



**FACULTAD DE EDUCACIÓN**  
**Escuela de Educación en Matemática**  
**e Informática Educativa**

## **LO CUADRÁTICO VÍA ANALOGÍA DE MODELACIONES. UN ESTUDIO DE CASO.**

SEMINARIO PARA OPTAR ALGRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:

ARCE IBARRA, SEBASTIAN N.  
GUERRERO GODOY, NICOLE R.  
ORTIZ MENDEZ, NATALIA C.

PROFESORA GUÍA:

LEONORA DÍAZ MORENO

SANTIAGO, CHILE

2014



## ***Agradecimientos***

Primero que todo, agradecemos en profundidad a la Dra. Leonora Díaz Moreno por orientarnos en este proceso de investigación. De igual forma, a Daniela González y Patricio Rodríguez por darse el tiempo de ayudarnos y cooperarnos en este arduo proceso. También damos gracias a nuestro Dios quien nos ha dado la vida, dones y destrezas para ejercer y amar esta linda profesión. Finalmente a nuestros grandes pilares, quienes estuvieron presentes todos estos años de formación docente, dándonos incondicional apoyo en todo aspecto; nuestras familias...

# ÍNDICE

RESUMEN .....	7
ABSTRACT.....	9
INTRODUCCIÓN .....	11
CAPÍTULO I: <i>PROBLEMÁTICA</i> .....	14
<b>1. Problemática</b> .....	15
<b>1.1 Antecedentes empíricos observados</b> .....	15
<b>1.2 Planteamiento del problema.</b> .....	17
<b>1.3 Evidencias</b> .....	18
<b>1.4 Preguntas de investigación</b> .....	20
<b>1.5 Objetivo general.</b> .....	20
<b>1.5.1 Objetivos específicos</b> .....	20
<b>1.6 Hipótesis.</b> .....	20
<b>1.7 Justificación.</b> .....	21
<b>1.8 Limitaciones</b> .....	22
CAPÍTULO II: <i>MARCO TEÓRICO</i> .....	24
<b>2.1 Aprendizajes.</b> .....	25
2.1.1.- <i>El aprendizaje con-vivencia.</i> .....	25
2.1.2. <i>El aprendizaje por etapas: el cognoscitivismo</i> .....	27
2.1.3. <i>El aprendizaje y su concepción genético-cognitiva.</i> .....	27
2.1.4 <i>El aprendizaje como construcción social: Lev Vygotsky</i> .....	28
2.1.5 <i>El aprendizaje por descubrimiento: Jerome Bruner</i> .....	29
<b>2.2 Modelación</b> .....	30
2.2.1 <i>Visiones de modelación.</i> .....	30
2.2.2 <i>La modelación como registros de representación semiótica</i> .....	31

2.2.3	<i>Una Modelación Matemático-Aplicada</i> .....	33
2.2.4	<i>Modelación-con-vivencia</i> .....	33
<b>2.3</b>	<b>Marco Conceptual del Estudio</b> .....	33
<b>2.4</b>	<b>Analogías</b> .....	35
<b>2.5</b>	<b>Iconicidad</b> .....	35
	<b>CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO</b> .....	39
	<b>MARCO METODOLÓGICO</b> .....	39
<b>3.1</b>	<b>Enfoque y metodología</b> .....	40
<b>3.2</b>	<b>Universo y muestra</b> .....	40
<b>3.3</b>	<b>Fundamentación y descripción del diseño</b> .....	41
<b>3.4</b>	<b>Descripción del diseño.</b> .....	42
<b>3.5</b>	<b>Los instrumentos a emplear</b> .....	43
<b>3.6</b>	<b>Validez y confiabilidad cualitativa.</b> .....	46
	<b>CAPÍTULO IV</b> <i>Recogida de la información</i> .....	48
<b>4.1</b>	<b>Recogida de la información.</b> .....	49
4.1.1	Las etapas y lo que se efectuó en cada una de ellas. ....	49
<b>4.2</b>	<b>Facilitadores y obstaculizadores</b> .....	50
<b>4.3</b>	<b>Análisis de la información</b> .....	51
	<b>CAPÍTULO V : ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN</b> .....	53
<b>5.1</b>	<b>Análisis de los desarrollos de los estudiantes.</b> .....	54
<b>5.2</b>	<b>Reactivo Luna</b> ( <i>conjeturas, respuestas y análisis</i> ).....	54
<b>5.3</b>	<b>Reactivo Tierra</b> ( <i>conjeturas, respuestas y análisis</i> ).....	88
<b>5.4</b>	<b>Análisis de Iconicidad de representación del fenómeno a través del dibujo</b> .....	120
<b>5.5</b>	<b>Análisis de modelación y analogías</b> .....	123

<b>Conclusiones</b> .....	126
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	128
<b>ANEXOS</b> .....	134
<b>Anexo 1: Instrumento Diseño Versión 1</b> .....	135
<b>1.2 Aplicación</b> .....	137
<b>1.3 Análisis de los resultados</b> .....	143
Anexos 2: instrumento diseño versión 2 .....	147
<b>APLICACIÓN</b> .....	150
<b>ANALISIS DE LOS RESULTADOS</b> .....	179
<b>Anexos 3: Instrumento diseño versión 3</b> .....	192
3.1Aplicación .....	197
3.2 Análisis .....	253
<b>Anexo 4: Instrumento Diseño Versión 4</b> .....	269
4.1Aplicación.....	272
4.2 Análisis .....	306

## RESUMEN

Este estudio reporta la analogía de diseños de experimentación que exploran fenómenos cuadráticos con base en modelación aplicado en estudiantes. La perspectiva teórica en el cual se enmarca el trabajo es la socioepistemología, que aborda el conocimiento desde una perspectiva social y contextualizada. Se comprende, así mismo, a la modelación como la acción de articular dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra. Se trata de una práctica que, llevada al contexto de aula, favorece establecer puentes entre las prácticas del entorno con la actividad matemática de los estudiantes en la escuela.

Los diseños son una modificación del grupo repertorio modelación convivencia, el cual propone provocar un aprendizaje significativo, retroalimentándolo desde y hacia el entorno, propio en todas las culturas. Está basado en una experimentación discursiva de la caída libre de un objeto, ya presente en los planes y programas del Ministerio de Educación pero, donde este es un acontecer, que aluden a mundos ficticios, creados para dar la impresión de figurar la realidad, situación que no siempre ha llevado a un entendimiento claro del fenómeno en estudio (Arrieta y Díaz, 2014). en el caso de los planes y programas se presenta la caída libre de un objeto a través de un gráfico con tiempos positivos y negativos.

Se trabajan tres modelos para la construcción de lo cuadrático: modelo tabular, modelo algebraico y modelo gráfico. En cada uno de ellos se pide predecir y conjeturar datos del fenómeno.

De los resultados obtenidos encontramos figuraciones del fenómeno respecto a su entorno, como por ejemplo hay equipos que representan la caída libre de una piedra a través del dibujo, con velocidad y trayectoria, como también algunos equipos se alejan del fenómeno, tomando en consideración sus experiencias y el entorno cultural. A su vez, los estudiantes despliegan

regularidades, relaciones y covariaciones en base al diseño presentado. Entre algunas herramientas más utilizadas para predecir por los educandos se constatan proporciones directas, regla de tres, puntos medios y puntos cuartos hasta el modelo gráfico donde se les pide la expresión algebraica del fenómeno y la constatación de los resultados anteriormente obtenidos, donde se produce una contradicción de datos en los estudiantes, generando en ellos la incertidumbre de si el fenómeno obedece a lo lineal. Se reporta finalmente que existe una descentralización del fenómeno y los alumnos logran analogar las redes de diseños de lo cuadrático, pudiendo así aplicarlo en cualquier situación independiente del fenómeno de caída y su contexto.



## ABSTRACT

This study reports the analogy of experimental designs that explore quadratic phenomena based on modeling applied to students. The theoretical perspective in which the work is framed is the socioepistemology, which addresses the knowledge from a social and contextual perspective. It is understood, also, to modeling as the action of articular two entities, with the intention of intervening in one after the other. It is a practice that led classroom context, favors build bridges between the practices of environment mathematical activity of students in school.

The designs are a modification of the repertoire modeling group-existence, proposes cause significant learning retroaliméntandolo and from the environment itself in all cultures. It is based on a discursive experiment of free falling object, already present in the plans and programs of the Ministry of Education but where this is happening, that refer to fictional worlds created to give the impression of inclusion reality situation which has not always been a clear understanding of the phenomenon under study (Arrieta and Diaz, 2014). in the case of plans and programs freefall of an object through a graph with positive and negative times is presented.

Tabular model, algebraic model and graphic pattern: three models for the construction of the square is working. In each is requested and forecast data guess phenomenon.

From the results found figurations of the phenomenon over their environment, such as there are teams that represent the free fall of a stone through drawing, with speed and trajectory, as some teams away from the phenomenon, taking into account their experiences and cultural environment. In turn students display regularities, relationships and covariances based on the submitted design. Among some tools used to predict learners direct proportion, rule of three, midpoints and fourth points are detected to the graphical model where they are asked the algebraic expression of the phenomenon and the realization of the

previously obtained results, where it produces a contradictory data on students, creating in them the uncertainty of whether the phenomenon is due to the linear. Finally reports that there is a decentralization of the phenomenon and students gain analogize networks as quadratic designs and can apply it to any independent status drop phenomenon and its context.

## INTRODUCCIÓN

Esta investigación nace del estudio de la tesis “hacia la construcción significativa de lo cuadrático con base en la modelación” para estudiar la analogía existente entre varios tipos de modelo, indagando los elementos precursores que lo constituyen y ver cómo es validado internamente en la escena del aula.

A partir de nuestra experiencia tanto del rol de alumnos como docentes, hemos observado la separación de la matemática del aula y la vida real, de este modo los estudiantes no encuentran el sentido de lo que se les enseña, y los educadores efectúan una vinculación de un escenario con una realidad inventada, obteniendo así que la matemática del aula sea distinta y distante de la matemática de lo cotidiano. Lo podemos encontrar reflejado en el caso de César, el cual es un niño que vende helado en las calles y se le hace común el realizar operatorias para entregar vueltos y vender su producto, pero cuando tiene ejercicios con el mismo contenido en una prueba él no es capaz de resolverlos (Arrieta, 2003).

Nos hemos percatado, que desde la enseñanza básica, los estudiantes suelen relacionar y utilizar la proporcionalidad directa en todo contexto en que se sitúen, más aun cuando se presenta un modelo tabular, sin importar si estas cumplen o no la definición de dicha proporción, ya que solo el análisis que ellos realizan en dicha tabulación es identificar si las variables aumentan o disminuyen, caracterizándolas así como una proporcionalidad directa, sin considerar la razón de cambio, dado que tal “modelación”, solo la ven como una tabla con números sin significados. Ahora bien, si los estudiantes se dan cuenta de la verdadera definición de proporcionalidad directa y no le sirve en su modelo tabular, no sabrán qué hacer.

Observando nuestra experiencia en las salas de clase podemos ver que los estudiantes separan las matemáticas en dos. Primero la matemática del aula:

Números complejos y no entendibles para los alumnos, los cuales no se pueden utilizar en su vida cotidiana, los cuales son evaluados en las guías y pruebas. Segundo la matemática útil en su vida diaria: ellos pueden organizarse para realizar ventas, entregando vueltos y realizando procedimientos con naturalidad; o calculan promedios para saber si pasaron o no de curso.

Sin dejar de mencionar que esta realidad no tan solo la observan los estudiantes y aplican los docentes; también se ve reflejada a nivel gubernamental, en las situaciones de los libros de texto de matemáticas (MINEDUC 2014), donde se muestran contextos irreales, no utilizables, manipulados y alejados de lo existente (Alsina 2007); como ocurre por ejemplo en el caso de lo cuadrático.

El mundo está en constante modificación, es por esto que debemos adecuarnos a las nuevas necesidades de la sociedad actual, las cuales como docentes favorezcan los aprendizajes significativos tanto en los colegios como en la vida de los alumnos. Es por esto que surge que a través de red de diseños de educación validados que favorezcan a este fin, obteniendo así que el alumno tenga un desarrollo socio-cultural mayor y entienda el sentido de las matemáticas, a través de la analogía de redes.

La principal herramienta que nos ayudará para lograr lo anteriormente aludido, es basarnos en la modelación, ya que esta propicia una dinámica distinta, con trabajo grupal, tomando lo socio epistemología como el pilar de los diseños.

En el primer capítulo se podrá observar el planteamiento de los antecedentes, con respecto a la investigación aquí expuesta, problemática del estudio, evidencias, justificación, limitaciones, hipótesis y objetivos (tanto generales como específicos).

En el siguiente capítulo se expone el marco teórico, donde reunimos información documental para confeccionar el diseño metodológico de la investigación.

Posteriormente, se aborda el marco metodológico, donde se expone el enfoque de investigación, universo y muestra, descripción de los diseños, validación y confiabilidad del estudio.

En el cuarto capítulo se da a conocer la recogida de la información, etapas, lo que se efectuó en cada una de ellas, facilitadores y obstaculizadores.

Posterior a este, se analiza el desarrollo de los estudiantes para luego, finalmente, concluir la investigación efectuada.

**CAPÍTULO I**  
***PROBLEMÁTICA***

## **1.- Problemática**

### **1.1 Antecedentes empíricos observados**

La enseñanza de las matemáticas dentro de los salones de clase es totalmente distante y distantes a las matemáticas presentes en nuestro diario vivir. Esto se debe a las prácticas socio-escolares tradicionales naturalizadas, creado principalmente por entidades gubernamentales que han propuesto lo que el docente debe exhibir a su alumnado. Las prácticas anteriormente mencionadas a pesar que no han propiciado los resultados esperados, no son en absoluto cuestionadas por sus autores. Por consiguiente, cabe mencionar que los estudiantes están cada vez más desinteresados en la asignatura, ya que el contenido de esta no parece ser de utilidad para la vida cotidiana, aunque se debe reconocer que para todo se requiere del conocimiento matemático (Alsina, 2007).

En oposición a las prácticas tradicionales, que sólo limitan la asimilación de lo cotidiano con lo matemático desde hace décadas, se incorporaron las prácticas de modelación. Estas prácticas se han llevado a cabo en otros países como Colombia y México, reportan: Díaz, Arrieta, Carrasco y Ávila (2013). Básicamente, las prácticas de modelación, consisten en modelar las situaciones cotidianas progresando en la comprensión del contenido en su esplendor.

Actualmente, la mencionada modelación esta introducida en los planes y programas del Ministerio de Educación y es un constituyente elemental de las habilidades del pensamiento estudiantil de los niveles educativos básicos. Mientras tanto, para los niveles educativos medios debe ser de relevancia la capacidad para formar y comprender situaciones planteadas.

Un análisis desarrollado por el informe PISA de la OCDE, indica que es imperioso brindarle circunstancias al alumnado para que tengan la oportunidad

de ejercer las prácticas de modelación en el aula. El análisis revela que alrededor de un 50% de los escolares en Chile no alcanzan el nivel 2 de competencia, en el cual deben ser capaces de dominar un razonamiento, una interpretación y procedimientos básicos con información explícita; mientras que tan sólo un 1% de los estudiantes se posicionan en los niveles de más elevado desempeño. Lo que quiere decir que los jóvenes no son capaces de descifrar situaciones engorrosas desplegando diversos modelos.

### IMAGEN N°1

**La parábola**

Ya sabías que existen distintos tipos de funciones, dependiendo de la expresión algebraica que la defina. Llamaremos **función cuadrática** a toda función del tipo  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a, b$  y  $c$  son números reales y  $a \neq 0$ . A la gráfica de esta función se le llama **parábola**.

A  $a$  y  $b$  se les llama **coeficientes numéricos** de  $x^2$  y  $x$ , respectivamente. A  $c$  se le llama **término independiente**.

Comencemos analizando la función  $f(x) = x^2$ . Hacemos una tabla de valores para calcular algunas imágenes y preimágenes (recuerda que las preimágenes son los valores de  $x$  y las imágenes, los valores de  $y$  o  $f(x)$ ).

### IMAGEN N°2

**¿De qué depende que la parábola se abra hacia arriba o hacia abajo?**

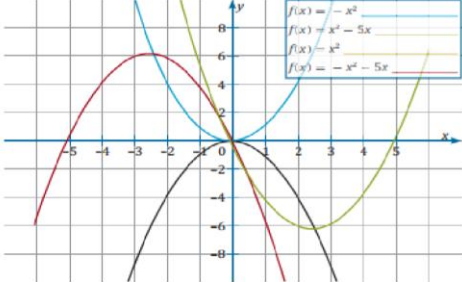
Mira y compara.

La parábola de color negro representa la función  $f(x) = -x^2$ .

La parábola de color verde representa la función  $f(x) = x^2 - 5x$ .

La parábola de color azul representa la función  $f(x) = x^2$ .

La parábola de color roja representa la función  $f(x) = -x^2 - 5x$ .



¿Qué término cambia en las fórmulas de las funciones negra y verde?  
¿Qué término cambia en las fórmulas de las funciones azul y roja?



Las imágenes exhibidas con anterioridad fueron extraídas del texto escolar de Matemática segundo año medio, entregado por el MINEDUC (Ediciones SM Chile S.A., 2013). Se puede observar:

**IMAGEN 1:** Define a la función cuadrática como una expresión algebraica con ciertas características, donde existen coeficientes numéricos (a y b) y un término independiente (c) en  $(x)=ax^2+bx+c$ , pero no profundizó en la definición mencionando a que el conjunto de un coeficiente numérico con " $x^2$ " se llama término cuadrático y que la unión de un coeficiente numérico junto a " $x$ " se llama término lineal.

**IMAGEN 2:** La pregunta ¿De qué depende que la parábola se abra hacia arriba o hacia abajo? alude al análisis de la concavidad de la parábola, mostrando cuatro gráficas con funciones cuadráticas distintas, diferenciándolas con colores diferentes en el plano cartesiano, pero no así en el recuadro resumen de colores. Luego pregunta ¿Qué término cambia en las fórmulas de las funciones negras y verdes? La cual puede confundir al alumnado, ya que el objetivo de la pregunta se refiere al análisis de la concavidad, debiendo expresarla de la siguiente manera ¿En qué cambia el coeficiente numérico del término cuadrático de las funciones negra y verde?, ya que si se expresa como "término" por si solo el alumno puede pensar que se refiere al término lineal de la función cuadrática como por ejemplo " $-5x$ ".

## 1.2 Planteamiento del problema.

Como bien se hizo mención anteriormente, en los antecedentes generales, en los textos escolares, y más aún, en el curriculum nacional, lo cuadrático se ejerce a través de las valorizaciones de expresiones algebraicas, en donde solo se debe reemplazar y calcular dichas expresiones, apartando el proceso cognitivo del estudiantado.

De este modo, los alumnos no logran modelar un caso real de lo cuadrático, sin embargo la tesis "Hacia una configuración de lo cuadrático con base en modelación" (González, Orellana y Rodríguez, 2014) valida un diseño con base en modelación, donde los alumnos son capaces de predecir lo cuadrático.

Es por esto que para continuar con dicho estudio, se desea buscar que los alumnos logren una analogía de redes de diseño, prediciendo así los sucesos independientes del fenómeno presentado determinando elementos precursores de lo cuadrático.

### **1.3 Evidencias**

Un estudio PISA/OCDE (2012) señala a las cuatro áreas relativas del área de las matemáticas, los cuales son números, álgebra, geometría y estadística; donde están conectadas por cuatro categorías, una de ellas la variación descrita como "cambio y relaciones", y las tres restantes son la "cantidad", "espacio y forma" e "incertidumbre y datos".

Los resultados de pruebas internacionales como PISA1 (2000), TIMSS2 (2003) y SERCE3 (2010) exponen escaso avance en pensamiento de cambio y relación, tanto en los aprendizajes de los alumnos como en la educación que despliegan los pedagogos en las salas de clase. Sumándose así también el informe de PISA (2012) donde solo hubo un 16,3% de aciertos para dicha categoría, según el informe Español. VOLUMEN I: Resultados y contexto.

Es importante mencionar que en el SIMCE, el eje de "interpretar y relacionar" se encuentra solo en el área de lenguaje y comunicación, no así en matemáticas, ya que en esta área las habilidades a observar son los de Conocimiento, Resolución de problemas rutinarios y Razonamiento (Informe SIMCE 2012).

Las habilidades cognitivas que busca la PSU (admisión 2013) son reconocer; comprender información en el contexto matemático; aplicar los conocimientos matemáticos; analizar, realizar síntesis y evaluar. Un ejemplo que nos puede verificar el análisis de variación en dicha prueba es el siguiente (DEMRE.cl).

La tabla adjunta muestra el consumo de electricidad (medido en kWh) de una casa, en algunos meses del año pasado. De acuerdo a la tabla, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s), con respecto al consumo?

I) La mayor variación entre meses consecutivos, en valor absoluto, se produjo entre agosto y septiembre.  
 II) La variación mensual, en valor absoluto, entre mayo y junio es la misma que entre junio y julio.  
 III) En noviembre no hubo consumo.

A) Solo III  
 B) Solo I y II  
 C) Solo I y III  
 D) Solo II y III  
 E) I, II y III

Mes	Consumo
mayo	310
junio	370
julio	430
agosto	400
septiembre	330
octubre	320
noviembre	320

**COMENTARIO**

Esta pregunta apunta al contenido de lectura e interpretación de tablas y requiere del postulante la capacidad de comprender la información entregada para determinar la veracidad o falsedad de cada una de las afirmaciones.

De la tabla se pueden obtener todas las variaciones en valor absoluto entre meses consecutivos. En efecto, la variación, en kWh, entre los meses mayo y junio es 60, entre junio y julio es 60, entre julio y agosto es 30, entre agosto y septiembre es 70, entre septiembre y octubre es 10 y entre octubre y noviembre es 0.

Así, la mayor variación fue en agosto y septiembre, por lo tanto la afirmación en I) es verdadera. Ahora, la afirmación en II) es verdadera, ya que la variación mensual en valor absoluto entre mayo y junio es igual a la variación mensual en valor absoluto entre junio y julio. Por último, la afirmación en III) es falsa, porque la tabla muestra que el consumo de noviembre fue de 320 kWh.

Por lo anterior, la opción correcta es B), la que fue marcada por el 64% de quienes abordaron el ítem, resultando éste fácil. La omisión fue de un 21%.

El distractor más elegido fue C) con un 5%, probablemente los postulantes que lo escogieron hayan considerado que como los consumos son distintos, entonces sus variaciones son distintas, además como entre octubre y noviembre no hubo variación interpretan que no hubo consumo en noviembre.

## **1.4 Preguntas de investigación**

En base a los antecedentes observados, las preguntas orientadoras de esta Investigación son:

- ¿Los estudiantes comparando redes de diseño de modelaciones, predicen lo cuadrático vía analogía?
- ¿Los alumnos son capaces de detallar elementos precursores de lo cuadrático?
- ¿Cómo entra en la escena del aula un diseño validado internamente?

## **1.5 Objetivo general.**

Determinar elementos precursores de lo cuadrático vía analogía red de modelos.

### **1.5.1 Objetivos específicos.**

1. Relacionar los modos de predecir lo cuadrático en dos redes de modelos.
2. Validar (internamente) en el aula diseños intencionados a la emergencia de lo cuadrático.
3. Describir elementos precursores de lo cuadrático.

## **1.6 Hipótesis.**

Trabajar con dos diseños didácticos de lo cuadrático con base en modelación, propiciando analogías entre ellos, favorece que los estudiantes aprehendan lo cuadrático y, en particular, predigan un suceso, independiente del fenómeno en el que se presenta una variación de tipo cuadrático.

## 1.7 Justificación.

Como bien se hizo mención en párrafos anteriores, este estudio se basa en la tesis “Hacia la construcción significativa de lo cuadrático con base en modelación” (González, Orellana y Rodríguez, 2014) la cual basándose en Arrieta y Díaz (2013) buscan dar la importancia de modelación para la construcción de lo matemático, o bien, el entendimiento de lo cuadrático.

En toda la sociedad y en diversas profesiones, se hace uso de modelación, como por ejemplo el caso planteado por Arrieta y Díaz (2013):

*“Un cardiólogo escudriña gráficas para dictaminar el estado de salud del corazón de sus pacientes, en lugar de observarlos directamente. Esta es una práctica recurrente en su profesión.”*

De igual forma González, Orellana y Rodríguez (2014) plantean:

*“El ingeniero en electrónica analiza gráficas del osciloscopio para determinar el funcionamiento de un componente electrónico...” “El ingeniero pesquero examina tablas de datos de cultivos de fitoplancton y zooplancton para determinar los parámetros ambientales óptimos para la supervivencia y desarrollo de los organismos...” “El ingeniero civil calcula la flexión de una viga a partir de una ecuación...”, y así otros tantos casos de profesiones el cual, el uso de modelación es una herramienta muy útil y factible para su labor, en donde solo basta observar una tabla de valores, gráficos, a los cuales les dan sentido según respecta.*

Sin embargo, podemos observar que las matemáticas aplicadas en el aula e impartidas por el MINEDUC son, según Alsina (2007), idealizadas, siendo sus ejemplos y problemas inventados, lejanos a la realidad, manipuladas, entre

otros; siendo uno de ellos caída de lo libre, en donde, por ejemplo, los valores de tiempo de caída es negativo.

Si bien González, Orellana y Rodríguez (2014) demuestran la importancia de modelación para la construcción del entendimiento de lo cuadrático, la presente investigación da a conocer la búsqueda de la analogía de redes de modelos, para así poder validar que mediante la modelación y este reactivo, los alumnos son capaces de predecir sucesos independiente del fenómeno, ya que se superponen sobre estas redes, logrando mediante la comparación, recuerdos y ensamblaje el razonamiento, comprendiendo este nuevo contenido (Pesquera, 2014).

### **1.8 Limitaciones**

Esta tesis esta efectuada para estudiantes de enseñanza Científico-Humanista de primer año Enseñanza Media por la dificultad y contenidos mínimos que necesitan para comprender lo cuadrático englobando la mayor cantidad de estudiantes de distintos colegios pero del mismo nivel.

El diseño se construyó para que fuera realizado:

- De forma manual: ya que en los colegios donde se aplicó este reactivo tienen un solo laboratorio para todo el establecimiento, el cual debe ser solicitado por ejemplo en uno de ellos, con dos semanas de anticipación y pocas veces se encuentran disponibles. A su vez, los laboratorios están distribuidos para que dos personas trabajen por computador.
- En un tiempo mínimo: se necesita al menos entre cuatro a seis horas pedagógicas por cada reactivo para que así logren conjeturas, predicciones y modelamiento.

Existen factores externos en los colegios que perturbaría el encadenamiento de los diseños, como por ejemplo:

- Que se realicen evaluaciones y trabajos atrasados.
- Que haya una falta de docentes y cambio sin previo aviso.
- Que se realice el Plan Integral de Seguridad Escolar Francisca Cooper (ensayo o ejecución de la misma).
- Que ocurran actividades no programadas por parte del establecimiento.
- Que el académico sufra de enfermedad, accidente o fallecimiento.
- Que se realice reflexión cristiana, orar o salida a la capilla.
- Que los alumnos procedan a realizar ensayo SIMCE o PSU.
- Que citen a reunión extra programática del centro de padres o alumnos.
- Que haya corte de agua en el establecimiento por un periodo prologado.
- Que ocurra un accidente a nivel de construcción en el establecimiento (incendio, derrumbe, etc.).
- Que haya paro de profesores o de alumnos en el establecimiento.
- Se define el orden de aplicación de los diseños, en función del nivel escolar en que se aplique.

**CAPÍTULO II**  
***MARCO TEÓRICO***



En el presente capítulo se darán a conocer los principales sustentos en los cuales se basa nuestro estudio, aludiendo a diferentes autores que investigan la implicancia e importancia de la Modelación en la Educación Matemática. A su vez el aspecto sobre el aprendizaje y lo significativo que se ligue desde y hacia el entorno.

## **1.9 Aprendizajes.**

### **2.1.1 El aprendizaje con-vivencia.**

Una perspectiva teórica que considera el fenómeno de aprendizaje como un proceso global, que abarca tanto las circunstancias sociales como los mecanismos de institucionalización del conocimiento, es la socioepistemología.

Cantoral y Farfán (2003) caracteriza la socioepistemología como:

Una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología plantea el examen del conocimiento en sus determinaciones sociales, históricas y culturales (Cantoral y Farfán, 2003, p. 139).

En base a lo establecido con anterioridad, podemos interpretar la socioepistemología como la unión del saber teórico con la experiencia, la cotidianidad y el entorno de un individuo, en donde este debe ser capaz de identificar, comprender y aplicar el conocimiento en sí, que se presentan fuera

del aula (ya que el entorno es lo relevante del aprendizaje). Es decir, el conocimiento es el resultado de las adaptaciones de lo teórico y lo que rodea al alumno, ya que esta es la base para crear un aprendizaje dentro de lo cotidiano, porque sin estos fenómenos no tendríamos que enseñar. Por ejemplo los grandes matemáticos lograron crear formulas y demostraciones, pero todos se basaban en el análisis de un suceso; pero si ellos no hubiesen tenido una situación cotidiana, no hubiesen podido crear dicho saber matemático. Por lo tanto siempre es primero el fenómeno y luego el aprendizaje, entonces nos podríamos preguntar ¿por qué la mayoría de los docentes separan estos dos factores, e incluso desplazan en totalidad el primero? La respuesta es que se olvidan de la modelación.

Generalmente, se interpreta el conocimiento, y más aun el aprendizaje, como un individuo aislado de nuestro diario vivir, adquiriendo sentido por sí mismo. Llevando esto a la realidad actual, en el aula se separa el conocimiento matemático del entorno del alumno y este debe acatar el conocimiento presentado por el profesor, donde solo se mecaniza el conocimiento, por más que este no se encuentre problematizado en la vida cotidiana.

Wenger (2001), señala que los instrumentos de evaluación hacia el estudiantado es de carácter individual, en donde cualquier colaboración siendo ya del docente o de otro estudiante se estigmatiza como “deshonesto”, conllevando, como consecuencia negativa, a que los estudiantes tengan una desmotivación por el aprendizaje, ya que la mayoría de los educandos consideran como poco interesante al no realizar aplicación para su vida.

Como bien se mencionó anteriormente, el individuo forma conocimiento y aprende a través de los contextos históricos, culturales, cotidianos y teóricos o académicos; por lo tanto, el proceso de aprendizaje siempre debe ir contextualizado con respecto a la actividad del individuo. Según Arrieta (2003), a este grupo de escenarios, se le denomina como una “situación compleja”, ya

que es indudable que la red de acciones se superpone y juntan en el acontecer de la vida de una persona.

### **2.1.2 El aprendizaje por etapas: el cognoscitivismo.**

El cognitivismo es un proceso de andamiaje, donde el conocimiento por aprender a un nivel mayor debe ser significativo, y el alumno debe poseer una actitud positiva ante un nuevo conocimiento, por otro lado el trabajo del docente es crear situaciones reales de aprendizaje, es decir, que se debe basar en hecho reales que para el estudiante resulten relevantes. Por ende, podemos concluir que el cognoscitivismo es la teoría que se encarga de estudiar los procesos de aprendizaje por los que pasa un estudiante.

Los representantes de esta corriente son Jean Piaget, David Ausubel y Lev Vygotsky, quienes dan una perspectiva particular del proceso de enseñanza-aprendizaje, Manterola (2003) en su trabajo Psicología Educativa: conexiones con la sala de clases distingue: “al cognoscitivismo como una corriente psicológica de carácter científico que estudia el comportamiento humano desde la perspectiva de las cogniciones, o conocimientos” (Manterola, 2003, p. 112).

### **2.1.3 El aprendizaje y su concepción genético-cognitiva.**

El modelo Piagetiano establece que el aprendiz construye sus conocimientos en etapas, mediante una reestructuración de esquemas mentales, desplazándose por fases denominadas por el autor como: asimilación, adaptación y acomodación, llegando a un estado de equilibrio. Es un proceso de andamiaje, donde el conocimiento nuevo por aprender a un nivel mayor debe ser altamente significativo y el alumno debe mostrar una actitud positiva ante el nuevo conocimiento.

La labor básica del docente es crear situaciones de aprendizaje, es decir, se debe basar en hechos reales para que resulte significativo. Por lo cual, el cognoscitismo es la teoría que se encarga de estudiar los procesos de aprendizaje por los que pasa un estudiante.

#### **2.1.4 El aprendizaje como construcción social: Lev Vygotsky.**

Bajo esta teoría se plantea que el aprendizaje de las personas únicamente puede desarrollarse y explicarse en términos de interacciones sociales. En términos de su autor, el desarrollo consiste en la interiorización de instrumentos culturales que de manera inicial no nos pertenece, sino que pertenecen al grupo humano en el cual nacemos de donde se transmiten los productos culturales a través de interacciones.

Aunado a lo anterior, Vygotsky observa que “en el punto de partida están las estructuras orgánicas elementales, determinantes por la maduración. A partir de ellas se forman nuevas, y cada vez más complejas, funciones mentales, dependiendo de la naturaleza de las experiencias sociales del niño” (Lucci, 2006). Se puede observar entonces, que el proceso de desarrollo sigue dos ejes a saber: uno de carácter biológico y otro de carácter social.

Vygotsky distingue la existencia de un espacio, brecha o diferencia entre las habilidades que ya posee el niño(a) y lo que pudiese llegar a aprender mediante la guía o apoyo que le puede proporcionar un adulto o un par más aventajado. A esta brecha se le denomina Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). (cfr. op. City, 2014)

### **2.1.5 El aprendizaje por descubrimiento: Jerome Bruner.**

El autor plantea que si se contextualiza el aprendizaje dándole un sentido para el estudiante (según su entorno), se transforma en un tipo de motivación por sí sola, logrando que con la búsqueda del conocimiento, descubra el nuevo contenido a aprender. De dicha forma, al buscar, despierta la curiosidad del individuo, llevándolo a que llegue hasta el final, logrando un aprendizaje del contenido, a lo que se transforma en un conocimiento ya adquirido.

Dentro de los diversos autores que se abordan para la realización de esta tesis, se incluye a Bruner ya que afrontamos las siguientes cuestiones de interés: ¿Cómo se aprende? y ¿Cómo se puede estimular o motivar el aprendizaje de un estudiante?.

Desde este prisma, el autor plantea que el aprendizaje más significativo es el desarrollado por medio del descubrimiento, donde la exploración es motivada por la curiosidad de las personas. El autor distingue tres procesos en el aprendizaje: la adquisición de una nueva información, la transformación del conocimiento y la pertinencia del conocimiento adquirido.

Bruner denomina este proceso como Teoría de la Instrucción, donde el factor cultural es fundamental y juega un papel decisivo en la arquitectura de la vida de las personas. Es desde allí donde se genera y valida el tipo de información que se considera valiosa y, por tanto, se jerarquiza.

Manterola (2003) explica que Bruner consideró los tres procesos antes mencionados como tres sistemas para procesar la información; son tres instrumentos que los seres humanos utilizan para construir modelos de su mundo.

## **2.2 Modelación.**

### ***2.2.1 Visiones de modelación.***

A continuación, daremos a conocer las diversas visiones más conocidas sobre la modelación de manera generalizada, ya que esta es la representación de lo real, la cual ha confirmado ser una buena manera para mostrar el origen verdadero de la modelación matemática, en grandes rasgos.

Primeramente, Biembengut (2011), nos dice y muestra que en Brasil identificó 812 trabajos (entre 1979 y 2008) cuyos objetivos eran dar a conocer a la modelación como herramienta para alcanzar el aprendizaje significativo. A su vez, analiza 64 producciones de modelación matemática en enseñanza media, indicando prácticas en la sala de clases y estudios teóricos, teniendo como pilar cuatro elementos: “a saber”, “motivación”, “actividades y contenidos” y “referencias y consideraciones”. Así se concluye la modelación matemática como método de enseñanza y de investigación, como alternativa pedagógica de la matemática y como ambiente de aprendizaje.

La segunda postura a comentar, es de Blomhøj (2004), quien clasifica las 15 ponencias presentadas en el Grupo de Trabajo 21 de ICME 11, en las seis aproximaciones que distinguen Kaiser y Sriraman (2006) a saber:

Realista, que recurre al ciclo de modelación para analizar prácticas o problemas de la vida real;

Contextual, que pone el foco en estimular actividades de modelación;

Enseñanza aprendizaje matemático, centrada en el diseño y análisis de tareas de modelación con respecto a intencionalidades particulares para el aprendizaje estudiantil;

Epistemológica, que refiere al modelo realístico de la matemática y a la aproximación de la teoría antropológica de lo didáctico;

Cognitiva, que usa la estructura de los procesos de modelación para identificar las habilidades cognitivas necesarias para modelar una situación;

Socio-crítica, cuyo eje lo constituye la potencia formadora de la modelación para la reflexión, la crítica y el empoderamiento de los estudiantes. (Referencial “*Tesis Hacia una construcción significativa de lo cuadrático con base en la modelación*”)

Por tercero y último, según Aravena, Caamaño y Giménez (2008), comprenden la modelación como una opción pedagógica la cual visualiza diversos puntos como la expresión de ideas verbalmente y de manera escrita originaria de modelos. Estas visualizaciones forman capacidades como la cognitiva, metacognitiva y de formación transversal, concluyendo que modelar es tomar una situación y simbolizarla matemáticamente.

### **2.2.2 La modelación como registros de representación semiótica.**

La matemática es una ciencia que permite desarrollar y analizar un mismo concepto con diversas representaciones como lo son el razonamiento matemático, la resolución de problemas, la conceptualización, entre otras.

Hay tres tipos de representaciones, mental y computacional (interna), semiótica (la externa):

1. **Representación Interna:** esta se subdivide en la consiente y la no consiente. La primera se refiere a la mental la cual puede ser por ejemplo

a las respuestas de los alumnos, mientras que la no consciente se refiere a la parte computacional que es la función del tratamiento automático o casi instantáneo. Por ejemplo la codificación de la información: levantar la mano para un microbús, hacer callar poniendo un dedo en la boca, o poner cara de pucheros.

2. **Representación Externa:** en la parte consciente se logra obtener la representación semiótica, la cual es la función de objetivación, expresión y de tratamiento interno.

Para poder entender un poco más este ítems, daremos a conocer el concepto de semiosis: “cualquier forma de actividad o proceso que involucra signos, esta se da en la mente, por lo tanto se puede tener diversas representaciones según cada persona”, por ejemplo el fuego.

Un ejemplo de la modelación matemática en la representación semiótica, es el grafico de una función cuadrada, es decir la parábola. Para detallar esta modelación daremos a conocer el siguiente cuadro:

REGISTROS	REPRESENTACION DISCURSIVA	REPRESENTACION NO DISCURSIVA
<b>Multifuncional</b>	Lenguaje Natural (Ej.: escribir o hablar)	Figuras Geométrica (Ej.: dibujo o circulo)
<b>Mono-funcional</b>	Sistema de escritura (Ej.: algebra o lenguaje numérico)	Grafos Cartesianos (Ej.: tablas y gráficos)

Duval (1999) nos dice que el alumno logra un verdadero aprendizaje cuando se mueve entre los distintos registros matemáticos, por ejemplo si analizamos una función cuadrática, el alumno debería pasar por una representación de tabla de



datos  $[x | f(x)]$ , luego una representación gráfica [parábola], y finalmente por la expresión algebraica  $[f(x)=ax^2+b]$ . Para comprender a fondo, se debe asociar y construir estas tres representaciones.

### **2.2.3 Una Modelación Matemático-Aplicada.**

Esta modelación comienza con una contemplación de la realidad de un fenómeno, donde se saca algunas variantes, enfocándose en lo matemático. Para esto, se necesitan distintos instrumentos matemáticos. No podemos dejar de mencionar, que se requiere de una transposición didáctica en los libros de textos y planes de estudios oficiales, para descentralizar el saber matemático.

### **2.2.4 Modelación-con-vivencia.**

Esta modelación, se refiere a la matemática aplicada a la realidad, tomando distintos fenómenos reales cercanos al alumno y no situaciones artificiales que hacen que el estudiante se aleje del conocimiento real de las matemáticas, no tomándole la importancia, y alejándolos del aprendizaje significativo que se busca. Incluso, en algunos libros del Ministerio por inventar un fenómeno o maquillarlo se han equivocado en los datos haciendo que el alumno no comprenda ni el fenómeno ni el contenido (Alsina, 2007). Esta modelación se ve reflejada en países como Brasil y México.

## **2.3 Marco Conceptual del Estudio**

Para finalizar esta sección, se enuncian ciertos conceptos claves que se han usado en el desarrollo de este estudio:

1.- Modelación: la entenderemos como una práctica de articulación de dos entidades, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo (Arrieta y Díaz , 2014). Adicionalmente, Cordero (2006) afirma

que la modelación es, en sí misma, una construcción del conocimiento matemático que trasciende al objeto de estudio.

2.- Pensamiento variacional: es aplicable a una de las vías posibles para la organización del conocimiento y, asimismo, se postula y define una de las formas de interacción con el mundo (Varela, 2000).

3.- Socioepistemología: Una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfan, 2003).

4.- Figurar: Prácticas de construcción e interpretación de una figura de entidades ostensibles y no ostensibles- que se distinguen en un fenómeno de variación. (Carrasco, 2013).

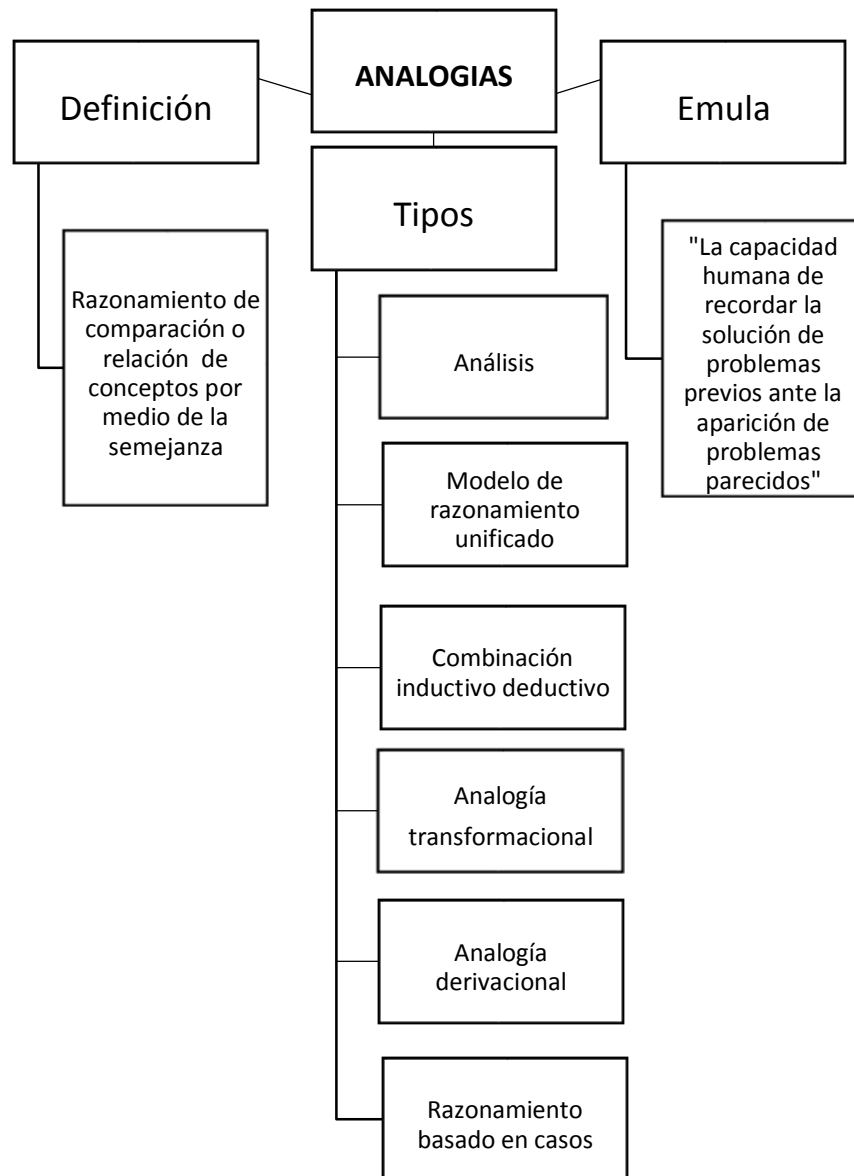
5.- Espacio epistémico de figuración: construir e interpretar figuras de fenómenos de variación, ponen a cada estudiante en interrelación compleja con el ambiente, con una figura y con un fenómeno. Se conforma un espacio epistémico de figuración que es a la vez operacional, experiencial y perceptual (Correa, 2011).

6.- Lo lineal: Se considera como la red de modelos matemáticos con fenómenos. Se caracteriza por una razón de cambio en el modelo tabular, una pendiente en el modelo gráfico y un coeficiente de la variable en primera potencia en el modelo analítico algebraico (Contreras, 2013).

7.- Lo cuadrático: Se considera como la red de modelos matemáticos con fenómenos. Se caracteriza e identifica por una razón de la razón de cambio en el modo tabular, un comportamiento parabólico en el modelo gráfico y un

coeficiente de la variable dependiente a la segunda potencia en el modelo analítico algebraico (Arrieta, 2003).

## 2.4 Analogías



Según el artículo "Aprendizaje en inteligencia artificial-2014", la analogía emula el razonamiento que utiliza la memoria de conocimientos previos para

comprender un nuevo contenido, ya que muchas veces esta memorización hace que se realice una incorrecta relación de los datos (Pesquera, 2014).

La analogía se puede subdividir en 6 formas distintas para llegar a ella:

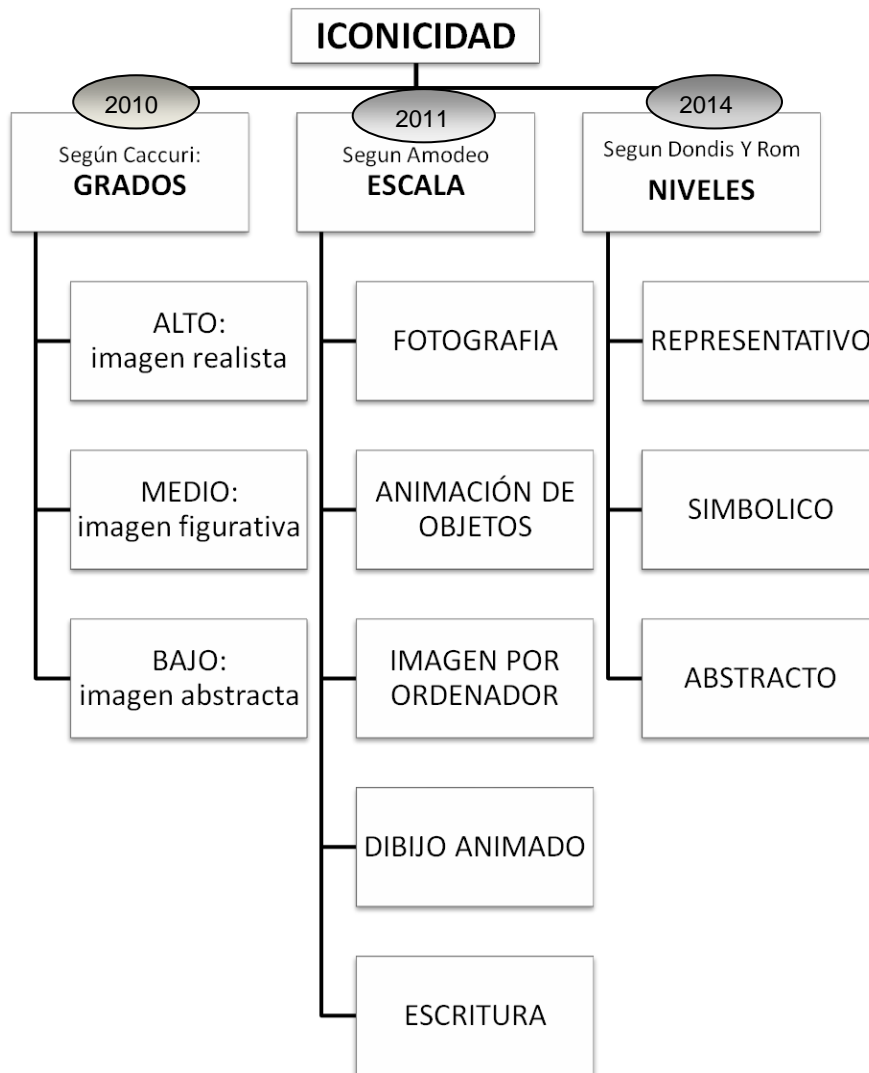
- **Análisis:** Generalización inductiva sobre la vinculación de distintas fuentes (en nuestro caso de diseños).
- **Modelo de Razonamiento Unificado:** Es cuando se logra observar de manera ensamblada las distintas fuentes.
- **Combinación inductiva deductiva:** Suponer que dos fuentes están relacionadas por medio de las deducciones analógicas.
- **Analogía transformacional:** Se realiza el “estado inicial”, el cual quiere decir que utiliza la memoria para recuperar las soluciones de problemas similares.
- **Analogía derivacional:** Toma el problema que hay que resolver como una meta, y lo parte en sub-metas, para así ir logrando subir jerárquicamente estas etapas hasta alcanzar el objetivo principal que es el resolver la problemática planteada.
- **Razonamiento basado en casos:** Toma las experiencias anteriores (el cual llamaremos casos) para resolver el problema propuesto.

## **2.6 Iconicidad**

En la modelación la figuración es cuando el estudiante logra representar de manera óptima a través de un dibujo el fenómeno representado de forma escrita en un enunciado, si lo evaluamos de esta manera se realiza un análisis general del dibujo, es por ello para ser más específico se trabajara con la iconicidad, la cual nos entregara herramientas para así describir si el alumno logro

interiorizarse en las redes de diseños, lo cual es fundamental para alcanzar la analogía. Esta modificación de lo figurar a la iconicidad, se puede realizar gracias a Aspee, Letelier, Loyola, Núñez, Toro y Urriola – Guía L. Díaz, los cuales validaron esta modificación.

Para comprender mejor este análisis de representaciones visuales se dará a conocer un esquema resumen con los tres autores trabajados, por orden cronológico comenzando por Caccuri que logro subdividir en tres grados la iconicidad en el año 2010, las cuales son alto, medio y bajo. Un año después Amodeo tomando como base el autor anterior, subdividió en cinco niveles icónicos utilizando términos similares a Caccuri, posteriormente en el año 2014 Dondis y Rom, tomaron los grados y niveles como igualdad y de estos se abstraieron escalas, las cuales son representativo, simbólico, abstracto, donde el representativo se describe como la mejor representación de iconicidad, llegando a una representación perfecta de la realidad.



**CAPÍTULO III**  
***MARCO METODOLÓGICO***

### **3.1 Enfoque y metodología**

Esta investigación consta de un paradigma cualitativo, el cual induce a la proactividad de la enseñanza con base en diseños didácticos, continuando con la validación interna aplicada en la tesis “Hacia la construcción significativa de lo cuadrático con base en modelación.”, (González, Orellana, Rodríguez, 2014) para, de este modo, llegar a analogías de redes de modelos.

“A este tipo de estudio Molina (2006) denomina investigación de diseños y experimentación. En este marco de investigación de proyecto y experimentación, el estudio que se presenta sigue una metodología de investigación guiada por una pregunta orientadora (Díaz y Soto, 2014)” (González, Orellana y Rodríguez, 2014).

### **3.2 Universo y muestra**

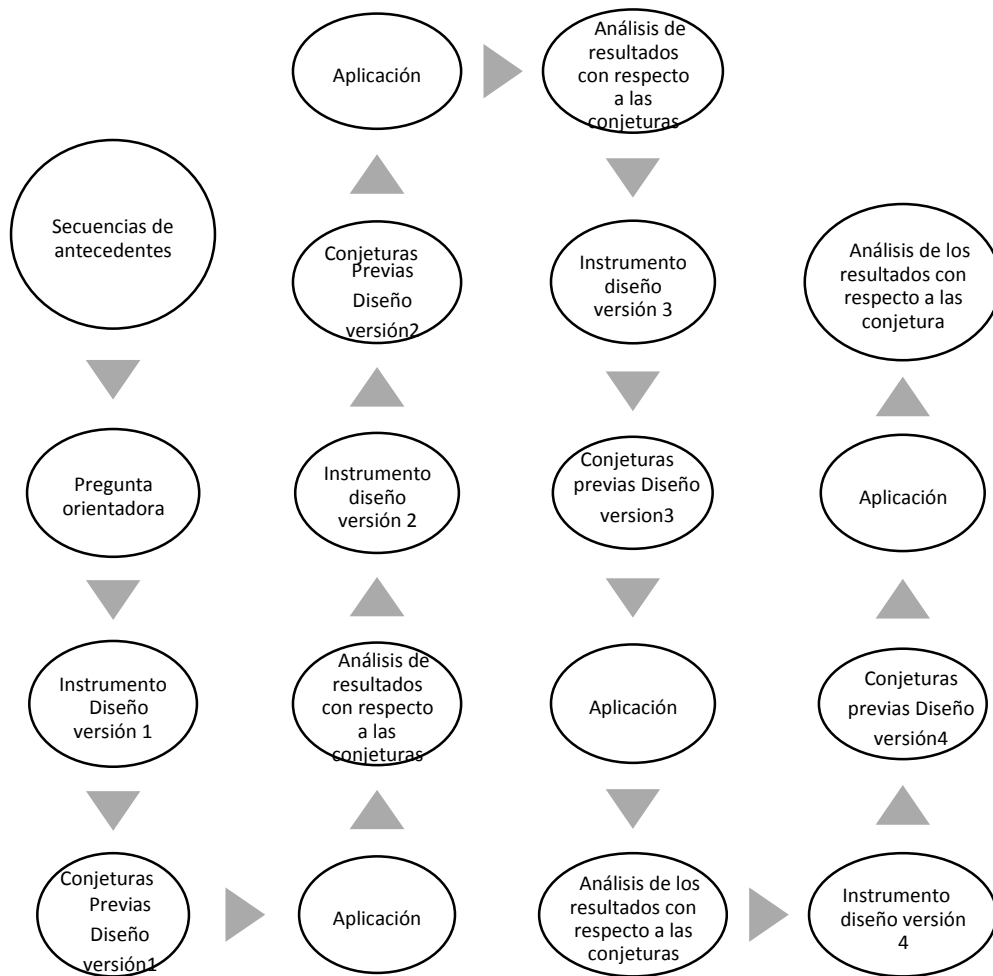
El universo de esta investigación es el estudiantado de enseñanza media de la región Metropolitana.

Se tuvo acceso a tres colegios de la región, ubicados en las comunas de Cerrillos, Maipú y La Florida. Las dependencias de estos son, particular subvencionado con un total de 705 alumnos y municipal, perteneciente a la corporación CODEDUC, con un total de 6500 alumnos, respectivamente. La primera institución educativa ofrece enseñanza pre-básica, enseñanza básica y enseñanza media científico-humanista, sin embargo, la segunda unidad técnica, solo predispone de esta última. Los autores de esta investigación perpetraron los diseños en cada establecimiento indicado. La muestra se conforma por equipos de cuatro a cinco estudiantes, de cursos de enseñanza media, totalizando 100 estudiantes, provenientes de los dos establecimientos.



### 3.3 Fundamentación y descripción del diseño.

La estructura de esta investigación es de carácter secuencial, en el cual se aplica diseños diversos permitiendo incluir focos de la enseñanza para los aprendizajes de lo cuadrático a través de analogías de diseños, dese la pregunta orientadora ¿Analogía en dos redes de modelos de lo cuadrático?



*Esquema 1: Estructura secuencial.*

### **3.4 Descripción del diseño.**

El estudio en cuestión, se inicia con el levantamiento de diseños “caída de los libres”, basándonos en la investigación “Hacia una construcción significativa de lo cuadrático, con base en modelación” (González, Orellana y Rodríguez, 2014), de la cual primeramente, se aplica en el nivel de tercer año medio, para observar el desarrollo del aludido instrumento y luego lograr una validación de dicho diseño. Luego se elaboran conjeturas previas a esta primera versión del diseño. Se aplica y se transcriben de modo detallado los desarrollos de los estudiantes disponiéndolos en tablas con las dimensiones reactivo versus desarrollos estudiantiles. Se analizan las respuestas de los estudiantes tanto desde la sensibilidad teórico-conceptual del estudio como desde la pregunta orientadora, estableciendo un primer conjunto de elementos precursores de lo cuadrático. Se rediseña esta primera versión del diseño dejando lo más primordial del instrumento, siempre teniendo en cuenta las preguntas en que los estudiantes puedan utilizar para hacer analogías posteriores a la toma de diseños.

Se aplica el nuevo rediseño, esta vez en otra institución educativa y nivel (segundo medio). En este proceso se comienza con el reactivo de la tierra. Se aplica y se transcribe de modo detallado los desarrollos de los estudiantes disponiéndolos en tablas con las dimensiones reactivo versus desarrollos estudiantiles. Se analizan las respuestas de los estudiantes tanto desde la sensibilidad teórico-conceptual del estudio como desde la pregunta orientadora, estableciendo un primer conjunto de elementos precursores de lo cuadrático. Esta vez al analizar los resultados y el proceso de los estudiantes en el aula educativa, se percibió que el estudiantado domina el concepto de caída libre (visto en la asignatura de física), por lo cual toda la actividad la relacionan a esta ciencia, descentralizándose de nuestro objetivo inicial.

Al observar que la mayoría de los estudiantes asocian el diseño con caída libre, se decide plantear un nuevo diseño, esta vez en un nivel menor, dado que por su nivel de enseñanza aun no ven nada asociado a lo cuadrático, caída libre, y cualquier contenido que pueda interferir con nuestro objetivo inicial. En este proceso se comienza con el reactivo de la luna. Se aplica y se transcribe de modo detallado los desarrollos de los estudiantes disponiéndolos en tablas con las dimensiones reactivo versus desarrollos estudiantiles. Se analizan las respuestas de los estudiantes tanto desde la sensibilidad teórico-conceptual del estudio como desde la pregunta orientadora, estableciendo un primer conjunto de elementos precursores de lo cuadrático, siempre teniendo en cuenta las preguntas en que los estudiantes puedan utilizar para hacer analogías posteriores a la toma de diseños.

### **3.5 Los instrumentos a emplear.**

El ligado de tres instrumentos del estudio se aplicó en el período comprendido entre Septiembre de 2014 hasta Octubre del mismo año.

#### **Instrumento Diseño Versión 1.**

*Desde la cima del puente de los enamorados de providencia (aquel donde las felices parejas dejaban un candado para simbolizar el amor eterno) cae un candado. Con un software especial, la persona obtuvo la siguiente tabla: tiempo de caída (en segundos) y desplazamiento de la piedra (en metros).*

El proyecto de inicio se basa en un diseño didáctico basado en modelación tomado del modelo de González, Orellana y Rodríguez, en donde los estudiantes deben figurar el fenómeno, dado que han de interpretar la situación. Junto a esto, “Se hacen presentes formas de conocer y de actuar que han construido basándose en sus estructuras biológicas, dotadas de autonomía operacional e insertas en los subsistemas biológicos y sociocultural” (Carrasco, Díaz, Buendía, 2014).

Este diseño se llevó a cabo en pequeños grupos de estudiantes, pretendiendo beneficiar la colaboración, el conflicto sociocognitivo y el desarrollo de ideas, entre otros aspectos.

Se hace uso del modelo algebraico para generalizar el tiempo para cualquier desplazamiento.

De igual modo se esgrime el modelo gráfico para figurar la caída libre en las dimensiones de tiempo versus distancia, y para orientar al alumnado que la gráfica varía según sus coordenadas.

Se emplea esquemas en donde los equipos entrelazan el fenómeno, los modelos, parámetros. Del mismo modo encuentren, una vez terminado los diseños, las analogías entre ellas.

Pregunta orientadora: ¿Los estudiantes determinan elementos precursores de lo cuadrático vía analogía de red de modelos?

La actividad implicada en este diseño lleva a los estudiantes, entre otras, a Dibujar; Conjeturar; Predecir; Numerizar; Figurar.

## **Instrumento Diseño Versión 2**

*Desde la cima del puente de los enamorados de providencia cae un candado. Con un software especial, se obtuvo la tabla que se encuentra a la izquierda del recuadro. Para cada segundo de tiempo transcurrido, la tabla muestra la distancia del candado (en metros).*

Se modifica el fenómeno inicial, eliminando la especificación del puente (aquel donde las felices parejas dejaban un candado para simbolizar el amor eterno),

para evitar que el estudiante se descentralice del fenómeno, y además no lleve al estudiantado en pensar en caída libre.

Se acorta el número de preguntas, para poder emplear dicha actividad en menos horas de lo requerido, ya que al ser un diseño muy extenso desmotiva al alumnado, siempre teniendo en cuenta las preguntas en que los estudiantes puedan utilizar para hacer analogías posteriores a la toma de diseños. Se modifica y reduce las tablas, expresando las tres en una sola, para así favorecer la cercanía al modelo gráfico y algebraico. Se modifica planos cartesianos graduados para graficar, de forma que no afectase la proporción elegida en el gráfico distancia versus tiempo.

Pregunta orientadora: ¿Los estudiantes determinan elementos precursores de lo cuadrático vía analogía de red de modelos?

### **Instrumento Rediseñado “Caída de los libres”.**

*Neil Amstrong, previo a su descenso en la luna, realizo el siguiente experimento: Dejó caer una piedra desde el Apolo 11 cuando este se encontraba a 81m de la superficie lunar.*

*Con un software especial Amstrong obtuvo la tabla que se encuentra a la izquierda del recuadro. Para cada segundo de tiempo transcurrido, la tabla muestra la distancia de la piedra (en metros).*

Observando que el estudiantado sigue ligando los diseños con caída libre, fuerza de gravedad y/o física, se aplica un rediseño final de “Caída de los libres” a estudiantes de primer año medio. Se plantea el análisis entre los modelos tabular, algebraico y gráfico en un nuevo contexto de caída, la superficie lunar propiciando la analogía encontrada en este diseño y el anterior.

Una vez tomado ambos diseños, se propicia al estudiantado observar las redes de modelos de los instrumentos para que así creen analogías. De este

modo se descentraliza el fenómeno de ambos contextos para constituir vía analogía de los modelos “lo cuadrático”.

Pregunta orientadora: ¿Los estudiantes determinan elementos precursores de lo cuadrático vía analogía de red de modelos?

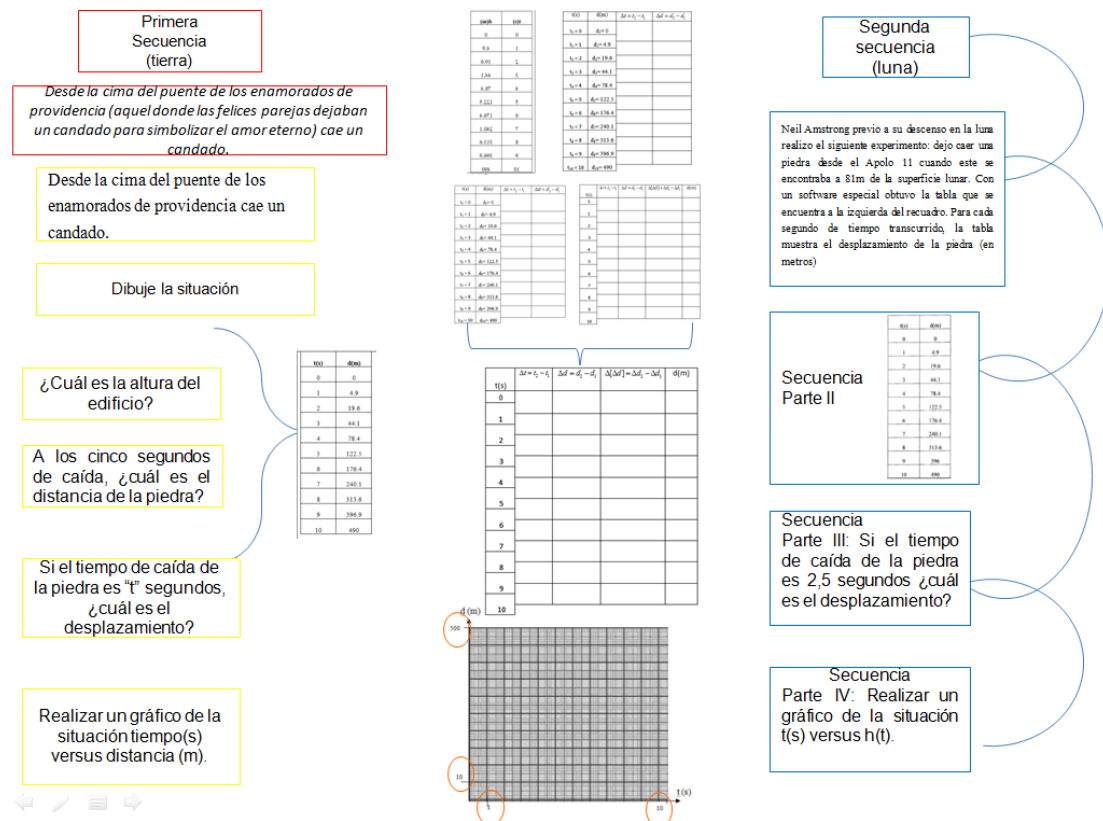


Figura 4: Diseños y rediseños

### 3.6 Validez y confiabilidad cualitativa.

Este proyecto presenta una validez interna, que está orientada a poner en discusión el conocimiento que se pone en juego por parte del equipo de estudio. De esta manera, se ponen en conflicto los conocimientos que son las raíces de

cada diseño, con los resultados obtenidos a lo largo de la investigación. Bajo el parámetro de ser un enfoque cualitativo, se toman tres preceptos claves para la validación del estudio.

- Triangulación de espacio: tres establecimientos educacionales de tres sectores distintos de la región metropolitana.
- Niveles combinados de análisis: análisis a nivel individual y a nivel grupal.
- Distintos investigadores: tres investigadores y la profesora guía.

En lo que respecta a la veracidad propia del estudio cualitativo, este pretende corroborar la cercanía entre el contexto del equipo de investigación, y el objeto de estudio, en este caso, el contexto de los estudiantes, dando como consecuencia una revisión entre los preceptos propuestos previamente y el análisis de los resultados de la investigación. Para esto, ocuparemos cuatro herramientas que guíen esta parte de la investigación:

- Descriptores de bajo nivel inferencial: los discursos presentes en las encuestas y diseños didácticos.
- Varios analistas: tres investigadores abocados al estudio de los discursos de los diseños.
- Revisión por otros analistas: análisis provenientes del proceso de evaluaciones formativas del Seminario de Grado y de la profesora guía.
- Datos registrados automáticamente: audios e imágenes del diseño tomado como antecedente (González, Orellana, Rodríguez, 2014).

**CAPÍTULO IV**  
**RECOGIDA DE LA INFORMACIÓN.**



#### **4.1 Recogida de la información.**

Luego de la toma de los instrumentos designados desde Septiembre a la fecha a diversos estudiantes de dos colegios subvencionados particulares y un liceo municipal de la región metropolitana de Chile, se recolecta la información adjudicada, para inmediatamente ser analizada.

##### **4.1.1 Las etapas y lo que se efectuó en cada una de ellas.**

*Fase 1: Aplicación de diseño 1.*

El instrumento inicial se aplicó a estudiantes de tercer año medio, cuyo objetivo era observar la apropiación del estudiantado con respecto al fenómeno de “caída de los libres”, de tal modo que logren figurar el fenómeno, sin anteriormente hacerles mención de lo que trata la actividad y su finalidad. Este diseño fue adquirido del estudio “Hacia una construcción significativa de lo cuadrático con base en la modelación”.

*Fase 2: Aplicación de diseño 2.*

Este nuevo diseño fue tomado a estudiantes de segundo año medio, con el objetivo de que el estudiantado figurara el fenómeno de la caída de un candado. Se alteró el enunciado, eliminando la especificación del puente (aquel donde las felices parejas dejaban un candado para simbolizar el amor eterno), para evitar que el estudiante se descentralice del fenómeno, y además no lleve al estudiantado en pensar en caída libre, fuerza de gravedad y/o física.

Por otra parte se remodelaron los modelos tabulares (reduciendo tres modelos tabulares hallados, en uno); gráficos, dado que al establecer la dimensión inicial y final del eje de las ordenadas induce una confusión en el estudiante al

momento de graficar; y preguntas con respecto al fenómeno, ya que al ser un diseño muy extenso, desmotiva al alumnado; siempre teniendo en cuenta las preguntas en que los estudiantes puedan utilizar para hacer analogías posteriores a la toma de diseños.

#### *Fase 3: Aplicación de diseño 3.*

Al observar que los estudiantes continúan asociando el fenómeno con caída libre, fuerza de gravedad y/o física, se aplica un nuevo diseño a estudiantes de primer año medio. Esta vez, la caída de una piedra en la luna, con el fin de observar la apropiación del estudiantado con respecto al fenómeno, sin anteriormente hacerles mención de lo que trata la actividad y su finalidad. Además se plantea el análisis entre los modelos tabular, algebraico y gráfico propiciando la analogía encontrada en este diseño y el anterior.

#### *Fase 4: Aplicación de diseño 4.*

Posterior al diseño 3 se aplica el diseño 2 modificado, agregándole una parte final con el objetivo de observar si el estudiante al analizar puede observar analogías pertenecientes en ambos reactivos. De este modo se descentraliza el fenómeno de ambos contextos para constituir vía analogía de red de modelos “lo cuadrático”.

### **4.2 Facilitadores y obstaculizadores.**

El primordial facilitador de esta investigación y aplicación de los diseños fue el tener como apoyo a una de las autoras de la tesis “Hacia una construcción significativa de lo cuadrático con base en modelación”, quien además de ser la docente a cargo del curso en tomar el diseño 1, fue quien nos orientó en cómo tomar los instrumentos, de tal modo de no influir en los resultados de estos.

En uno de los colegios tomado el diseño 3, un importante facilitador fue que el investigador que toma el instrumento es el docente a cargo del curso, por lo que el alumnado trabajó sin cuestionar dicha actividad. Además el tiempo demandado para tomar tal instrumento, no fue rebajado ni ajustado.

Durante el proceso que duró el presente estudio de caso, se exhibieron una serie de obstáculos los cuales son:

- En un comienzo los docentes a cargo del liceo municipal, no tuvieron inconveniente en ceder su tiempo en aula. Sin embargo, pensaron que solo se trataría de una clase, por lo que al enterarse que el tiempo demandado sería más del que especulaban, comenzaron a dificultar la continuación de la toma del instrumento.
- En los diseños 1 y 2, los estudiantes asociaron el fenómeno con caída libre, fuerza de gravedad y/o física, alejando el objetivo de predicción del estudio.
- En uno de los establecimientos, no hubo continuidad en la toma de instrumentos por diversos motivos, por lo que la toma de diseño fue a largo plazo.

### **4.3 Análisis de la información.**

#### *Procedimientos y variables.*

El modo a utilizar en el análisis de la información y variables es siguiendo la estructura correspondiente a el análisis de los datos es de tipo cualitativo y corresponde a una codificación abierta, esto quiere decir, consiste en atribuir categorías o conceptos a porciones del material bien circunscriptas y que presentan una alta unidad conceptual.

*“proceso analítico por medio del cual se identifican los conceptos y se descubren en los datos sus propiedades y dimensiones”* (Corbin y Strauss, 2002, p.110).

La pertinencia de establecer las variables se deben a la existencia de características en torno a la matemática en el aula, y del diseño didáctica que se desarrollará en el aula.

Estas son variables exógenas que intervienen como se mencionó anteriormente:

1. Conjeturas
2. Contraste de respuestas con conjeturas
3. Iconizar
4. Comprobar / verificar
5. Predicción
6. Modelación
7. Valoración de la matemática
8. Utilidad de la matemática
9. Importancia de la matemática.
10. Percepción de la clase de matemática
11. Conformidad con el aprendizaje en matemática
12. Valoración de la metodología utilizada por el profesor de matemática
13. Modificación de la clase de matemática
14. Valoración del descubrimiento (González, Orellana, Rodríguez; 2014)

## **CAPÍTULO V**

### ***ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN***

### **5.1 Análisis de los desarrollos de los estudiantes.**

Los análisis de los desarrollos del alumnado se realizan en contraste a los últimos reactivos aplicados en los establecimientos indicados en universo y muestra. Luego de realizar los respectivos análisis del primer diseño de “caída de los libres”, se imparte 3 rediseños que busca guiar al estudiante hacia analogías de red de modelos de lo cuadrático.

Una vez finalizado la toma de diseños, se elaboran análisis de una selección de los discursos difundidos en los instrumentos aplicado, en base a lo teórico – conceptual de esta investigación. Esto permite establecer elementos precursores de lo cuadrático y analogías en la red de modelos entre dichos diseños.

Cabe destacar que no todos los equipos responden todas las preguntas de los reactivos, de igual modo, existen respuesta poco o nada entendibles existiendo un gran esfuerzo por parte de los investigadores para entender su interpretación.

### **5.2 Reactivo Luna**

#### **TABLA CONJETURAS, RESPUESTAS Y ANÁLISIS**

En la siguiente tabla, daremos a conocer cuatro columnas clasificadas en conjeturas previas, respuestas, análisis y gráfico La tercera indicada, es con el fin de realizar un contraste entre las conjeturas previa (lo que se espera que responda el alumno) y respuestas (es el conteo de la muestra, según lo que exhibieron).

Finalmente, en la columna de gráfico, se representa gráficamente información cuantitativa de modo circular y por medio del porcentaje subdividido en 3 partes de diferentes colores:

- Logrado, representado por el color azul: el cual corresponde al porcentaje que consigo responder de forma correcta independiente de la herramienta utilizada
- Medio, representado por el color rojo: donde los alumnos alcanzaron un razonamiento matemático, pero no así llegando a la respuesta
- No logrado, representado por el color verde: los estudiantes no respondieron a la pregunta.

1.- Dibuje la situación.

### **Conjeturas**

En la pregunta inicial del reactivo luna, se presume que los estudiantes dibujen el fenómeno según sus experiencias, haciendo presentes “formas de conocer y de actuar que han construido basándose en sus estructuras biológicas, dotadas de autonomía, operacional e insertas en los subsistemas biológico y sociocultural” (Buendía, Carrasco y Díaz, 2014) . Esto, con la finalidad que el estudiantado logre figurar el fenómeno de la caída de un piedra desde el puente de los enamorados.

### **Respuestas**

Todos los equipos dibujan lo expresado en el experimento discursivo.

### **Análisis**

Todos los alumnos lograron comprender los enunciados dibujando lo esperado sin dejar de mencionar que algunos se enfocaron más en el contexto que el fenómeno.



2.- Elijan uno de los dibujos del grupo, recorten y peguen la situación.

### **Conjeturas**

Se presume que los estudiantes escojan el dibujo más representativo de la situación, destacando el fenómeno de la piedra con su respectivo tiempo y distancia de caída.

### **Respuestas**

Quince equipos figuraron la caída de la piedra. Sin embargo, puso mayor énfasis en los detalles del contexto, como por ejemplos los cráteres de la luna.

Un equipo plasmó el fenómeno de la piedra caída. Sin embargo, a esta se le aplicó fuerza y ángulo, no representando así el fenómeno indicado.

Cinco equipos lograron el objetivo de representar el fenómeno indicado, dibujando el contexto de la situación de manera equilibrada, centralizándose en la piedra y distancia.

### **Análisis**

El 24% de los equipos responde según lo conjeturado, seleccionando el dibujo más representativo de la situación focalizándose en el tiempo y distancia; esto integrando a los equipos que consideran trayectoria. Por otra parte el 71% de la muestra se enfoca en el entorno que rodea al fenómeno. Así mismo el 5% se descentralizo del suceso aplicando fuerza al fenómeno.





3.- Describa con sus palabras el experimento.

### **Conjeturas**

Se conjetura que el estudiantado describa el experimento con sus palabras, centrándose en el fenómeno de la caída de la piedra con su respectivo tiempo y distancia de caída.

### **Respuestas**

Dieciocho equipos consiguieron comprender, analizar y describir con sus palabras el experimento, logrando distinguir el tiempo y distancia recorrida del fenómeno mencionado.

Dos equipos consiguió comprender el experimento sin embargo no considero las variables del tiempo y distancia.

Un equipo sin respuesta.

### **Análisis**

El 85% de los equipos responden según las conjeturas previas, resaltando el fenómeno con su respectivo tiempo y distancia de caída. Por otra parte el 10% a pesar de que logran una descripción del experimento, no contestan según lo conjeturado, dado que dejan de lado el tiempo y distancia de la caída del fenómeno. Finalmente el 5% no lograron lo esperado, dejando la pregunta sin respuesta.



4.- A los cuatro segundos de caída ¿Cuál es la distancia de la piedra?

### Conjeturas

Se espera que los estudiantes observen la tabla, dado que esta pregunta se adquiere directamente de ella, reconociéndola como una herramienta que indica datos en covariación.

### Respuestas

Veinte y un equipos lograron utilizar la tabla adjunta para contestar la pregunta, reconociendo que a los 4 segundos había un desplazamiento 20,25 metros.

### Análisis

El 100% de la muestra lograron llegar a lo conjeturado, dado que utilizan la tabla como herramienta.



5.- Si el desplazamiento de la piedra es de 39,69 metros ¿Cuál es el tiempo de caída?

### Conjeturas

Se espera que los estudiantes observen la tabla, dado que esta pregunta se adquiere directamente de ella, reconociéndola como una herramienta que indica datos en covariación.

### Respuestas

Veinte y uno equipos respondieron según lo esperado, analizando la tabla adjunta, reconociendo que si el desplazamiento de la piedra es de 39,69 metros, el tiempo de caída es de 7 segundos.

### Análisis

El 100% de la muestra lograron llegar a lo conjeturado, dado que utilizan la tabla como herramienta.



6.- Si la piedra recorre 3,24 metros, luego 4,05 metros más ¿cuál es el tiempo de caída total que tiene en ese instante?

### Conjeturas

Al ser una respuesta directa de la tabla de la magnitud tiempo, se conjetura que el estudiantado distingue los datos como valores de covariación, encontrando el sumando entre 3,24 y 4,05 metros, para posteriormente ubicar el tiempo transcurrido en ese instante. Por consiguiente, se espera también, que los estudiantes requieran el uso de proporcionalidad directa, conocido también como regla de tres.

### **Respuestas**

Cuatro equipos expresaron que cuando la piedra recorre 3,24 metros y luego 4,05 metros más, el tiempo de caída será de 7,29 obteniendo este resultado con la suma de ambas distancias.

Nueve equipos lograron obtener lo esperado, que el tiempo de caída es de tres segundos.

Un equipo sumo ambas distancias y el resultado lo busco en la tabla obteniendo un tiempo de 5 segundos. Esto, lo pudieron deducir, calculando la suma entre 3,24 y 4,05 dando por resultado 7,29.

Siete equipos sin respuesta.

### **Análisis**

El 43% de la muestra lograron responder de manera óptima la pregunta en cuestión, utilizando como herramienta lo tabular. Por otra parte, el 5% calculó a través de la adición de ambas distancias para buscar dicho resultado en lo tabular, llegando a una respuesta incorrecta. A su vez el 19% se descentralizó de lo preguntado llegando así solo a la suma de ambas distancias Finalmente el 33% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



7.- Si el tiempo de caída de la piedra es 2.5 segundos ¿Cuál es el desplazamiento?

### Conjeturas

Se presume que el estudiantado al percatarse que el dato a encontrar no se encuentra directamente en la tabla, utilice proporción directa, también conocida como regla de tres, o bien promedia la distancia de los tiempos más cercanos, en este caso entre las distancia de los segundos 1 y 2, dado que 2,5 se encuentre en medio.

### Respuestas

Tres equipos realizaron una adición con la distancia de 1 y 2 segundos obteniendo  $3,24+0,81=2,43$ , dando este último resultado como la conclusión de su desplazamiento.

Un Equipo supuso que al tomar los cinco segundos y dividirlo en dos obtenía 2.5 segundo, por lo tanto si dividía la distancia de los 5 segundos en 2, lograrías obtener la distancia a los 2.5 segundos, calculando  $20,25:2=10,125$ , dando este último resultado como la conclusión de su respuesta.

Tres equipos escribieron que a los 2 segundos hay un desplazamiento de 3,24 y a este se le suma la distancia de  $\frac{1}{2}$  segundo, por lo cual ellos supusieron que había un desplazamiento de 2,025 obteniendo  $3,24+2,065=5,265$ , dando este último resultado como la conclusión de su desplazamiento.

Cuatro Equipos obtuvieron como resultado un desplazamiento de 4,05.

Seis equipos lograron reconocer a través de la expresión generalizada el desplazamiento era de 5,0625.

Dos equipos sumaron el desplazamiento de los 2 segundos con la mitad del desplazamiento del 1 ° segundo. Obteniendo  $3,24+0,405=3,645$  dando este último resultado como el desplazamiento total a los 2,5 segundos.

Un equipo sumo el desplazamiento a los 2 segundos restando la décima parte del mismo. Obteniendo  $3,24-(3,24:10)=2,916$  dando este último resultado como el desplazamiento total a los 2,5 segundos.

Un equipo sumo la constante (1,62) con la distancia de los 2 segundos obteniendo 4,86.

### Análisis

El 29% de la muestra logró responder a la pregunta adelantándose a lo algebraico, para así utilizarlo como herramienta. Por otra parte, el 71% de los equipos utilizaron las operatorias básicas y cálculos de puntos medios, acercándose así a lo conjeturado. Finalmente el 0% dejó sin respuesta la pregunta.



8.-Si  $\Delta d$  es 5,67 metros ¿Cuál es la distancia de la piedra a la superficie lunar?

### **Conjeturas**

Se espera que el alumnado para encontrar el valor que se les pide adicionen los valores de las diferencias de tiempo. Paralelamente, se conjetura que el estudiantado haga uso de proporcionalidad directa.

### **Respuestas**

Cinco equipos fueron capaces de responder utilizando lo tabular, el valor de la distancia de la piedra a la superficie lunar.

Un equipo sumó la distancia de los 4 segundos con 81 metros, dando como resultado 68,04 metros.

Un equipo sumó la distancia de los 3 y 4 segundos, obteniendo  $7,29 + 12,96 = 20,25$ .

Tres equipos reconocieron que cuando  $\Delta d$  es 5,67 metros, el desplazamiento es de 75,33 segundos.  $(81,00 - 5,67 = 75,33)$ .

Dos equipos al observar la tabla y hallar 5,67, observaron el siguiente  $\Delta d$ , observando que se trataba de 7,29 metros. Esto lo realizaron asociando a que la pregunta en cuestión se refería a encontrar el  $\Delta d$  que continuaba.

Un equipo sumo la distancia a los 3 segundos con la diferencia entre  $d_2$  y  $d_1$ , obteniendo  $7,29 + (3,24 - 0,81)$ , dando como resultado 9,72 metros.

Siete equipos sin respuesta.

### **Análisis**

El 24 % de la muestra lograron responder correctamente, utilizando como herramienta lo tabular, evadiendo lo conjeturado. Por otra parte, el 43% hizo uso de cálculo de adición de distintos valores llegando a resultados distintos al correcto. Finalmente el 33% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



9.- Si el tiempo transcurrido es 9,5 segundos ¿Cuál es el  $\Delta d$ ?

### Conjeturas

El dato mencionado no se adquiere de forma directa, por lo que se requiere que el alumnado aplique la tabla como presagiadora de los valores, considerando que los valores covarían. Se conjetura que los estudiantes utilicen proporción directa referida o no a la regla de tres simple. Adicionalmente, se conjetura que se puede adquirir el valor de  $\Delta d$  en el tiempo correspondiente a los 9 segundos, fraccionar en dos, y adicionarlo al valor del tiempo correspondiente a los 8 segundos.

### Respuestas

Cuatro equipos lograron dar una respuesta según lo esperado.

Dos equipos utilizaron la proporcionalidad directa para hallaron una respuesta, dicho procedimiento se desvía del contexto, dado que el fenómeno presentado no es lineal, pero ellos confundiendo porque ambos aumentan, olvidándose que no solo debe cumplirse dicho acontecimiento, sino que también debe haber una constante.

Siete equipos respondieron 15,39, el cual lo calcularon a través de los puntos medios.



Cinco equipos sin respuesta.

Dos equipos calcularon el desplazamiento de los 9,5 segundos en vez de  $\Delta d$  obteniendo 73,1.

### **Análisis**

El 19% de la muestra responde según lo conjeturado haciendo uso de lo tabular como herramienta de predicción, llegando a la respuesta correcta.

El 10% respondió según las conjeturas utilizando regla de tres.

El 47% encontraron la solución a través de lo lineal, calculando puntos medios.

Finalmente el 24% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



10.- Si el tiempo de caída es 5,18 s ¿Cuál es la distancia de la piedra? Expliquen cómo lo obtuvieron.

### **Conjeturas**

Este no corresponde a un dato que se pueda conseguir de manera directamente de la tabla. Se requiere que el alumno prediga empleando los valores que se han utilizado previamente. La finalidad de esta pregunta es estipular cómo los estudiantes se aproximan al modelo algebraico de lo

cuadrático, considerando los obstáculos presentes en aquel objetivo, se especula que acudirán a lo lineal.

### **Respuestas**

Cinco equipos lograron que el desplazamiento esperado de 21,73 metros.

Dos equipos ocuparon proporcionalidad directa suponiendo que el fenómeno es lineal.

Un equipo reconoció que a los 5 segundos transcurría 20,25 metros, luego dicho valor lo dividió en 5 y el resultado lo multiplicó por 4, obteniendo 16,2, concluyendo que al sumar este resultado con 4,05 más 4,779 obtienen como resultado 25,059.

Un equipo afirmando que a 29,16 se le resta 20,25 y el resultado se divide en 6 y por último el resultado se multiplica por 18 obteniendo como resultado 22,997.

Un equipo calculó la décima octava parte de 8,91 y luego el resultado le sumamos con 8,91 obteniendo como resultado 9,405 metros.

Un equipo realizó una diferencia entre la distancia de los 6 segundos y 5,18 obteniendo  $29,16 - 5,18$  dando como resultado 23,98.

Un equipo multiplicó  $5,18 \cdot 1,63$  obteniendo 8,3916, analizándolo obtuvieron 21,8538.

Un equipo sin respuesta.

### **Análisis**

El 24% de la muestra, logró responder la pregunta utilizando como herramienta lo algebraico, superando todos los obstáculos que se encontraban conjeturados. Por otra parte, el 71% utiliza resta, división y regla de tres para responder la

pregunta, llegando a un resultado incorrecto Finalmente el 5% de los equipos no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



11.- Si el tiempo de caída de la piedra es "t" segundos ¿Cuál es el desplazamiento? Explique.

### Conjeturas

La finalidad de esta interrogante es determinar cómo los estudiantes se acercan al modelo algebraico de lo cuadrático, considerando los valores obtenidos en las preguntas precedentes. Por lo tanto, deducimos que recurrirán a lo lineal, en algunos casos utilizando la razón de la razón como pendiente. Otra posibilidad es que consideren los datos obtenidos en las preguntas anteriores, los vinculen con los datos expresados en la tabla dada y expresen, por ensayo y error, algún esbozo de la fórmula requerida que satisfaga dichos valores.

### Respuestas

Diecisiete equipos lograron llegar a la expresión esperada para obtener el desplazamiento en t segundos:  $d = t^2 \cdot 0,81$ .

Un equipo intrinco esta interrogante, relacionando su respuesta en cómo calcular  $\Delta t$ , siendo esta una constante. Mencionando que el desplazamiento a los t segundos siempre es 1.

Un equipo obtuvo  $m=0,81$  la cual hallaron probando de diversas formas y números, pero en con la variable del desplazamiento.

Dos equipos obtuvieron que a los  $t$  segundos el desplazamiento era  $d(m)$ , donde describieron el desplazamiento sin intervención del tiempo " $t$ ", dado que no comprendieron la pregunta en cuestión, deduciendo que esta hace referencia en cómo se denota la distancia en la tabla.

### Análisis

El 81% de la muestra obtuvo la respuesta según lo conjeturado, encontrando la expresión general a través de ensayo y error. Por otra parte el 19% se desenfocó de la pregunta, respondiendo en relación al tiempo, distancia y constante.

Finalmente el 0% dejó sin respuesta la pregunta.



12.- Usen la expresión general, obtenida en la pregunta anterior, para calcular los desplazamientos a los 3 y 5 segundos.

### Conjeturas

Se conjetura la utilización de la fórmula definida en la pregunta antecedente, supliéndolos valores requeridos, y se responde. Por otro lado, es probable que se utilice proporción directa, remitiéndose a un comportamiento lineal. Otra

viabilidad es que se obtenga través de puntos medios con los datos adquiridos de la tabla.

### Respuestas

Utilizando la expresión general, diecisiete equipos llegaron a que el desplazamiento de los 3 y 5 segundos, los cuales eran 7,29 mts. y 20,25 mts respectivamente.

Un grupo hace mención que al observar la tabla se puede obtener los desplazamientos de los tiempos 3 y 5.

Tres equipos sin respuesta.

### Análisis

El 86% de la muestra, respondió de manera correcta la pregunta, el 81 % de este utilizando como herramienta lo algebraico como solicita el enunciado mientras que el 5% restante no siguió las indicaciones utilizando lo tabular, pero llegando a la respuesta correcta. Finalmente el 14% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



13.- Contrasten los valores obtenidos usando su expresión general con los valores de la tabla. Levanten argumentos de las semejanzas y/o diferencias entre estos valores.

### Conjeturas

Se conjetura que los estudiantes adopten esta pregunta para verificar si los valores obtenidos con precedencia son correctos o no y así poder elaborar cambios en el registro algebraico determinado.

### Respuestas

Nueve equipos lograron comprender las semejanzas entre la expresión general y lo tabular. A pesar de errar en la  $\Delta d$  y no llegar a la constante.

Cinco equipos lograron comprender en totalidad las semejanzas entre la expresión general y lo tabular.

Un equipo recalco que ninguno presentaba semejanzas.

Un equipo menciona que no va a dar el mismo valor en la distancia.

Cinco equipos sin respuesta.

### Análisis

El 66% de la muestra logró responder la pregunta de manera correcta, pero solo el 24% de este reconoció el enunciado en su totalidad contestando adecuadamente. Por otra parte el 10% se descentralizo del enunciado llegando a una respuesta incorrecta. Finalmente el 24% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



14.- A la luz de esta comparación ¿Cambiarían algo de la expresión general?

### Conjeturas

Se estima que a través de comparación de datos, se reformule la ecuación encontrado se proporcionen claridades de su formulación adecuada. Por contraparte, se conjetura que algunos equipos no harán cambios a su ecuación por diversos agentes.

### Respuestas

Trece equipos llegaron a la conclusión de que no cambiarían nada de la expresión general.

Siete equipos sin respuesta.

Un equipo menciona las semejanzas del exponente de la expresión algebraica.

### Análisis

El 62% de la muestra contesta según las conjeturas previas, no realizando cambios en lo algebraico. Por otra parte el 5% de los equipos llegaron a lo algebraico, pero al leer la pregunta se confundieron, escribiendo que cambiarían el término numérico de la expresión algebraica. Finalmente el 33% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



15.- Dispongan los datos del modelo tabular en el siguiente cuadro cartesiano.

### Conjeturas

Se conjetura que los estudiantes sitúen las cifras de la tabla de valores en el plano cartesiano dado. Se conjetura que no tendrás mayores dificultades en la ubicación de puntos; puede que se ubiquen de manera inversa, es decir, coordenadas cambiadas.

### Respuestas

Catorce equipos lograron graficar lo esperado.

Siete equipos no lograron graficar lo esperado, dado que estos no supieron ubicar los números con su respectiva proporción en los ejes de las abscisas y de ordenadas, por consecuencia obtuvieron una recta lineal.

### Análisis

El 67% respondió según las conjeturas previas graficando sin dificultades los pares ordenados dentro del plano cartesiano. Por otra parte el 19% asoció el fenómeno a lo lineal. Finalmente el 33% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.





16.- ¿Qué figura obtienen al unir los puntos?

### **Conjeturas**

Se conjetura que al ser primer año medios se haga mención a línea curva o algún pensamiento relacionado a “parábola” dado que en este nivel aun no tienen conocimiento de este concepto. Si se realizó un trabajo en base a un pensamiento proporcional o lineal se espera que se mencione “línea recta” o similar.

### **Respuestas**

Un equipo menciona a una parábola (ya que uno de sus integrantes había escuchado antes esta palabra).

Dos equipos lo asociaron a un cuarto de círculo.

Un equipo asoció la unión de los puntos a una línea ascendente.

Un equipo al no unir los puntos asoció la imagen a un vector en escala.

Dos equipos asociaron la figura con una línea vertical.

Un equipo al no unir los puntos correctamente obtuvo una línea irregular.

Dos equipos asociaron la unión de los puntos a una figura y grafico lineal.

Un equipo a pesar de que su figura era la esperada confundió el concepto de descendiente manifestando así su figura obtenida.

Tres equipos sin respuesta.

Cinco equipos mencionaron una curva.

Dos equipos mencionaron una recta.

### **Análisis**

El 43% de la muestra, respondió de manera correcta y según las conjeturas previas. Por otra parte, un 43% lo asocio a lo lineal. Finalmente el 14% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



17.- Se parece a alguna figura que ustedes conozcan ¿A cuál?

### **Conjeturas**

Se conjetura que los estudiantes identifiquen la figura graficada con una curva, por no tener conocimientos aun de parábola. Así, por ejemplo, se podría mencionar "línea curva", "línea ascendente", o nombres bajo este mismo enfoque. Se espera, también, que se asocie a otro comportamiento como el lineal.

### **Respuestas**

Todos los equipos responden según lo conjeturado.

### **Análisis**

El 100% asocio a figuras cercanas o que tenían relación a lo conjeturado.



18.- Usando su figura calculen la distancia recorrida por la piedra a los 8,5s. Anoten su resultado. Expliquen cómo lo hicieron.

### Conjeturas

Se conjetura que los estudiantes usen el modelo gráfico como forma de predicción. En este sentido, se conjetura que verifiquen la diada (x,y) con los valores pedidos, identificando cada coordenada con su valor correspondiente. Además, se espera que se utilice la tabla de valores como forma secundaria de verificación por parte de los participantes.

### Respuestas

Ocho equipos lograron lo esperado utilizando la expresión general para hallar el resultado.

Seis equipos calcularon la mitad del recorrido en un segundo y luego le sumo la distancia recorrida en 8 segundos, obteniendo 52,245.

Siete equipos sin respuesta.

### Análisis

El 38% respondió de manera correcta desobedeciendo el enunciado, utilizando como herramienta lo algebraico. Por otra parte el 33% respondió utilizando cálculo de puntos medios. Finalmente el 29% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



19- Dispongan los datos de la tabla de diferencias en el siguiente plano cartesiano.

### Conjeturas

Se espera que los estudiantes recurran a la tabla para realizar la gráfica. Se conjetura que ubiquen los pares ordenados obtenidos de la tabla.

### Respuestas

Cinco equipos trabajaron por inspección dándole un gráfico que modela al fenómeno estudiado.

Dos equipos no supieron dimensionar los espacios asignados en la hoja milimetrada, pero si unió el tiempo con el desplazamiento correspondiente, a través de un par ordenado.

Siete equipos sin respuesta adecuadas.

Siete equipos lograron graficar según lo esperado.

### Análisis

El 57% respondieron correctamente y según las conjeturas, uniendo los pares ordenados, esquematizando la figura esperada. Por otra parte, el 63% localizo los datos del eje X e Y, llegando así a una figura distinta de lo esperado. Finalmente el 0% dejó sin respuesta.



20.- ¿Qué tipo de gráfica es?

### Conjeturas

Se espera que los estudiantes determinen que han obtenido una curva, ya sea que se denomine “curva ascendente” o algún nombre referido a parábola.

### Respuestas

Tres equipos mencionan que la gráfica es ascendente ya que la recta tenía una inclinación positiva.

Tres equipos sin respuesta.

Cinco equipos llegaron a la respuesta esperada, siendo esta lo lineal.

Tres equipos denotan a la gráfica presentada de “puntuación”, la cual hace una representación implícita del diagrama sagital.

Cinco equipos mencionaron una línea recta.

Un equipo realizó una opinión mencionando que el gráfico es sencillo.

### Análisis

El 24% respondieron desenfocándose del fenómeno asociándolo a lo lineal. A su vez el 57% respondió algo no tan lejano a lo conjeturado, como por ejemplo que

la gráfica era ascendente Por otra parte, solo el 5% se descentralizo del enunciado respondiendo a esta

con una opinión personal exhibiendo que era fácil realizar este tipo de gráficos. Finalmente el 14% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



21.- ¿Cómo calcularías  $\Delta d$  a los 9,5s utilizando la gráfica?

### Conjeturas

Se espera que los estudiantes ubiquen el tiempo 9,5 s, entre los 9 y 10 segundos, correspondiendo a él un punto en la variable de distancias. Se conjetura que utilicen proporciones directas o puntos medios como herramienta para obtener el valor requerido.

### Respuesta

Un equipo obtuvo 15,9.

Siete equipos sin respuesta.

Un equipo aproxima que según el gráfico es 17.

Un equipo calculó la mitad  $\Delta d$  de un segundo y a este se le suma el  $\Delta d$  9 segundos.

Un equipo calcula la mitad entre 13,77 y 15,39 y este se suma con 13,77.

Un equipo obtuvo que a los 9,5 segundos  $\Delta d$  es 13,7 ya que asumen que al extender la línea de la gráfica, observaron esta misma y aproximaron a 13,7.

Un equipo responde que a los 9,5  $\Delta d$  es 67. Hallaron  $\Delta d$  contando los cuadros más pequeños del eje de coordenadas.

Un equipo asume que el valor de  $\Delta d$  a los 9,5 segundos es de 13,77, esto lo encontraron al calcular la mitad entre 13,77 y 15,39 y este se suma con 13,77.

Un equipo responde que a los 9.5 segundos  $\Delta d$  17,5, ya que manifiestan que al extender la gráfica y visualizar  $\Delta d$  con respecto al tiempo 9,5 se logra una aproximación de este.

Un equipo manifestando que al ser una gráfica constante,  $\Delta d$  siempre tendrá el mismo valor, sin importar el tiempo en que se encuentre.

Un equipo utiliza el grafico calcula los 9 segundos y lo que le falta concluye que es 0,81 obteniendo que es 16,2.

Un equipo menciona que quedaría entre 20 y 10 obteniendo 14,58.

Un equipo menciona que dividiendo en 2 el décimo.

Un equipo extiende la recta dibujada aproximando que son 16 metros.

### **Análisis**

El 10% de la muestra, respondió realizando un cálculo de puntos medios. Por otra parte el 57% respondió acercándose al valor, aproximando este a través de la observación de la extensión del gráfico. Finalmente el 33% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



22.- Realizar un gráfico de la situación tiempo(s) versus  $\Delta[\Delta d]$ .

### Conjeturas

Se espera que los estudiantes realicen la gráfica al unir los puntos obtenidos de la tabla organizando proporcionalmente el gráfico. Esto último es de vital importancia ya que se conjetura que dispongan de los datos de manera tal que coincida con una línea recta. Por ello es que se eligió un plano cartesiano cuadrículado previamente.

### Respuestas

Quince equipos logran en totalidad realizar el gráfico.

Un equipo solo ubico mal la primera coordenada.

Cinco equipos sin respuesta.

### Análisis

El 76% responde según lo conjeturado posicionando, el 71% de este uniendo de forma correcta los puntos, llegando así a el grafico correcto, mientras que el 5% restante solo se equivoca en ubicar la primera coordenada. Finalmente el 24% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.





23.- ¿Qué tipo de gráfica es?

### **Conjeturas**

Se espera que los estudiantes obtengan una recta paralela al eje tiempo. Otra posibilidad es que se fuerce la gráfica lineal, al no ubicar los valores de las variables proporcionalmente.

### **Respuestas**

Tres equipos mencionan horizontal.

Cinco equipos confunden concepto de lo lineal y línea recta.

Un equipo denota la gráfica de puntuación, refiriéndose al mismo concepto explicado en la pregunta 28.

Tres equipos logran responder con lo esperado, reconociendo que el gráfico es constante.

Seis equipos sin respuesta.

Tres equipos lograron responder con lo esperado, expresando gráfico paralelo al eje x.

### **Análisis**

El 71% de la muestra logra responder según lo conjeturado de manera correcta, llegando a la perfección de su respuesta un 14% de este.

Finalmente el 29% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



24.- ¿Cómo calcularías  $\Delta$  [ $\Delta d$ ] a los 2,5s utilizando la gráfica?

### **Conjeturas**

Se espera que los estudiantes unan puntos de la gráfica, ubicando el 2,5 (entre los segundos 2 y 3) y le correspondan el punto en la variable de distancia.

### **Respuestas**

Cuatro equipos se alejaron de la respuesta esperada realizando cálculos números sin utilizar la gráfica.

Un equipo fue el único equipo que respondió a lo esperado con solo observar el gráfico.

Un equipo menciona que a los 2 segundos es 4,05 y que luego se debe dividir la constante.

Un equipo menciona que se debe calcular observando la mitad de 2 y 3 lo cual sería entre 10 y 0.

Dos equipos mencionan que no cambia independiente del tiempo.

Un equipo menciona que se debe dividir en 2 la constante y sumarle la distancia de los 2 segundos obteniendo  $1,62:2+3,24=4,05$ .

Un equipo menciona que seria 1,62.

Diez equipos sin respuesta.

### Análisis

El 43% no sigue las indicación del anunciado utilizando operatorias para responder a la pregunta en vez de lo gráfico. Por otra parte el 9% responde la pregunta utilizando lo gráfico. Finalmente el 48% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



25.- Si se modifica la altura de caída ¿Qué cambia en el modelo tabular?

### Conjeturas

Se pretende que los estudiantes revisen la gráfica obtenida en la pregunta 20 y observen que sucede al aumentar la altura, dándose cuenta que la gráfica no varía solo se extiende. Respondiendo a esta pregunta "nada".

### Respuestas

Dos equipos, exhiben que se modifica el tiempo.

Seis equipos al analizar la situación no cambiaría nada.

Un equipo se alejó de la respuesta esperada, dado que al analizar el gráfico predice que en el tiempo 2,5 es cercano a 4,3 metros.

Seis equipos sin respuesta.

Dos equipos mencionan que cambiaría la distancia ya que el tiempo de caída aumenta.

Un equipo sin respuesta.

Un equipo menciona que el viaje sería más largo.

Un equipo menciona que todo se mantiene, que cambia la distancia recorrida por la piedra.

### **Análisis**

Un equipo menciona que cambiaría. El 29% responden de manera correcta y según lo conjeturado. Por otra parte el 42% se descentraliza de lo preguntado llegando a una respuesta alejada de lo correcto. Finalmente el 29% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



26.- Si se modifica el tiempo de caída ¿Qué cambia en la expresión algebraica?

### **Conjeturas**

Si los estudiantes han logrado predecir la expresión se pretende que observen que el tiempo no modifica esta expresión, ya que es la variable independiente.

### **Respuestas**

Dos equipos al analizar la situación no cambiaría nada.

Seis equipos respondieron que se modifica el valor de la distancia.

Siete equipos sin respuesta.

Dos equipos mencionan que cambiaría los metros recorridos por segundos.

Dos equipos mencionan que se cambiaría el 0,81 en la expresión algebraica.

Un equipo menciona que no sabría en qué momento impactaría el objeto con la luna.

Un equipo menciona que viajaría más rápido.

### **Análisis**

El 10% respondió de manera correcta y según lo conjeturado exhibiendo que esta expresión no se modifica. Por otra parte el 57% cambiaría una u otra variable como por ejemplo lo algebraico, la distancia, entre otros. Finalmente el 33% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta



27.- Si se modifica el tiempo de caída ¿Qué cambia en el modelo gráfico?

### **Conjeturas**

Se conjetura que los estudiantes revisen la gráfica obtenida en la pregunta número veinte y observen que sucede al aumentar el tiempo, reportando que la gráfica, novaría solo se extiende por más tiempo.

### **Respuestas**

Tres equipos lograron responder con lo esperado, modificando solo el intervalo tiempo.

Un equipo al analizar la situación no cambiaría nada.

Ocho equipos sin respuesta.

Dos equipos afirman que si se cambia el tiempo de caída, el modelo grafico cambia en su distancia.

Un equipo indica que del gráfico, al cambiar el tiempo de caída, solo cambia la gráfica.

Dos equipos lograron responder con lo esperado, modificando solo el intervalo tiempo.

Un equipo menciona que cambiarían los puntos.

Un equipo menciona que pueden ampliarse o disminuir los metros.

Un equipo menciona que sería el grafico de una forma curva más ascendente.

Un equipo menciona que cambiaría tanto el tiempo como la distancia.

### **Análisis**

El 14% respondió de manera correcta y según lo conjeturado.

Por otra parte el 38% no comprendió el enunciado repitiendo que se modifica el tiempo, siendo que en el enunciado este valor no era lo preguntado. A su vez el 10% alude a que la distancia es la que se modifica. Finalmente el 38% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



### 5.3 Reactivo Tierra

#### TABLA CONJETURAS, RESPUESTAS Y ANÁLISIS

En la siguiente tabla, daremos a conocer cuatro columnas clasificadas en conjeturas previas, respuestas, análisis y gráfico. La tercera indicada, es con el fin de realizar un contraste entre las conjeturas previa (lo que se espera que responda el alumno) y respuestas (es el conteo de la muestra, según lo que exhibieron). Finalmente, en la columna de gráfico, se representa gráficamente información cuantitativa de modo circular y por medio del porcentaje subdividido en 3 partes de diferentes colores:

- Logrado, representado por el color azul: el cual corresponde al porcentaje que consigo responder de forma correcta independiente de la herramienta utilizada.
- Medio, representado por el color rojo: donde los alumnos alcanzaron un razonamiento matemático, pero no así llegando a la respuesta.
- No logrado, representado por el color verde: los estudiantes no respondieron a la pregunta.

1.- Dibujen la situación,

#### **Conjeturas**

En la pregunta inicial del reactivo tierra, se presume que los estudiantes dibujen el fenómeno según sus experiencias, haciendo presentes “formas de conocer y de actuar que han construido basándose en sus estructuras biológicas, dotadas de autonomía, operacional e insertas en los subsistemas biológico y sociocultural” (Buendía, Carrasco y Díaz, 2014). Esto, con la finalidad que el estudiantado logre figurar el fenómeno de la caída de un candado desde el puente de los enamorados.



## Respuestas

Todos los estudiantes dibujaron

## Análisis

Todos los alumnos lograron comprender los enunciados dibujando lo esperado sin dejar de mencionar que algunos se enfocaron más en el contexto que el fenómeno.



2.- Elijan uno de los dibujos del grupo, recorten y péguenlo.

## Conjeturas

Se presume que los estudiantes escojan el dibujo más representativo de la situación, destacando el fenómeno del candado con su respectivo tiempo y distancia de caída.

## Respuestas

Tres equipos se centralizaron netamente en el candado, distancia y con un contexto equilibrado al fenómeno. Siete equipos dibujaron la caída del candado con trayectoria, la distancia y el contexto. Tres equipos dibujaron el candado entrando en la superficie del agua, con su respectiva corriente y la distancia y contexto de la situación. Ocho equipos dibujaron la caída del candado mostrando el viento cercano al objeto, distancia y contexto de la situación.

## Análisis

El 48% de los equipos responde según lo conjeturado, seleccionando el dibujo más representativo de la situación focalizándose en el tiempo y distancia; esto integrando a los equipos que consideran trayectoria. Por otra parte el 52% de la muestra se enfoca en el entorno que rodea al fenómeno.



3.- Describa con sus palabras el experimento.

### **Conjeturas**

Se conjetura que el estudiantado describa el experimento con sus palabras, centrándose en el fenómeno de la caída del candado con su respectivo tiempo y distancia de caída.

### **Respuestas**

Cuatro equipos dejaron la pregunta sin respuesta. Trece equipos describieron el tiempo y la distancia recorrida del fenómeno. Tres equipos describieron el fenómeno sin enfatizar el tiempo y la distancia. Un equipo realizó una opinión mencionando que el experimento tiene "mucho análisis y es mucha lógica y es de mi punto de vista el experimento es muy minucioso".

### **Análisis**

El 62% de los equipos responden según las conjeturas previas, resaltando el fenómeno con su respectivo tiempo y distancia de caída. Por otra parte el 19% a pesar de que logran una descripción del experimento, no contestan según lo conjeturado, dado que dejan de lado el tiempo y distancia de la caída del

fenómeno. Finalmente el 19% no lograron lo esperado, dejando la pregunta sin respuesta, esto se debe a que, como por ejemplo, el equipo al elegir un dibujo, este se salió del margen predeterminado, tapando así esta pregunta, no percatándose del error.



4.- A los cinco segundos de caída ¿Cuál es la distancia del candado?

### **Conjeturas**

Se espera que los estudiantes observen la tabla, dado que esta pregunta se adquiere directamente de ella, reconociéndola como una herramienta que indica datos en covariación.

### **Respuestas**

Veintiuno equipos respondieron que a los 5 segundos había un desplazamiento de 122,5 metros, para obtener este resultado utilizaron como herramienta lo tabular.

### **Análisis**

El 100% de la muestra lograron llegar a lo conjeturado, dado que utilizan la tabla como herramienta.



5.- Si la distancia del candado es de 396.9 metros ¿Cuál es el tiempo de caída?

### **Conjeturas**

Se espera que los estudiantes observen la tabla, dado que esta pregunta se adquiere directamente de ella, reconociéndola como una herramienta que indica datos en covariación.

### **Respuestas**

Veintiuno equipos mencionaron que a los 396,9 metros el tiempo de caída era de 9 segundos para obtener este resultado utilizaron como herramienta lo tabular. Un equipo obtuvo los mismos 9 segundos pero utilizando lo algebraico (expresión generalizada), ya que en primera instancia no pudieron responder a dicha pregunta pero al encontrar la expresión, retrocediendo para responder con esta herramienta.

### **Análisis**

El 100% de la muestra lograron llegar a lo conjeturado, dado que utilizan la tabla como herramienta.



6.- Si el candado recorre 4.9 metros, luego 14.7 metros más ¿Cuánto tiempo transcurrió en este recorrido del candado?

### Conjeturas

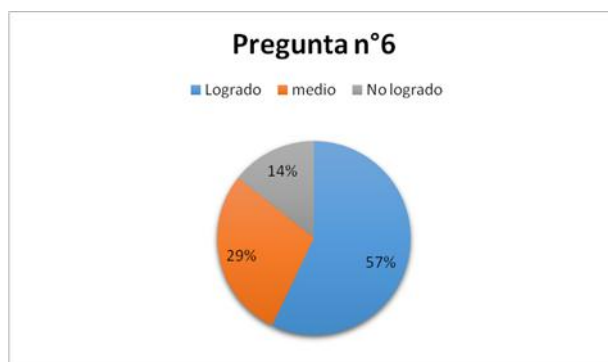
Al ser una respuesta directa de la tabla de la magnitud tiempo, se conjetura que el estudiantado distingue los datos como valores de covariación, encontrando el sumando entre 4,9 y 14,7 metros, para posteriormente ubicar el tiempo transcurrido en ese instante. Por consiguiente, se espera también, que los estudiantes requieran el uso de proporcionalidad directa, conocido también como regla de tres.

### Respuestas

Doce equipos mencionaron que el tiempo transcurrido era de 2 segundos para obtener este resultado utilizaron como herramienta lo tabular. Tres equipos no respondieron la pregunta en cuestión. Dos equipos asociaron el fenómeno con lo lineal, calculando el promedio de los 1 y 2 segundos Dos equipos se descentralizaron de la pregunta respondiendo en metros, a pesar de que se preguntaba por el tiempo y calculando el total de la distancia, pero asociando al tiempo. Un equipo visualizó el tiempo que transcurría entre las distancias. Un equipo dedujo que el tiempo transcurrido fue de un segundo.

### Análisis

El 57% de la muestra lograron responder de manera óptima la pregunta en cuestión, utilizando como herramienta lo tabular. Por otra parte, el 29% calculó puntos medios, por lo que llegaron a una respuesta inesperada e incorrecta. Finalmente el 14% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



7.- Si el tiempo de caída del candado es 2.5 segundos ¿Cuál es la distancia?

### Conjeturas

Se presume que el estudiantado al percatarse que el dato a hallar no se encuentra directamente en la tabla, utilice proporción directa, también conocida como regla de tres, o bien promedia la distancia de los tiempos más cercanos, en este caso entre las distancia de los segundos 1 y 2, dado que 2,5 se encuentre en medio.

### Respuestas

Seis equipos describieron que a los 2,5 segundos transcurría una distancia de 30,625 metros realizando este proceso usando lo algebraico como herramienta. Un equipo hizo uso de lo algebraico, sin embargo erró en el cálculo de este. Tres equipos realizaron una diferencia entre la distancia de los dos y tres segundos y obteniendo el promedio de esto, obteniendo así una distancia que no refleja lo real. Cinco equipos sumaron las distancias de los 1 y 2 segundos obteniendo así una distancia que no refleja lo real. Un equipo sin respuesta.

### Análisis

El 28% de la muestra logró responder a la pregunta adelantándose a lo algebraico, para así utilizarlo como herramienta. Por otra parte, el 5% utilizó el mismo método anteriormente mencionado, sin embargo erró al realizar la operatoria. El 62% de los equipos utilizaron la suma y multiplicación, promediando el resultado de estos, acercándose así a lo conjeturado. Finalmente el 5% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



8.-Si  $\Delta d$  es 24,5 metros ¿Cuál es la distancia que ha recorrido el candado?

### Conjeturas

Se espera que el alumnado para encontrar el valor que se les pide adicionen los valores de las diferencias de tiempo. Paralelamente, se conjetura que el estudiantado haga uso de proporcionalidad directa.

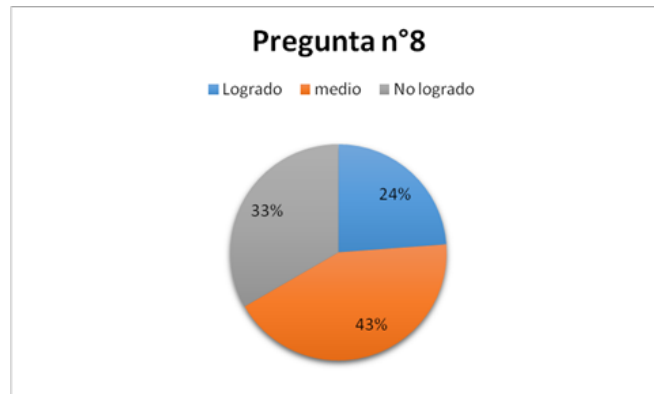
### Respuestas

Cinco equipos obtuvieron la distancia esperada, utilizando como herramienta lo tabular. Seis equipos utilizaron como herramienta lo tabular. Siete equipos no respondieron esta interrogante. Tres equipo realiza un procedimiento de cálculo de promedio.

### Análisis

El 24 % de la muestra lograron responder correctamente, utilizando como herramienta lo tabular, evadiendo lo conjeturado. En su contraparte, 29% mal utilizó esta misma herramienta, llegando así a otro resultado. Por otra parte, el

14% hizo uso de cálculo de promedio, asociándolo a la conjetura de proporcionalidad correcta. Finalmente el 33% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



9.- Si el tiempo transcurrido es 9,5 segundos ¿Cuál es el  $\Delta d$ ?

### Conjeturas

El dato mencionado no se adquiere de forma directa, por lo que se requiere que el alumnado aplique la tabla como presagadora de los valores, considerando que los valores covarían. Se conjetura que los estudiantes utilicen proporción directa referida o no a la regla de tres simple. Adicionalmente, se conjetura que se puede adquirir el valor de  $\Delta d$  en el tiempo correspondiente a los 9 segundos, fraccionar en dos, y adicionarlo al valor del tiempo correspondiente a los 8 segundos.

### Respuestas

Cuatro equipos realizan una adición de las distancias obteniendo un  $\Delta d$  que no representa lo real, en este caso. Cinco equipos obtuvieron  $\Delta d$  observando lo tabular. Un equipo realizó una diferencia y un cálculo de promedio que no representa ningún valor dentro de los modelos. Dos equipos desarrollan la regla de tres descentralizándose del fenómeno. Cinco equipos hicieron uso de lo algebraico como herramienta. Cuatro equipos sin respuesta.



### Análisis

El 33% de la muestra responde según lo conjeturado; por una parte el 24% hace uso de lo tabular como herramienta de predicción, llegando a la respuesta correcta, mientras que el 9% restante desarrolla regla de tres.

24% de los equipos hicieron uso de suma y restas para responder a la pregunta, llegando a un resultado erróneo. 24% mal interpretó la pregunta, ya que respondió en distancia en vez de  $\Delta d$ . Finalmente el 19% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



10.- Si el tiempo de caída es 5,5 s ¿Cuál es la distancia del candado? Expliquen cómo lo obtuvieron.

### Conjeturas

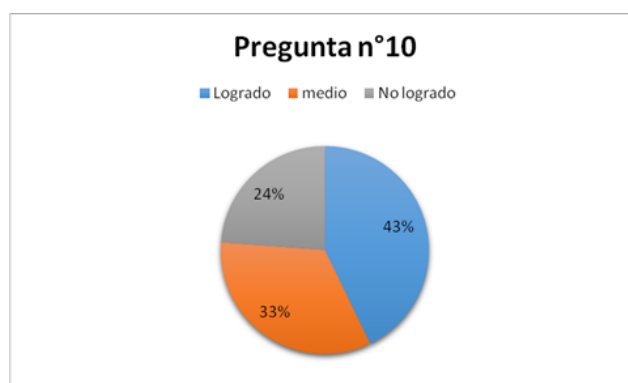
Este no corresponde a un dato que se pueda conseguir de manera directamente de la tabla. Se requiere que el alumno prediga empleando los valores que se han utilizado previamente. La finalidad de esta pregunta es estipular cómo los estudiantes se aproximan al modelo algebraico de lo cuadrático, considerando los obstáculos presentes en aquel objetivo, se especula que acudirán a lo lineal.

### Respuestas

Nueve equipos ocuparon lo algebraico de manera eficiente para calcular la distancia transcurrida. Cinco equipos no respondieron esta interrogante. Dos equipos utilizaron la diferencia entre las distancias, siendo uno de estos, que divide finalmente el resultado. Tres equipos utilizaron la quinta parte de la distancia para encontrar la distancia recorrida. Dos equipos utilizaron regla de tres, descentralizándose del fenómeno.

## Análisis

El 43% de la muestra, logró responder la pregunta utilizando como herramienta lo algebraico, superando todos los obstáculos que se encontraban conjeturados. Por otra parte, el 33% utiliza resta, división y regla de tres para responder la pregunta, llegando a un resultado incorrecto. Finalmente el 24% de los equipos no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



11.- Si el tiempo de caída del candado es "t" segundos ¿Cuál es la expresión generalizada de la distancia para ese tiempo? Expliquen cómo lo determinaron.

## Conjeturas

La finalidad de esta interrogante es determinar cómo los estudiantes se acercan al modelo algebraico de lo cuadrático, considerando los valores obtenidos en las preguntas precedentes. Por lo tanto, deducimos que recurrirán a lo lineal, en algunos casos utilizando la razón de la razón como pendiente. Otra posibilidad es que consideren los datos obtenidos en las preguntas anteriores, los vinculen con los datos expresados en la tabla dada y expresen, por ensayo y error, algún esbozo de la fórmula requerida que satisfaga dichos valores.

## Respuestas

Cuatro equipos no respondieron esta interrogante. Dos equipos mencionaron la igualdad entre tiempo y la distancia descentralizándose del fenómeno. Catorce obtuvieron lo algebraico, a través de ensayo y error. Un equipo se desenfoco de

la pregunta en cuestión, mencionando que en “t” segundas se encuentra entre segundos específicos.

### **Análisis**

El 67% de la muestra obtuvo la respuesta según lo conjeturado, encontrando la expresión general a través de ensayo y error. Por otra parte el 14% se desenfocó de la pregunta, respondiendo en relación al tiempo y distancia. Finalmente el 19% de los equipos no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



12.- Usen la expresión generalizada, obtenida en la pregunta anterior, para calcularla distancia a los 3 y 5 segundos.

### **Conjeturas**

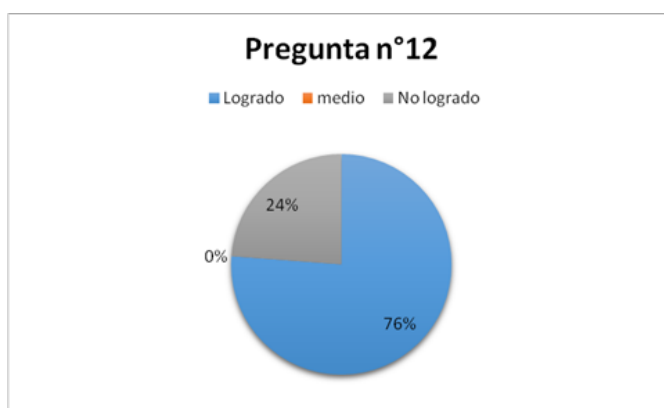
Se conjetura la utilización de la fórmula definida en la pregunta antecedente, supliéndolos valores requeridos, y se responde. Por otro lado, es probable que se utilice proporción directa, remitiéndose a un comportamiento lineal. Otra viabilidad es que se obtenga través de puntos medios con los datos adquiridos de la tabla.

### **Respuestas**

Quince equipos utilizaron de forma correcta la herramienta de lo algebraico. Cinco equipos no respondieron la interrogante en cuestión. Un equipo hizo uso de lo tabular

### Análisis

El 76% de la muestra, respondió de manera correcta la pregunta, el 71 % de este utilizando como herramienta lo algebraico como solicita el enunciado mientras que el 5% restante no siguió las indicaciones utilizando lo tabular, pero llegando a la respuesta correcta. Finalmente el 24% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



13.- Contrasten los valores obtenidos usando su expresión general con los valores de la tabla. Levanten argumentos de las semejanzas y/o diferencias entre estos valores.

### Conjeturas

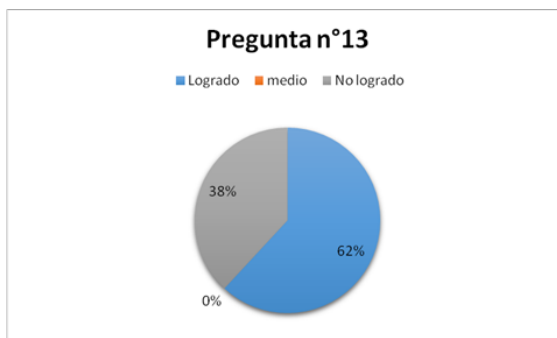
Se conjetura que los estudiantes adopten esta pregunta para verificar si los valores obtenidos con precedencia son correctos o no y así poder elaborar cambios en el registro algebraico determinado.

### Respuestas

Doce grupos comprendieron de forma correcta la igualdad de valores al ocupar la expresión algebraica y los datos de la tabla. Un equipo encontró la semejanza entre del exponente del algebraico. Ocho equipos no respondieron la interrogante en cuestión.

### Análisis

El 62% de la muestra logró responder la pregunta de manera correcta, por una parte el 57% reconoció el enunciado en su totalidad contestando adecuadamente, mientras que el 5% comprendió solo la segunda parte de esta pregunta, encontrando las semejanzas dentro de la representación algebraica. Finalmente el 38% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



14.- A la luz de esta comparación ¿Cambiarían algo de la expresión general?

### Conjeturas

Se estima que a través de comparación de datos, se reformule la ecuación encontrada, se proporcionen claridades de su formulación adecuada. Por contraparte, se conjetura que algunos equipos no harán cambios a su ecuación por diversos agentes.

### Respuestas

Siete equipos no respondieron la interrogante en cuestión. Trece equipos denotan que no realizarían cambio alguno en lo algebraico. Un equipo denota que si fuese necesario, cambiara la constante 4,9.

### Análisis

El 62% de la muestra contesta según las conjeturas previas, no realizando cambios en lo algebraico. Por otra parte el 5% de los equipos llegaron a lo algebraico, pero al leer la pregunta se confundieron, escribiendo que cambiarían el termino numérico de la expresión algebraica, la cual denominaron constante

(4,9). Finalmente el 33% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



15.- Dispongan los datos del modelo tabular en el siguiente cuadro milimetrado.

### Conjeturas

Se conjetura que los estudiantes sitúen las cifras de la tabla de valores en el plano cartesiano dado. Se conjetura que no tendrás mayores dificultades en la ubicación de puntos; puede que se ubiquen de manera inversa, es decir, coordenadas cambiadas.

### Respuestas

Nueve equipos logran esquematizar de una forma esperada el modelo gráfico. Ocho equipos no respondieron la pregunta en cuestión. Cuatro equipos se desenfocaron de lo cuadrático descentralizándose hacia lo lineal.

### Análisis

El 43% respondió según las conjeturas previas graficando sin dificultades los pares ordenados dentro del plano cartesiano. Por otra parte el 19% asoció el fenómeno a lo lineal. Finalmente el 38% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



16.- ¿Qué figura obtienen al unir los puntos? ¿A cuál?

### **Conjeturas**

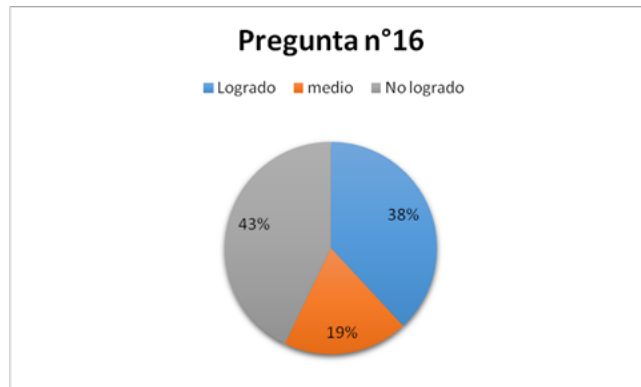
Se conjetura que al ser primer año medios se haga mención a línea curva o algún pensamiento relacionado a “parábola” dado que en este nivel aun no tienen conocimiento de este concepto. Si se realizó un trabajo en base a un pensamiento proporcional o lineal se espera que se mencione “línea recta” o similar.

### **Respuestas**

Ocho equipos comprendieron lo gráfico asociando la figura a lo curvo. Nueve equipos no respondieron la pregunta en cuestión. Tres equipos al representar de manera incorrecta lo gráfico mencionaron representaciones de lo lineal. Un equipo no logra asociar la figura.

### **Análisis**

El 52% de la muestra, respondió según las conjeturas previas, siendo el 38% de estas una respuesta correcta aludiendo a lo curvo, mientras que el 14% restante lo asocia a lo real. Por otra parte, un 5% no encontró igualdad dentro su vocabulario. Finalmente el 43% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



17.- Se parece a alguna figura que ustedes conozcan ¿A cuál?

### **Conjeturas**

Se conjetura que los estudiantes identifiquen la figura graficada con una curva, por no tener conocimientos aun de parábola. Así, por ejemplo, se podría mencionar “línea curva”, “línea ascendente”, o nombres bajo este mismo enfoque. Se espera, también, que se asocie a otro comportamiento como el lineal.

### **Respuestas**

Siete equipos asociaron figuras que representaba de manera correcta lo curvo. Nueve equipos no respondieron la pregunta en cuestión. Un equipo asocio la figura a la representación gráfica del seno o coseno. Un equipo asocio la figura a lo lineal. Tres equipos definen que la figura obtenida en el grafico no se parece alguna conocida.

### **Análisis**

El 33% de la muestra, respondió según las conjeturas previas aludiendo a lo curvo. Por otra parte, el 24% asoció a figuras que no están dentro de este enfoque. Finalmente el 43% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.





18.- Usando su figura calculen la distancia recorrida por el candado a los 8,5s. Anoten su resultado. Expliquen cómo lo hicieron.

### Conjeturas

Se conjetura que los estudiantes usen el modelo gráfico como forma de predicción. En este sentido, se conjetura que verifiquen la diada (x,y) con los valores pedidos, identificando cada coordenada con su valor correspondiente. Además, se espera que se utilice la tabla de valores como forma secundaria de verificación por parte de los participantes.

### Respuestas

Cuatro equipos utilizaron como herramienta de lo algebraico. Tres equipos utilizaron el gráfico para predecir el valor pedido. Dos equipos utilizaron regla de tres, descentralizándose del fenómeno. Diez equipos no respondieron la interrogante en cuestión. Un equipo manifiesta no poder hacer uso del gráfico para poder predecir la distancia pedida.

### Análisis

El 19% respondió de manera correcta desobedeciendo el enunciado, utilizando como herramienta lo algebraico. Por otra parte el 14% respondió según las conjeturas realizadas, haciendo uso de lo gráfico como predicción. El 10% asoció el fenómeno a lo lineal haciendo uso de regla de tres. El 5% manifiesta que con el gráfico no se puede llegar a una respuesta. Finalmente el 48% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



19- Dispongan los datos de la tabla de diferencias en el siguiente cuadro.

### Conjeturas

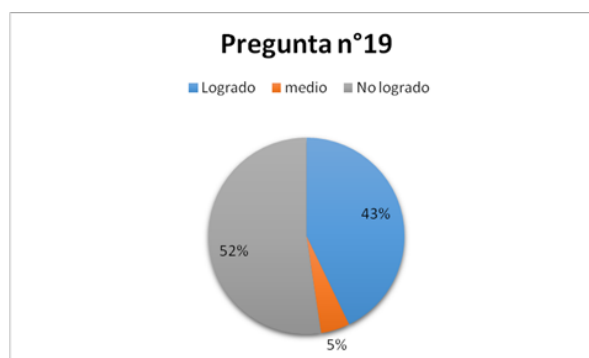
Se espera que los estudiantes recurran a la tabla para realizar la gráfica. Se conjetura que ubiquen los pares ordenados obtenidos de la tabla.

### Respuestas

Once equipos no respondieron la interrogante en cuestión. Nueve equipos esquematizaron de manera esperada, formando un gráfico lineal. Un equipo unió desproporcionalmente los datos de las variables, obteniendo una figura curva.

### Análisis

El 43% respondieron correctamente y según las conjeturas, uniendo los pares ordenados, esquematizando la figura esperada. Por otra parte, el 5% localizo los datos del eje X e Y, llegando así a una figura distinta de lo esperado. Finalmente el 52% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



20.- ¿Qué figura obtienen al unir los puntos?

### Conjeturas

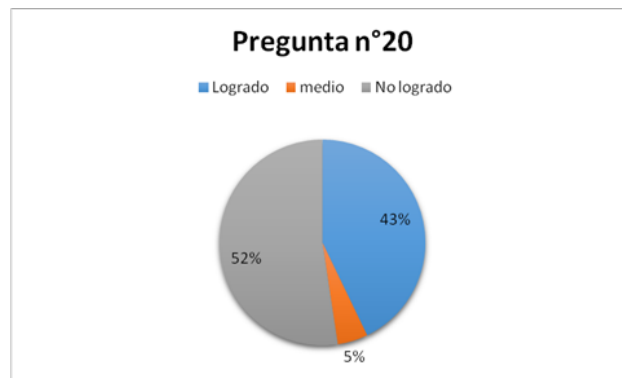
Se espera que los estudiantes determinen que han obtenido una curva, ya sea que se denomine “curva ascendente” o algún nombre referido a parábola.

### Respuestas

Nueve equipos asociaron la figura del gráfico a lo curvo. Once equipos no respondieron la interrogante en cuestión. Un equipo manifiesta en obtener una línea al unir los puntos de la figura.

### Análisis

El 43% respondieron correctamente y según las conjeturas, uniendo los pares ordenados, esquematizando la figura esperada. Por otra parte, el 5% localizo los datos del eje X e Y, llegando así a una figura distinta de lo esperado. Finalmente el 52% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



21.- Se parece a alguna figura que ustedes conozcan ¿A cuál?

### Conjeturas

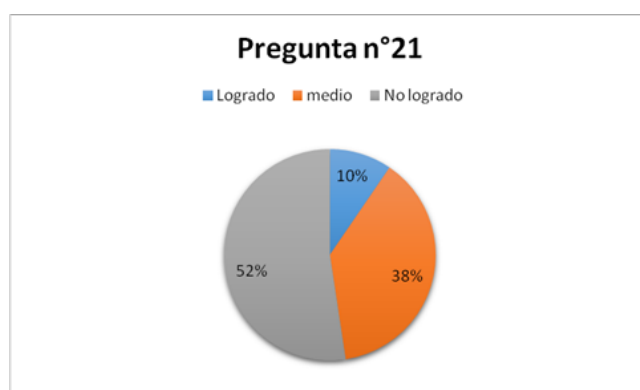
Se espera que los estudiantes determinen que la figura es una curva. Otra posibilidad es que mencionen que se trata de una curva ascendente u otro nombre asociado a este comportamiento creciente.

### Respuestas

Siete equipos asociaron la figura con lo lineal. Un equipo al esquematizar de manera incorrecta asocio lo gráfico con la representación del seno-coseno. Once equipos no respondieron la interrogante en cuestión. Dos equipos no relacionan la figura a algo conocido.

### Análisis

El 33% de la muestra asoció el fenómeno a lo lineal. Por otra parte, el 5% asoció el fenómeno con el gráfico de la función seno-coseno. A su vez el 10% hace mención que la figura se les hace familiar, sin especificar a cuál. Finalmente 52% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta



22.- ¿Cómo calcularías  $\Delta d$  a los 9,5s utilizando la gráfica?

### Conjeturas

Se espera que los estudiantes ubiquen el tiempo 9,5 s, entre los 9 y 10 segundos, correspondiendo a él un punto en la variable de distancias. Se conjetura que utilicen proporciones directas o puntos medios como herramienta para obtener el valor requerido.

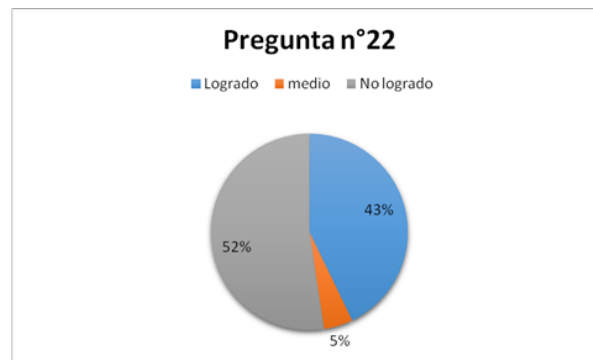
### Respuestas

Once equipos no respondieron la interrogante en cuestión. Un equipo se enfocó en el procedimiento de punto medio de la recta entre dos intervalos. Nueve

equipos aproximaron de manera correcta, utilizando como herramienta lo gráfico.

### **Análisis**

El 43% de la muestra, respondió de manera correcta, utilizando lo gráfico como herramienta. Por otra parte el 5% respondió según lo conjeturado, encontrando el punto medio. Finalmente el 52% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



23.- Realizar un gráfico de la situación tiempo(s) versus  $\Delta[\Delta d]$ .

### **Conjeturas**

Se espera que los estudiantes realicen la gráfica al unir los puntos obtenidos de la tabla organizando proporcionalmente el grafico. Esto último es de vital importancia ya que se conjetura que dispongan de los datos de manera tal que coincida con una línea recta. Por ello es que se eligió un plano cartesiano cuadrículado previamente.

### **Respuestas**

Todos los quipos lograron graficar

### **Análisis**

Esto último es de vital importancia ya que se conjetura que dispongan de los datos de manera tal que coincida con una línea recta. Por ello es que se eligió un plano cartesiano cuadrículado previamente. Es por aquello que creemos que todos los equipos llegaron a la gráfica correspondiente.

24.- ¿Qué figura obtienen al unir los puntos?

### Conjeturas

Se espera que los estudiantes obtengan una recta paralela al eje tiempo. Otra posibilidad es que se fuerce la gráfica lineal, al no ubicar los valores de las variables proporcionalmente.

### Respuestas

Ocho equipos asociaron con lo esperado la gráfica de la constante. Doce equipos no respondieron la interrogante en cuestión. Un equipo al no ubicar proporcionalmente los datos de las variables, asocia su figura a una línea.

### Análisis

El 38% de la muestra asoció con figuras parecidas a lo conjeturado. Por otra parte, el 5% grafico de manera incorrecta, llegando así a una respuesta errónea. Finalmente el 57% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



25.- Se parece a alguna figura que ustedes conozcan ¿A cuál?

### Conjeturas

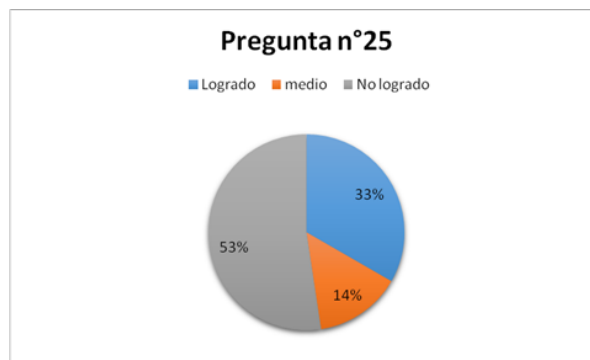
Se espera que los estudiantes reconozcan la figura como una recta que permanece constante en el tiempo.

### Respuestas

Siete equipos asociaron la figura de forma esperada con lo lineal. Un equipo al esquematizar de manera incorrecta asocio lo gráfico con la representación del seno – coseno. Once equipos no respondieron la interrogante en cuestión. Dos equipos no encontraron relación entre la figura obtenida y algo conocido.

### Análisis

El 33% respondió de forma correcta y según lo conjeturado, llegando a lo lineal. Por otra parte el 5% erra en lo gráfico, llegando así a una figura la cual no corresponde. Finalmente el 52% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



26.- ¿Cómo calcularías  $\Delta[\Delta d]$  a los 2,5s utilizando la gráfica?

### Conjeturas

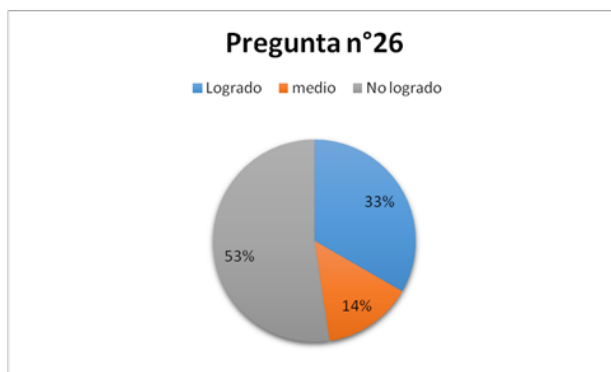
Se espera que los estudiantes unan puntos de la gráfica, ubicando el 2,5 (entre los segundos 2 y 3) y le correspondan el punto en la variable de distancia.

### Respuestas

Tres equipos utilizaron regla de tres, descenfocalizandose del fenómeno. Once equipos no respondieron la interrogante en cuestión. Siete equipos utilizaron lo tabular.

### **Análisis**

El 33% respondió de forma correcta, pero sin seguir las indicaciones del enunciado, ya que ocupó como herramienta lo tabular, en vez de lo gráfico. Por otra parte el 14% se descentralizó del fenómeno, asociándolo a lo lineal utilizando regla de tres. Finalmente el 53% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



27.- Si se modifica la altura de caída ¿Qué cambia en el modelo tabular?

### **Conjeturas**

Se pretende que los estudiantes revisen la gráfica obtenida en la pregunta 20 y observen que sucede al aumentar la altura, dándose cuenta que la gráfica no varía solo se extiende. Respondiendo a esta pregunta “nada”.

### **Respuestas**

Respondiendo a esta pregunta “nada”.

Cinco equipos hacen mención al cambio de distancia. Un equipo hace mención a lo gráfico. Dos equipos ponen énfasis al cambio de tiempo y distancia. Trece equipos no respondieron la interrogante en cuestión.

### **Análisis**

El 5% responde según lo conjeturado, haciendo uso del gráfico como herramienta, a pesar que el enunciado indica utilizar lo tabular. Por otra parte el 33% responde de manera correcta, el 24% de este expresando que solo cambian la distancia, la es mayor, mientras que 9% restante alude a que a



mayor distancia, mayor es el tiempo, por lo tanto ambas variables son las que se modifican. Finalmente 62% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



28.- Si se modifica la cantidad de tiempo de caída ¿Cambia la expresión algebraica?

### Conjeturas

Si los estudiantes han logrado predecir la expresión se pretende que observen que el tiempo no modifica esta expresión, ya que es la variable independiente.

### Respuestas

Dos equipos hacen referencia a que la expresión algebraica cambia en su totalidad. Dos equipos hacen mención de que no existe cambio alguno en dicha expresión. Dos equipos mencionan el cambio del coeficiente numérico del término cuadrático. Dos equipos describen el cambio de la distancia. Trece equipos no respondieron la interrogante en cuestión.

### Análisis

El 10% responde de forma correcta y según lo conjeturado, expresando que no se modifica lo algebraico. Por su contraparte, el mismo porcentaje de la muestra, menciona todo lo contrario, haciendo mención que se modifica toda esta expresión. Así mismo, otro 10% expresa una modificación en cierta parte de lo

algebraico. Por otra parte exhibe que solo cambia la distancia. Finalmente el 62% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



29.- Si se modifica el tiempo de caída ¿Qué cambia en el modelo grafico?

### Conjeturas

Se conjetura que los estudiantes revisen la gráfica obtenida en la pregunta número veinte y observen que sucede al aumentar el tiempo, reportando que la gráfica, novaría solo se extiende por más tiempo.

### Respuestas

Siete equipos describen que lo grafico cambiaría de posición. Un equipo hace referencia al cambio de la figura obtenida en el gráfico. Trece equipos no respondieron la pregunta en cuestión.

### Análisis

El 38% se aleja de lo correcto y conjeturado, aludiendo a que el modelo grafico cambiaría. Finalmente el 62% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



30. Elabore un esquema que coordine los tres modelos y su forma de predicción con el experimento.

### **Conjeturas**

A lo largo del diseño se ha trabajado con tres modelos que se le ha indicado a los estudiantes, de acuerdo a Arrieta y Díaz (2014) a través de esquemas dialogan los dominios real, pseudo-concreto y matemático para los educandos. Se pretende que los estudiantes logren vincular los esquemas con el fenómeno a través del desplazamiento realizando entre ellos: que logren identificar la predicción realizada en modelo tabular, algebraico y gráfico.

### **Respuestas**

Seis equipos analizan de forma esperada los modelos encontrando la analogía a través de la semejanza de la igualdad de la obtención de los resultados. Dos equipos se centralizaron en la diferencia de las representaciones de lo gráfico. Trece equipos no respondieron la interrogante en cuestión.

### **Análisis**

El 29% respondió según lo conjeturado, utilizando la predicción como semejanza de estos modelos, logrando así alcanzar la analogía entre las dos redes de diseños (Arrieta y Díaz, 2014), a través del “Modelo de Razonamiento Unificado”, ensamblando así las modelaciones de los distintos fenómenos. (Pescadera, 2014) . El 10% no se superpuso sobre las redes de diseños, pero

sí sobre uno de los modelos, haciendo referencia a lo gráfico. Finalmente el 62% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



31. Elabore esquemas que coordinen el experimento, sus diferentes modelos, sus parámetros y sus formas de predicción.

### **Conjeturas**

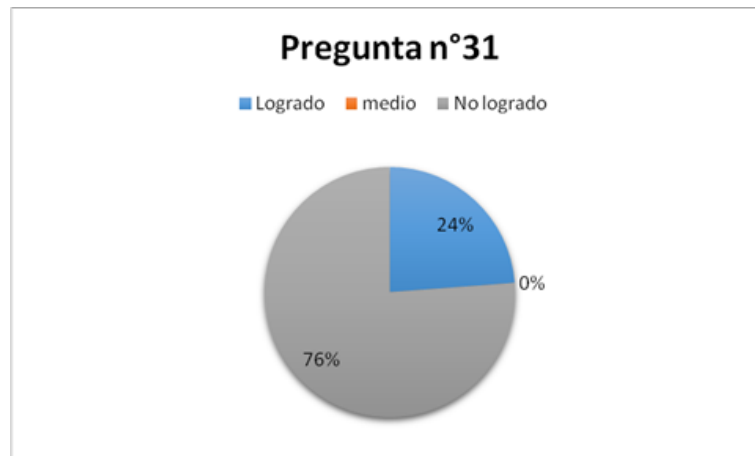
Siguiendo con la conjetura anterior, se pretende que elaboren un esquema donde unan los tres modelos con lo cuadrático a través de sus predicciones.

### **Respuestas**

Cinco equipos analizan los modelos definiendo la diferencia en la forma que se expresan los datos. Dieciséis equipos sin respuestas.

### **Análisis**

El 24% respondió según lo conjeturado, utilizando la predicción como semejanza de estos modelos, logrando así alcanzar la analogía entre las dos redes de diseños (Arrieta y Díaz, 2014), a través del "Razonamiento basado en casos", tomando la experiencia y raciocinio de la pregunta anterior, el cual ayudan a resolver y responder a esta nueva pregunta (Pescadera,2014).. Finalmente el 76% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



32.- ¿En qué se parecen lo tabular, algebraico y gráfico, entre la tierra y luna?

### Conjeturas

Siguiendo con la conjetura anterior, se pretende que elaboren las semejanzas entre los tres modelos, llegando a analogar las redes de modelo.

### Respuestas

Un equipo da una respuesta incompleta.

Un equipo destaca que los datos tabulares son en todos los casos crecientes sin embargo el grafico es de forma pareja (enfatiéndose en el último de estos).

Un equipo denota que los 3 principales modelos del experimento eran la expresión general  $(0,85x t^2)$ ,  $\Delta d$  y  $\Delta[\Delta d]$ .

Doce equipos sin respuesta.

Cinco equipos mencionan que a pesar de ser diferentes están unidos y que a través de cualquiera de estos modelos se puede obtener la misma información.

Un equipo solo hace mención a los 3 tipos de gráficos realizados.

### Análisis

El 24% alcanzó la respuesta correcta en totalidad logrando la comprensión de los tres modelos. Por otra parte el 19% se acerca bastante a lo conjeturado, acercándose de forma parcial a lo correcto, estando si incompleto. Finalmente el 57% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.



33.- ¿En qué se diferencia lo tabular, algebraico y gráfico, entre la tierra y la luna?

### Conjeturas

Siguiendo con la conjetura anterior, se pretende que elaboren las diferencias entre los tres modelos, llegando a analogar las redes de modelo.

### Respuestas

Catorce equipos sin respuesta.

Un equipo logró vincular el gráfico con la tabla de datos y la expresión algebraica dado que infieren que pudieron graficar teniendo los datos de las tablas ( $d$ ,  $\Delta d$  y  $\Delta[\Delta d]$ ), y obteniendo esta última con la expresión general.

Cuatro equipos mencionan que la diferencia está en la forma en que se expresan los datos.

Un equipo solo hace mención a los 3 tipos de gráficos realizados.

### **Análisis**

El 19% alcanzo la respuesta correcta en totalidad logrando la comprensión de los tres modelos a través de la diferencia. Por otra parte el 14% se acerca bastante a lo conjeturado, acercándose de forma parcial a lo correcto, estando si incompleto. Finalmente el 67% no lograron lo esperado, dejando sin respuesta la pregunta.

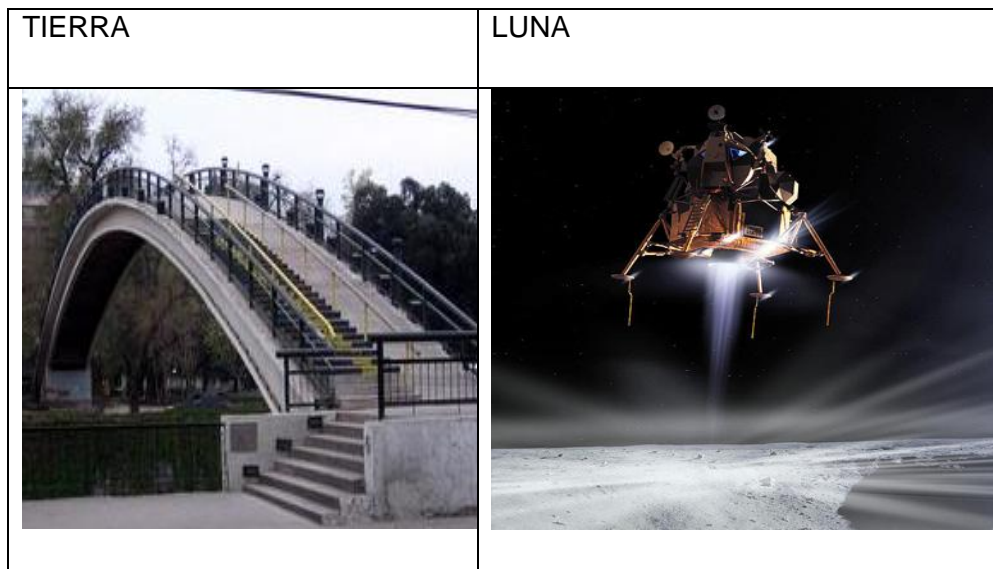


#### 5.4 Análisis de iconicidad de representación del fenómeno a través del dibujo:

El cien por ciento de los estudiantes, se apropió del fenómeno posicionando los elementos de la especificación del contexto (luna o puente de los enamorados de providencia). Logrando que las imágenes las reciban los sentidos, en este caso como el reactivo del experimento es descriptivo y discursivo, se interpretan en el cerebro y las expresa con un buen rendimiento de iconicidad a través del dibujo, representado así el fenómeno respectivo.

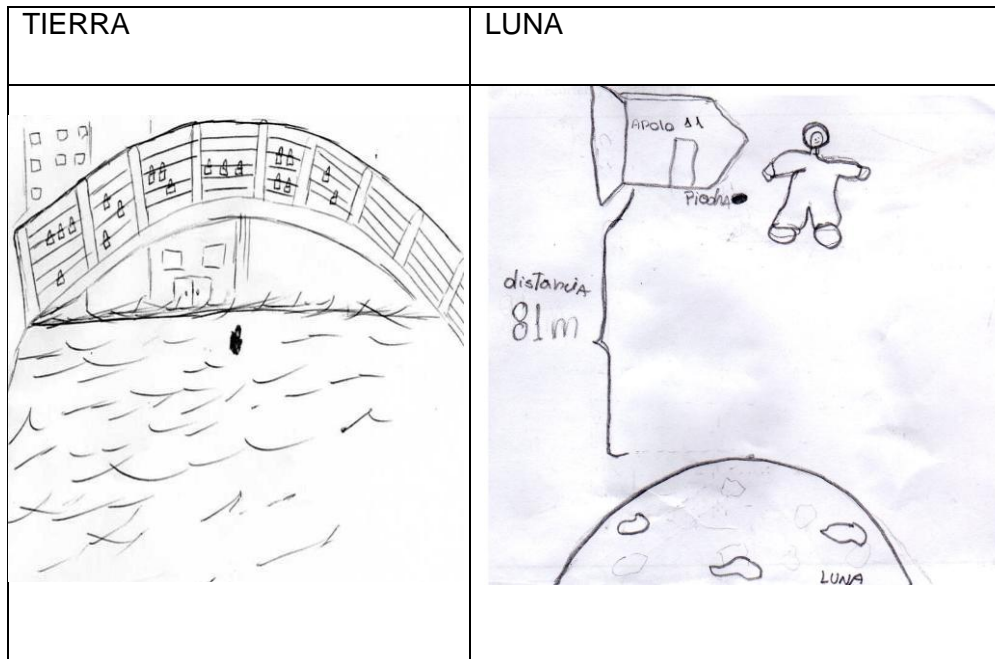
Al analizar la iconicidad de los dibujos siempre se tuvo en consideración que el nivel de la representación a través de un dibujo es menor en comparación que el de una imagen fotográfica o la imagen de cine, ya que existen tres grados de iconicidad:

- Alto (imagen realista, por ejemplo fotografía)



- Medio (dibujo representativo de la realidad, llamado “imágenes figurativas”)





- Nulo (imagen abstracta).



Según lo descrito anteriormente y debido a que todos los alumnos dibujaron lo redactado en el enunciado, nuestro análisis será de “grado medio de la iconicidad”. (Caccuri 2010)

A su vez, podemos observar el análisis mediante la “escala de iconicidad” que hace referencia a lo mismo.

1. Fotográfica
2. Animación de objetos.
3. Imagen por ordenador.
4. Dibujos animados
5. Escritura.

Por lo tanto, podríamos concluir que el cien por ciento de los alumnos fueron capaces de representar el fenómeno a través de “grado medio”, o “dibujo animado” de iconicidad, el cual es excelente a nivel de primer año de enseñanza media, logrando con su dibujo expresar y representar el fenómeno solicitado. De este modo, podemos verificar que el alumno se apropió de la situación, yendo así por muy buen camino, ya que este es el primer paso para la modelación y así llegar a la analogía de redes de diseños. (Amodeo 2011)

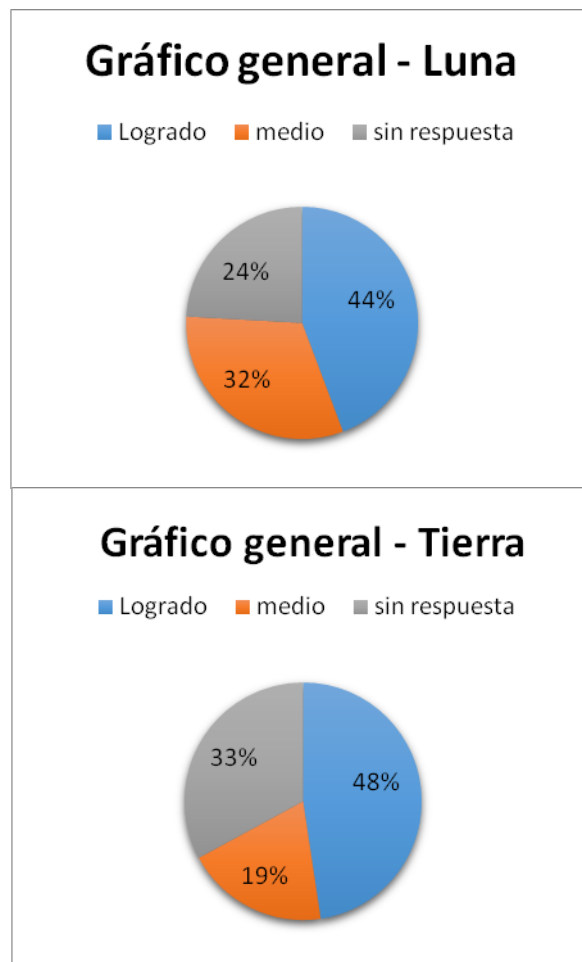
De este mismo modo, a nivel de análisis para un entendimiento mayor y facilitación de la comprensión de las escalas de iconicidad, se mencionaran que solo existen tres niveles (D.A.Dondis, J.Rom, 2014)

1. Representativo, donde la percepción directa por parte del receptor del referente visual se establece desde un nivel de codificación bajo.
2. Simbólico, establece una mayor simplicidad en la representación de la imagen referencial que así contiene, codificada lingüísticamente, referencialmente, mayor complejidad.
3. Abstracto, reduce la imagen a sus componentes visuales más básicos; el nivel de codificación es alto.

Evidentemente a mejor grado de iconicidad la representación de la realidad es mayor, teniendo poca diferencia del objeto existente, esto lográndolo la mayoría de los alumnos estudiados en este caso.

### 5.5 Análisis, modelación y analogía (según gráficos)

Analizando la modelación, se resumen dos gráficos subdivididos en tres partes anteriormente descritas. Esto es importante ya que es el primer paso para poder lograr la analogía.

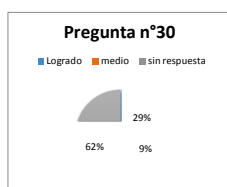


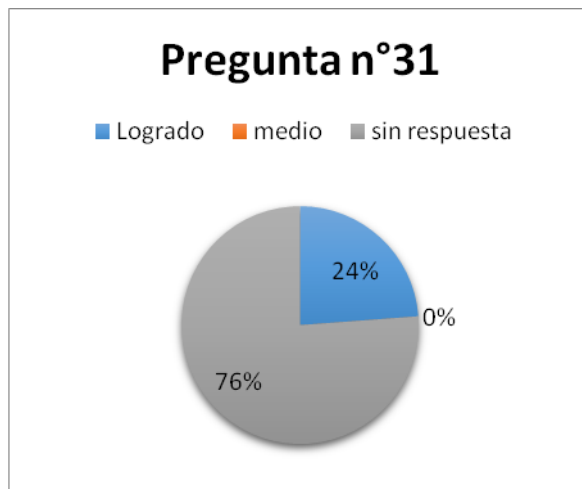
Como podemos observar, el mayor porcentaje de los estudiantes fueron capaces de modelar en su totalidad, mediante lo tabular, lo algebraico y lo gráfico.

En un comienzo al aplicar el reactivo de la luna podemos ver que un porcentaje no menos del treinta y dos por ciento son capaces de modelar de manera parcial, más de la tercera cuarta parte de este porcentaje son capaces de modelar tubularmente, mientras un medio solo son capaces de modelar mediante lo gráfico o lo algebraico. Al momento de aplicar el segundo reactivo de la tierra, los alumnos son capaces de superar las dificultades, logrando esta vez alcanzar la modelación o estar cercana a las conjeturas que teníamos previstas.

De modo general la mayoría de los alumnos lograron concebir lo tabular, la expresión generalizada y graficar; pero en algunos casos no lograban predecir o erraban usando sus conocimientos previos de una manera incorrecta, volviendo a errar uniéndolo con lo lineal.

A modo resumen en los siguientes gráficos podemos observar la analogía alcanzada.





Al intentar analogar por primera vez, un noventa y un por ciento de los alumnos fueron capaces de llegar a la analogía a través de “Modelo de Razonamiento Unificado”, llegando un veintinueve por ciento de este a la perfección de la comprensión mediante el ensamblamiento de las modelaciones de los distintos fenómenos. (Pescadera, 2014).

Al momento de intentar analogar por segunda vez, el cien por ciento de los estudiantes fueron capaces de realizar esta meta, sin dejar de mencionar que en distintos niveles; mientras que el veinticuatro por ciento de este fue capaz de llegar a la analogía en su perfección de entendimiento y aplicación mediante el “Razonamiento basado en casos”, tomando la experiencia y raciocinio de la pregunta anterior, el cual ayudan a resolver y responder a esta nueva pregunta.

## Conclusiones

A modo general, en promedio el treinta y ocho por ciento de los equipos de este estudio, lograron determinar los elementos precursores de lo cuadrático, a través de analogías de red de modelos. Esto se consiguió utilizando dos de las seis categorías de analogías, en primera instancia el cuarenta y tres por ciento utilizando el segundo tipo de analogía, el cual es “modelo de racionamiento unificado”, ya que los alumnos se superpusieron sobre las redes de modelo alcanzando así ensamblar ambos diseños, alcanzando en su perfección el veinticuatro por ciento, las cuales la utilizan como fuente comprendiendo así las diferencias y semejanzas. Posteriormente, a través de la sexta etapa de analogía llamada razonamiento basado en casos, el diecinueve por ciento de los equipos lograron alcanzar esta meta, debido a que utilizaron la experiencia anterior donde ya analogan, recurrir a esta como herramienta para superar los nuevos obstáculos.

Dentro de los resultados obtenidos, podemos afirmar que los estudiantes propician analogías entre dos redes de diseños didácticos, favoreciendo el aprender de lo cuadrático, de tal forma que logran reconocer lo cuadrático, y en ciertos casos predecir un suceso independiente del fenómeno que se presenta, a través de los elementos precursores de lo cuadrático, el cual los alumnos también pudieron comprender en su mayoría.

Con respecto a los reactivos, las herramientas que los equipos más utilizaron para el desarrollo de esta fue de proporcionalidad directa (también mencionada por ellos mismos como regla de tres), puntos medios, expresión algebraica, el modelo tabular y a pocos rasgos, el modelo gráfico. Con esto se puede observar que, a medida que los equipos de estudiantes avanzaban en los reactivos y observan la similitud entre ambos diseños, comienza un mirada a dichos instrumentos “desde arriba”, dejando de lado el fenómeno que se presenta y observando la analogía en la redes de modelos.

Uno de los factores más importante del por qué los alumnos alcanzar la meta de analogar, fue que pudieron interiorizar e involucrarse con la situación, e incluso llegando a una iconicidad de excelencia en la mayoría de los alumnos a nivel de primeros medios.

Proponemos que se continúe este estudio, para validar un diseño didáctico basado en la modelación para alumnos de terceros y cuartos años medios, donde como dificultad y obstáculo se encuentra que los alumnos ya tienen conocimientos de física, la cual utilizan como herramienta para resolver el reactivo.

## BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, J. Contreras, C. (2013). *Modelando la elasticidad de un resorte*. Presentación hecha en Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME. Argentina.

Alsina, C. (2007). *Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV?* Revista Iberoamericana de Educación, n. 43, p. 85-101, 2007. Recuperado el 26 de julio de 2014 de <http://www.rieoei.org/rie43a04.htm>

Amodeo, A (2014). *Aspectos morfológicos de la imagen*.

Aravena, M; Caamaño, C. (2009). *Mathematical Models in the secondary Chilean education*. Monterrey, México.

Arrieta y Díaz (2014). *Una Perspectiva de la Modelación desde la Socioepistemología*. Artículo enviado a revista de corriente principal. Chile-México.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral. México.

Biembengut, M. (2011). *Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira*. Ponencia presentada en XIII CIAEM. Recife. Brasil.

Blomhøj, M. (2004). *Different perspectives on mathematical modelling in educational research*. Roskilde University. Denmark.



Caccuri (2010) *Modelación y cónica de la realidad*.

Cantoral, R., Farfán, R. (2003). *Matemática Educativa: Una visión de su evolución*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Internacional Thomson, México. Vol. 6, Núm. 1, 27 – 40.

Carrasco, Díaz y Buendía (2014) *Figuración de lo que varía*. Instituto Politécnico Nacional de México IPN. México.

Contreras, C. (2014). *Desplazamiento de prácticas socioescolares desde una experiencia de modelación*. Seminario para optar al grado de Licenciado en Educación y al título de Profesor de Educación Media en Matemática e Informática Educativa. UCSH. Santiago de Chile. Chile.

Cordero, F. (2006). *El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica*. México.

Correa, M. (2011). *Imágenes que podemos Tocar*. Santiago: Ediciones Tecnológica Metropolitana.

Corbin y Strauss (2012), p.110.

DEMRE ([www.demre.cl](http://www.demre.cl)).

Díaz, L. (2009). *Enseñanza y Evaluación*. Conferencia especial. XXIV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. México.

Díaz, L. y Soto, M. (2014). *Investigación guiada por una pregunta orientadora*. XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Colombia.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Universidad del Valle, Colombia.

Galaz, J. (2010). *Validación de un sistema de evaluación en competencias de pensamiento variacional para una secuencia didáctica de la variación en la función cuadrática*. Tesis para optar al grado de Magíster en Educación. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Chile.

Gonzalez, D; Orellana, N; Rodríguez, P. (2014). *Hacia la construcción significativa de lo cuadrático con base en modelación*. Seminario para optar al grado de Licenciado en Educación y al título de Profesor de Educación Media en Matemática e Informática Educativa. UCSH. Santiago de Chile. Chile.

Hecklein, M; Engler, A; Vrancken, S; Müller, D. (2005). *Variables, funciones y cambios. Exploración de las nociones que manejan alumnos de una escuela secundaria*. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.

Herrera, A y Maldonado, A. (2001). Depresión, cognición y fracaso académico. *Revista Internacional de Psicología Clínica y de la Salud*. España

Kaiser, G. & Siraman, B. (2006). *A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education*.

Kemmis, S; McTaggart, R (1988). *Como planificar la investigación-acción*. Barcelona, España.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

- Lewin, K. (1946). *La investigación-acción y los problemas de las minorías*. España.
- Lucci, M. (2006). *La propuesta de Vygotsky: La Psicología Socio-histórica*. Pontificia Universidade Católica de Sao Pablo. Brasil.
- Manterola, M. (2003). *Psicología Educativa: conexiones con la sala de clases*. Texto de estudio. Universidad Católica Blas Cañas.
- Marquina, N. (2012). *Emergencia de las prácticas de modelación. En vías de su constitución*. Resumen del proyecto de Investigación. México.
- Marquina, N. (2013). *Emergencia de las prácticas de modelación en vías de su constitución*. Tesis Doctoral. México
- Ministerio de Educación de Chile (2012) *Bases Curriculares 2012*. Aprobadas por Decreto 439. Chile.
- Ministerio de Educación de Chile (2014). *Programa de Estudio Segundo Año Medio Matemática*. Chile.
- Ministerio de Educación de Chile (2013). *Programa de Estudio Tercer Año Medio Formación Diferenciada: Álgebra y modelos analíticos*. Chile.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. España.

Ochoa, J. (2007). Los programas escolares. *Una red de negociaciones*. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. UMCE. Editorial Lom. Chile.

Pezoa, M. (2012). *La práctica de modelación al curriculum escolar chileno. Una propuesta desde la socioepistemología*. Trabajo final para optar al grado de Magíster en Didáctica de las Matemáticas. Chile.

Pesquera, A. (2014). *Aprendizaje en inteligencia artificial*.

PISA (2001).

PISA / OCDE (2012).

Rodríguez, R. (2012). *Competencias de modelación y uso de tecnología en Ecuaciones Diferenciales*. Universidad Técnica de Monterrey. México.

SERCE 3 (2010)

SIMCE (2012)

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Editorial Universidad de Antioquia Facultad de Enfermería de la Universidad de Antioquia.

TIM 552 (2003)

Varela, F. (1990). *El fenómeno de la vida*. Santiago: Noreste Ltda.

Vasco, C., (2006). *Didáctica de las matemáticas*. Artículos selectos, Editorial Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Villa-Ochoa, J. (2012). *Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas*. Revista TED-Tecné, Episteme y Didaxis, 0(31), 9-25.

Walkerdine, V. (1988). *The Mastery of Reason*. Routledge, London.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Paidós Ecuador, España.

# **ANEXOS**