b) ¿cuál es la probabilidad de que la directiva este compuesta por dos hombres y una mujer?

c) En una fabrica se producen 2 colores de poleras, rojo y verde, además se producen 4 colores de pantalones, amarillo, verde, azul y rojo.

   a. ¿cuál es la probabilidad de que el color de la polera sea distinto al del pantalón ?

   b. ¿cuál es la probabilidad de que el color de la polera sea igual al del pantalón ?

ANEXO 10: CUESTIONARIO DE APRECIACIÓN

CUESTIONARIO DE APRECIACIÓN

Nombre:

Responde las siguientes preguntas de acuerdo a tu experiencia en las clases de probabilidades.

1. ¿son divertidas para ti las matemáticas? ¿por qué?

2. ¿Cómo fueron para ti las ultimas clases de matemática? ¿explica?

3. ¿te sentiste a gusto en las clases de matemática? ¿por qué?

4. ¿Son más cosas las que te gustan de las clases de matemática de las que no te gustan?

5. ¿crees que las matemáticas son útil en la vida cotidiana? ¿por qué?

6. ¿es útil para ti el trabajo en equipo? ¿Por qué?

7. ¿te sientes a gusto cuando encuentras por tu cuenta alguna regularidad?¿por qué?

8. ¿Considerar que el profesor de probabilidades es importante?

9. ¿sientes que aprendes de los errores que cometes en matemática? ¿por qué?

10. ¿Te gustaron las actividades realizadas en clases?, ¿por qué?

11. ¿te gusto la metodología de trabajo, crees que fue diferente? ¿por qué?

Muchas gracias por su participación