FACULTAD DE EDUCACIÓN
Escuela de Educación en Matemáticas
e Informática Educativa

PROPUESTA DE UN DISEÑO DIDACTICO QUE COMPLETE LA ENSEÑANZA DE LAS TRANSFORMACIONES ISOMETRICAS A TRAVES DEL USO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS. BASADO EN LA TEORIA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE DAVID AUSUBEL.

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:
MANGILI CUADRA, GINO FULVIO
SANCHEZ BARROS, ALDO SEBASTIAN

PROFESOR GUÍA:
PABLO FIGUEROA SALGADO

SANTIAGO, CHILE
AÑO 2015

RESUMEN

En la presente investigación se presenta una propuesta de enseñanza didáctica la cual busca integrar los ejes fundamentales definidos en el marco curricular, tomando el tópico de transformaciones isométricas que es visto en octavo básico y primero medio, principalmente de forma geométrica, limitándola a casos puntuales y triviales no estableciendo una herramienta eficaz para realizar cualquier transformación isométrica, ni tampoco relacionándolas con otros conceptos matemáticos en años posteriores, por otro lado, los números complejos que son vistos en tercero año medio, en donde su enseñanza se basa en el eje algebraico operacional y como conclusión de la teoría de conjuntos, no vinculándolo con otros tópicos matemáticos aprendidos previamente por los estudiantes. Es por esto, que la propuesta didáctica que se genera, contempla completar la enseñanza de las transformaciones isométricas en base a la operatoria de los números complejos, generando un material potencialmente significativo para el estudiante, sustentándolo en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.

Para esto se llevó a cabo una metodología de investigación cualitativa, mediante el análisis de una entrevista semi-estructurada a cuatro docentes de matemática del Liceo Nacional de Maipú respecto a cómo visualizan, a través, de su experiencia la enseñanza de las transformaciones isométricas, sus dificultades, obstáculos y metodología actual de enseñanza, y una revisión de la bibliografía de los programas de estudio y textos escolares, con el fin de saber cuáles son los recursos que posee el docente para la elaboración del material didáctico para la enseñanza de las transformaciones isométricas, en respuesta a esto se genera la propuesta de un diseño didáctico

Como resultado se plantea que es posible concluir de forma acabada la enseñanza de las transformaciones isométricas, a través, de una articulación con los números complejos, siendo este una herramienta eficaz para perfeccionar el concepto de las transformaciones isométricas, cambiando así la profundidad con la que son enseñadas en la actualidad, instaurando así la necesidad de futuras investigaciones de relacionar conceptos matemáticos, que se encuentren separados actualmente en la educación chilena, con el objetivo de lograr materiales potencialmente significativos, estableciéndose así un desafío para los docentes del área de las matemáticas.

ABSTRACT

This investigation presents an approach of didactic teaching which search to integrate the fundamental axes defined in the curriculum framework, taking the isometric transformations which are seen in 8th grade and 9th grade, mainly geometrically, limiting it to specific cases and trivial not establishing an effective tool for any isometric transformation, even not related to other mathematics concepts in later years. On the other hands, complex numbers are seen in 10th grade, where teaching is based on the algebraic operational axis and as conclusion of the sets theory, not linking it with other mathematics topics previously learned by students. For this reasons, the educational proposal which is generated, provides to complete the teaching isometric transformations based on the operation of complex numbers, generating a significant material for students. It sustains the " significant learning" theory by David Ausubel.

For this purpose, this research is a qualitative investigation based on a semi-structured interview to four Chilean teachers of Liceo Nacional from Maipù. They gave us a view through their experiences teaching isometric transformations, their difficulties, obstacles, and the present methodological techniques. Also a review of study programs and textbooks from the goverment, in order to know which are the resources by teachers to elaborate didactic material for teaching isometric transformations. In response to this, it generates a didactic proposal.

As a result, is possible to conclude that teaching isometric transformations through of an articulation complex numbers, is an effective tool to improve the isometric transformation concept, changing the way which they are taught nowadays . This research establishes the future needs to investigate the relation of mathematics concepts which are actually separated in the Chilean education. Finally, the idea is to achieve significant materials and establish a challenge for Chilean Mathematics Teachers.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la enseñanza de las matemáticas, se constata una tendencia a la dispersión de ésta, estableciendo unidades, las cuales pareciesen ser ajenas unas con otras, sin embargo dada la naturaleza de la matemática la dispersión que se establece, más que organizar los saberes matemáticos, los descontextualiza. Encasillando al estudiante a concebir la matemática de forma disociada entre las unidades tratadas. Contrastando la visión que se explicita en los programas de estudios como orientación para el docente:

> *"Los estudiantes deben explorar en las ideas matemáticas y entender que ellas constituyen un todo y no fragmentos aislados del saber. Tienen que enfrentar variadas experiencias para que comprendan en profundidad los conceptos matemáticos, sus conexiones y sus aplicaciones. De esta manera, podrán participar activamente y adquirir mayor confianza para investigar y aplicar las matemáticas". (Programas de estudio 1° Medio, matemáticas, 2011, p.26)*

En función de esto, es que se plantea la necesidad de fomentar la relación de las diferentes dimensiones matemáticas, en diferentes contextos escolares, para promover el generar materiales potencialmente significativos y la actualización de la matemática, proponiendo así problemas que favorezcan una visión integrada del conocimiento matemático (Marco curricular, 2009), al poseer esta visión integrada, el estudiante puede discriminar el saber matemático y establecer cuáles son las mejores estrategias de resolución de problema según sus conjeturas.

La geometría en la matemática es un eje fundamental, para el desarrollo de la imaginación espacial, además de que sirve para explicar sucesos difíciles de interpretar con los otros ejes fundamentales, *"El estudio de la geometría fomenta un tipo de razonamiento difícil de replicar con el álgebra o el análisis"* (Chuaqui & Riera, 2011, p. 17), relacionándose de manera natural los ejes cuando se enseñan en forma conjunta, facilitando la significancia de cada uno por separado, como en conjunto.

Esta investigación, está constituida de cinco capítulos, el primer capítulo consiste en el planteamiento del problema, en donde se presenta los antecedentes y se contextualiza el estudio de las transformaciones isométricas en los textos escolares, programas de estudio de los diferentes niveles en los que se enseña este tópico, para luego, definir la problemática y la justificación que se presencia en torno a este, expresando la necesidad de integrar las diversas dimensiones de la matemática, las limitaciones que esto presentará, para dar paso a los objetivos que posee la creación del diseño didáctico.

En el segundo capítulo, se muestran los antecedentes teóricos que sustentan el diseño didáctico, en base a la teoría de aprendizaje significativo de David Ausubel, además de presentar el contenido de las transformaciones isométricas y números complejos que son necesarios para la formulación y entendimiento del diseño didáctico.

El tercer capítulo, consiste en caracterizar la metodología de investigación, el cual radica en exponer el enfoque de estudio junto con el tipo de investigación, las muestras que se utilizaron tanto para la entrevista a los docentes, como para el grupo de enfoque. Analizar estableciendo relaciones entre las experiencias recolectadas en la entrevista semi-estructurada y la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel presente en el marco teórico y el cómo aportan para el diseño final.

Finalmente, en el quinto capítulo a través de la integración de los capítulos anteriores, se presenta el diseño de la propuesta didáctica, el cual esta subdivido en cinco clases progresivas con una evaluación final.

CAPITULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

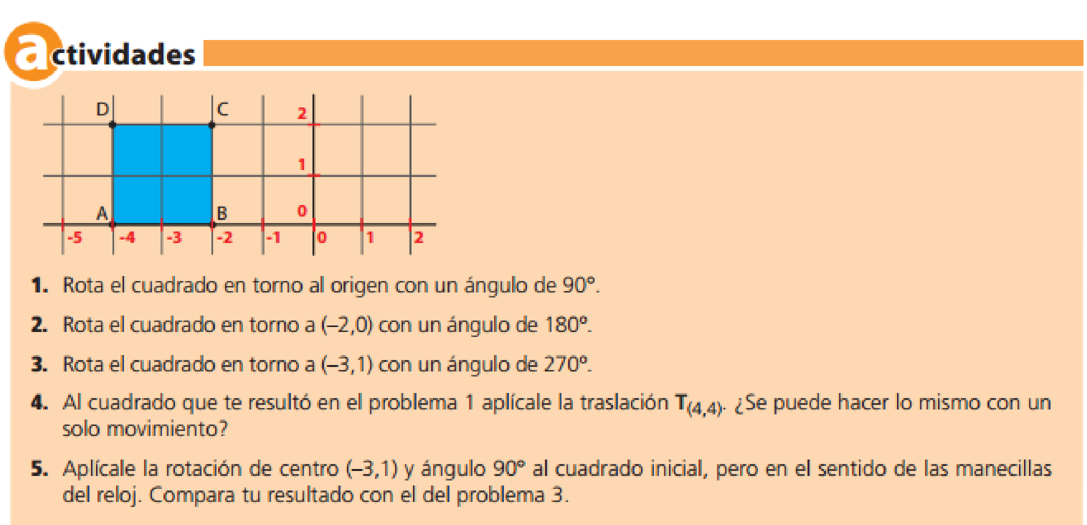
ANTECEDENTES

Se evidencia en el marco curricular una intención de integrar los conceptos matemáticos enseñados durante toda la etapa escolar, aún así esto no se ve plasmado tanto en los planes y programas como en los textos escolares existiendo una desarticulación de los contenidos matemáticos separándolo en cuatro ejes fundamentales: "Números, Algebra, Geometría, Datos y azar" (Marco curricular, 2003, MINEDUC).

El marco curricular propone que el eje de geometría:

> *"se relaciona con el de números, a partir de la medición y la representación, en el plano cartesiano, de puntos y figuras; con el de álgebra y datos y azar, la relación se establece mediante el uso de fórmulas y luego la representación gráfica de funciones y de distribución de datos" (Marco curricular, 2009, MINEDUC)".*

Aún así, al momento de relacionarlo con el álgebra, la enseñanza de las transformaciones isométricas no se relaciona con el uso de una fórmula para la rotación, ya que no se presenta una herramienta algebraica capaz de realizar cualquier rotación, sino que se centra en casos puntuales y triviales como son las rotaciones de 90°,180°, 270° y 360°, como se visualiza en una actividad expuesta en el texto para el estudiante de primero medio de matemáticas del año 2012 entregado por el MINEDUC:



1. Rota el cuadrado en torno al origen con un ángulo de 90°.
2. Rota el cuadrado en torno a (–2,0) con un ángulo de 180°.
3. Rota el cuadrado en torno a (–3,1) con un ángulo de 270°.
4. Al cuadrado que te resultó en el problema 1 aplícale la traslación $T_{(4,4)}$. ¿Se puede hacer lo mismo con un solo movimiento?
5. Aplícale la rotación de centro (–3,1) y ángulo 90° al cuadrado inicial, pero en el sentido de las manecillas del reloj. Compara tu resultado con el del problema 3.

Figura 1: Actividades. Fuente: (Jiminez,A., Reyes, C., Valenzuela, M., Chandia, E, 2012, p. 145).

Sin embargo, en el programa de estudio de matemática de primer año medio existen actividades las cuales proponen realizar rotaciones respecto a otros ángulos:

2
Identifican regularidades al rotar, con respecto al origen y en un ángulo de 30º sucesivas veces, una figura en este plano.

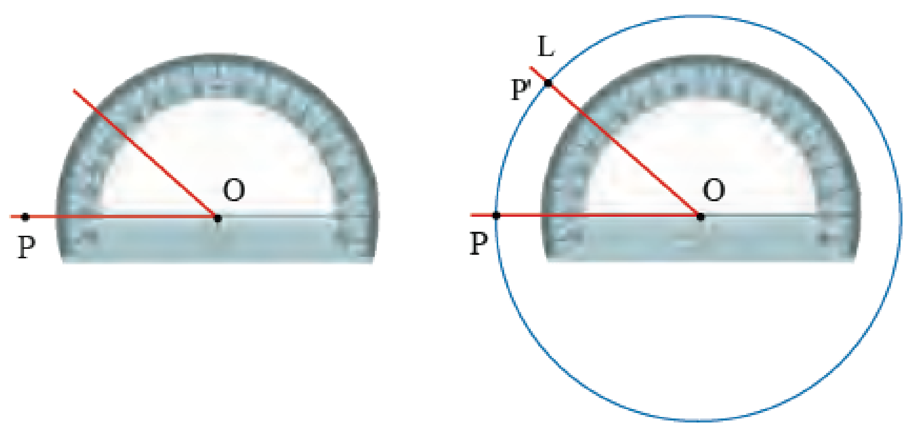
Figura 2: Ejemplos de Actividades. Fuente: (MINEDUC, 2011, p.62).

Instaura la necesidad de ocupar un ángulo de 30°, sin embargo en los textos escolares como en los planes y programas, no se expone una fórmula algebraica capaz de realizar esta actividades, limitándola solo al uso del transportador, vinculándolo una vez más sólo al eje de la geometría y a exponer una aplicación memorista. Como se presenta a continuación un ejemplo del cómo se enseña a rotar cualquier punto.

8 ¿Cómo rotar un punto?

Para realizar una rotación, necesitaremos un compás, un transportador y una regla. Con el compás haremos las circunferencias, con el transportador marcaremos los ángulos y con la regla marcaremos los radios.

Si queremos rotar P, en torno a O con un ángulo α, (nosotros lo haremos con un ángulo de 40° según el sentido de las manecillas del reloj, para fijar ideas) marcamos la recta OP con la regla. Luego pondremos la marca de inicio del transportador en el punto O y marcando 0° en la recta $\overline{OP}$.



Enseguida, marcaremos el ángulo α y con la regla trazaremos la recta L que pasa por O y por la marca que acabamos de hacer.

Figura 3. Texto para el estudiante 1° medio. Fuente (Jiminez,A., Reyes, C., Valenzuela, M., Chandia, E, 2012, p.146).

En lo que respecta al estudio de las transformaciones isométricas, tal como lo estructura el currículum nacional, en octavo básico involucra construcciones con regla y compas, en primero medio se lleva al plano cartesiano, pero solo se abordan las traslaciones, simetrías axiales acotadas a los ejes coordenadas y simetrías centrales respecto del origen, además de las rotaciones solo en ángulos de 90°, 180°, 270° y 360° con respecto al origen, estableciendo una herramienta algebraica memorística, que predomina el uso de la técnica y la repetición de esta, como se presenta en los siguientes figuras resumen, del texto escolar de primer año medio, del año 2014:

En resumen

Reflejar un punto P(x, y) en plano cartesiano respecto de un eje coordenado puedes utilizar las siguientes expresiones:

- Si la reflexión de un punto (x, y) es respecto del eje X puede ser definida como una función:
$$R_x(x, y) = (x, -y)$$
- Si la reflexión de un punto (x, y) es respecto del eje Y puede ser definida como una función:
$$R_y(x, y) = (-x, y)$$
- La reflexión de un punto (x, y) respecto a la recta y = x puede ser definida como una función:
$$R_{y=x}(x, y) = (y, x)$$

Figura 4 Texto para el estudiante 1° Medio. Fuente (Del Valle, J., Muñoz, G., Santis, M., 2014, p.199).

En resumen

Para rotar un punto P(x, y) en el plano cartesiano respecto al origen (O) y un ángulo de rotación α, el punto imagen se obtiene utilizando las siguientes expresiones:

$R_{(o,\ 90°)}(x, y) = (-y, x)$ $\qquad$ $R_{(o,\ -90°)}(x, y) = (y, -x)$

$R_{(o,\ 180°)}(x, y) = (-x, -y)$ $\qquad$ $R_{(o,\ -180°)}(x, y) = (-x, -y)$

$R_{(o,\ 270°)}(x, y) = (y, -x)$ $\qquad$ $R_{(o,\ -270°)}(x, y) = (-y, x)$

$R_{(o,\ 360°)}(x, y) = (x, y)$ $\qquad$ $R_{(o,\ -360°)}(x, y) = (x, y)$

Figura 5 Texto para el estudiante 1° Medio. Fuente (Del Valle, J., Muñoz, G., Santis, M., 2014, p.203).

A continuación, se presentan tres actividades extraídas del texto de estudiante de octavo básico el cual se evidencia las actividades para su enseñanza, en este nivel:

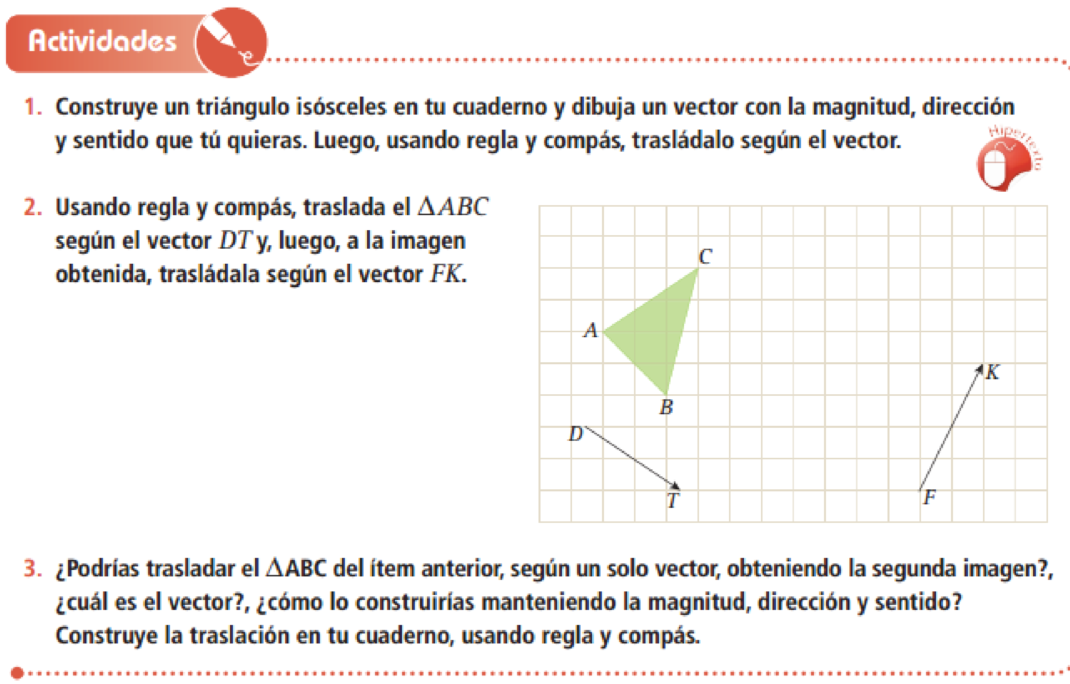


Figura 6 Texto para el estudiante 8° básico. Fuente (Bórquez, E., Darrigrandi, F., Zañartu F., 2010, p.109).

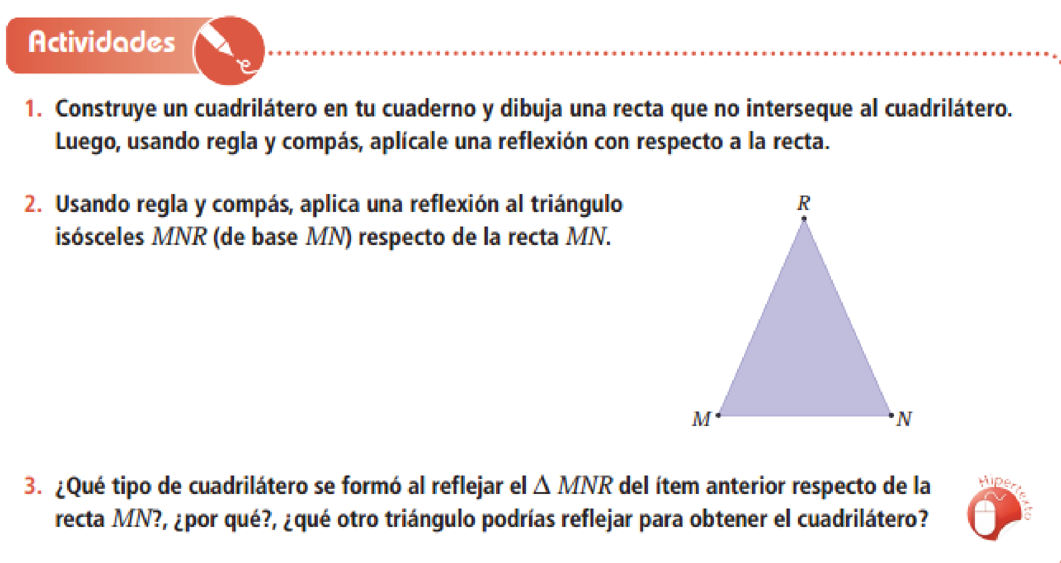
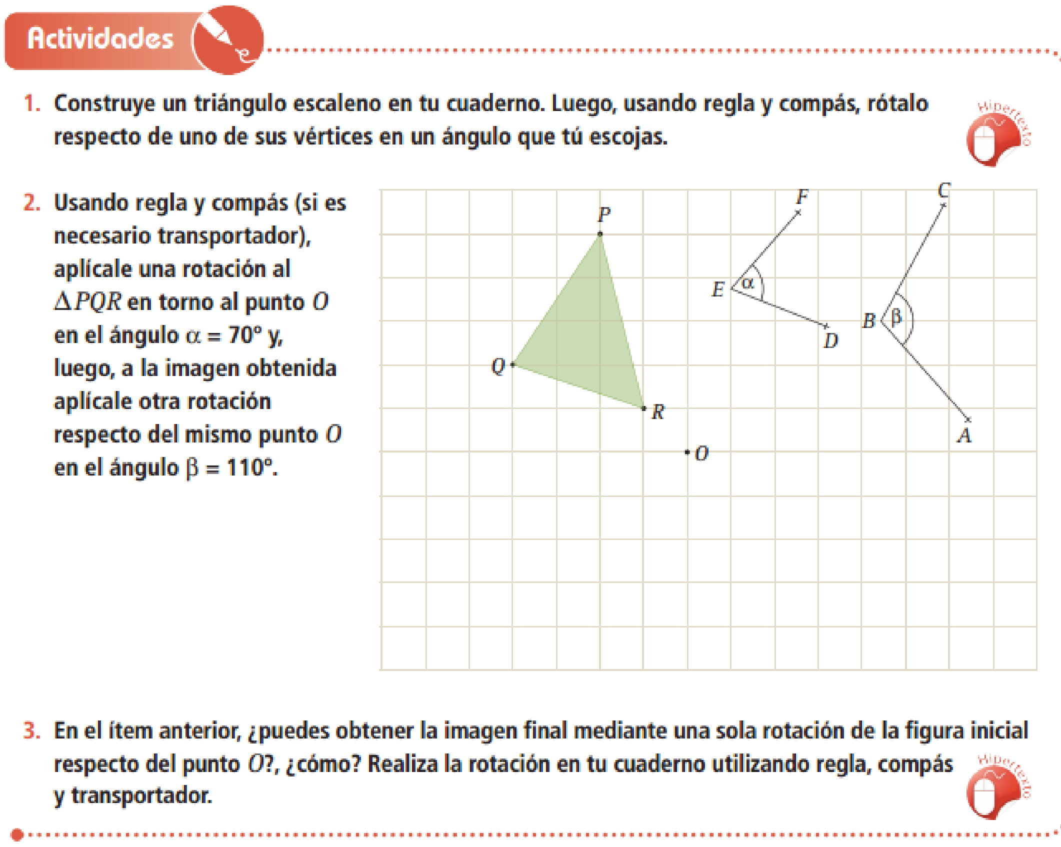


Figura 7 Texto para el estudiante 8° básico. Fuente (Bórquez, E., Darrigrandi, F., Zañartu F., 2010. p.111).



Actividades

1. Construye un triángulo escaleno en tu cuaderno. Luego, usando regla y compás, rótalo respecto de uno de sus vértices en un ángulo que tú escojas.

2. Usando regla y compás (si es necesario transportador), aplícale una rotación al ΔPQR en torno al punto O en el ángulo $\alpha = 70°$ y, luego, a la imagen obtenida aplícale otra rotación respecto del mismo punto O en el ángulo $\beta = 110°$.

3. En el ítem anterior, ¿puedes obtener la imagen final mediante una sola rotación de la figura inicial respecto del punto O?, ¿cómo? Realiza la rotación en tu cuaderno utilizando regla, compás y transportador.

Figura 8 Texto para el estudiante 8° básico. Fuente (Bórquez, E., Darrigrandi, F., Zañartu F., 2010, p.113).

Como se observa, el estudio de las transformaciones isométricas en octavo básico se centra en la construcción de las transformaciones isométricas, a través del uso de transportador, regla y compas.

Hasta este nivel el tema se ha visto solo como operaciones en las coordenadas de un punto para generar su imagen, de esta forma la enseñanza de las transformaciones isométricas se encuentra incompleta en este nivel, ya que no posee una herramienta algebraica eficaz capaz de realizar cualquier transformación isométrica dadas las coordenadas de los puntos.

Por otro lado, se evidencia en tercer año medio el trabajo de los números complejos, el cual es visto en base a su operatoria con el fin de elaborar técnicas para resolver ejercicios repetitivos, junto con esto se establece como una herramienta ineficaz para la resolución de problemas, descontextualizando así el contenido.

13 Si $z = (-0{,}2\ ;\ 0{,}5)$, evalúa la expresión
$i\,z - z^2 + 6 - 3\,i$

14 Sabiendo que $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - 2\,i$, $z_3 = 2\,i - 1$, determinar el valor de a en la expresión, $(a-1)z_1 + 2az_2 - 5z_3$, para que esta sea igual al imaginario $-23\,i$.

15 Dado el complejo $z = a + b\,i$, ¿qué tipo de número complejo se obtendrá de la expresión $2\,z \cdot -z$?

16 Encuentra el complejo z, tal que
$2\,z - 0{,}5\,z\,i = 4\,i^3 + 5\,i$.

17 Al sumar el doble de un complejo con $17 + 18\,i$ se obtiene el mismo complejo disminuido en $17 - 8\,i$. ¿Cuál es dicho complejo?

18 Resuelve la ecuación: $\dfrac{2z}{5} + \dfrac{z-1}{9} = 10 + 6\,i$.

Figura 9. Texto para el estudiante 3° Medio. Fuente (Saiz Maregatti, Blumenthal Gottlieb, 2014, p. 27).

Como se constata en este set de actividades del texto para el estudiante de tercer año medio, estás proponen la aplicación de las operaciones algebraicas implícitas en los números complejos, no integrándolas con otros ejes fundamentales, al igual que en el siguiente ejemplo que propone los planes y programas de matemática de 3° medio. Del año 2009, en donde una vez más se privilegia la operatoria de los números complejos descontextualizada.

Resuelven problemas aplicando $i^2 = -1$.

a. $(2 + 8i)\ (0{,}5 - i)$
b. $(\sqrt{3} + 2i)\ (2 - i\sqrt{3})$
c. $(\sqrt{16} - 2i)\ (-1 + i\sqrt{2})$
d. Para qué valores de "k" se obtiene un número imaginario puro: $(1 + ki)^2$
e. Para qué valores de "k" se obtiene un número real: $(25 - ki)(ki - 25)$

Ponderan un numero complejo "a + bi" por un escalar "c".

- $(3 + 2i) \cdot 2 =$
- $(3 + 2i) \cdot -1 =$
- $(3 + 2i) \cdot \frac{1}{2} =$

Figura 10. Programa de estudio 3°Medio. Fuente (MINEDUC, 2009, p.39).

El estudio de los números complejos puede ser enfocado a la tarea de generar una fórmula algebraica para el concepto de transformación isométrica en la escuela, de modo de establecerse como una herramienta efectiva para realizar cualquier transformación isométrica, además transversalmente al utilizar el álgebra de los números complejos como fórmula para realizar cualquier transformación isométrica se enriquecerá también el estudio de esta, al darle un sentido más amplio del que ya conocen. *“El álgebra provee de un lenguaje a la matemática, por ende, contribuye a, y se nutre del desarrollo de los ejes de números, geometría y datos y azar”* (Marco curricular, 2009, p 146, MINEDUC), ya que, la traslación está relacionada con la suma de complejos, la rotación con la multiplicación de complejos y la reflexión con una composición entre ellas.

En síntesis, el fin de esta investigación es diseñar una propuesta didáctica sustentada en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, la cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas en el nivel de tercero año de enseñanza media.

JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.

Como ya se ha expuesto en los antecedentes el marco curricular exige relacionar los ejes fundamentales con el objetivo de integrar los conocimientos matemáticos, para que los estudiantes relacionen el conocimiento.

Esta exigencia no se visualiza en los textos escolares y planes y programas específicamente en el estudio de las transformaciones isométricas, en donde, no se establece una fórmula algebraica eficaz que relacione transversalmente los ejes fundamentales.

Se considera que el marco curricular es necesario para la construcción de cualquier material didáctico, ya que, *"define el aprendizaje que se espera que todos los alumnos y alumnas del país desarrollen a lo largo de su trayectoria escolar. Tiene un carácter obligatorio y es referente en base al cual se construyen los planes de estudio, los programas de estudio, los mapas de progresos, los textos escolares y se elabora la prueba Simce"*. (Marco curricular, 2009, p. 5, MINEDUC).

Para que el estudio de las transformaciones isométricas sea coherente con el objetivo expuesto en el marco curricular se debe enriquecer con los números complejos para poder generar una herramienta algebraica eficaz que permita realizar cualquier transformación isométrica, para lograr esto se utiliza la teoría del aprendizaje significativo de David, ya que, de esta forma enriquecen las transformaciones isométricas. Los números complejos corresponden a la inclusión correlativa, entendiéndose esto, como el proceso en que la nueva información (números complejos) es vinculada con la idea de transformaciones isométricas, en donde, la nueva información hará que las transformaciones isométricas sean extendidas o modificadas a través de su inclusión (Ausubel, 2001). Destacando que esta nueva extensión o modificación será el logro de una herramienta algebraica capaz de realizar cualquier transformación isométrica.

Finalmente, la construcción del diseño didáctico se basa en generar una material potencialmente significativo, en donde, *"la persona aprende recibiendo información verbal, vinculando esta con los conocimientos previamente adquiridos y de esta forma dar a la nueva información y a la información antigua, una significación especial, nueva" (*Manterola, 1998, p. 159). De este modo se asegurará el proceso de asimilación, entendiéndose este como "*el resultado de la interacción que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognoscitiva existente*" (Ausubel, 2001, p.70), este proceso potenciará el aprendizaje de tres maneras:

> *“Proporcionando significado adicional a la nueva idea, reduciendo la probabilidad de que se olvide la nueva idea, haciendo más accesible la recuperación de la información”.* (Manterola, 1998, p. 159).

Con la incorporación de operar con números complejos por sobre las transformaciones isométricas se constituiría una completitud del saber matemático de esta, el cual responda al objetivo expuesto en el marco curricular del 2009.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Al momento de relacionar la enseñanza de las transformaciones isométricas con el eje algebraico, estas no se relaciona con el uso de una fórmula para la rotación, ya que no se presenta una herramienta algebraica capaz de realizar cualquier rotación, sino que se centra en casos puntuales y triviales como son las rotaciones 90°,180°, 270° y 360° con respecto al origen. Como ya se expuso en los antecedentes, el marco curricular exige relacionar los ejes fundamentales con el objetivo de integrar los conocimientos matemáticos, para que los estudiantes relacionen el conocimiento, por lo tanto, se busca generar un material potencialmente significativo el cual organice el saber de las transformaciones isométricas de forma no arbitraría y efectiva (Ausubel, 2001), en base a esto surge la necesidad de estudiar el cómo realizar una secuencia didáctica basada en la teoría de Ausubel la cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas en tercer año de enseñanza media, a través de la operatoria de los números complejos, es decir, generar una herramienta algebraica eficaz que permita realizar cualquier transformación isométrica en el plano de Argand, es en la búsqueda de este objetivo que se plantean las siguientes preguntas de investigación:

- El nuevo material potencialmente significativo, ¿de qué manera logrará satisfacer el objetivo que se ha expuesto del marco curricular de integrar los ejes fundamentales?
- ¿Cómo organizar un material potencialmente significativo el cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas integrando de forma efectiva las operaciones de los números complejos para esta tarea?

LIMITACIONES

En la presente investigación las limitaciones que se podrían evidenciar, durante el desarrollo de la secuencia didáctica y/o en su futura implementación se resume en los presentes puntos:

- Problema en la accesibilidad de la recuperación de los conocimientos previamente enseñados, los cuales podrían no haber sido asimilados por los estudiantes.
- No se enseña actualmente razones trigonométricas de forma formal en el plan común de enseñanza media, aun así se enseña en tercero medio de enseñanza media, donde se ubica el diseño didáctico.
- La no implementación del diseño didáctico dado los tiempos requeridos para su aplicación.

OBJETIVOS GENERALES

Elaborar un diseño didáctico que complete la enseñanza de las transformaciones isométricas a través de los números complejos, con el fin de guiar el proceso de enseñanza en el nivel de tercer año medio, basándose en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer en base a las vivencias comentadas por los docentes en la entrevista semi-estructurada cuales son las dificultades y obstáculos presentes en la enseñanza de las transformaciones isométricas y si ellos consideran que existe un vínculo entre este tópico matemático y el contenido de los números complejos, contrastándola con la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.
- Validar el diseño de secuencia didácticas a través con reuniones de trabajo de estudiantes de pedagogía en matemática de la UCSH que estén cursando cuarto año y un grupo de docentes expertos.

SUPUESTOS

Las transformaciones isométricas son enseñadas de manera arbitraria sin un sentido lógico para el alumno.

El relacionar de manera no arbitraria los ejes fundamentales que propone el marco curricular (Números, Algebra, Geometría y Datos y azar), se logra un aprendizaje significativo para el estudiante, ya que al relacionar los conocimientos genera estructuras cognitivas más complejas que siendo más sencillo retener la información.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

COGNOSCITIVISMO

Es una corriente psicológica, la cual busca comprender el proceso de aprendizaje, esta *"intenta explicar el funcionamiento psicológico de las personas, incluyendo una interpretación respecto a cómo aprenden los seres humanos*" (Moya, 1997, p. 13)

Para esta corriente la importancia radica en los procesos mentales [1]de la persona, acogiendo "*una nueva nomenclatura conceptual, con términos como comprensión, procesos mediadores, representación simbólica, estructura cognoscitiva, esquemas, significados, entre otros"* (Moya, 1997, p. 17).

Dentro de las teorías cognoscitivas del aprendizaje esta la teoría del aprendizaje significativo, expuesto por David Ausubel.

TEORIA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Es en el año 1963 en donde Ausubel da a conocer en una monografía titulada "*the psychology of meaningful verbal learning*" su teoría sobre el aprendizaje verbal significativo, siendo que la teoría predominante en ese momento era psicología conductista, basada en el aprendizaje por repetición[2].

El aprendizaje significativo expuesto se definirá como:

> *"proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Esta interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores[3] o ideas de anclaje. (Ausubel, 1997, 2002. Moreira, 1997)" (*Rodriguez, 2004, p.2)

[1] "como la percepción, la memoria, la atención, la resolución de problemas, la psicología del lenguaje, y el desarrollo y el aprendizaje desde un punto de vista cognoscitivo" (Moya, 1997)
[2] "se da cuando la tarea de aprendizaje consta de puras asociaciones arbitrarias"(Ausubel, 2001)
[3] Concepto pre existente en la estructura cognitiva

Al alumno el aprendizaje significativo se le presenta de tal manera que

> *"el contenido total de lo que se va a aprender se le presenta al alumno en su forma final. En la tarea de aprendizaje el alumno no tiene ningún descubrimiento independiente. Se le exige solo que internalice o incorpore el material (...) que se le presenta de un modo que pueda recuperarlo o reproducirlo en una fecha futura. En el aprendizaje por recepción significativo, la tarea o material potencialmente significativo son comprendidos o hechos significativos durante el proceso de internalización"* (Ausubel, 2001, p. 34)

Este aprendizaje tiene su importancia en los términos de Ausubel como: *"El aprendizaje significativo por recepción es importante en la educación porque es el mecanismo humano por excelencia que se utiliza para adquirir y almacenar la vasta cantidad de ideas e información representada por cualquier conocimiento"* (Ausubel, 2001, p.47)

El aprendizaje significativo es considerado

> *"una teoría psicológica porque se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender. Pero desde esa perspectiva no trata temas relativos a la psicología misma ni desde un punto de vista general, ni desde la óptica del desarrollo, sino que pone el énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprenden; en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones que se requieren para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación (Ausubel, 1976)"* (Rodríguez, 2004, p. 1)

Es decir está en la búsqueda de conocer cómo los estudiantes adquieren los conocimientos, cómo los asimilan y de qué manera logran retener estos conocimientos.

Esta teoría se diferencia del aprendizaje por repetición dado que Ausubel (2002, p. 29) las critica exponiendo lo siguiente:

> *"Naturalmente, esta capacidad de relación arbitraria y literal de las tareas de aprendizaje memorista con la estructura cognitiva*[4] *tiene algunas consecuencias importantes para el aprendizaje. En primer lugar puesto que el equipamiento cognitivo humano, a diferencia de un ordenador, no puede manejar con mucha eficacia información que se enlaza con el de una manera*

[4]"contenido y organización totales de las ideas de una persona dada; o, en el contexto del aprendizaje del tema de estudio, contenido y organización de sus ideas en una área particular del conocimiento"(Ausubel, 2001)

arbitraria y literal, solo se pueden interiorizar de esta manera tareas de aprendizaje relativamente breves y estas solo pueden retener durante breves periodos de tiempo a menos que se dé un intenso sobre aprendizaje. En segundo lugar su capacidad de relación arbitraria y literal con la estructura cognitiva hace que las tareas de aprendizaje memorista sean muy vulnerables a la interferencia de materiales similares previamente aprendidos y encontrados de una manera concurrente o retroactiva."

Pero a pesar de esto esta teoría también crítica el aprendizaje basado en el descubrimiento, en donde se propone una diferenciación entre el aprendizaje por recepción y el aprendizaje por descubrimiento en donde se expone que*:*

> *"los grandes volúmenes de material de estudio se adquieren en virtud del aprendizaje por recepción, mientras que los problemas cotidianos se resuelven gracias al aprendizaje por descubrimiento (...) el conocimiento que se adquiere a través del aprendizaje por recepción se usa también para resolver problemas de la vida diaria y el aprendizaje por descubrimiento se emplea comúnmente el salón de clases para aplicar, extender, aclarar, integrar y evaluar el conocimiento de la materia de estudio y para poner a prueba la comprensión"* (Ausubel, 2001, p.36).

Dando a entender que si bien no descarta por completo el aprendizaje por descubrimiento para su teoría, si restringe su uso a ciertos momentos de la enseñanza, ya que para que el aprendizaje por descubrimiento sea significativo se debe involucrar "*una etapa previa de resolución de problemas antes de que el significado emerja y sea internalizado (Ausubel, 1961)*" (Ausubel, 2001, p. 36).

Condiciones para que se produzca un aprendizaje significativo

1. Actitud potencialmente significativa: el aprendiz debe tener la predisposición de aprender de manera significativa el material potencialmente significativo, puesto que "*incluso es posible aprender de una manera memorista un material lógicamente significativo"* (Ausubel, 2002, p. 26)

2. Presentación de un material potencialmente significativo: esto quiere decir que "*el material de aprendizaje se pueda relacionar de manera no arbitraria (plausible, razonable y no aleatoria) y no literal con cualquier estructura*

cognitiva apropiada y pertinente (esto es, que posea un significado lógico[5]*)*"(Ausubel, 2002, p.25)

3. Existencia de subsumidores adecuados: como dice Ausubel (2002, p. 25) "*la estructura cognitiva de la persona concreta que aprende contenga ideas de anclaje pertinentes con las que el nuevo material se pueda relacionar*"

El aprendizaje significativo por recepción se puede clasificar de tres maneras:

1. Aprendizaje representacional: es el más básico de los otros tipos de aprendizaje significativo, este consiste en dar significado a símbolos (por lo general palabras). "*El aprendizaje representacional es una clase de aprendizaje significativo en que el aprendiz reconoce una palabra, un signo o un símbolo como etiqueta de un objeto, un hecho o una categoría de hechos u objetos (Novak. 1998. p.59)"* (García, 2001, p.54).

2. Aprendizaje de conceptos: para explicar este aprendizaje primero se debe definir a través de las palabras de Ausubel lo que el expone como conceptos, siendo estos *"objetos eventos, situaciones o propiedades que poseen unos atributos característicos comunes y están designados por el mismo signo o símbolo*" (Ausubel, 2002, p.26) , ahora ya sabiendo lo que es un concepto se debe destacar que hay dos formas de aprender estos:

   a) Formación de conceptos: en este aprendizaje los conceptos se aprenden a través de la experimentación, pasando por las etapas de hipótesis, comprobación y generalización. Es la forma en que principalmente los niños pequeños aprenden

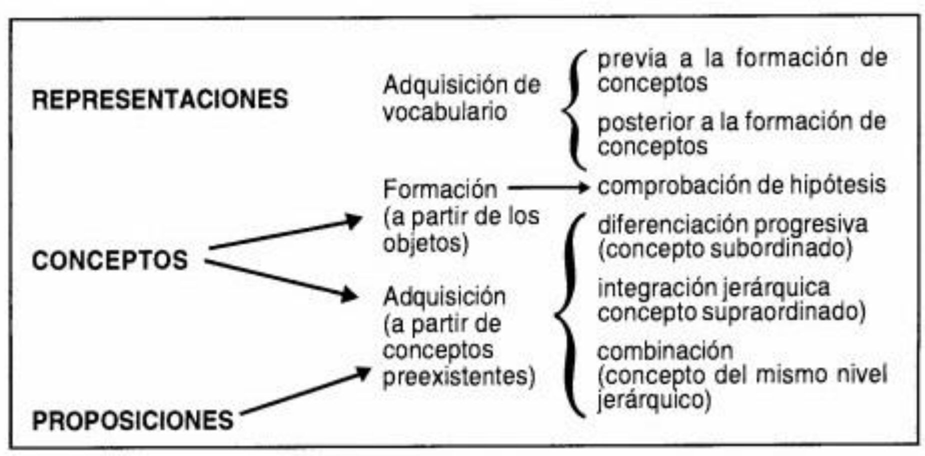
   b) La asimilación de los conceptos: este tipo de aprendizaje a diferencia del anterior se da en edades posteriores (escolares y adultos).como dice Ausubel (2002) Acá los conceptos se adquieren a través mediante el proceso de asimilación de conceptos, puesto que los nuevos conceptos son definidos mediante su uso, en nuevas combinaciones, de aspectos ya instaurados en la estructura cognoscitiva".

[5] "que no se relacione de manera arbitraria, sino sustancialmente a las ideas relevantes correspondientes que radican en el reino de la capacidad del aprendizaje humano. No implica validez empírica ni lógica, en el sentido filosófico de lo lógico" (Ausubel, 2001). "el significado lógico depende únicamente de la naturaleza del material"(Ausubel, 2001)

3. Aprendizaje proposicional: Si bien este tipo de aprendizaje es más complejo, tiene en común con el aprendizaje representacional el que al relacionarse con ideas ya existentes se reconstruye la estructura cognoscitiva generando nuevos significados de estas ideas como también de ideas nuevas,

> *"Sin embargo, en este caso, la tarea de aprendizaje, o la proposición potencialmente significativa, consta de una idea compuesta que se expresa verbalmente en una expresión que contiene tanto significados de palabras de carácter denotativo y connotativo como las funciones sintácticas de las palabras y las relaciones entre ellas*"(Ausubel, 2002, p. 28).

Tabla n°1: tipos básicos de aprendizaje significativo en la teoría de Ausubel



[6]

Ahora este aprendizaje puede ser de tres tipos:

1. Subordinado: este aprendizaje se produce en el momento cuando una "*proposición lógicamente significativa de una disciplina particular (plausible, pero no necesariamente valida desde un punto de vista lógico o empírico en el sentido filosófico) se relaciona significativamente con unas proposiciones específicas de orden superior en la estructura cognitiva del estudiante"* (Ausubel, 2002, p.28). Estas proposiciones de orden superior son denominadas inclusores y sirven para abarcar los nuevos conceptos generando estructuras cognitivas más complejas.

[6] Nota. Fuente: Manterola, M. (1998). Psicología educativa: conexiones con la sala de clases (p. 188). Santiago: ediciones Universidad Católica Blas Cañas

Existen dos tipos de inclusión:

- Inclusión derivativa: como bien dice Manterola (1998) este tipo de inclusión se produce cuando el material de aprendizaje o nueva información, es comprendido como un ejemplo específico de un concepto establecido en la estructura cognoscitiva o como un apoyo o ilustración de una proposición general, previamente aprendida. Se derivan en forma fácil los inclusores.

- Inclusión correlativa: como dice Ausubel (2001), este tipo de aprendizaje inclusivo o subordinado en el que las nuevas ideas en la tarea de aprendizaje son extensiones, elaboraciones, modificaciones o calificaciones de una idea relevante existente en la estructura cognitiva.

2. De orden superior o supraordinado: este tipo de aprendizaje se produce cuando una "*proposición nueva se puede enlazar o bien con unas ideas subordinadas específicas de la estructura cognitiva ya existente o bien con un amplio fondo de ideas pertinentes en general de la misma estructura cognitiva que se pueden subsumir en ella"* (Ausubel, 2002, p.28).

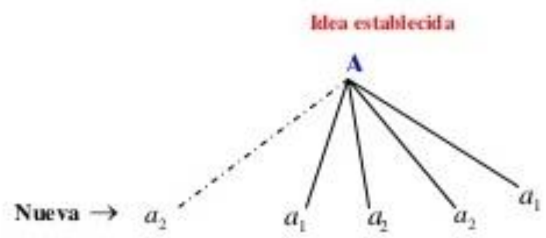
3. Combinatorio: este tipo de aprendizaje a diferencia de los otros dos se produce cuando *" una proposición potencialmente significativa no es enlazable con unas ideas especificas subordinadas o de orden superior de la estructura del estudiante pero sí lo es con una combinación de contenidos pertinentes en general, y también menos pertinentes a esa estructura* " (Ausubel, 2002, p.28)

La siguiente tabla tiene como fin ilustrar lo expuesto anteriormente sobre las formas de aprendizaje significativo:

Tabla 2: Formas de aprendizaje significativo

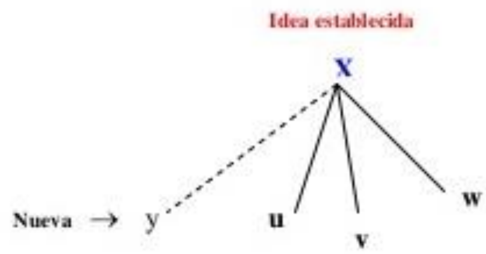
1. Aprendizaje subordinado:

A. inclusión derivativa



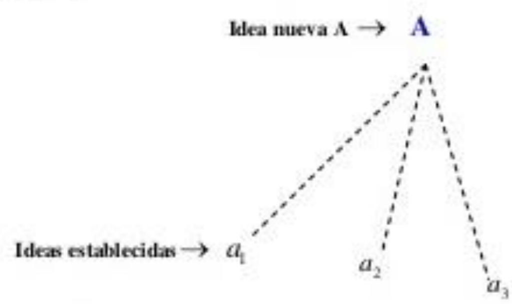
En la inclusión derivativa, la nueva información a_2, es vinculada a la idea supraordinada A y representa otro caso o extensión de A. No se cambian los atributos de criterio del concepto A, pero se reconocen nuevos ejemplos como relevantes.

B. Inclusión correlativa



En la inclusión correlativa, la nueva información y es vinculada a la idea X, pero es una extensión, modificación o limitación de X. Los atributos de criterio del concepto incluido pueden ser extendidos o modificados con la nueva inclusión correlativa.

2. Aprendizaje supraordinado



En el aprendizaje supraordinado, las ideas establecidas a_1, a_2 y a_3 se reconocen como ejemplos más específicos de la idea nueva A y se vinculan a A. La idea supraordinada A se define mediante un conjunto nuevo de atributos de criterio que abarcan las ideas subordinadas.

3. Aprendizaje combinatorio **Idea nueva A → B → C → D**

Ideas establecidas

En el aprendizaje combinatorio, la idea nueva A es vista en relación con las ideas existentes B, C y D, pero no es más inclusiva ni más específica que las ideas B, C y D. En este caso, se considera que la idea nueva A tiene algunos atributos de criterio en común con las ideas preexistentes.

[7]

[7] Nota. Fuente: Ausubel (2001). Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo (p.71). Editorial trillas. México.

TEORIA DE LA ASIMILACIÓN

Como está expuesto por Ausubel (2001) esta teoría pertenece a la familia de las teorías cognoscitivas del aprendizaje, la cual habla de cómo la nueva información se va relacionando con conceptos previamente aprendidos por el alumno, *"el resultado de esta interacción que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognoscitiva existente constituye una asimilación de significados nuevos y antiguos para formar una estructura más altamente diferenciada*"(Ausubel, 2001, p. 70 - 71)

El aprendizaje significativo es activo a pesar de estar ligado fuertemente a una metodología expositiva, esta no tiene por qué ser de carácter pasivo, siempre y cuando se den tres condiciones expuestas en Ausubel (2002, p. 32):

1. El tipo de análisis cognitivo necesario para determinar qué aspectos de la estructura cognitiva ya existente son más pertinentes al nuevo material potencialmente significativo

2. Algún grado de conciliación con ideas ya existentes en la estructura cognitiva, es decir, percibir similitudes y diferencias y resolver contradicciones aparentes o reales, entre conceptos y proposiciones nuevos y ya establecidos.

3. La reformulación del material de aprendizaje en función del vocabulario y del fondo intelectual idiosincrásico de la persona concreta que aprende.

Junto con esto para poder efectuar un aprendizaje significativo deben estar presentes ciertos procesos, los cuales caracterizan el contenido en la estructura cognoscitiva del alumno:

1. Diferenciación progresiva: es el proceso por el cual los contenidos son organizados de manera jerárquica, además cabe destacar que como dice Ausubel (2001, p. 32 - 33)"*la mayoría del aprendizaje y toda la retención y organización, de la materia es de naturaleza jerárquica*". Este proceso se relaciona con el aprendizaje subordinado.

2. Reconciliación integradora: en este proceso se utilizan las ideas ya conocidas por el alumno, las cuales son relacionadas asumiendo un nuevo y tipo de estructura cognoscitiva, mucho más compleja, además "*se facilita en la enseñanza expositiva si el profesor y/o los materiales didácticos anticipan explícitamente las similitudes y diferencias confundibles entre las ideas existentes, pertinentes y establecidas ya presentes en las estructuras cognoscitivas de los alumnos"* (Ausubel, 2001, p. 111). Este proceso se relaciona tanto con el aprendizaje supraordinado, como con el combinatorio.

Respecto a cómo el aprendizaje significativo mejora la recepción según Ausubel descrito por Manterola (1998):

- El significado nuevo comparte vicariamente la estabilidad de la estructura cognoscitiva, pues ha sido relacionado y asimilado por esta última

- Protege el nuevo significado de las ideas aprendidas previamente, ya que la relación y asimilación continúan durante el almacenamiento de información

- Recuperar la nueva idea es un proceso más sistemático, pues ha sido almacenada junto con ideas pertinentes.

Todo lo expuesto anteriormente tiene como finalidad ser aporte para la elaboración de un material potencialmente significativo que como dice Ausubel (2001) tiene como tarea primordial identificar conocimientos de una disciplina en específico y organizar esto de manera jerárquica y lógica, además el mismo autor revela que esta es una de las medidas más prometedoras para el mejoramiento del aprendizaje Este material de cumplir con dos criterios:

- El material debe mostrar una clara falta de arbitrariedad en la forma en que se exponen los contenidos al alumno, en donde la relación de los nuevos conocimientos con la estructura cognoscitiva existente generara una estructura cognoscitiva más avanzada.

- Debe poseer una relacionabilidad sustancial lo que según Ausubel (2001) es que un nuevo concepto se relacione con la estructura cognoscitiva existente, pero sin generar cambios en dicha estructura

Para poder generar un material de aprendizaje significativo junto con las características expuestas anteriormente, se debe incluir en él los siguientes elementos expuestos en Ausubel (2001):

- Objetivos de aprendizaje: estos objetivos deben estar expuestos para el alumno, ya que así el alumno sabrá cuales son los contenidos que deben aprenderse buscando formar relaciones con entre su estructura cognitiva y los conocimientos nuevos.

- Organizadores previos: estos son materiales introductorios los cuales tienen el fin de hacer que el alumno recuerde conocimientos previos y luego los relacione con mayor facilidad con los nuevos conocimientos que se le presentan. Estos conocimientos son expuestos al alumno en una forma más general que el nuevo conocimiento a aprenderse.

- Material impreso: estos según Ausubel (2001) son el mejor método a elegir cuando la enseñanza de un conocimiento requiere del trabajo de práctica, ya que se puede presentar una gran cantidad de material en forma inmediata y en donde el alumno es quien regula su avance.

- Evaluaciones: estas son primordiales en el aprendizaje del alumno, dado que vigila el grado de aprendizaje del estudiante, estas deben estar "*al principio, durante y al concluir cualquier secuencia de la enseñanza*" (Ausubel, 2001, p.514).

Finalmente se debe aclarar que

> *"No es posible desarrollar aprendizajes significativos si no se cuenta con una actitud significativa de aprendizaje. No se genera tampoco aprendizaje significativo si no están presentes las ideas de anclaje pertinentes en la estructura cognitiva del aprendiz. Aprendizaje significativo no es lo mismo que aprendizaje (que puede ser mecánico) de material lógicamente significativo; no cabe confundir el proceso con el material con el que se realiza. El aprendizaje significativo no se produce de manera súbita, sino que se trata de un proceso demorado que requiere su tiempo; el aprendizaje significativo no se produce instantáneamente sino que requiere intercambio de significados y ese proceso puede ser largo. Aprendizaje significativo no es necesariamente aprendizaje correcto; siempre que haya una conexión no arbitraria y sustantiva entre la nueva información y los subsumidores relevantes se produce un aprendizaje significativo, pero éste puede ser erróneo desde el punto de vista de una comunidad de usuarios. Aprendizaje significativo no es lenguaje, no es simplemente un modo específico de comunicación aprendiz/profesor. No se puede desarrollar aprendizaje significativo en el alumnado con una organización del contenido escolar lineal y simplista; significado lógico es una cosa y significado psicológico es otra. Aprendizaje significativo no es el uso de mapas conceptuales y/o diagramas V; no podemos confundir el proceso en sí con herramientas que pueden facilitarlo o potenciarlo. No hay aprendizaje significativo sin la interacción personal (Rodríguez, 2003 a)" (*Rodríguez, 2004, p.5)

RESEÑA HISTORICA DE…

Para comenzar a adentrarse en lo conceptual de los tópicos matemáticos que en la presente investigación se tratarán, se considera relevante la historia de cada uno de los conceptos matemáticos en cuestión, si bien es cierto aspectos socio epistemológicos no se tratará en esta propuesta didáctica es importante para los docentes conocer la historia, como enuncia Giorgo Tomaso (2001) citando a Fauvel & Van Maanen:

> *"como en todo proyecto educativo, lo que la historia de las matemáticas tiene como intención, venir a ser como un componente de la enseñanza de las matemáticas que implica una expectativa más o menos explícita en términos de lograr un mejor aprendizaje. La investigación sobre el uso de la historia de la matemática en la enseñanza es entonces una parte importante de la investigación en la didáctica de las matemáticas"* (Fauvel & Van Maanen, 1997, p.8).

En cuanto a la bibliografía de la historia de los números complejos es diversa y todas apuntan al mismo origen, no así el concepto de transformaciones isométricas que solo se conocen reseñas históricas no existiendo un origen preciso de su creación.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos fueron descubiertos muy temprano en el área de las matemáticas, pero fueron ignorados por su carácter extraño, carentes de sentido e imposibles de representar. Desde los matemáticos griegos quienes conocían la forma de solucionar ecuaciones cuadráticas consideraban el tipo de problemas $x^2 = -1$ como irresolubles, aún así el interés por los números complejos surge con la intención de resolver ecuaciones cubicas, no cuadráticas (Stewart, 2008).

El primero en publicar estudios relacionados con la resolución de ecuaciones cubicas fue el italiano Girolamo Cardano en su libro Ars Magna el año 1545, exponiendo métodos que le había revelado en secreto Tartaglia (Rivero, 2001). Aún así Cardano se defendió argumentando que este método fue descubierto antes por el matemático Scipione Ferro, en donde exponía que la solución de la ecuación cúbica de la forma $x^3 + ax = b$ es:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

A través de este método de resolución Cardano comienza a resolver ecuaciones cúbicas, percatándose de que en algunos casos funcionaba de forma correcta, no así en otros, encontrando por ejemplo una ecuación cúbica cuya solución era el número 4 ($x^3 - 15x = 4$) y al emplear la resolución obtenía:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Lo cual en ese entonces era imposible de resolver, ya que se consideraba irresoluble trabajar con raíces negativas, le comunicó esta situación a Tartaglia no obteniendo una solución satisfactoria. Bombelli interesado en el libro que había publicado Cardano pero encontrando algunos desarrollos confusos, opero la raíz negativa como una raíz positiva en el libro L' Algebra publicado en 1572, desarrollando el argumento raíz cúbica de la siguiente manera (Stewart, 2008):

$$2 + \sqrt{-121} = (2 + \sqrt{-1})^3$$

Deduciendo así que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

Del mismo modo:

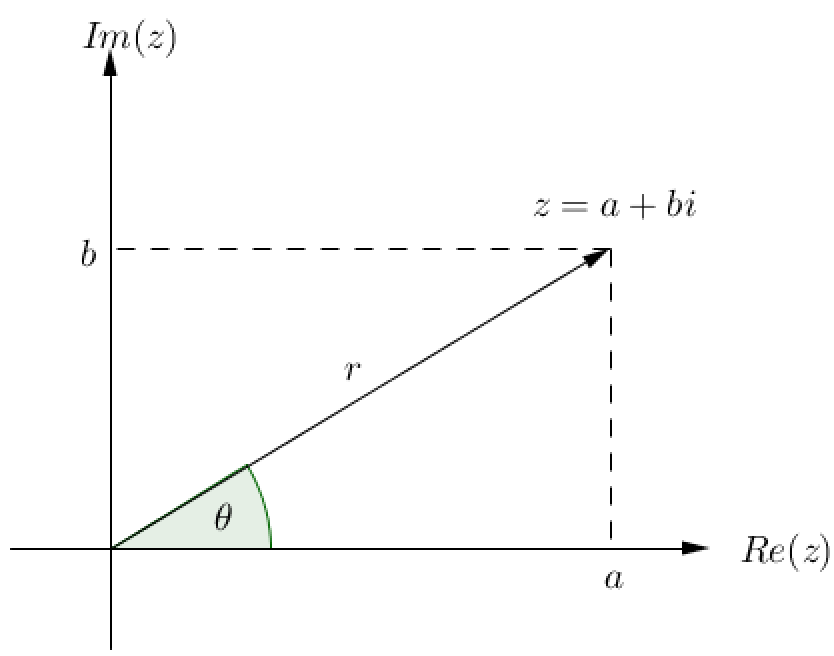
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

Pudiendo reescribir la solución de la ecuación cúbica como:

$$x = \left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right) = 4$$

Llevando a plantear la inquietud en la época de cómo era posible llegar a una solución entera manipulando cantidades que se creían en un principio imposible, dando un primer paso a la aceptación de los números imaginarios (Stewart, 2001).

En 1673 John Walls dio la primera interpretación geométrica de representar los números imaginarios en el plano, la cual es muy cercana a la representación que conocemos hoy en día, sin embargo fue descubierta en forma independiente por el suizo J. Argand en su obra publicada el año 1806, lo cual llevo a nombrar dicha representación como Diagrama de Argand. Y también por Gauss la cual lo descubrió el año 1811 exponiendo también las propiedades de los números de la forma $a + bi$, de aquí en adelante se inician el desarrollo de los números complejos, ya reconocido como un conjunto que abarca todos los conjuntos conocidos anteriormente. (Rivero, 2001).



Plano de Argand

LAS TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

A diferencia de los números complejos, las transformaciones isométricas no tuvieron un hecho histórico específico para el surgimiento de estas, sino que a lo largo de la historia se fueron desarrollando y aplicando en diferentes situaciones extra-matemáticas, una de estas que contribuyó a la evolución de las transformaciones fueron los problemas de los artistas del Renacimiento los cuales querían reproducir la naturaleza tridimensional en lienzos bidimensionales de forma exacta, dando paso a los primeras publicaciones de las perspectivitas, precursores de esto fueron Leonardo da Vinci (en su libro "Tratatto della pintura" sobre proyecciones) y Filippo Brunelleschi creador de la perspectiva cónica, entre otros.

> *"En este período histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, pero quedan en el contexto de las cónicas, y no son consideradas como objetos de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prima la noción de invariante* (Jahn, pág.36)" (Moriena S, 2004).

Geometría proyectiva la cual fue desarrollada por Gerard Descargues y en base a sus ideas estudios Pascal desarrolla los propios. Desargues investigó las secciones cónicas y los puntos del infinito, la invarianza de la razón doble y las cuaternas armónicas, y la teoría de polares. Uno de sus resultados más celebrado es el Teorema que lleva su nombre: Teorema de Desargues (Moriena, S, 2004).

TRANSFORMACIONES ISOMETRICAS Y NÚMEROS COMPLEJOS

Un aspecto fundamental que se considera para desarrollar el marco teórico es la importancia de la averiguación del contenido que se tratará, ya que, que para poder organizar la materia de forma no arbitraria y efectiva es necesario conocer a cabalidad los conceptos previos que los estudiantes poseen y los que aprenderán para así lograr una propuesta potencialmente significativa para el educando.

> *"Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente"* (Ausubel, 2001, p. 151).

Este capítulo se subdividirá principalmente en tres categorías, las cuales tratarán el estudio de las transformaciones isométricas y los números complejos por separado que es lo que deben conocer los estudiantes. Para finalmente tratar el estudio de las transformaciones isométricas a través de los números complejos, se obviarán algunas demostraciones para no hacer engorrosa la lectura de la teoría.

NÚMEROS COMPLEJOS

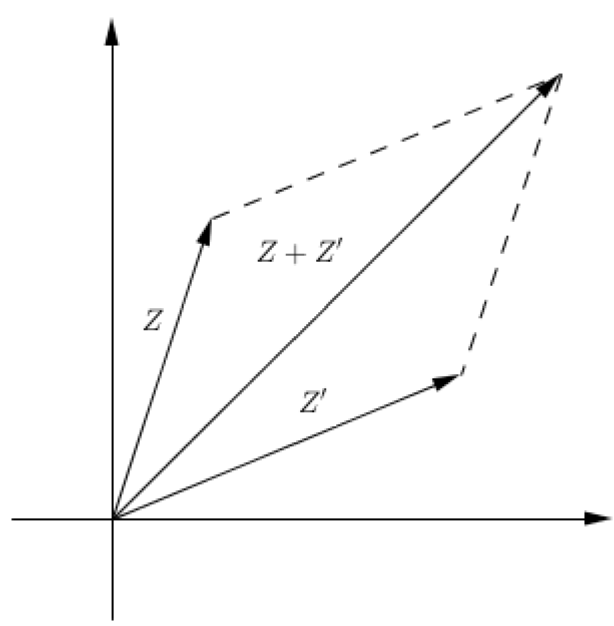
ALGEBRA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo es de la forma:

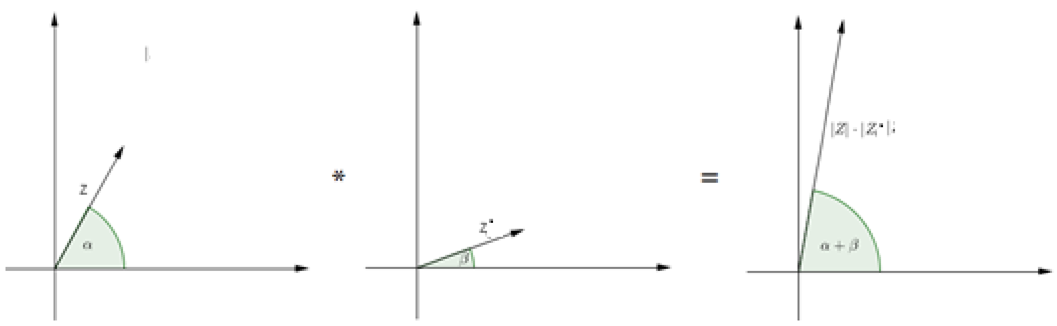
$$Z = a + bi$$

En donde a y b son números reales e i (unidad imaginaria) un símbolo que representa a $\sqrt{-1}$, El sistema de los números complejos integra los números reales e imaginarios, en donde la parte real correspondiente a la letra "a" ($Re(Z) = a$) y la parte imaginaria a "b" ($Im(Z) = b$), llevando a estructurar un nuevo conjunto en donde se pueden aplicar las operaciones elementales (adición, sustracción, producto y división) (Rivero, 2002), las cuales pueden representarse en el plano de Argand.

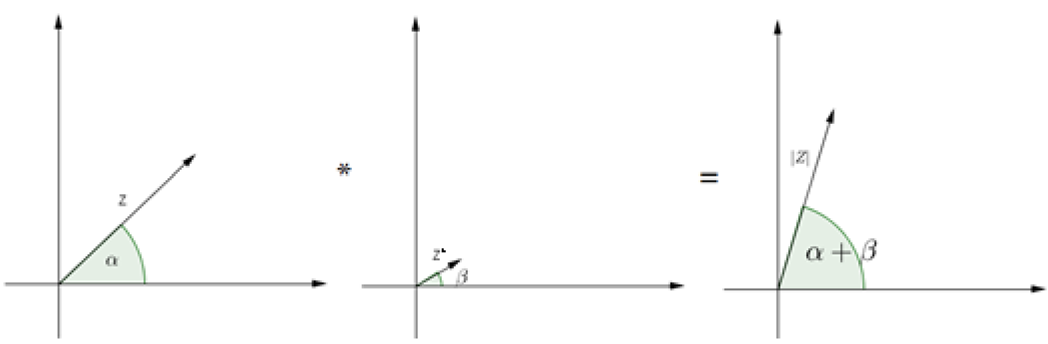
Adición: Geométricamente se pueden sumar dos números complejos utilizando la **regla del paralelogramo,** es decir si se tienen dos complejos Z y Z', la suma $Z + Z'$ estará determinada por la diagonal del paralelogramo que forman:



Producto geométrico: el producto $Z \cdot Z'$ de dos números complejos tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

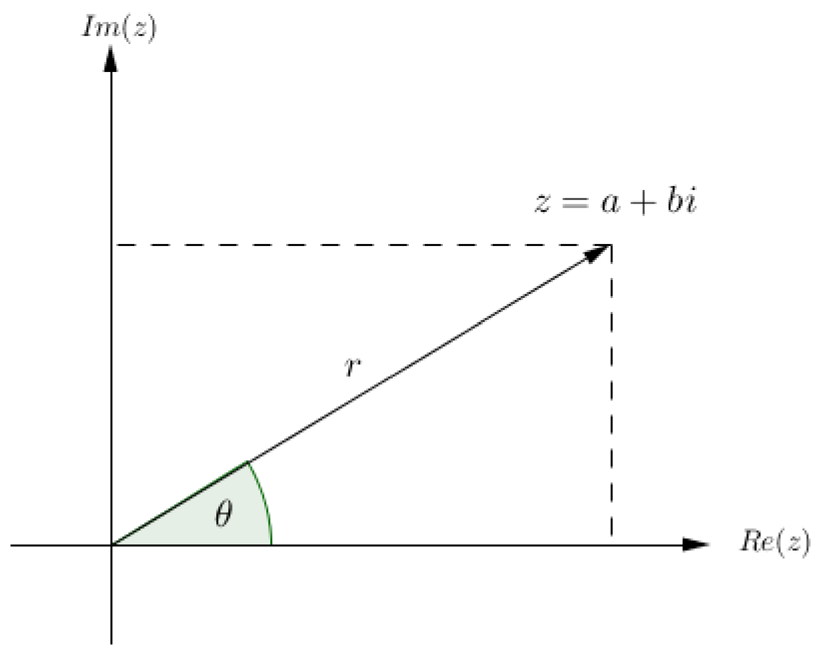


Caso especial: como se aprecia en la figura la multiplicación de vectores tiene una interpretación geométrica, en el caso de que el módulo de $|Z'| = 1$, al multiplicar los módulos, se mantendrá el módulo del vector inicial, generando así un vector con diferente sentido, dirección, pero con igual módulo al vector inicial. Esta proposición servirá más adelante para explicar la rotación (Chuaqui & Riera, 2011)



COORDENADAS POLARES

Un número complejo tiene diversas formas de ser representado en el plano, una es delimitando según el ángulo que forma con el eje real y su módulo.



Sea $r = |Z|$, el módulo del complejo Z, y al definirlo según el ángulo que genera sobre el eje real y su módulo, se reduce a la expresión:

$a = rsen(\theta)$ $\qquad$ $b = r\cos(\theta)$ $\qquad$ $Z = rsen(\theta) + rcos(\theta)i$

La fórmula $Z = re^{i\theta}$, se llama forma polar del número complejo z.

> *"Esta definición de exponencial es consistente o se puede comprobar usando el desarrollo en serie de la función $y = e^x$ con $x = i\theta$. Separamos en la serie las potencias pares de $i\theta$ (que darán términos puramente reales) y las impares (que darán términos puramente imaginarios) para llegar a la definición dada" (Chuaqui & Riera, 2011, p. 49).*

En relación a la fórmula polar de un número, se puede interpretar tanto algebraica como geométricamente el producto entre dos de ellos:

$$Z = re^{i\theta} \wedge Z' = r'e^{i\mu}$$

El producto de $Z \cdot Z'$, corresponde a:

$$ZZ' = rr'\left(e^{i(\theta+\mu)}\right)$$

De esta forma se puede concluir que la *"multiplicación dos números complejos corresponde a la multiplicación de sus módulos, y la suma de sus amplitudes" (Chuaqui & Riera, 2011, p. 50).*

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

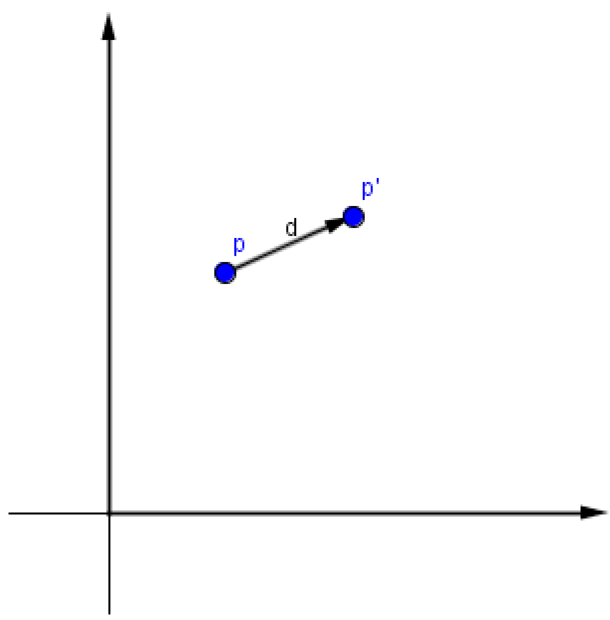
EN EL PLANO

Cuando escuchamos la palabra transformación la asimilamos como un cambio o una variación de algo, en matemáticas "*Una transformación es una operación por la cual una relación, expresión o figura se cambia en otra siguiendo una ley dada. Analíticamente, la ley se expresa por una o más ecuaciones llamadas ecuaciones de transformación*" (Lehmann C, 1989, pág 133), lo que guarda mucha relación con el concepto función en matemáticas según Birkohff y Mac Lane (1954): "*La noción general de transformación $f: S \rightarrow T$ de un conjunto S (no vacío) en otro conjunto T, significa una regla f mediante la cual se asigna a cada elemento $p \in S$ un elemento único $p' \in T$, que es su nueva imagen. El conjunto$S$ es el dominio de f, y T es su codominio"*, en particular en el caso de las transformaciones isométricas la regla f estaría determinada por los conjuntos $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, *"En una transformación geométrica, hay que tener en cuenta tres puntos la figura original, una regla u operación que describa el cambio, y la figura que resulta después del cambio"* (Clemens S, 1998, pág. 476). En síntesis la figura original corresponde a la pre imagen, luego se le aplicará una regla u operación (traslación, rotación o reflexión), dando la figura resultante que denominaremos imagen.

Dada una pareja de puntos A y B, que son extremos del segmento $\overline{AB}$. Llamaremos puntos del segmento $\overline{AB}$ a todo aquel punto que pertenezca a este segmento y que este entre A y B, siendo estos dos puntos extremos del segmento, en donde A' y B' serán las imágenes correspondientes luego de aplicar una regla u operación, adicionalmente si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son congruentes denominaremos esta correspondencia como movimientos rígidos en el plano (Montes S, 2012, pág. 12). De los cuales estudiaremos: traslaciones, rotaciones y reflexiones.

TRASLACIÓN

Son aquellas isometrías que permiten desplazar en línea recta cualquier punto en el plano, matemáticamente si hablamos de un punto $p \in \mathbb{R}^2$, y una distancia "d", existe $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(p) = p'$, en donde la distancia del punto p' a p es "d", es decir, el segmento $\overline{pp'}$ es de longitud d.



Al denotar el punto p con coordenadas (x, y) y su imagen p' como (x', y') y traslación$\vec{T}_{(a,b)}$, para significar que trasladamos "a" unidades en dirección horizontal y "b" unidades en dirección vertical, generando la ecuación de traslación (Montes S, 2012).

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

No importa el número de traslaciones que se realicen, siempre es posible resumirlas en una única, mas generalmente si al punto $p\ (x, y)$ se le aplica una traslación $\vec{T}_{(a,b)}$resulta:

$$x' = x + a\ (1)$$

$$y' = y + b\ (2)$$

Si se aplica una segunda traslación $T_{(c,d)}$dando como resultado

$$x'' = x' + c$$

$$y'' = y' + d$$

Por (1) y (2), da como resultado la ecuación:

$$x'' = x + a + c$$

$$y'' = y + b + d$$

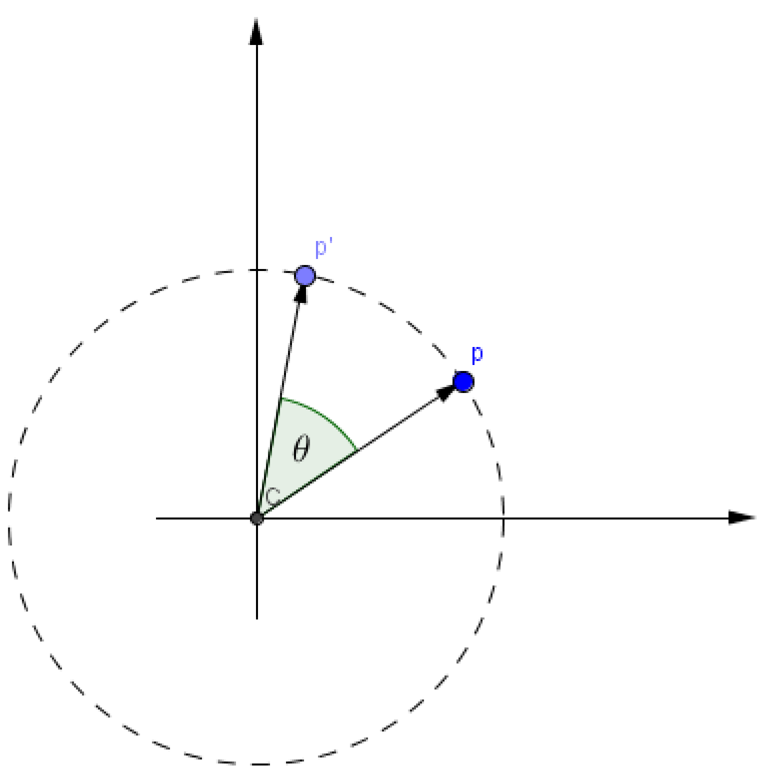
Lo que en definitiva se puede resumir en aplicar una única traslación $T_{(a+c,b+d)}$ al punto $p\ (x, y)$.

ROTACIÓN

Una rotación es aquella isometría que mueve un objeto respecto a un punto fijo y para poder aplicar una rotación es necesario conocer el ángulo de rotación (θ), el punto (c) denominado centro de rotación, y finalmente el sentido de rotación que se asocia al sentido de las manecillas del reloj.

Matemáticamente al realizar una rotación a un punto $p\ \in\ \mathbb{R}^2$ con respecto al punto (c) y un ángulo (θ), tal que al aplicar la función $R_{c,\theta}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ R_{c,\theta}(p) = p'$, siempre y cuando la distancia del punto p a c, sea lo misma que entre p' a c, además el $\sphericalangle pcp'$ debe ser igual a $\sphericalangle\theta$ (Montes S, 2012).

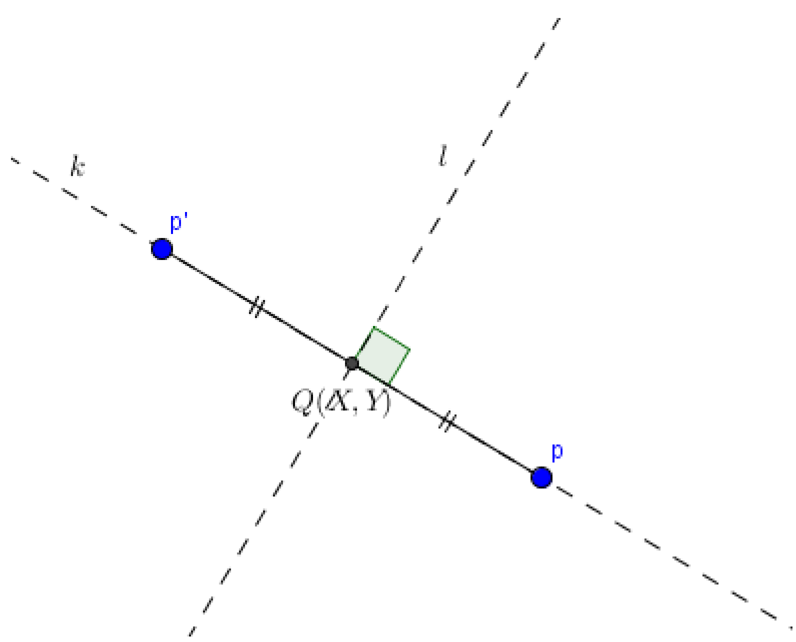
En otras palabras pudiese entenderse como una circunferencia de centro "c", y radio $\overline{cp}$,en donde también el segmento $\overline{cp'}$ es radio de esa misma circunferencia y el ángulo entre estos radios corresponde al $\sphericalangle\theta$, en un **esquema:**



REFLEXIÓN AXIAL

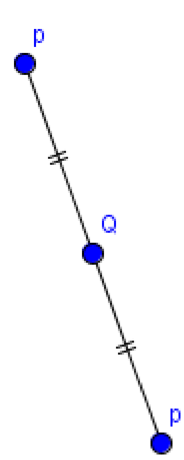
Esta isometría consiste en un movimiento rígido en el plano con respecto a una recta como eje de reflexión, la cual corresponde a la mediatriz de los segmentos denotado por los puntos pre imagen e imagen, asimilándolo al efecto de un espejo.

Matemáticamente si consideramos un punto p al aplicar una reflexión axial con respecto a una recta l, corresponde a una función $S_l: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $S_l(p) = p'$. La cual se cumple que l es mediatriz del segmento $\overline{pp'}$. Los puntos p y p' equidistan de la recta l, en un esquema:



REFLEXIÓN CENTRAL

Esta isometría corresponde al movimiento rígido del plano de un punto con respecto a un punto de reflexión, el cual corresponde al punto medio de los extremos del segmento generado.



Matemáticamente, se define un punto $p \in \mathbb{R}^2$, y un punto de reflexión Q$\in \mathbb{R}^2$, tal que $S_Q(p) = p'$, en donde el punto Q es el punto medio del segmento $\overline{pp'}$, en síntesis corresponde a una rotación de 180° respecto al punto Q.

Como se expuso anteriormente, se explicitó el estudio de las transformaciones isométricas y números complejos en base al material didáctico que posee el docente sobre estos tópicos según se enmarca el curriculum nacional, en función de esto es que a continuación se propone teóricamente la vinculación entre ambos tópicos matemáticos los cuales serán objeto del diseño de secuencia didáctico.

MOVIMIENTOS RIGIDOS EN EL PLANO ARGAND

Una transformación del plano es una biyección del plano en sí mismo. Puesto que cada punto del plano corresponde a un número complejo z en $\mathbb{C}$ resulta que toda transformación es una biyección de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. (Chuaqui M, Riera G, 2011).

$$z \rightarrow F(z)$$

TRASLACIÓN

Una traslación en el plano de los complejos al igual que en el plano cartesiano corresponde a un desplazamiento en línea recta a cualquier punto en el plano, matemáticamente un punto $z \in \mathbb{C}$ de la forma$z = a + bi$ y un vector traslación$\vec{T}$ que corresponde a $z' \in \mathbb{C}$ de la forma $z' = a' + b'i$, la traslación según el vector $\vec{T}$ corresponde a la función:

$$T(z) = z + z'$$

$$T(z) = a + a' + i(b + b')$$

Correspondiente al par ordenado $T(z) = (a + a', b + b')$. (Chuaqui M, Riera G, 2011).

ROTACIÓN

Al igual que en el plano cartesiano, la rotación corresponde a mover un objeto respecto a un punto fijo, en donde se debe conocer el ángulo de rotación(θ) y el punto (c) que será el centro de rotación.

Matemáticamente al realizar una rotación a un punto $Z \in \mathbb{C}$ de la forma $a + bi$, siendo el α el ángulo que genera con el eje de la parte real, y se desea rotar con respecto al ángulo θ y centro de rotación en el origen, se debe multiplicar por un z'que es un vector $\in$ $\mathbb{C}$ de la forma $a' + b'i$, cuyo módulo es 1 y argumento θ[8]. Generando así la función:(Chuaqui M, Riera G, 2011).

$$r(z) = z \cdot z'$$

En donde:

- ❖ $arg[r(z)] = \alpha + \theta$
- ❖ $|r(z)| = |z|$
- ❖ $z' = \{a' + b'i \,/\, z' \in x^2 + y^2 = 1\}$
- ❖ Aplicando trigonometría:$\begin{cases} a' = cos\theta \\ b' = sen\theta \end{cases} \rightarrow z' = cos\theta + isen\theta$

Si se quiere rotar una figura fuera del origen es necesario establecer una composición de transformaciones isométricas, es decir:

$$R_{(c,\theta)} = T \circ R \circ T^{-1}$$

En donde T^{-1} corresponde al vector traslación que trasladara el punto de rotación al origen, luego aplicamos la rotación con ángulo θ al vector z para finalmente llevar el centro de rotación a su ubicación original con T y el vector z' corresponderá al vector rotado.

[8] Por definición de producto geométrico.

REFLEXIÓN CENTRAL

Esta isometría corresponde al movimiento rígido del plano de un punto con respecto a un punto de reflexión, es decir un punto z es transformado en otro punto z', a través de un centro O (de simetría) de tal manera que el segmento $\overline{zz'}$tiene a O como punto medio.

Matemáticamente, se define un punto $z \in \mathbb{C}$, y un centro de rotación, si definimos el centro de rotación en el origen, tal aplicación que describe este cambio esta reflexión es: (Chuaqui M, Riera G, 2011).

$$S(z) = -z$$

En donde el origen es el punto medio del segmento generado, en síntesis una reflexión central corresponde a una rotación de 180° respecto al origen. Al igual que la rotación en el caso que el centro de rotación sea un punto z_0 tendrá que realizar una composición de transformaciones isométricas que deje el centro de rotación en el origen.

$$S_{z_0}(z) = T \circ S \circ T^{-1}$$

REFLEXIÓN AXIAL

Es aquella isometría en la que un punto z es transformado en otro punto z', a través de una recta l (de simetría) de tal manera que el segmento $\overline{zz'}$tiene a la recta l como mediatriz.

Matemáticamente se define un punto $z \in \mathbb{C}$, y una recta l, si consideramos la recta l coincidente con el eje real su reflexión axial será el conjugado de z, es decir: (Chuaqui M, Riera G, 2011).

$$S(z) = \bar{z}$$

En cambio si la recta l no coincide con el eje real formando un ángulo β respecto al eje real, se puede efectuar una composición de transformaciones isométricas de manera de rotar la recta l con respecto al ángulo que genera con el eje real, de manera que quede coincidente con el eje real y aplicar el conjugado del complejo z.

$$S_l(z) = R \circ S \circ R^{-1}$$

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

Dentro de este capítulo, se expondrá el enfoque de estudio, junto con el tipo de investigación, además se mostrará las diferentes técnicas de recogida de datos con los cuales cuenta esta investigación, estableciendo de qué manera se realizará su análisis y el cómo aportan al diseño didáctico final.

En lo que respecta al enfoque de estudio con el cual se regirá esta investigación será de tipo cualitativo, este enfoque es:

> *"un esfuerzo de comprensión, entendido como la captación, del sentido de lo que el otro o los otros quieren decir a través de sus palabras, sus silencios, sus acciones y sus inmovilidades a través de la interpretación y el diálogo, si no también, la posibilidad de construir generalizaciones, que permitan entender los aspectos comunes a muchas personas y grupos humanos en el proceso de producción y apropiación de la realidad social y cultural en la que desarrollan su existencia" (Sandoval, 2002, p. 32).*

Además se tomara una modalidad interactiva lo cual *"consiste en un estudio en profundidad mediante el empleo de técnicas cara a cara para recoger datos de la gente en escenarios naturales."*. (McMillan & Schumacher, 2010, p. 44), en esta modalidad el investigador *"interpreta los fenómenos en términos del significado que las gente les da"* (McMillan & Schumacher, 2010, p. 44). Siendo la perspectiva educativa elegida para realizar esta investigación es el estudio de casos, lo que según McMillan & Schumacher (2010) implica que los datos analizados se centraran en un fenómeno elegido por el investigador, Sampieri lo define como: *"estudios que al utilizar los procesos de investigación cuantitativa, cualitativa o mixta; analizan profundamente una unidad para responder al planteamiento del problema, probar hipotesis y desarrollar alguna teoría"* (Sampieri,2006, p. 224), enfocándose en la interacción con diferentes objetos de estudio (planes y programas, textos escolares y marco curricular), como también con docentes de un liceo municipal, un grupo de estudiantes de la UCSH y docentes expertos.

Al realizar una exhaustiva búsqueda de bibliografía tanto en textos, en artículos de internet, como en diferentes tesis, llegamos a la conclusión de que no existen investigaciones referidas al tema tratado en esta investigación, por lo que esta investigación será de tipo exploratoria, la cual se realiza cuando:

> *"el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes, es decir, cuando*

> *la revisión de la literatura revelo que tan solo hay guías no investigadas e ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio, o bien, si deseamos indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas.”* (Sampieri, 2006, p. 100 - 101).

Para la recolección de datos se hará una combinación de estrategias, las cuales para McMillan (2010) tienen como objetivo mejorar la validez de esta investigación, estas diferentes estrategias de recolección de datos se organizaran de la siguiente manera:

- Análisis exhaustivo de textos escolares, como también de los planes y programas entregados por el MINEDUC para poder conocer cuál es el material que se le entrega a los docentes para la enseñanza de las transformaciones isométricas.

- Diseño, aplicación y posterior análisis de una entrevista semi-estructurada a docentes de un liceo municipal, los cuales cuenten con más de 5 años de experiencia, hagan clases en la enseñanza media, hayan enseñado en distintos niveles transformaciones isométricas y manejen los contenidos mínimos para la elaboración del diseño final, con la finalidad de conocer sus diferentes experiencias y conocimientos que aporten a esta investigación.

- Recolección de diferentes opiniones y perspectivas de alumnos de la UCSH que pertenezcan a la carrera de pedagogía en matemática y que estén cursando el nivel 800, a través de un grupo de enfoque con los cuales se enriquecerá el primer diseño didáctico.

Para poder elegir las muestras, se eligió un tipo de muestreo intencionado, ya que este asegura que *“con pocos casos estudiados en profundidad, se obtienen muchas aclaraciones sobre el tema”* (McMillan & Schumacher, 2010, p. 407), para lo cual la información necesaria será buscada en textos de estudio, docentes que tengas relación con el tema de investigación y alumnos de pedagogía en matemática de la UCSH.

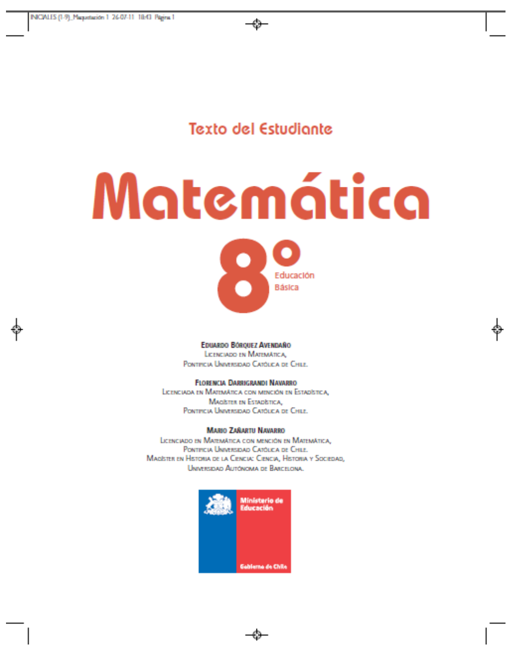
Para determinar el número de la muestra se utilizará la idea de saturación expuesta en Sampieri (2006), en donde se recolectarán datos hasta que estos se vuelvan repetitivos y no realicen mayores aportes a la información que ya ha sido recopilada.

ELECCIÓN DE TEXTOS ESCOLARES

Estos fueron escogidos bajo la premisa de que fueran entregados por el MINEDUC después del año 2009, ya que el diseño didáctico (el cual es la meta de esta investigación) tiene como finalidad cumplir con los objetivos impuestos en el marco curricular (2009), puesto que como se mostró en los antecedentes es el mismo marco curricular la base con al cual se elaboran los textos escolares.

Además estos textos deben tener los contenidos de transformaciones isométricas, para poder mostrar cual es el material con el que los docentes cuentan para la enseñanza del concepto de transformaciones isométricas, junto con recopilar los antecedentes con los cuales se sustenta esta investigación.

<table>
<tr>
<td>Nivel: 8° año basico
Año: 2010
Editorial: Santillana
Autores: Eduardo Borquez Avendaño, Florencia Darrigrandi Navarro, Mario Zañartu Navarro</td>
<td>Nivel: 1° año de educación media
Año: 2014
Editorial: SM Chile S.A.
Autores: Jael del Valle, Gerardo Muñoz, Maria Antonieta Santis Avalos.</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Nivel: 1° año de educación media
Año:2012 Editorial: McGraw-Hill
Autores:
- Andres Ortiz Jiminez,
- Cristian Reyes Reyes,
- Marisol Valenzuela Chandia
- Eugenio Chandia Muñoz</td>
<td>

</td>
</tr>
</table>

ELECCIÓN DE PROFESORES

Cabe destacar que la muestra escogida para realizar esta entrevista fue de cuatro profesores de enseñanza media pertenecientes al Liceo Nacional de Maipú, los cuales durante al menos 5 años han ejercido la docencia en el mismo establecimiento, y además hayan enseñado transformaciones isométricas y manejen los contenidos mínimos para la elaboración del material potencialmente significativo.

Esta muestra fue recogida con el fin de poder realizarles una entrevista semi-estructurada, para poder conocer experiencias de dichos docentes en la enseñanza de las transformaciones isométricas, como también la del algunos de los contenidos mínimos para la elaboración del diseño didáctico final. El primer docente entrevistado consta de 7 años de labor docente y de 5 años experiencia haciendo clases en el Liceo Nacional de Maipú. El segundo docente entrevistado lleva 7 años de labor docente y de 6 años experiencia haciendo clases en el Liceo Nacional de Maipú. El tercer docente entrevistado consta de 34 años de labor docente y de 12 años experiencia haciendo clases en el Liceo Nacional de Maipú y es jefa del departamento de matemática del mismo establecimiento. El cuarto docente entrevistado consta de 11 años de labor docente y de 12 años experiencia haciendo clases en el Liceo Nacional de Maipú.

ESCENARIO

El escenario escogido para la recolección de datos, en donde se implementó la entrevista semi-estructurada, fue el establecimiento municipal de nombre Liceo Nacional de Maipú. Este establecimiento fue elegido dado sus buenos resultados en la prueba SIMCE de matemáticas.

	Comprensión de Lectura	Matemática	Ciencias Naturales
Promedio Simce 2014	294	342	303
El promedio 2014 del establecimiento comparado con el obtenido en la evaluación anterior[1] es:	más bajo -10 puntos	más bajo -10 puntos	\\
El promedio Simce 2014 del establecimiento comparado con el promedio nacional 2014 de establecimientos de similar GSE es:	más alto 30 puntos	más alto 61 puntos	más alto 44 puntos

Estándar de Aprendizaje	Comprensión de Lectura	Matemática
Nivel de Aprendizaje Adecuado Ver más +	52,2%	72,8%
Nivel de Aprendizaje Elemental Ver más +	33,2%	22,1%
Nivel de Aprendizaje Insuficiente Ver más +	14,6%	5,1%

Estándar de Aprendizaje		Comprensión de Lectura	Matemática	Historia, Geografía y Ciencias Sociales
Nivel de Aprendizaje Adecuado	Ver más +	58,4%	94,3%	83,8%
Nivel de Aprendizaje Elemental	Ver más +	33,9%	5,1%	14,5%
Nivel de Aprendizaje Insuficiente	Ver más +	7,7%	0,7%	1,7%

	Comprensión de Lectura	Matemática	Historia, Geografía y Ciencias Sociales
Promedio Simce 2014	297	340	328
El promedio Simce 2014 del establecimiento comparado con el obtenido en la evaluación anterior es:	similar -9 puntos	más alto 11 puntos	similar 7 puntos
El promedio Simce 2014 del establecimiento comparado con el promedio nacional 2014 de establecimientos de similar GSE es:	más alto 36 puntos	más alto 54 puntos	más alto 40 puntos

El buen puntaje en la prueba SIMCE de matemáticas es indicador de que en dicho establecimiento el marco curricular debiese ser tomado en cuenta para la enseñanza de dicha disciplina, dado que

> *"Las pruebas SIMCE evalúan el logro de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios (OF-CMO) del Marco Curricular vigente en diferentes sectores de aprendizaje, a través de una medición que se aplica, a todos los estudiantes del país que cursan los niveles evaluados"* (MINEDUC, 2010, p.3).

ELECCIÓN DE ESTUDIANTE DE LA UCSH

Para poder generar el grupo focal el tamaño de la muestra escogida fue de 5 estudiantes de la UCSH los cuales tienen en común el estudiar la carrera de pedagogía en matemática de dicha institución, y estar en el nivel 800 de dicha carrera. El tamaño de la muestra fue dado por las sugerencias expuestas en Sampieri (2006) quien propone que los grupos focales deben ser en grupos pequeños de 3 a 10 personas. Estos estudiantes fueron elegidos para poder, a través, de sus conocimientos enriquecer el diseño didáctico que se les propuso, para que este junto con la validación de expertos entre en un rediseño final.

INSTRUMENTO DE RECOPILACIÓN DE INFORMACIÓN

Para poder generar el primer diseño didáctico fue necesario iniciar un proceso de recopilación de datos, generando como instrumento una entrevista, la cual fue validada por profesores expertos de la UCSH.

> Para Ávila (2006 p. 55 - 56) *"Una entrevista es una pieza de la interacción social en la cual una persona responde a otra una serie de preguntas sobre un tópico específico, en sí representa una interacción cara a cara entre dos o más personas. La entrevista representa una excelente técnica de recolección de la información. La administración de las preguntas se hace en base a una cédula de entrevista o programa de entrevista, las respuestas que se obtienen pueden ser registradas por medios electrónicos o por escrito"*.

Ahora para la recolección de datos se pensó en una entrevista semi-estructurada la cual se basa *"en una gula de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados (es decir, no todas las preguntas están predeterminadas)"* (Sampieri, 2006, p. 597).

Además se generará un grupo focal para poder enriquecer a través de los conocimientos de estudiantes de pedagogía en matemática de la UCSH el diseño didáctico, para poder realizar este grupo focal se debe comprender que es ese tipo de recolección de datos, en Sampieri (2006) se habla de los grupos focales como entrevistas grupales, en donde, los participantes conversan y exponen sus experiencias en un ambiente informal el cual esta guiado a través de un moderador.

La guía de tópicos tratados para este grupo focal fue de tipo estructurada, en donde *"los tópicos son específicos y el margen para salirse de los temas es mínimo"* (Sampieri, 2006, p 610), dado que la búsqueda de información que se requería era sobre el diseño y las actividades de la propuesta didáctica.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE INFORMACIÓN

En este capítulo en base a la información obtenida en los instrumentos de recopilación de información con las entrevistas y el grupo de enfoque , el marco teórico en donde se expuso la teoría de las transformaciones isométricas, números complejos y la teoría el aprendizaje significativo de David Ausubel y los antecedentes en donde se expusieron las bases con las cuales trabaja esta investigación se crearan conjeturas las cuales aportaran a la meta final de esta investigación la cual es crear un material potencialmente significativo.

ANÁLISIS DE ENTREVISTA

Esta entrevista intenta dar respuesta al objetivo específico "Conocer en base a las vivencias comentadas por los docentes en la entrevista semi-estructurada cuales son las dificultades y obstáculos presentes en la enseñanza de las transformaciones isométricas y si ellos consideran que existe un vínculo entre este tópico matemático y el contenido de los números complejos.", a través, de la recolección de información de un grupo de profesores respecto a la enseñanza de los conceptos de transformaciones isométricas y números complejos, con el fin:

- Saber si a los profesores se les exige la unión de ambos conceptos.
- Conocer como son enseñados los conceptos de transformaciones isométricas y números complejos por separado y con qué grado de dificultad.
- Reconocer si los docentes buscan que estos conceptos se relacionen con otros conceptos del currículo.
- Evidenciar las dificultades y obstáculos que los profesores ven en la enseñanza de las transformaciones isométricas,

De manera paralela será realizado un contraste entre las experiencias dadas por los docentes y la teoría expuesta en el marco teórico del aprendizaje significativo de David Ausubel, para sustentar en base a estas evidencias el material potencialmente significativo siento esto el fin de esta investigación. A partir de esto se elabora el siguiente análisis:

E1_L15_17: *"las dificultades y obstáculos para aprender las transformaciones isométricas a mi punto de vista, serían las de rotación, ya que uno les enseña las más* *simples 90°, 180° y 270° y se convierte en algo más mecánico y al cambiar algún concepto, se complican".*

E4_L7_18: *"En cuanto a la rotación no hay dificultades, ya que sólo se tratan los ángulos 90°, 180°, 270°, que resultan ser sencillos para los estudiantes"*.

Respecto a lo expuesto por los docentes se evidencia una clara tendencia a la enseñanza memorista en donde los conocimientos son expuestos de manera arbitraria y carente de lógica para el alumno dificultando el aprendizaje, dado que, como dice Ausubel (2002) la forma de retener información del humano es distinto al de una computadora, la cual puede retener grandes cantidades de información sin necesidad de una estructura lógica. Aun así estos conocimientos son ideas de anclaje para el material potencialmente significativo, dado que, son ideas generales de las transformaciones isométricas, siendo expuesto en los organizadores previos del material de aprendizaje significativo generado al final de esta investigación.´

E4_L13_15: *"En la utilización de regla y compás, y en plano cartesiano principalmente. En este último las dificultades estuvieron más enfocadas en comprender donde iban los signos o más que nada cosas básicas que necesitaban ser recordadas solamente"*

Esta afirmación corresponde a la manera en que se enseñan las transformaciones isométricas, utilizando regla y compas a través de un conjunto de pasos expuestos en los libros (esto se encuentra evidenciado en los antecedentes), lo que es otro claro ejemplo del aprendizaje memorista en donde se le entrega al alumno un grupo de instrucciones que deben memorizarse de manera arbitraria y literal, sin haber una relación con otros conceptos previos. Es por esto que en el diseño final no se incentiva el uso de regla y compas, sino, que se privilegiara el trabajo algebraico en donde se utiliza como subsumidores los conocimientos del eje de algebra conocidos hasta 3° año medio.

Además a los docentes se les preguntó acerca de cómo ellos visualizan el unir conceptos en la matemática, siendo uno de los focos principales de esta investigación, ya que, para poder lograr el diseño didáctico final que complete la enseñanza de las transformaciones isométricas es necesario conocer los números complejos, siendo estos un subsumidor para desarrollar la diferenciación progresiva en el material potencialmente significativo.

E1_L2_6: *"en segundo medio los alumnos logran integrar ambos ejes matemáticos por medio de la semejanza, y el que se enseñe de esta manera nos ayuda a nosotros como docentes, que el aprendizaje del alumno sea más efectivo"*

E3_L2_4: *"hablando de problemas de ecuaciones y lo asociamos al perímetro de algo. Es ahí cuando se puede hacer una relación entre ambos, pero esto solo se ve en básica. Claramente esta relación hace más efectivo el aprendizaje del alumno"*

La percepción de los docentes sobre unir conceptos matemáticos es positiva, en donde, ellos al dar ejemplos de diferentes conceptos matemáticos articulados entre sí, afirman que se genera una mejora en su aprendizaje.

E2_L5_10: *"La relación existe, pero no en una forma temporalmente adecuada, un ejemplo claro seria que se vinculan unidades de 4to medio de geometría con unidades de 2do medio en algebra, en vez de hacerlo en el mismo nivel académico, ya que existen muchos conceptos que se podrían asociar, pero no se hace. Lo que nos deja que el propio alumno tenga dificultades con retener la materia planteada por el docente, ya que contenidos básicos se pierden por un tema netamente temporal"*

Las transformaciones isométricas y los números complejos no son vistos en el mismo nivel escolar, puesto que el diseño didáctico se sitúa en tercero medio, después de haber aprendido números complejos, por lo que es más sencillo acceder a la recuperación de información de este conocimiento, en cambio las transformaciones isométricas fueron vistas hace dos años, es por esto que para acceder de mejor forma a la recuperación de información del conocimiento requerido solo se expone de forma general ubicándolo explícitamente en los organizadores previos.

También se reconoce la importancia que le dan los docentes los conocimientos previos, mostrándose esto:

E2_L33: *"La dificultad estaría en no manejar bien los ángulos, razones trigonométricas, por ejemplo"*

Para generar estructuras cognitivas más complejas es primordial relacionar conocimientos previamente aprendidos, constituyendo una asimilación de conceptos nuevos y antiguos de forma no arbitraria utilizando subsumidores adecuados.

Finalmente, a través de la información recopilada en el instrumento los conocimientos previos que los alumnos poseen son:

1. Respecto a las transformaciones isométricas:

   - Traslación en el plano cartesiano.
   - Rotación en el plano cartesiano restringido solo a los ángulos de 90°, 180°, 270° y 360°
   - Reflexión axial y central en el plano cartesiano.

2. Respecto a los números complejos.
   - Suma de números complejos
   - Resta de números complejos
   - Multiplicación de números complejos
   - Módulo de un número complejo.
   - Reconocer amplitud de un número complejo.
   - Representación en el plano de Argand.

E2_L24_25: *"Yo lo veo en el plano de Argand, de relacionar lo que es la geometría analítica con los números complejos".*

E3_L23_24: *"Se enseña de una manera técnica, operar los números complejos, sumar, restar, multiplicar y dividir"*

E4_L15_18: *"Pero más que nada era con la simetría, cuando se le pedía la simetría con el eje x o discriminar simetría central del axial, en otras palabras la parte la parte conceptual, en cuanto a la rotación no hay dificultades, ya que sólo se tratan los ángulos 90°, 180°, 270°, que resultar ser sencillos para los estudiantes."*

E3_L24_26: *"Nosotros al hablar de números complejos también lo asociamos a la parte real, parte imaginaria, modulo, problemas con este, el cual también se considera geométrico".*

ANÁLISIS DEL GRUPO DE ENFOQUE

La reunión de este grupo de enfoque de estudiantes de nivel 800 de pedagogía en matemáticas de la UCSH, tiene por objetivo **validar** el diseño en función de la perspectiva de estos estudiantes, es decir, si lo consideran viable y entendible, con orden lógico.

Cabe destacar que el grupo de foco consto de 5 participantes, siendo estos estudiantes de pedagogía en matemática de la UCSH que estén cursando el nivel 800. En el grupo de enfoque realizado no hubo preguntas explicitas por parte de los investigadores, sino que se les presento el primer diseño mostrando clase a clase lo que se iba a realizar y cómo se realizaría, junto con la exposición del material impreso (guía) y de la evaluación final. Según las perspectivas y aportes de los participantes se recopilaron los siguientes datos:

- Los participantes consideran pertinente la estructura que se le da al diseño de secuencia didáctica, a pesar de que no conozcan en profundidad la teoría de aprendizaje significativo de David Ausubel, si manejan la importancia de los aprendizajes previos, la organización de los conocimientos y la participación activa de los estudiantes, con preguntas que apelen al diálogo que se explicitan en la propuesta didáctica.

P5_L6: "Esta completa, puesto que va por parte preguntando.".

P1_L7: "porque va por parte desglosando, desde lo más general a lo más específico.".

P4_L24_25: "Sí, no hay problema si saben ya sumar vectores, no habrá problema en las traslaciones, ya que no varían mucho respecto a cómo se realizan en el plano cartesiano".

P4_L73_74: "está bien estructurado, ya que, como se enseñó rotación anteriormente y ahora lo vinculan con reflexión central, se entenderá mejor". P5_L76_77: "está correcto, y ordenado, haciendo surgir que los estudiantes, comprendan la aplicación de los números complejos".

A pesar de que reconocen que la estructura es correcta, estos contenidos nunca antes lo habían visto articulados de esta forma, al ser nuevos para ellos y haber sido explicados de forma tangencial existía confusión por parte de ellos, sobre todo las aplicaciones de los números complejos, que no conocían.

P1_L54: ": No entiendo, en el sentido de cómo al multiplicar dos vectores generó una rotación"

P2_L65: "Me cuesta entender, porque una multiplicación de dos números complejos, siempre es una rotación, ¿siempre funciona?".

Finalmente, se recibieron, sugerencias, posibles preguntas, posibles afirmaciones o dudas que pudiesen surgir en la implementación del diseño de secuencia didáctica, sin embargo, la mayoría de ellas fueron acotaciones respecto al contenido y sus dificultades, tanto de las transformaciones isométricas como de los complejos, existiendo mayor dificultad en este último.

P2_L_38_42: "No, si entiendo eso, pero ahí estas como relacionando el plano complejo con el plano cartesiano, y ahí pueden haber complicaciones. Si yo trabajo en el plano de los complejos puedo asociarlo como particularidad en el plano cartesiano, ahora no se si lo que se cumple en el plano de los complejos siempre se puede asociar al cartesiano. Si R^2 es isomorfo a los complejos no hay drama”.

P3_L_63: “creo que no será tan fácil que digan -1+0i”.

P2_L_85_89: “de hecho esto es interesante, me llama la atención, si el tipo está captando esto de las rotaciones, cuando tu más adelante tienes polinomios con soluciones complejas, es más fácil entender los números complejos y sus aplicaciones. Logrando extenderlo a un proceso más abstracto, y tiene una visión más amplia del conocimiento matemático. Lo encuentro interesante”.

Aun así, se evidencia la motivación e interés por la vinculación de conceptos matemáticos, por parte de este grupo de enfoque, sin embargo por la escasez de expertiz en cuanto a validación de material y el poco conocimiento de la teoría de aprendizaje significativo de David Ausubel, impidió en parte, que se explayaran de mejor manera según lo que querían evidenciar

CAPÍTULO 5: PROPUESTA DIDÁCTICA

ACERCA DEL DISEÑO

Este diseño didáctico es creado ante la necesidad de generar un material potencialmente significativo el cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas, el cual será una guía para que el docente pueda generar un aprendizaje significativo en el alumno.

En el material potencialmente didáctico estará expuesta la teoría de David Ausubel sobre el aprendizaje significativo, estando los siguientes elementos de dicha teoría:

- Organizadores previos: se encuentra al comienzo de cada clase en el momento del inicio, es en donde se trata de relacionar con los conocimientos previos que poseen los alumnos sobre transformaciones isométricas.

- Diferenciación progresiva: está desarrollada en las clases N°1, N°2 y N°3, En donde los conocimientos son ordenados jerárquicamente partiendo de los más generar (los conocimientos previos de transformaciones isométricas) hasta generar una estructura cognitiva más compleja en donde se puedan realizar transformaciones en el plano de Argand.

- Reconciliación integradora: se ve expuesta en la clase N°4 y N°5, en donde se toman los conocimientos vistos en las clases anteriores y se genera un aprendizaje supraordinado.

- La práctica: es el material impreso (guía), con la que el docente genera un reforzamiento de los conocimientos recién asimilados.

- Evaluaciones: estas están expuestas en cada momento de las clases (inicio, desarrollo y cierre) y finalizan con una evaluación final la cual está enfocada a conocer lo asimilado por el alumno.

Para finalizar se muestran las orientaciones para el profesor expuestas en Manterola (1998, p. 194), las cuales están expuestas en el diseño didáctico generado en esta investigación.

1. Utilice organizadores previos
2. Utilice cierto número de ejemplos
3. Insista en destacar tanto semejanza como diferencias
4. Presente el material en forma organizada
5. Relacione en forma explícita, el nuevo aprendizaje con la información que los alumnos ya conocen.
6. Promueva el aprendizaje significativo del alumno y disuádalos de aprender de memoria
7. Inicia la lección con las ideas más generales e inclusivas
8. Permita que los alumnos reformulen la información con sus propias palabras.

PRESENTACIÓN

Esta guía para el profesor ha sido elaborada con el propósito de apoyar el quehacer docente a través de un diseño didáctico que apoye el proceso de enseñanza de las transformaciones isométricas, buscando completar su enseñanza a través de los números complejos basándonos en la teoría del aprendizaje significativo, tema para el cual no existe material didáctico disponible.

Los contenidos y actividades que encontrarán en esta propuesta serán:

- Conocimientos previos:
    - Números complejos.
    - Trasformaciones isométricas.
- Movimientos rígidos en el plano Argand:
    - Traslación
    - Rotación
    - Reflexión central
    - Reflexión axial

Se debe tener en cuenta que el docente debe promover una participación activa del estudiante, exponiendo el conocimiento y generando instancia de pregunta - respuesta. A continuación se presenta el diseño didáctico que consta de seis clases principalmente expositivas con una evaluación final.

CLASE N°1

Objetivo:

- Conocer que las traslaciones pueden representarse en el plano cartesiano, como también en el plano Argand.

Aprendizaje Esperado:

- Comprende la relación que existe entre la suma de los números complejos con las traslaciones.

INICIO:

Para averiguar los conocimientos previos que poseen los alumnos se sugiere utilizar breves preguntas, como por ejemplo:

- ¿Qué conocen por transformaciones isométricas?
- ¿Qué características poseen?
- ¿Qué tipo de transformaciones isométricas conocen?
- ¿En qué se diferencian unas con otras?

Una vez que se conocen los conocimientos previos del alumno de las transformaciones isométricas y se hayan reforzado las debilidades encontradas. Se comienza a explicar el tema comenzando con el concepto de traslación.

DESARROLLO:

Traslación: Son aquellas isometrías que permiten desplazar en línea recta cualquier punto en el plano. Si denotamos un punto p con coordenadas (x, y) y su imagen p' como (x', y') y traslación$\vec{T}_{(a,b)}$, para significar que trasladamos "a" unidades en dirección horizontal y "b" unidades en dirección vertical, generando la ecuación de traslación.

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

- ¿Para qué sirve?
- ¿Es posible "trasladar" figuras geométricas?

La definición sugerida se nutre con las respuestas de los alumnos para consensuar una definición adecuada para los estudiantes.

Luego de esto se busca que los estudiantes recuerden que el plano cartesiano no es el único existente, con el fin de tomar los aprendizajes previos que poseen del plano de Argand, para así vincularlo con las transformaciones isométricas.

- ¿El plano cartesiano es el único existente?
- ¿En el plano Argand qué representan sus ejes perpendiculares?

-Se enuncia que se puede efectuar las traslaciones en el plano de Argand al igual que en el plano cartesiano, ya que, es el mismo plano pero con diferentes representaciones. Lo que es equivalente a sumar números complejos.

Una traslación en el plano de los complejos al igual que en el plano cartesiano corresponde a un desplazamiento en línea recta a cualquier punto en el plano, matemáticamente un punto $z \in \mathbb{C}$ de la forma, $z = a + bi$ y un vector traslación $\vec{T}$ que corresponde a z' , la traslación para el vector $\vec{T}$ corresponde a la función

$$T(z) = z + z'$$

$$T(z) = a + a' + i(b + b')$$

Correspondiente al par ordenado $(a + a', b + b')$.

El alumno debe realizar los ejercicios 1 y 2 del material impreso (anexo página 126-127).

CIERRE:

Establecida la definición en el plano de Argand en lo que respecta a las traslaciones, la evaluación formativa consiste en realizar el ejercicio 3 (anexo página 128) de la guía, además se invita al docente generar un resumen de los visto en la clase.

PROPÓSITO DE LA CLASE N°1

INICIO: conocer cuáles son los conocimientos previos que posee el alumno respecto de las transformaciones isométricas

DESARROLLO: busca recordar el conocimiento de las traslaciones isométricas en el plano cartesiano, para relacionarlo en el plano de Argand.

CIERRE: se genera una evaluación formativa la cual contemple todos los conocimientos vistos hasta el momento.

ACTIVIDAD N°1: A partir de la generalización expuesta en el desarrollo, el estudiante deberá llevarlo a un caso en particular aplicando la noción de suma de los números complejos

ACTIVIDAD N°2: Generar el proceso inverso de la Actividad n°1 (anexo página 126).

ACTIVIDAD N°3: tiene como objetivo que el estudiante no solo puede trasladar figuras geométricas en el plano cartesiano, sino que también pueden ser llevadas al plano complejo. Adicionalmente recuerda la idea de que la suma de los vectores traslación es igual a cero, lo que implica que la figura resultante será igual que la figura inicial. Junto con esto le otorga una aplicación repetitiva a la traslación, lo cual visto desde la teoría de Ausubel busca mejorar la retención en el alumno.

CLASE N°2

Objetivo:

- Construir una generalización algebraica de las rotaciones de 90°, 180°, 270° y 360° con centro en el origen, en el plano de Argand

Aprendizaje Esperado:

- Conocer la relación existente entre el producto geométrico y las rotaciones en el plano complejo.

INICIO:

- ¿Qué son las rotaciones?
- ¿Para qué sirve?

Rotación: Una rotación es aquella isometría que mueve un objeto respecto a un punto fijo y para poder aplicar una rotación es necesario conocer el ángulo de rotación (θ), el punto (c) denominado centro de rotación, y finalmente el sentido de rotación.

DESARROLLO:

-En base a los conocimientos previos de los estudiantes de las rotaciones y la definición. Al igual que las traslaciones las rotaciones también pueden representarse en el plano de Argand

Luego de esto, se expone que el producto de dos números complejos, geométricamente en el plano de Argand se puede representar como: "el modulo es el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos".

- Tomando en cuenta cualquier punto en la recta, realice una rotación de 180° en la recta con centro en el origen. ¿qué operación describe este cambio?

Al percatarse el estudiante que una rotación de 180° en la recta, corresponde a multiplicar por (-1), esto es equivalente a expresarlo como $x \cdot (-1)$.

- ¿Qué ocurre si hablásemos en el plano de los complejos?, si quisiésemos rotar un punto $a + bi$ en 180°.
- ¿Qué operación describe este cambio?
- ¿A qué número complejo es equivalente?, ¿qué módulo tiene este vector y que ángulo genera en el eje real?

Por ende si se quisiese realizar una rotación de 90°, sabiendo que realizar una rotación de 180° corresponde realizar dos rotaciones de 90°, estamos buscando que al multiplicar dos números de cómo resultado (-1).

$$(X)\cdot(X) = -1$$

$$X^2 = -1$$

$$X = \sqrt{-1}$$

$$X = i$$

$$\therefore X = 0 + i$$

- ¿Funciona? ¿por qué?
- ¿Qué coordenadas tendría un punto cualquiera al ser rotado 90°?
- ¿Por qué una rotación de 90° es $(-y, x)$?

CIERRE: una vez asimilado el concepto de reflexión en el plano complejo se busca que se elabore una tabla la cual generalice de manera algebraica la rotación de un punto según los ángulos de 90º, 180º, 270º y 360º

- ¿Qué rotación hay entre un punto y su opuesto?
- ¿Se podría hacer una generalización, para los ángulos 90°,180°,270° y 360°? (elabore un cuadro).

PROPOSITO DE LA CLASE N°2

INICIO:

Conocer cuáles son los conocimientos previos que posee el alumno respecto de las rotaciones en el plano cartesiano.

DESARROLLO:

El estudiante a través de los conocimientos aprendidos con anterioridad sobre la rotación de 180° en el eje real, prueba si se cumple de igual manera en el plano de Argand, lo que en este caso es multiplicar por (-1). Para que luego el estudiante comprenda que el número (-1) debe ser expresado como número complejo $-1 + 0i$. Además el estudiante al identificar que multiplicar cualquier número complejo por $0 + i$ da como resultado una rotación de 90°, busca el porqué ocurre esto, es entonces donde relaciona que el modulo del vector por el cual se debe multiplicar el vector a rotar debe ser 1 y la amplitud que genera con el eje real es de 90°.

CIERRE:

Ahora que el alumno conoce como se realiza una rotación de 90° y de 180° podrá generar (a través de dichos conocimientos previos) rotaciones de los ángulos 270° y 360, siempre situado con centro de rotación en el origen.

CLASE N°3

Objetivo:

- Realizar cualquier rotación en el plano complejo.
- Establecer una composición de transformaciones isométricas (traslación y rotación) para las rotaciones fuera del origen.

Aprendizaje Esperado:

- Conocer la relación existente entre el producto de dos números complejos y las rotaciones en el plano complejo, que sirve para todo ángulo.

INICIO:(materiales calculadora científica)

Se recuerda la definición de rotación e interpretación geométrica del producto de vectores. Tomando la idea de la clase pasada una rotación de 90° y 180° con centro en el origen correspondía a multiplicar por un número complejo z' de la forma $a' + b'i$ que poseía módulo 1 y ángulo 90° y 180° respectivamente respecto al eje real, es decir:

- La rotación de 90°: $(a + bi) \cdot (0 + i)$
- La rotación de 180°: $(a + bi) \cdot (-1 + 0i)$

DESARROLLO:

Pero esto no satisface la necesidad de realizar una rotación respecto a cualquier ángulo que se desee. Por lo tanto para realizar una rotación respecto al ángulo θ y centro en el origen se propone la aplicación:

$$r(z) = z \cdot z'$$

Que corresponde a la multiplicación del número complejo a rotar (cuyo argumento es α) y el nuevo número complejo, el cual debe ser de módulo 1 y ángulo θ.

- ❖ $arg[r(z)] = \alpha + \theta$
- ❖ $|r(z)| = |z|$

- ¿Cómo se podría hacer una rotación de 45°?

Las coordenadas de este vector $a' + b'i$ para conocerlas hay que recurrir a trigonometría, en donde:

$$\cos\beta = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

- ¿Cuáles son las coordenadas del vector que genera un ángulo 45° con respecto al eje real con módulo 1? ¿a qué número complejo es equivalente?
- Al multiplicar $3 + 4i$ por el número complejo resultante. ¿Corresponde a una rotación de 45°? ¿por qué?
- ¿Cómo rotaría 135°?
- Ejercicio 4 material impreso (anexo página 129).

A partir de este momento, el estudiante es capaz de realizar cualquier rotación.

CIERRE:

- Rotación fuera del origen.
- Ejercicios guía (anexo página 130-131).

PROPOSITO DE LA CLASE N°3

INICIO:

Recordar los aprendizajes vistos la clase anterior, con el fin de introducir la noción de rotación para cualquier ángulo.

DESARROLLO:

El estudiante a partir de los conocimientos previamente adquiridos pueda establecer de manera visual cómo será el vector (representado como número complejo) que al multiplicarlo por otro efectuara la rotación, que en este caso se debe cumplir que tenga módulo 1 y amplitud 45° y que encuentren estas coordenadas a partir de razones trigonométricas ya conocidas y que lo relacione con el número complejo equivalente.

Luego se pretende validar la propuesta establecida anteriormente de forma visual, con el ejercicio 4 propuesto en la guía.

CIERRE:

Finalmente el estudiante ya comprende la rotación en el origen, pero no la fuera de este aun así conoce la traslación vista en la primera clase, por lo que a través de una composición de transformaciones isométricas tiene las herramientas para relacionar estos conceptos y trasladar el centro de rotación al origen para luego efectuar la rotación deseada para luego realizar la traslación inversa a la hecha inicialmente, obteniendo el vector final.

ACTIVIDAD N°6:

A través de la práctica reforzar los conocimientos aprendidos.

CLASE N°4

Objetivo:

- Establecer el procedimiento para realizar cualquier reflexión central, respecto a cualquier punto, a través de una composición de transformaciones isométricas (traslación y rotación) para reflexiones centrales, en donde su punto de reflexión no sea el origen.

Aprendizaje Esperado:

- Comprender la relación que existe entre una reflexión central y la rotación de 180º.

INICIO:

- En el contexto de las transformaciones isométricas, ¿qué es la reflexión?
- ¿qué tipos de reflexiones conocen?

Reflexión central: Es aquella isometría en la que un punto z es transformado en otro punto z', a través de un centro O (de simetría) de tal manera que el segmento $\overline{zz'}$ tiene a O como punto medio.

DESARROLLO:

Realice una reflexión central respecto al origen al punto representado por el número complejo: 3 + 2i gráficamente.

- ¿Existe otra isometría, la cuál de cómo resultado el mismo punto?
- ¿Toda reflexión central es una rotación de 180°? ¿por qué?
- Reflexión central fuera del origen (ejercicio).

CIERRE: Evaluación formativa.

Se le presentara al alumno una guía impresa en la cual se presentaran 4 planos de Argand, en donde ellos tendrán que realizar cada una de las transformaciones isométricas vistas hasta el momento, siendo estas: traslación, rotación (tanto en los ángulos de 90º, 180º, 270º y 360º como para cualquier ángulo) y reflexión central. Con el fin de que pueda apreciar visualmente las transformaciones isométricas.

PROPOSITO DE LA CLASE N°4

INICIO:

Reforzar los conocimientos de la reflexión central que ya conocían en el plano cartesiano y relacionarlo con el plano complejo, y con las transformaciones isométricas vistas anteriormente.

DESARROLLO:

A partir de la visualización geométrica de la reflexión axial del punto representado por el número complejo $3 + 2i$, el alumno relacionará que la reflexión axial es lo mismo que efectuar una rotación de 180° para cualquier punto.

CIERRE:

Generar una evaluación en medio de la enseñanza con el fin de que el alumno pueda a través de la práctica trabajar los conocimientos y también conocer en que se equivocó a través de una próxima retroalimentación del docente.

CLASE N°5

Objetivos:

- Establecer un procedimiento que permita realizar cualquier reflexión axial, con respecto a ambos ejes.

Aprendizajes Esperados:

- Comprender la relación que existe entre una reflexión axial y la rotación de 180º.

INICIO:

Reflexión Axial: el estudio de la reflexión axial se centrara solo entorno a los ejes x e y.

- ¿qué es la reflexión axial?

DESARROLLO:

Reflexión axial: Es aquella isometría en la que un punto z es transformado en otro punto z', a través de una recta l (de simetría) de tal manera que el segmento $\overline{zz'}$ tiene a la recta l como mediatriz.

Conociendo la definición anterior se propone generar el punto reflejado de la siguiente manera: a través de una composición de transformaciones isométricas primero se traslada el punto para que coincida con el eje imaginario para luego generar una rotación de 180° respecto al origen, para finalmente volver aplicar la traslación inversa

Sea l coincidente con el eje x, aplique una reflexión axial del punto representado por el número complejo $z = 3 - 6i$.

-¿A qué punto corresponde la reflexión axial del punto z?

-¿Cuál es el conjugado de z? ¿Coincide con la reflexión axial? ¿Toda reflexión axial con respecto al eje x corresponde al conjugado del número?

-¿qué sucede si l es coincidente con el eje y?

CIERRE: Prueba final (Anexo página 133).

PROPOSITO DE LA CLASE N°5:

INICIO:

Reforzar los conocimientos de la reflexión axial que ya conocían en el plano cartesiano y relacionarlo con el plano complejo, y con las transformaciones isométricas vistas anteriormente.

DESARROLLO:

Relacionar la reflexión axial con el concepto ya conocido del conjugado de un número complejo.

Establecer un procedimiento que permita realizar una reflexión axial con respecto al eje y, según lo aprendido con respecto al eje x.

CIERRE:

Tiene como objetivo el reconocer lo que los alumnos han aprendido generando una retroalimentación para ellos, junto con esto realizar una retroalimentación al diseño didáctico en sí mismo, ya que en base a los resultados obtenidos se podrá modificar este diseño.

LIMITACIONES DEL DISEÑO

- Si el estudiante no hizo significativos los conocimientos previos necesarios, es muy difícil que pueda retener dichos conceptos durante los extensos periodos de tiempo entre los que se enseñan transformaciones isométricas y los números complejos.

- Es necesaria una actitud potencialmente significativa por parte del estudiante, dado que esta es una de las condiciones necesarias para que se produzca aprendizaje significativo (Ausubel, 2001)

CONCLUSIÓN

Luego de realizar el diseño de secuencia didáctico, se concluyó lo siguiente:

La enseñanza de los conceptos matemáticos no debe ser particionada, ya que, no se favorece su enseñanza, puesto que se limita a enseñar casos particulares y triviales, siendo que el estudio de la matemática como lo estructura el marco curricular, se basa en formar estudiantes críticos e integrales, que apliquen el conocimiento matemático en diversos contextos.

A partir de lo anterior, es que el diseño didáctico generado responde a esta necesidad de profundizar en la enseñanza de las transformaciones isométricas y concluirlas en tercer año de enseñanza media, con respecto a la perspectiva que se plantea en esta investigación, ya que, el educando después de la implementación de este diseño didáctico posee las herramientas para realizar cualquier transformación isométrica que se plantee, completando su enseñanza.

En la entrevista de los docentes, expresan que al relacionar conceptos matemáticos, además de establecer una motivación para el estudiante, se aprende de forma efectiva, ya que el estudiante posee una estructura cognitiva más compleja que le permite resolver problemas de mejor manera, integrando la mayor cantidad del conocimiento matemático que domina hasta ese momento.

Si bien el diseño generado no se contempla en los planes y programas, nos parece necesaria su incorporación, y la de más tópicos matemáticos que se relacionen, con el fin de estructurar un curriculum sólido, el cual se encuentre asociado y relacionando los ejes fundamentales.

El estudio de los números complejos en la enseñanza actual chilena, es tratado como una conclusión a la teoría de conjunto, visto como respuesta a las necesidades que los números reales no satisfacen, en particular, en la resolución de ecuaciones cuadráticas, cubicas, etc. Y en cuanto a su operatoria son tratados de forma algebraica no dándole significancia a los estudiantes, este diseño didáctico apela a un cambio de esta visión, estableciendo la importancia de no acotar la enseñanza de los números complejos, ya que, geométricamente son una herramienta eficaz para realizar cualquier transformaciones isométricas en el plano.

En el nivel de tercer año de enseñanza media, los estudiantes poseen los conocimientos previos que son tratados para generar el diseño didáctico que se plantea en esta investigación, por lo que es posible organizarlos de forma no arbitraria y lógicamente significativa, logrando una estructura cognitiva más compleja, además establecer una significancia de los conocimientos por separados facilitando su retención para en un futuro volver a ser tratados, adicionalmente, este diseño se puede ver reforzado con la multiplicación de complejos con módulo diferente de 1 relacionándolo con el conocimiento de homotecia que es tratado en segundo medio actualmente.

A través de dos métodos diferentes de validación, siendo estos, un grupo de enfoque y dos expertos, se evidencia una visión positiva respecto a completar la enseñanza de las transformaciones isométricas ocupando como subsumidor la operatoria de los números complejos, lo cual indica una buena pertenencia del diseño a la teoría del aprendizaje significativo.

Al analizar los programas de estudios y los textos entregados por el MINEDUC, demuestran un limitado uso de las transformaciones isométricas, lo cual es solucionado a través de adquirir una herramienta potente como lo son los números complejos.

BIBLIOGRAFÍA

Agencia de la Calidad de la Educación. (2015). *Resultados SIMCE 2014, Liceo Nacional de Maipú.* Recuperado el día martes 22 de Diciembre de 2015, de http://www.simce.cl/ficha/?rbd=25770

Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, H. (2001). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Ed. Trillas. México.

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Ed. Paidós.

Ávila, H. (2006) *Introducción a la metodología de la investigación*. Barcelona: Edición electrónica.
Recuperado el día sábado 10 de octubre de 2015, de www.eumed.net/libros/2006c/203/

Borquez, E., Darrigrandi, F., Zañartu M. (2010). *8° año básico, matemática*. Santiago: Santillana

Chuaqui, M., Riera, G. (2011). *Transformaciones en geometría euclidiana y no euclidiana*. Chile: Juan Crlos Sáez Editor.

Clemens, S., O'daffer, P., Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* EE.UU: Addison Wesley Publishing Company.

Del Valle, J., Muñoz, G., Santis, M. (2014). *1° año de educación media, matemática*. Santiago: SM Chile S.A.

Garcia, D. (2001). *El concepto de aprendizaje significativo en la teoría de David Ausubel y Joseph Novak. La construcción del concepto mediante un modelo de conocimiento* (tesis de pregrado). Universidad Autónoma del estado de Morelos. Cuernacava, Morelos

Jiminez,A., Reyes, C., Valenzuela, M., Chandia, E. (2012). *1° año de educación media, matemática*. Santiago: McGraw-Hill

Lehmann, CH. (1989).*Geometría analítica.* EE.UU: Limusa

Manterola, M. (1998). *Psicología educativa: conexiones con la sala de clases*. Chile: Ediciones Universidad Católica Blas Cañas.

McMillan, J., Schumacher, S. (2010). *Investigación educativa*. Madrid: Pearson Addison Wesley.

Ministerio de Educación (2013). *Programa de estudio de primer año medio*. Santiago: Ministerio de Educación

Ministerio de Educación (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media*. Santiago: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación (2014). *Resultados nacionales SIMCE*. Santiago: Ministerio de Educación.

Montes, S. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego pac-man*. Colombia.

Moriena, S. (2004). *Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano.*
Recuperado el día domingo 9 de Agosto de 2015, de http://www.soarem.org.ar/Documentos/31%20Moriena.pdf

Moya, J. (1997). *Teorías cognoscitivas del aprendizaje*. Santiago: Ediciones Universidad Católica Blas Cañas.

Ortiz, A., Reyes, C., Valenzuela, M., Chandía, E. (2012). *Matemática 1 Año Medio. Texto para el estudiante.* Chile. McGraw-Hill.

Rivero, F. (2001). *Una introducción a los Números Complejos*. Venezuela: Mérida.

Rodríguez, M. (2004). *La teoría del aprendizaje significativo*. Centro de educación a distancia.
Recuperado el día domingo 16 de Agosto de 2015, de http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf

Saiz, O., Blumenthal, V. (2014). *Texto para el estudiante. Matemática 3° Medio.* Chile. Cal y Canto.

Sampieri, H., Collado, C., Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: The McGraw-Hill.

Sandoval, C. (2002). *Investigación cualitativa*. Colombia: ICFES

Stewart, I. (2008). Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años. Ed. Crítica

ANEXOS

PAUTA DE VALIDACIÓN DE ENTREVISTA

NOMBRE DEL ESTUDIO:

"Diseño de una secuencia didáctica que articule los números complejos y transformaciones isométricas visto desde la teoría del aprendizaje significativo de D. Ausubel"

Integrantes:

Gino Mangili Cuadra.

Aldo Sánchez Barros.

Profesor guía:

Pablo Figueroa.

Propósito de la tesis:

Se evidencia que el estudio de las transformaciones isométricas en los establecimientos no son considerados conocimientos previos de otros saberes matemáticos, sino que son vistos inicialmente en forma geométrica con regla y compas para luego ser trasladado al plano cartesiano, pero no se retoma a lo largo de la etapa escolar del estudiante, siendo un conocimiento que termina siendo olvidado.

Junto con esto la enseñanza empleada para el aprendizaje de los números complejos es una ejercitación de algoritmos que no tiene otro fin más que la enseñanza de ellos mismos y que en un futuro no se reanudaran.

Por lo anterior, proponemos un diseño de secuencia de actividades el cual integre ambos conceptos matemáticos con el fin de generar un aprendizaje significativo visto desde la teoría de Ausubel

OBJETIVO GENERAL:

Elaborar un diseño didáctico el cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas a través de los números complejos, con el fin de guiar el proceso de enseñanza aprendizaje, basándose en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.

OBJETIVOS ESPECIFICOS A LOS CUALES APUNTA LA ENTREVISTA:

- Comprender las dificultades y obstáculos que tiene la enseñanza de las transformaciones isométricas y los números complejos.
- Saber cómo los docentes del liceo nacional de Maipú enseñan las transformaciones isométricas y los números complejos.
- Conocer desde la visión de los docentes del liceo nacional de Maipú cuales son los conocimientos previos que se relacionan con las transformaciones isométricas y los números complejos.

Estimado/a Especialista:

En el marco de nuestra investigación y considerando su expertiz en ésta materia, tenemos a bien solicitarle pueda emitir su juicio de experto, respecto del instrumento de recogida de información que le presentamos. Junto con agradecer su buena disposición, le pedimos pueda hacernos llegar su juicio mediante e-mail.

DATOS DEL ESPECIALISTA

PERSONALES
Nombre:
Título(s) Profesional(es):
Grado(s) Académico(s):
Principal(es) Área(es) de investigación en la que se desarrolla (a lo más tres):
INSTITUCIÓN DONDE LABORA
Nombre de la Institución:
País:
Cargo o función que desempeña:

ENTREVISTA

Nombre:

Años de labor docente:

Título profesional:

PREGUNTAS:

1. En el Liceo Nacional de Maipú, ¿el álgebra y la geometría se enseñan por separado? ¿Considera que la relación de ambos ejes matemáticos ayudaría al aprendizaje del alumno? ¿En qué tópicos matemáticos le parece que existe esta relación?
2. ¿El material entregado por el ministerio establece una relación entre el álgebra y geometría? ¿De qué forma se muestra esta relación? ¿En qué contenidos? ¿Este material es utilizado?
3. ¿Considera que las transformaciones isométricas son sólo enseñadas desde una perspectiva geométrica?, ¿por qué?
4. ¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender las transformaciones isométricas?
5. ¿Considera que a futuro la enseñanza de las transformaciones isométricas le será útil al estudiante?
6. ¿Considera que los números complejos son sólo enseñados desde una perspectiva algebraica?, ¿por qué?
7. ¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender los números complejos?
8. ¿Considera que a futuro la enseñanza de los números complejos le será útil al estudiante?
9. Respecto a las dificultades y obstáculos expuestos en ambos conceptos. ¿Cree usted que la articulación de estos conceptos, podría superarlo?

CRITERIOS DE EVALUACION	OBSERVACIONES
Estructura	
Relación con los objetivos específicos señalados	
Ortografía	

ENTREVISTA A DOCENTES

Este instrumento se aplicará a la población que comprende una población de seis Profesionales de la Educación, con título de Profesor que desarrollen sus funciones en el Liceo Nacional de Maipú, será una entrevista semi-estructurada.

ANALISIS DE LAS PREGUNTAS:

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
En el Liceo Nacional de Maipú, ¿el álgebra y la geometría se enseñan por separado? ¿Considera que la relación de ambos ejes matemáticos ayudaría al aprendizaje del alumno? ¿En qué tópicos matemáticos le parece que existe esta relación?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Establecer un análisis a priori de como conciben los docentes del Liceo Nacional de Maipú la vinculación de los ejes matemáticos propuestos por las reformas curriculares nacionales y que conocimientos matemáticos actualmente se encuentran articulados en el currículo.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿El material entregado por el ministerio establece una relación entre el álgebra y geometría? ¿De qué forma se muestra esta relación?			

¿En qué contenidos? ¿Este material es utilizado?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer como los docentes son orientados en las planificaciones de las clases, y si se les propone vincular los ejes matemáticos a lo largo del año escolar.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que las transformaciones isométricas son sólo enseñadas desde una perspectiva geométrica?, ¿por qué?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: El saber de las transformaciones isométricas en el curriculum se posiciona en el eje de la geometría, el objetivo de esta pregunta es saber si la enseñanza de este concepto en el Liceo Nacional de Maipú se centra únicamente en este eje o se vincula con otros.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender las transformaciones isométricas?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer las dificultades y obstáculos que posee las transformaciones isométricas, con el fin de superarlas con el diseño de secuencia de actividades.

<table>
<tr><th rowspan="2">PREGUNTA</th><th colspan="2">¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?</th><th rowspan="2">OBSERVACIONES</th></tr>
<tr><th>SI</th><th>NO</th></tr>
<tr><td>¿Considera que a futuro la enseñanza de las transformaciones isométricas le será útil al estudiante?</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Saber con qué otros conocimientos se relacionan las transformaciones isométricas, con el fin de conocer si será un conocimiento previo de otro objeto matemático.

<table>
<tr><th rowspan="2">PREGUNTA</th><th colspan="2">¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?</th><th rowspan="2">OBSERVACIONES</th></tr>
<tr><th>SI</th><th>NO</th></tr>
<tr><td>¿Considera que los números complejos son sólo enseñados desde una perspectiva algebraica?, ¿por qué?</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Los números complejos están presente en el eje del algebra, esta pregunta tiene por objetivo conocer si la enseñanza de los números complejos se basa únicamente en el eje algebraico o se relación con los otros.

	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?	OBSERVACIONES

PREGUNTA	SI	NO	
¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender los números complejos?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer las dificultades y obstáculos que posee los números complejos, con el fin de superarlas con el diseño de secuencia de actividades.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que a futuro la enseñanza de los números complejos le será útil al estudiante?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Saber con qué otros conocimientos se relacionan los números complejos, con el fin de conocer si será un conocimiento previo de otro objeto matemático.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
Respecto a las dificultades y obstáculos expuestos en ambos conceptos. ¿Cree usted que la articulación de estos conceptos, podría superarlo?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Al haber analizados ambos conceptos, se busca que los docentes establezcan conjeturas basadas en su experiencia en aula y propongan ideas para la construcción del diseño de secuencia de actividades.

VALIDACIÓN N°1

NOMBRE DEL ESTUDIO:

"Diseño de una secuencia didáctica que articule los números complejos y transformaciones isométricas visto desde la teoría del aprendizaje significativo de D. Ausubel"

Integrantes:

Gino Mangili Cuadra.

Aldo Sánchez Barros.

Profesor guía:

Pablo Figueroa.

Propósito de la tesis:

Se evidencia que el estudio de las transformaciones isométricas en los establecimientos no son considerados conocimientos previos de otros saberes matemáticos, sino que son vistos inicialmente en forma geométrica con regla y compas para luego ser trasladado al plano cartesiano, pero no se retoma a lo largo de la etapa escolar del estudiante, siendo un conocimiento que termina siendo olvidado.

Junto con esto la enseñanza empleada para el aprendizaje de los números complejos es una ejercitación de algoritmos que no tiene otro fin más que la enseñanza de ellos mismos y que en un futuro no se reanudaran.

Por lo anterior, proponemos un diseño de secuencia de actividades el cual integre ambos conceptos matemáticos con el fin de generar un aprendizaje significativo visto desde la teoría de Ausubel

OBJETIVO GENERAL:

Elaborar un diseño didáctico el cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas a través de los números complejos, con el fin de guiar el proceso de enseñanza aprendizaje, basándose en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.

OBJETIVOS ESPECIFICOS A LOS CUALES APUNTA LA ENTREVISTA:

- Comprender las dificultades y obstáculos que tiene la enseñanza de las transformaciones isométricas y los números complejos.
- Saber cómo los docentes del liceo nacional de Maipú enseñan las transformaciones isométricas y los números complejos.
- Conocer desde la visión de los docentes del liceo nacional de Maipú cuales son los conocimientos previos que se relacionan con las transformaciones isométricas y los números complejos.

Este último objetivo no lo veo muy explícito en las preguntas.

Deben agregar un objetivo relacionado con la valoración y significado que le otorgan los profesores a la articulación propuesta… Pienso que no solo se trata de resolver dificultades, sino que también propone una nueva perspectiva "articuladora" en la que los contenidos se resignifican y se potencian.

Estimado/a Especialista:

En el marco de nuestra investigación y considerando su expertiz en ésta materia, tenemos a bien solicitarle pueda emitir su juicio de experto, respecto del instrumento de recogida de información que le presentamos. Junto con agradecer su buena disposición, le pedimos pueda hacernos llegar su juicio mediante e-mail.

DATOS DEL ESPECIALISTA

PERSONALES
Nombre:
Título(s) Profesional(es):
Grado(s) Académico(s):
Principal(es) Área(es) de investigación en la que se desarrolla (a lo más tres):
INSTITUCIÓN DONDE LABORA
Nombre de la Institución:
País:
Cargo o función que desempeña:

ENTREVISTA

Nombre:

Años de labor docente:

Título profesional:

PREGUNTAS:

1. En el Liceo Nacional de Maipú, ¿el álgebra y la geometría se enseñan por separado? ¿Considera que la relación de ambos ejes matemáticos ayudaría al aprendizaje del alumno? ¿En qué tópicos matemáticos le parece que existe esta relación?
2. ¿El material entregado por el ministerio establece una relación entre el álgebra y geometría? ¿De qué forma se muestra esta relación? ¿En qué contenidos? ¿Este material es utilizado?

No solo apuntar a la relación entre ejes, sino también entre contenidos que por lo general se ven aislados. Por ejemplo, ver las transformaciones desde el punto de vista funcional para interpretar la composición de transformaciones isométricas de mejor forma.

3. ¿Considera que las transformaciones isométricas son sólo enseñadas desde una perspectiva geométrica?, ¿por qué?
4. ¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender las transformaciones isométricas?
5. ¿Considera que a futuro la enseñanza de las transformaciones isométricas le será útil al estudiante?
6. ¿Considera que los números complejos son sólo enseñados desde una perspectiva algebraica?, ¿por qué?
7. ¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender los números complejos?
8. ¿Considera que a futuro la enseñanza de los números complejos le será útil al estudiante?
9. Respecto a las dificultades y obstáculos expuestos en ambos conceptos. ¿Cree usted que la articulación de estos conceptos, podría superarlo?

Me parece que las preguntas apuntan fundamentalmente a la valoración del vínculo entre álgebra y geometría en los contenidos de enseñanza media (a partir por su puesto de su ausencia en la práctica) y también la dificultades de los contenidos de transformaciones isométricas por ejemplo. No obstante, el objetivo central de la tesis apunta a la articulación entre contenidos…. (pensando en que por lo general los contenidos se ven en forma aislada) En este caso dos contenidos claves en la enseñanza media (T. Iso y Complejos).

Me falta talvez poner más énfasis en las preguntas respecto a esta articulación. Es decir, no solo poner acento en las dificultades, sin explorar cuál es la potencia de esta articulación y el sentido. Considerar que solo se hace una pregunta (9). Por ejemplo,

¿Usted había pensado en esta articulación?

¿Al momento de enseñar complejos estableció algún vínculo con las transformaciones isométricas? Si/ no ¿Por qué?

¿Cómo ha enseñado la unidad de complejos hasta ahora? ¿Por qué?

¿Solo vinculó los números complejos con las ecuaciones de segundo grado?

¿Qué ganaría la unidad de números complejos, al establecer esta articulación con las T. I.? ¿Por qué?

¿Cómo se resignificarían las transformaciones isométricas al establecer este vínculo con los complejos?

¿Es una idea factible? ¿La valora? ¿Lo haría en sus clases? ¿Por qué?

¿Qué piensa de esta perspectiva articuladora para contenidos generalmente desvinculados?

Algo por el estilo…

VALIDACIÓN N°2

NOMBRE DEL ESTUDIO:

"Diseño de una secuencia didáctica que articule los números complejos y transformaciones isométricas visto desde la teoría del aprendizaje significativo de D. Ausubel"

"Diseño de una secuencia didáctica que integre el uso de las transformaciones isométricas en el aprendizaje significativo de los números complejos para estudiantes de cuarto medio: Desde la teoría del Aprendizaje significativo de D. Ausubel"

Integrantes:

Gino Mangili Cuadra.

Aldo Sánchez Barros.

Profesor guía:

Pablo Figueroa.

Propósito de la tesis:

Se evidencia que el estudio de las transformaciones isométricas en los establecimientos no son considerados conocimientos previos de otros saberes matemáticos, sino que son vistos inicialmente en forma geométrica con regla y compas para luego ser trasladado al plano cartesiano, pero no se retoma a lo largo de la etapa escolar del estudiante, siendo un conocimiento que termina siendo olvidado.

Junto con esto la enseñanza empleada para el aprendizaje de los números complejos es una ejercitación de algoritmos que no tiene otro fin más que la enseñanza de ellos mismos y que en un futuro no se reanudaran.

"¿Existen datos duros que den cuenta de esto que ustedes establecen como "evidente"?"

Por lo anterior, proponemos un diseño de secuencia de actividades el cual integre ambos conceptos matemáticos con el fin de generar un aprendizaje significativo visto desde la teoría de Ausubel

OBJETIVO GENERAL:

Elaborar un diseño didáctico el cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas a través de los números complejos, con el fin de guiar el proceso de enseñanza aprendizaje, basándose en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.

“Si esta investigación, como según parece, porque no lo han declarado, adopto un enfoque cualitativo, centrado en la corriente descriptiva - interpretativa, que corresponde a la teoría de situaciones didácticas, bajo la metodología de la ingeniería didáctica para un estudio de caso, teniendo en cuenta el objetivo general mencionado, integrando las transformaciones isométricas con el aprendizaje de los números complejos, entonces debería ser:

“Diseño de una secuencia didáctica que integre el uso de las transformaciones isométricas en el aprendizaje significativo de los números complejos para estudiantes de cuarto medio: desde la teoría del Aprendizaje significativo de D. Ausubel””

OBJETIVOS ESPECIFICOS A LOS CUALES APUNTA LA ENTREVISTA:

- Comprender las dificultades y obstáculos que tiene la enseñanza de las transformaciones isométricas y los números complejos.
- Saber cómo los docentes del liceo nacional de Maipú enseñan las transformaciones isométricas y los números complejos.
- Conocer desde la visión de los docentes del liceo nacional de Maipú cuales son los conocimientos previos que se relacionan con las transformaciones isométricas y los números complejos.

“En consecuencia:

Objetivos específicos

✓Identificar fundamentos teóricos y metodológicos que posibilitan el diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica para el aprendizaje de los números complejos utilizando las transformaciones isométricas.

✓Diseñar una secuencia didáctica con actividades y situaciones problemáticas de dificultad graduada, utilizando las transformaciones isométricas, que contribuyan a la construcción del concepto de número complejo.

✓Aplicar la secuencia didáctica, analizar y comparar los resultados obtenidos a priori con los obtenidos a posteriori en el marco de teoría del aprendizaje significativo de D. Ausubel”

Estimado/a Especialista:

En el marco de nuestra investigación y considerando su expertiz en ésta materia, tenemos a bien solicitarle pueda emitir su juicio de experto, respecto del instrumento de recogida de información que le presentamos. Junto con agradecer su buena disposición, le pedimos pueda hacernos llegar su juicio mediante e-mail.

DATOS DEL ESPECIALISTA

PERSONALES
Nombre: Carlos Gómez
Título(s) Profesional(es): Profesor de Matemática
Grado(s) Académico(s): Licenciado en Educación
Principal(es) Área(es) de investigación en la que se desarrolla (a lo más tres): ABP TIC´s para la enseñanza de la matemática
INSTITUCIÓN DONDE LABORA
Nombre de la Institución: UCSH
País: Chile
Cargo o función que desempeña: Profesor Titular

ENTREVISTA

Nombre:

Años de labor docente:

Título profesional:

PREGUNTAS:

1. En el Liceo Nacional de Maipú, ¿el álgebra y la geometría se enseñan por separado? ¿Considera que la relación de ambos ejes matemáticos ayudaría al aprendizaje del alumno? ¿En qué tópicos matemáticos le parece que existe esta relación?
2. ¿El material entregado por el ministerio establece una relación entre el álgebra y geometría? ¿De qué forma se muestra esta relación? ¿En qué contenidos? ¿Este material es utilizado?
3. ¿Considera que las transformaciones isométricas son sólo enseñadas desde una perspectiva geométrica?, ¿por qué?
4. ¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender las transformaciones isométricas?
5. ¿Considera que a futuro la enseñanza de las transformaciones isométricas le será útil al estudiante?
6. ¿Considera que los números complejos son sólo enseñados desde una perspectiva algebraica?, ¿por qué?
7. ¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender los números complejos?
8. ¿Considera que a futuro la enseñanza de los números complejos le será útil al estudiante?
9. Respecto a las dificultades y obstáculos expuestos en ambos conceptos. ¿Cree usted que la articulación de estos conceptos, podría superarlo?

CRITERIOS DE EVALUACION	OBSERVACIONES
Estructura	
Relación con los objetivos específicos señalados	“No me quedan claros, por lo que me cuesta ver la relación”
Ortografía	

ENTREVISTA A DOCENTES

Este instrumento se aplicará a la población que comprende una población de seis Profesionales de la Educación, con título de Profesor que desarrollen sus funciones en el Liceo Nacional de Maipú, será una entrevista semi-estructurada.

ANALISIS DE LAS PREGUNTAS:

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
En el Liceo Nacional de Maipú, ¿el álgebra y la geometría se enseñan por separado? ¿Considera que la relación de ambos ejes matemáticos ayudaría al aprendizaje del alumno? ¿En qué tópicos matemáticos le parece que existe esta relación?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Establecer un análisis a priori de como conciben los docentes del Liceo Nacional de Maipú la vinculación de los ejes matemáticos propuestos por las reformas curriculares nacionales y que conocimientos matemáticos actualmente se encuentran articulados en el curriculum.

“En esta fase el alumno debe ser tomado en cuenta en ambos niveles, descriptivo y predictivo al docente solo en el nivel descriptivo, correspondiente al momento final de la clase, donde mediante la socialización de los resultados obtenidos por los estudiantes se complementan magistralmente y con la ayuda de las transformaciones isométricas, los conceptos adquiridos por ellos durante el desarrollo de la secuencia didáctica.”

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿El material entregado por el ministerio establece una relación entre el álgebra y geometría? ¿De qué forma se muestra esta relación? ¿En qué contenidos? ¿Este material es utilizado?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer como los docentes son orientados en las planificaciones de las clases, y si se les propone vincular los ejes matemáticos a lo largo del año escolar.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que las transformaciones isométricas son sólo enseñadas desde una perspectiva geométrica?, ¿por qué?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: El saber de las transformaciones isométricas en el curriculum se posiciona en el eje de la geometría, el objetivo de esta pregunta es saber si la enseñanza de este concepto en el Liceo Nacional de Maipú se centra únicamente en este eje o se vincula con otros.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender las transformaciones isométricas?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer las dificultades y obstáculos que posee las transformaciones isométricas, con el fin de superarlas con el diseño de secuencia de actividades.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES

	SI	NO	
¿Considera que a futuro la enseñanza de las transformaciones isométricas le será útil al estudiante?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Saber con qué otros conocimientos se relacionan las transformaciones isométricas, con el fin de conocer si será un conocimiento previo de otro objeto matemático.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que los números complejos son sólo enseñados desde una perspectiva algebraica?, ¿por qué?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Los números complejos están presente en el eje del algebra, esta pregunta tiene por objetivo conocer si la enseñanza de los números complejos se basa únicamente en el eje algebraico o se relación con los otros.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender los números complejos?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer las dificultades y obstáculos que posee los números complejos, con el fin de superarlas con el diseño de secuencia de actividades.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que a futuro la enseñanza de los números complejos le será útil al estudiante?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Saber con qué otros conocimientos se relacionan los números complejos, con el fin de conocer si será un conocimiento previo de otro objeto matemático.

"Parece que aquí están en el análisis a posteriori y es en esta fase donde se determinará mediante evaluaciones escritas, en qué medida la secuencia didáctica desarrollada y aplicada ayudó a la apropiación del aprendizaje de los números complejos, frente al esquema tradicionalmente utilizado., para posteriormente analizar toda la información recolectada en el proceso de aplicación de la secuencia didáctica, desde las producciones de los estudiantes, hasta las percepciones del docente. Para la recolección de dicha información se hace necesario emplear instrumentos previamente concertados con los estudiantes, a saber, entrevistas, cuestionarios, debates grupales, entre otros. . Una vez recolectada esta información se confrontará con el análisis a priori de la misma"

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
Respecto a las dificultades y obstáculos expuestos en ambos conceptos. ¿Cree usted que la articulación de estos conceptos, podría superarlo?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Al haber analizados ambos conceptos, se busca que los docentes establezcan conjeturas basadas en su experiencia en aula y propongan ideas para la construcción del diseño de secuencia de actividades.

VALIDACIÓN N°3

NOMBRE DEL ESTUDIO:

"Diseño de una secuencia didáctica que articule los números complejos y transformaciones isométricas visto desde la teoría del aprendizaje significativo de D. Ausubel"

Integrantes:

Gino Mangili Cuadra.

Aldo Sánchez Barros.

Profesor guía:

Pablo Figueroa.

Propósito de la tesis:

Se evidencia que el estudio de las transformaciones isométricas en los establecimientos no son considerados conocimientos previos de otros saberes matemáticos, sino que son vistos inicialmente en forma geométrica con regla y compas para luego ser trasladado al plano cartesiano, pero no se retoma a lo largo de la etapa escolar del estudiante, siendo un conocimiento que termina siendo olvidado.

Junto con esto la enseñanza empleada para el aprendizaje de los números complejos es una ejercitación de algoritmos que no tiene otro fin más que la enseñanza de ellos mismos y que en un futuro no se reanudarán.

Por lo anterior, proponemos un diseño de secuencia de actividades el cual integre ambos conceptos matemáticos con el fin de generar un aprendizaje significativo visto desde la teoría de Ausubel

OBJETIVO GENERAL:

Elaborar un diseño didáctico el cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas a través de los números complejos, con el fin de guiar el proceso de enseñanza aprendizaje, basándose en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.

OBJETIVOS ESPECIFICOS A LOS CUALES APUNTA LA ENTREVISTA:

- Comprender las dificultades y obstáculos que tiene la enseñanza de las transformaciones isométricas y los números complejos.
- Saber cómo los docentes del liceo nacional de Maipú enseñan las transformaciones isométricas y los números complejos.
- Conocer desde la visión de los docentes del liceo nacional de Maipú cuales son los conocimientos previos que se relacionan con las transformaciones isométricas y los números complejos.

Estimado/a Especialista:

En el marco de nuestra investigación y considerando su expertiz en ésta materia, tenemos a bien solicitarle pueda emitir su juicio de experto, respecto del instrumento de recogida de información que le presentamos. Junto con agradecer su buena disposición, le pedimos pueda hacernos llegar su juicio mediante e-mail.

DATOS DEL ESPECIALISTA

PERSONALES
Nombre: JORGE AVILA CONTRERAS
Título(s) Profesional(es): NO TIENE
Grado(s) Académico(s): LICENCIADO EN MATEMÁTICA MAGISTER EN CIENCIAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
Principal(es) Área(es) de investigación en la que se desarrolla (a lo más tres): COMPLEJIDAD Y EMOCIONES EN EDUCACION MATEMÁTICA FORMACIÓN DE PROFESORES PENSAMIENTO VARIACIONAL
INSTITUCIÓN DONDE LABORA
Nombre de la Institución: UNIVERSIDAD CATÓLICA SILVA HENRÍQUEZ
País: CHILE

Cargo o función que desempeña: ACADÉMICO JORNADA COMPLETA

ENTREVISTA

Nombre:

Años de labor docente:

Título profesional:

PREGUNTAS:

1. En el Liceo Nacional de Maipú, ¿el álgebra y la geometría se enseñan por separado? ¿Considera que la relación de ambos ejes matemáticos ayudaría al aprendizaje del alumno? ¿En qué tópicos matemáticos le parece que existe esta relación?
2. ¿El material entregado por el ministerio establece una relación entre el álgebra y geometría? ¿De qué forma se muestra esta relación? ¿En qué contenidos? ¿Este material es utilizado?
3. ¿Considera que las transformaciones isométricas son sólo enseñadas desde una perspectiva geométrica?, ¿por qué?
4. ¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender las transformaciones isométricas?
5. ¿Considera que a futuro la enseñanza de las transformaciones isométricas le será útil al estudiante?
6. ¿Considera que los números complejos son sólo enseñados desde una perspectiva algebraica?, ¿por qué?
7. ¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender los números complejos?
8. ¿Considera que a futuro la enseñanza de los números complejos le será útil al estudiante?
9. Respecto a las dificultades y obstáculos expuestos en ambos conceptos. ¿Cree usted que la articulación de estos conceptos, podría superarlo?

CRITERIOS DE EVALUACION	OBSERVACIONES
Estructura	Es una entrevista, de manera que la estructura está bien, pues son preguntas. Todo depende de la habilidad de los entrevistadores para que sea semiestructurada, es decir, que a partir de las respuestas que dé el entrevistado, puedan ir derivando hilos conductores que les permitan recabar información para su información y no que solamente sea pregunta y respuesta sin elaborar sobre la marcha de la entrevista un

	hilo conversacional.
Relación con los objetivos específicos señalados	Algunas preguntas considero que no se relacionan. Aparece indicado en la columna de observaciones.
Ortografía	En general bien, pequeñas observaciones en el escrito mismo (en modo “comentario” del Word)

ENTREVISTA A DOCENTES

Este instrumento se aplicará a la población que comprende una población de seis Profesionales de la Educación, con título de Profesor que desarrollen sus funciones en el Liceo Nacional de Maipú, será una entrevista semi-estructurada.

ANALISIS DE LAS PREGUNTAS:

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
En el Liceo Nacional de Maipú, ¿el álgebra y la geometría se enseñan por separado? ¿Considera que la relación de ambos ejes matemáticos ayudaría al aprendizaje del alumno? ¿En qué tópicos matemáticos le parece que existe esta relación?	X		La segunda pregunta considero que induce a una respuesta positiva. Y no aporta mucho ya que es susceptible de responderse con un SI o un NO ¿en qué les contribuye eso para su estudio? La tercera pregunta sugiero que sea la segunda, en términos, por ejemplo, como: ¿En qué tópicos matemáticos le parece que puede existir una relación entre ambos ejes y por qué? De manera por ejemplo que ahí ven ustedes si la argumentación del docente va por un ámbito matemático principalmente o si se sustenta atendiendo a los aprendizajes de los estudiantes y, dependiendo de lo que responda, allí tendría más sentido preguntar a continuación algo como: ¿En qué cree usted que podría contribuir para los aprendizajes de los estudiantes

			trabajar con esta vinculación en los tópicos a que hizo mención anteriormente? (si es que el entrevistado no ha tocado la variable aprendizaje de los estudiantes).

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Establecer un análisis a priori de como conciben los docentes del Liceo Nacional de Maipú la vinculación de los ejes matemáticos propuestos por las reformas curriculares nacionales y que conocimientos matemáticos actualmente se encuentran articulados en el curriculum.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿El material entregado por el ministerio establece una relación entre el álgebra y geometría? ¿De qué forma se muestra esta relación? ¿En qué contenidos? ¿Este material es utilizado?	X		Sugiero un cambio de órdenes y algunas sutilezas: ¿El material entregado por el ministerio establece una relación entre el álgebra y la geometría? ¿En qué contenidos? ¿De qué forma se muestra esta relación? ¿Este material es utilizado por usted en sus clases? *(Sí la respuesta es* ***SI****, preguntan ¿de qué manera?; si la respuesta es* ***NO****, preguntan ¿por qué?)*

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer como los docentes son orientados en las planificaciones de las clases, y si se les propone vincular los ejes matemáticos a lo largo del año escolar.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que las transformaciones isométricas son sólo enseñadas desde una perspectiva geométrica?, ¿por qué?	**X**		Me parece pertinente, pero no veo que tenga relación con el propósito de la pregunta.

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: El saber de las transformaciones isométricas en el curriculum se posiciona en el eje de la geometría, el objetivo de esta pregunta es saber si la enseñanza de este concepto en el Liceo Nacional de Maipú se centra únicamente en este eje o se vincula con otros.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender las transformaciones isométricas?	**X**		De acuerdo a su experiencia ¿Qué dificultades y obstáculos considera usted que existen por parte del alumno para aprender las transformaciones isométricas? ¿Por qué?

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer las dificultades y obstáculos que posee las transformaciones isométricas, con el fin de superarlas con el diseño de secuencia de actividades.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que a futuro la enseñanza de las transformaciones isométricas le será útil al estudiante?		**X**	No entiendo el fin de esta pregunta ¿Con cuál de los tres objetivos plateados para la entrevista se relación? Ahora bien, para que tenga más relación con el propósito planteado para la pregunta, sugiero: ¿Considera que a futuro la enseñanza de las transformaciones isométricas le será útil al estudiante para el aprendizaje de otros conocimientos matemáticos? En caso de ser afirmativa la respuesta ¡para cuáles por ejemplo y por qué? En caso de ser negativa la respuesta ¿Por qué?

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Saber con qué otros conocimientos se relacionan las transformaciones isométricas, con el fin de conocer si será un conocimiento previo de otro objeto matemático.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	

¿Considera que los números complejos son sólo enseñados desde una perspectiva algebraica?, ¿por qué?		**X**	No veo que se relaciones con ninguno de los tres objetivos plateados para la entrevista.

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Los números complejos están presente en el eje del algebra, esta pregunta tiene por objetivo conocer si la enseñanza de los números complejos se basa únicamente en el eje algebraico o se relaciona con los otros.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender los números complejos?	**X**		**De acuerdo a su experiencia….**

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer las dificultades y obstáculos que posee los números complejos, con el fin de superarlas con el diseño de secuencia de actividades.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que a futuro la enseñanza de los números complejos le será útil al estudiante?		**X**	No veo que se relaciones con alguno de los objetivos de la entrevista.

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Saber con qué otros conocimientos se relacionan los números complejos, con el fin de conocer si será un conocimiento previo de otro objeto matemático.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
Respecto a las dificultades y obstáculos expuestos en ambos conceptos. ¿Cree usted que la articulación de estos conceptos, podría superarlo?			Es una pregunta que puede responderse con un SI o un NO, lo cual no les entregaría ninguna información desde los docentes para el diseño de la secuencia…. Sugiero invitar a elaborar ideas a los docentes, por ejemplo, algo como: ¿De qué manera cree usted que podría trabajarse más articuladamente estos conceptos para ayudar a superar las dificultades y obstáculos para su aprendizaje?

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Al haber analizados ambos conceptos, se busca que los docentes establezcan conjeturas basadas en su experiencia en aula y propongan ideas para la construcción del diseño de secuencia de actividades.

VALIDACIÓN N°4

NOMBRE DEL ESTUDIO:

"Diseño de una secuencia didáctica que articule los números complejos y transformaciones isométricas visto desde la teoría del aprendizaje significativo de D. Ausubel"

Integrantes:

Gino Mangili Cuadra.

Aldo Sánchez Barros.

Profesor guía:

Pablo Figueroa.

Propósito de la tesis:

Se evidencia que el estudio de las transformaciones isométricas en los establecimientos no son considerados conocimientos previos de otros saberes matemáticos, sino que son vistos inicialmente en forma geométrica con regla y compas para luego ser trasladado al plano cartesiano, pero no se retoma a lo largo de la etapa escolar del estudiante, siendo un conocimiento que termina siendo olvidado.

Junto con esto la enseñanza empleada para el aprendizaje de los números complejos es una ejercitación de algoritmos que no tiene otro fin más que la enseñanza de ellos mismos y que en un futuro no se reanudaran.

Por lo anterior, proponemos un diseño de secuencia de actividades el cual integre ambos conceptos matemáticos con el fin de generar un aprendizaje significativo visto desde la teoría de Ausubel

OBJETIVO GENERAL:

Elaborar un diseño de secuencia didáctica que integre las transformaciones isométricas y los números complejos para estudiantes de 4° año medio, con el fin de guiar el proceso de enseñanza aprendizaje de dichos conceptos, generando así una concepción entre lo algebraico y geométrico.

OBJETIVOS ESPECIFICOS A LOS CUALES APUNTA LA ENTREVISTA:

- Comprender las dificultades y obstáculos que tiene la enseñanza de las transformaciones isométricas y los números complejos.
- Saber cómo los docentes del liceo nacional de Maipú enseñan las transformaciones isométricas y los números complejos.

- Conocer desde la visión de los docentes del liceo nacional de Maipú cuales son los conocimientos previos que se relacionan con las transformaciones isométricas y los números complejos.

Estimado/a Especialista:

En el marco de nuestra investigación y considerando su expertiz en ésta materia, tenemos a bien solicitarle pueda emitir su juicio de experto, respecto del instrumento de recogida de información que le presentamos. Junto con agradecer su buena disposición, le pedimos pueda hacernos llegar su juicio mediante e-mail.

DATOS DEL ESPECIALISTA

PERSONALES
Nombre: Ricardo Salinas Páez
Título(s) Profesional(es): Profesor de Estado en Matemática y Computación
Grado(s) Académico(s): Magister en Didáctica de las Matemáticas
Principal(es) Área(es) de investigación en la que se desarrolla (a lo más tres): Didáctica de las Matemáticas
INSTITUCIÓN DONDE LABORA
Nombre de la Institución: Universidad Católica Silva Henríquez Universidad Central
País: Chile
Cargo o función que desempeña: Académico

ENTREVISTA

Nombre:

Años de labor docente:

Título profesional:

PREGUNTAS:

1. En el Liceo Nacional de Maipú, ¿el álgebra y la geometría se enseñan por separado? ¿Considera que la relación de ambos ejes matemáticos ayudaría al aprendizaje del alumno? ¿En qué tópicos matemáticos le parece que existe esta relación?
2. ¿El material entregado por el ministerio establece una relación entre el álgebra y geometría? ¿De qué forma se muestra esta relación? ¿En qué contenidos? ¿Este material es utilizado?
3. ¿Considera que las transformaciones isométricas son sólo enseñadas desde una perspectiva geométrica?, ¿por qué?
4. ¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender las transformaciones isométricas?
5. ¿Considera que a futuro la enseñanza de las transformaciones isométricas le será útil al estudiante?
6. ¿Considera que los números complejos son sólo enseñados desde una perspectiva algebraica?, ¿por qué?
7. ¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender los números complejos?
8. ¿Considera que a futuro la enseñanza de los números complejos le será útil al estudiante?
9. Respecto a las dificultades y obstáculos expuestos en ambos conceptos. ¿Cree usted que la articulación de estos conceptos, podría superarlo?

CRITERIOS DE EVALUACION	OBSERVACIONES
Estructura	Sugiero agruparlas por objetivos: 1. **Consideraciones epistemológicas de los profesores:** ¿Qué entiende por transformación isométrica? ¿Tiene una noción intuitiva asociada a movimientos en el plano? ¿Tiene la conceptualización como biyección del plano en sí misma que preserva distancias? ¿Qué entiende por número complejo? ¿Sabe de dónde surge el concepto? ¿Supone que $i = \sqrt{-1}$? ¿Conoce la relación entre isometrías y operaciones con números complejos? Etc… 2. **Consideraciones didácticas de los profesores:** ¿Cómo cree él que deben enseñar las transformaciones isométricas? ¿Cómo cree el que deben ser enseñados los números complejos? ¿Qué opina del tratamiento que se le da a estos temas en el currículum? ¿Qué cree el respecto de la necesidad de vincular los distintos dominios de la matemática,

	por ejemplo la geometría y el álgebra para el caso de las isometrías y los números complejos? ¿Valora el trabajo con regla y compás en el tema de transformaciones isométricas? ¿Cree que lo que propone el currículum permite a los alumnos realizar efectivamente cualquier transformación isométrica? Etc…. **3. Dificultades y Obstáculos:** ¿Cuáles son las dificultades que observa para la comprensión de los temas involucrados? ¿Qué aspectos a su juicio obstaculizan el aprendizaje de estos temas? Etc…
Relación con los objetivos específicos señalados	Creo que las preguntas apuntan a los objetivos propuestos, pero podrían ser muy acotadas e impedir un análisis profundo de las concepciones epistemológicas y didácticas que tienen los profesores del tema. Sugiero agregar otras preguntas que permitan visualizar con más detalle estos aspectos.
Ortografía	Correcta

ENTREVISTA A DOCENTES

Este instrumento se aplicará a la población que comprende una población de seis Profesionales de la Educación, con título de Profesor que desarrollen sus funciones en el Liceo Nacional de Maipú, será una entrevista semi-estructurada.

ANALISIS DE LAS PREGUNTAS:

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
En el Liceo Nacional de Maipú, ¿el álgebra y la geometría se enseñan por separado? ¿Considera que la relación de ambos ejes matemáticos ayudaría	X		

al aprendizaje del alumno? ¿En qué tópicos matemáticos le parece que existe esta relación?			

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Establecer un análisis a priori de como conciben los docentes del Liceo Nacional de Maipú la vinculación de los ejes matemáticos propuestos por las reformas curriculares nacionales y que conocimientos matemáticos actualmente se encuentran articulados en el curriculum.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿El material entregado por el ministerio establece una relación entre el álgebra y geometría? ¿De qué forma se muestra esta relación? ¿En qué contenidos? ¿Este material es utilizado?	X		

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer como los docentes son orientados en las planificaciones de las clases, y si se les propone vincular los ejes matemáticos a lo largo del año escolar.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que las transformaciones isométricas son sólo enseñadas desde una perspectiva geométrica?, ¿por qué?	**X**		

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: El saber de las transformaciones isométricas en el curriculum se posiciona en el eje de la geometría, el objetivo de esta pregunta es saber si la enseñanza de este concepto en el Liceo Nacional de Maipú se centra únicamente en este eje o se vincula con otros.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender las transformaciones isométricas?		**X**	**Creo que debe diferenciarse en la pregunta por dificultades y otra por los obstáculos**

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer las dificultades y obstáculos que posee las transformaciones isométricas, con el fin de superarlas con el diseño de secuencia de actividades.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que a futuro la enseñanza de las transformaciones isométricas le será útil al estudiante?		**X**	**No se establece la especificidad de esta pregunta con el problema a investigar, el mismo cuestionamiento podría hacerse con muchos otros contenidos de la matemática escolar**

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Saber con qué otros conocimientos se relacionan las transformaciones isométricas, con el fin de conocer si será un conocimiento previo de otro objeto matemático.

	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?	OBSERVACIONES

PREGUNTA	SI	NO	
¿Considera que los números complejos son sólo enseñados desde una perspectiva algebraica?, ¿por qué?	**X**		**Preguntar por la forma en que el profesor enseña este contenido permitiría, sin condicionar la respuesta, a desprender del análisis el verdadero tratamiento que le da al tema.**

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Los números complejos están presente en el eje del algebra, esta pregunta tiene por objetivo conocer si la enseñanza de los números complejos se basa únicamente en el eje algebraico o se relación con los otros.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Qué dificultades y obstáculos existen por parte del alumno para aprender los números complejos?	**X**		

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Conocer las dificultades y obstáculos que posee los números complejos, con el fin de superarlas con el diseño de secuencia de actividades.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
¿Considera que a futuro la enseñanza de los números complejos le será útil al estudiante?		**X**	

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Saber con qué otros conocimientos se relacionan los números complejos, con el fin de conocer si será un conocimiento previo de otro objeto matemático.

PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
Respecto a las dificultades y obstáculos expuestos en ambos conceptos. ¿Cree usted que la articulación de estos conceptos, podría superarlo?		**X**	**Si se asume la hipótesis de que el discurso matemático escolar tiende al encierro de los temas en un solo dominio, es posible que el profesor responda afirmativamente, pero sin embargo tenga otro tipo de prácticas docentes. Creo que no tiene sentido hacer la pregunta.**

PROPÓSITO DE LA PREGUNTA: Al haber analizados ambos conceptos, se busca que los docentes establezcan conjeturas basadas en su experiencia en aula y propongan ideas para la construcción del diseño de secuencia de actividades.

ENTREVISTAS A DOCENTES

ENTREVISTADO N°1

1.- En el liceo nacional de Maipú, el álgebra y la geometría se parte enseñando por separado desde 7mo y 8vo, pero en conceptos muy básicos. Luego en segundo medio los alumnos logran integrar ambos ejes matemáticos por medio de la semejanza, y el que se enseñe de esta manera nos ayuda a nosotros como docentes, que el aprendizaje del alumno sea más efectivo. Debido a que en segundo medio ellos ya logran integrar circunferencias propias del nivel por medio de algebra y de semejanza, por lo tanto los alumnos van integrando los contenido, pero a media que van progresando.

2.- como tal, no. De por si viene inserto, pero todo depende de cada establecimiento de cómo lo va adecuando a la enseñanza.

3.- Si, porque el alumno está en un nivel inicial al contenido de lo que equivalen las transformaciones isométricas, ya que ellos las ven en básica, y al no tener más herramientas para enseñarlas de otra forma, los alumnos la aprenden geométricamente y totalmente en el plano de la geometría. Se podría enseñar de otra manera, cambiando un poco la metodología, pero uno tiene que ampliar el campo y estamos contra el tiempo.

4.- las dificultades y obstáculos para aprender las transformaciones isométricas a mi punto de vista, serían las de rotación, ya que uno les enseña las más simples 90°, 180° y 270° y se convierte en algo más mecánico y al cambiar algún concepto, se complican.

5.- Considero que sí, pero lamentablemente hoy en día las transformaciones isométricas han quedado un poco de lado, ya que ahora se enfocan en el campo de trasladar, vectores y composición de estas. Si vemos el enfoque que tiene el DEMRE y el ministerio es a la transformación isométrica de rotar simple y trasladar.

6.- Si, porque al trabajar alineados con el ministerio, a nosotros nos dicen que el alumno debe reconocer que los complejos le permiten solucionar ecuaciones que antes no tenían solución en los reales y es ese el enfoque que tenemos que dar. Darle respuesta a problemas algebraicos, ya que en problemas geométricos es casi nulo.

7.- Por lo general a los alumnos siempre les cuesta los números complejos, principalmente cuando lo trabajan a nivel muy algebraico.

8.- Si, puede serle útil para su futuro académico, pero en esto momentos lo que el alumno está recibiendo es lo que necesita. Se les enseña los números complejos como una herramienta para darle respuesta a los problemas algebraicos, pero nada más.

9.- Desconozco como realizar dicha articulación.

ENTREVISTADO N°2

1.- Si, ya que hay tópicos del algebra que son totalmente ajenos a lo que es la geometría, pero aun así la complejidad del algebra está asociada directamente a lo que es algebra lineal o geometría analítica y es ahí donde se vinculan los dos tópicos, de algebra y geometría.

2.- La relación existe, pero no en una forma temporalmente adecuada, un ejemplo claro seria que se vinculan unidades de 4to medio de geometría con unidades de 2do medio en algebra, en vez de hacerlo en el mismo nivel académico, ya que existen muchos conceptos que se podrían asociar, pero no se hace. Lo que nos deja que el propio alumno tenga dificultades con retener la metería planteada por el docente, ya que contenidos básicos se pierden por un tema netamente temporal y después al tratar de hacer el vínculo de cada concepto, llega hacer una habilidad cognitiva mucho mayor para el alumno.

3.- Si bien las transformaciones isométricas son un tópico geométrico, creo que va más allá en cuanto a la percepción y el enfoque que tiene el alumno. El hecho de reconocer patrones y buscar ciertas regularidades en la vida cotidiana, las transformaciones isométricas se vuelven fundamentales. Les cambia el modo de ver las cosas.

4.- la dificultad de aprender las transformaciones isométricas, está en ver la didáctica en cómo se presentan y se trabaje las transformaciones isométricas. Yo por ejemplo lo intento a través del geógebra, por la dinámica que tiene. Pero creo que faltan más animaciones, para hacerlo más di lúdico, más visual.

5.- Sigo insistiendo en la mirada cognitiva que tenga, yo trato de traspasar lo que aprendí y de la forma en que lo aprendí a los alumnos, en como mirar todo aquello que te rodea. Si bien las transformaciones isométricas es un nombre o una formalidad que se le da, está contenido en ciertos movimientos que pueda tener algún objeto y que sencillamente hay una geometría, pero que no está formalizada.

6.- yo lo veo en el plano de Argrand, de relacionar lo que es la geometría analítica con los números complejos. Si bien es un plano complejo que no se entiende mucho la funcionalidad del nivel académico, obviamente se podría hacer alguna relación entre una y otra.

7.- La finalidad, netamente eso.

8.- Si el alumno sigue una carrera científica, claramente le va a hacer útil.

9.- Si utilizamos el plano de argrand, las podremos unir perfectamente. También podrías, por ejemplo construir algún tipo de relación o función matemática y ver si se puedes unir ciertos conceptos.

La dificultad estaría en no manejar bien los angulos, funciones trigonométricas, por ejemplo

ENTREVISTADO N°3

1.- En algunas ocasiones se enseñan por separado, pero existen otras en donde estamos hablando de problemas de ecuaciones y lo asociamos al perímetro de algo. Es ahí cuando se puede hacer una relación entre ambos, pero esto solo se ve en básica. Claramente esta relación hace más efectivo el aprendizaje del alumno, y que al hablar de perímetros, los alumnos deben recordar y asociar lo que era o interpretarlo en una ecuación.

2.- No, porque hablando de este establecimiento, aquí ocupamos pocos libros del ministerio. Por ejemplo, este año ocupamos en 2do medio, ya que está completo en cuanto a ejercicios, pero aun así se ocupa poco. Hablando de los libros de 3ro medio, estos tienen teorema de las cuerdas, de la tangente, aplicado con ecuaciones de segundo grado. En cuanto a los planes y programas, no. Este todo por separado. Donde se mezclan e incluyen cosas es en los libros de 7mo en ecuaciones de problemas, ahí lo llevan a geometría. Pero es muy simple.

3.- Nosotros las enseñamos geometricamente, pero es una cosa de tiempo, y que perfectamente se podría mezclar geometría analítica con transformaciones isométricas de rotación. Con respecto a cómo se evalúan las transformaciones isométricas, depende; de nuevo; del tiempo.

4.- La parte en donde el alumno debe entender las instrucciones al trabajar con regla y compas, en otras palabras en la parte cognitiva. El entender lo que se le está pidiendo, y muchas veces está en juego la compresión lectora que tenga el alumno. Por otro lado esta cuando al alumno se le combina los conceptos, un ejemplo seria la suma de vectores, ya que no lo han visto anteriormente.

5.- La enseñanza será previo a lo que el alumno vea después, aunque en realidad las transformaciones isométricas no se ven a futuro explícitamente.

6.- Sí, porque se enseña de una manera técnica, operar los números complejos, sumar, restar, multiplicar y dividir. En consecuencia a esto, las evaluaciones también se miran del punto de vista algebraico.

7.- Que el alumno comprenda la noción del inverso multiplicativo, que lo entienda y que sepan de donde proviene. En cuanto a lo que yo hago, es recordarle racionalización, para mi es la mejor forma y es lo que más trabajas, con respecto a esto. Nosotros al hablar de números complejos también lo asociamos a la parte real, parte imaginaria, modulo, problemas con este, el cual también se considera geométrico, pero vagamente, pero cuando lo sumamos no lo asociamos con los vectores.

8.- Si lo pensamos en la vida universitaria, sería solo para los alumnos que estudien algo científico, en cuanto a esto, los números complejos son enseñados en tercero medio en el plan común, tanto para estudiantes científicos y humanistas.

9.- Si, en cuanto a la realidad del establecimiento, porque si hablamos de otros que no están preocupados de la psu.

ENTREVISTADO N°4

1.- En general no, pero con una pequeña pincelada del algebra basada en la geometría. Por ejemplo en primero medio cuando hay productos notables, y uno le hace el cuadrado de binomio, y que el alumno lo represente geométricamente. Pero más que nada se hace para la parte motivacional para que el alumno los relacione y sepa que no están tan separados. Luego se vuelve más abstracto, viendo formulas, ejercitando, en otras palabras más mecánico.

2.- En realidad respecto a la utilización del material no se hace mucho, pero si se complementa con lo que nosotros ya tenemos, años de material elaborado y validado por el establecimiento, pero más que nada seleccionamos lo que este articulado a lo que se ha visto y más que nada si es material para que el alumno lo complemente con lo aprendido.

3.- Dentro de un gran porcentaje está más asociado a la parte geométrica, aunque en ocasiones la utilizamos para determinar puntos medios o el punto de la simetría central, etc. Y esto se hace de forma algebraica.

4.- En la utilización de regla y compas, y en plano cartesiano principalmente. En este último las dificultades estuvieron más enfocadas en comprender donde iban los signos o más que nada cosas básicas que necesitaban ser recordadas solamente. Pero más que nada era con la simetría, cuando se le pedía la simetría con el eje x o discriminar simetría central del axial, en otras palabras la parte la parte conceptual, en cuanto a la rotación no hay dificultades, ya que sólo se tratan los ángulos 90,180,270, que resultar ser sencillos para los estudiantes.

5.-La idea del conocimiento para el vector en la física, las congruencias de triángulos de superponer una sobre otra, sin embargo, cuando se enseña congruencia de triángulos no se relacionan con las transformaciones isométricas, sino, que se ve en base a criterios, aún así debiese verse como una transformación isométrica, una vez más, por el tiempo.

GUÍA

Nombre:

1.- Si se tiene el número complejo $p = 2 + 2i$ trasládelo según el vector traslación $\vec{q} = 9 + 6i$.

2.- al vector $\vec{e} = 4 + 5i$ se le aplicó una traslación dando el número complejo $u = 7 + i$ como resultante, ¿cuál es el vector traslación?

3.- Sea el triángulo ABC, con vértices en A$=(3+3i)$, B$=(-1-i)$ y el punto C$=(7+i)$.

a) Traslade el triángulo ABC según el vector traslación $\vec{l}=-3+2i$

b) La figura resultante trasládelo según el vector traslación $\vec{k}=5-5i$

c) La figura resultante trasládelo según el vector traslación $\vec{\tilde{n}}=-2+3i$

d) ¿Existe un único vector que genere la misma traslación que las tres anteriores?

4.- Si se tiene el número complejo $\vec{y} = -3 - 6i$ rótelo 33º con centro en el origen.

5.- Si se tiene el número complejo $\vec{b} = -3 - 6i$ rótelo 33º con centro en el punto $m = 3 + 6i$

6.- Si se tiene el triángulo PQR con vértices en $P = (1 + 5i), Q = (6 - 3i)$ y $R = (-5 - 4i)$, realice una rotación de 60° con respecto al origen.

7. Si se tiene un triángulo MNO con vértice $M = (-3 + 2i), N = (-7 + 4i)$ y O=$(-5 + 7i)$, realice una reflexión central con respecto al origen.

PRUEBA FINAL

1.- Si se tiene un triángulo KEL con vértice $K = (-3 + 2i), E = (-7 + 4i)$ y L=$(-5 + 0i)$, realice una reflexión axial con respecto al eje real.

2.- Si se tiene el punto $W = -5 + 3i$ realice dos transformaciones isométricas diferentes tal que el resultado de esta sea el punto $I = 5 - 6i$.

3.- ¿A qué valor pertenece la expresión i^{83}?

* Recuerde que $i \cdot i = i^2$

- ¿A qué ángulo corresponde esta rotación?

OPERACIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Sea:

$$\{Z = a + bi\,;\ Z = (a,b) \wedge Z' = a' + b'i;\ Z' = (a',b')\} \in \mathbb{C}$$

Adición

- $Z + Z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i \leftrightarrow (a + a', b + b')$
  - Propiedades de la adición:
    - Neutro aditivo: $Z_n = 0 + 0i \leftrightarrow (0,0)/|Z_n| = 0$
    - Inverso aditivo: $\exists!\ Z_p = -Z = -a - bi \leftrightarrow (-a,-b)/Z_1 + Z_p = Z_0$

Sustracción

- $Z + (-Z') = (a + bi) + (-a' - b'i) = (a - a') + (b - b')i \leftrightarrow (a - a', b - b')$

Producto

- $Z \cdot Z' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + ba'i + bb'i^2$

  $= (aa' \pm bb') + (ab' + ba')i \leftrightarrow (aa' - bb', ab' + ba')$

  - Propiedades del producto:
    - Elemento unidad: $Z_u = 1 + 0i \leftrightarrow (1,0)/|Z_u| = 1$
    - Inverso multiplicativo: $Z^{-1} = \frac{1}{Z}/Z \cdot Z^{-1} = Z_u$

División

- $\frac{Z}{Z'} = \frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{aa'+bb'+(ba'-ab')i}{a'^2+b'^2} \leftrightarrow \left(\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}, \frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}\right)$

Opuesto

- El opuesto de $Z = -Z$

Conjugado

- A Z le corresponde su conjugado $\bar{Z} = a - bi \leftrightarrow (a,-b)$

El sistema de los números complejos hereda propiedades de los números reales como lo son la igualdad y la multiplicación por un escalar:

- Igualdad: $a + bi = a' + b'i \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$
- Multiplicación por un escalar: $\alpha(a + bi) \leftrightarrow \alpha a + \alpha bi$

Sin embargo a diferencia de los números reales, los complejos no son ordenados, supongamos que:

$$i > 0 / \cdot (i)$$

$$i^2 > 0$$

$$-1 > 0 \ \rightarrow\leftarrow$$

O en el caso de que:

$$i < 0/i$$

$$i^2 > 0$$

$$-1 > 0 \ \rightarrow\leftarrow$$

Siendo ambos casos contradictorios, por lo que no se puede definir un orden en los números complejos, es decir, un número complejo no es mayor ni menor que otro.

Si se denota el número complejo $0 + i$ como $(0,1)$ llamado unidad imaginaria y se denota con la letra i.

Demostrar que $i^2 = -1$

$$i^2 = (0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = \big(0(0) - 1(1), 0(1) + 1(0)\big) = (-1,0) = -1$$

El módulo de un número complejo corresponde a la distancia que hay del origen al punto que coincide con la distancia euclídea.

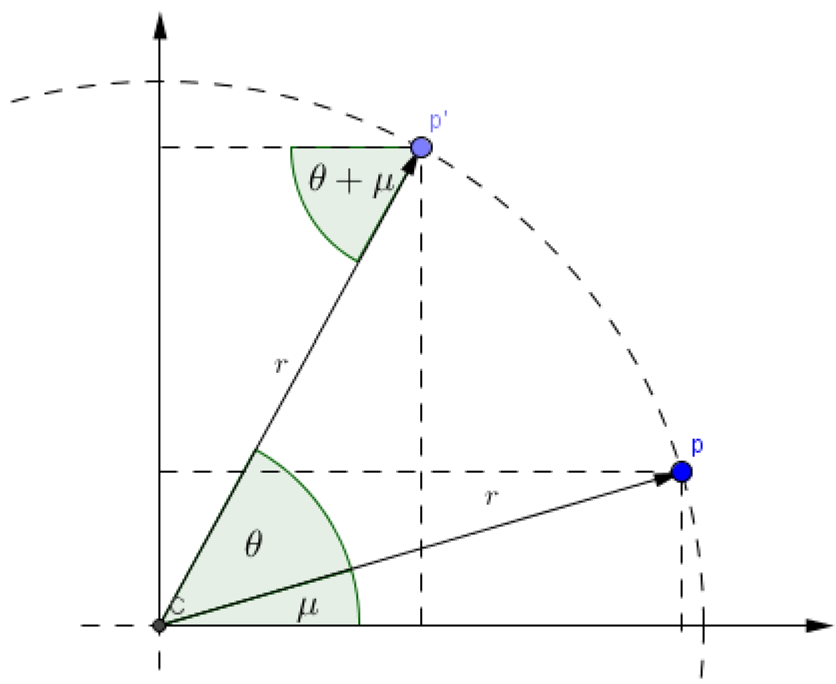
$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento de un complejo ángulo comprendido entre el eje real y el radio del vector.

$$\arg(Z) = (\theta)$$

TRANSFORMACIONES ISOMETRICAS

Ecuación de rotación en el plano cartesiano.



Al rotar un punto $p \in \mathbb{R}^2$, con coordenadas (x, y)con centro de rotación con coordenadas $(0,0)$ y un ángulo de rotación θ, en donde el punto $p' = (x', y')$ corresponde al punto rotado, para determinar x' consideramos la razón trigonométrica coseno del ángulo $(\mu + \theta)$ se obtiene $\frac{x'}{r} = \cos(\mu + \theta)$, en donde, reemplazando y despejando x', se obtiene $x' = \cos(\mu + \theta) \cdot r$, al aplicar la propiedad del coseno de la suma, obtenemos:$x' = r \cdot (\cos\mu cos\theta - sen\mu sen\theta)$eemplazando $cos\mu = \frac{x}{r}$ y $sen\mu = \frac{y}{r}$, da como resultado $x' = r \cdot \left[\left(\frac{x}{r}\right) cos\theta - \left(\frac{y}{r}\right) sen\theta\right]$, sacando el factor común $\frac{1}{r}$, queda finalmente despejado $x' = (x)cos\theta - (y)sen\theta$, análogamente es posible determinar $y' = (x)sen(\theta) + (y)\cos(\theta)$, esta vez utilizando la propiedad del seno de la suma, por lo tanto analíticamente se obtiene:

$$x' = (x)cos\theta - (y)sen\theta \ (3)$$

$$y' = (x)sen(\theta) + (y)\cos(\theta)(4)$$

Si el centro de rotación se sitúa fuera del origen, se debe realizar una composición de transformaciones isométricas, es decir, primero se traslada el centro de rotación al origen, se aplica la rotación al punto $p$para finalmente aplicar la traslación inversa a la aplicada inicialmente.

$$R_{(c,\theta)} = T \circ R \circ T^{-1}$$

Rotar el punto p con coordenadas (x, y) con respecto al centro de rotación (a, b) y ángulo θ. Al trasladar el centro de rotación al origen, se debe realizar una traslación $T^{-1}_{(-a,-b)}$, en donde el centro de rotación quedará en el origen y el punto p en la coordenada $(x - a, y - b)$, utilizando (3), la ubicación de la coordenada con respecto al eje de las abscisas el punto p' estará en:

$$x' = (x - a)cos\theta - (y - b)sen\theta$$

Trasladando respecto a $T_{(a,b)}$, el centro de rotación se trasladará al punto (a, b) y el punto rotadop':

$$x' = a + (x - a)cos\theta - (y - b)sen\theta \ (5)$$

Análogamente la coordenada y':

$$y' = y + (x - a)sen(\theta) + (y - b)\cos(\theta)(6)$$

Casos especiales de rotación (90°,180° y 270°)

Caso 90° utilizando (5).

$$x' = a + (x - a)cos90° - (y - b)sen90°$$
$$x' = a + (x - a)(0) - (y - b)(1)$$
$$x' = a - y + b$$
$$x' = -y + a + b$$

Análogamente utilizando (6). $y' = x - a + b$

$$\therefore R_{(c,90°)} = (-y + a + b, x - a + b)$$

Caso 180° utilizando (5).

$$x' = a + (x - a)cos180° - (y - b)sen180°$$
$$x' = a + (x - a)(-1) - (y - b)(0)$$
$$x' = a + (-x + a)$$
$$x' = -x + 2a$$

Análogamente utilizando (6). $y' = -y + 2b$

$$\therefore R_{(c,180°)} = (-x + 2a, -y + 2b)(7)$$

Si el punto de rotación fuera el origen obtendríamos que la rotación de 180° en el origen es: $(-x, -y)$ por (3) y (4).

Realizando el mismo desarrollo para 270° por (3) y (4) se obtiene:

$$x' = y + a - b$$

$$y' = -x + a + b$$

$$\therefore R_{(c,270°)} = y + a - b, -x + a + b)$$

Si el punto de rotación fuera el origen obtendríamos que la rotación de 270° en el origen es: $(y, -x)$ por (3) y (4).

Ecuación de reflexión axial en el plano cartesiano

Sea la recta l definida convenientemente por la ecuación $Y = \frac{-a}{b}\mathrm{X} - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} \wedge\ Q(X, Y)$, perteneciente a la recta l, además cuyas coordenadas corresponden a la intersección perpendicular del segmento $\overline{pp'}$. Sea k la recta que contiene al segmento $\overline{pp'}$, y perpendicular a la recta l, es decir $m_k m_l = -1$.

Al obtener la ecuación de la recta $k = \frac{b}{a} = \frac{Y-y}{X-x}$, dando como resultado:

$Y = \frac{b}{a}(X - x) + y$, generando así el sistema de ecuación:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{-a}{b}\mathrm{X} - \dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} \\ Y = \dfrac{b}{a}(X - x) + y \end{cases}$$

Aplicando el método de igualación, se obtiene:

$$\frac{-a}{b}\mathrm{X} - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{b}{a}(X - x) + y$$

Al despejar la variable X, se obtiene:

$$X = \frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2}$$

Análogamente se puede obtener el punto $Y = \frac{b^2y - abx - ac}{a^2+b^2}$, en donde se obtienen las coordenadas de $Q(X, Y)$, luego de esto basta recordar que la rotación de 180° con un punto de rotación (a, b), corresponde a:

$$x' = -x + 2a \wedge y' = -y + 2b$$

En donde en este caso el punto de rotación corresponde al punto $Q(X, Y)$, al reemplazar en las formulas obtenemos:

$$x' = -x + 2\left(\frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2}\right) \wedge y' = -y + 2\left(\frac{b^2y - abx - ac}{a^2 + b^2}\right)$$

Al desarrollar, se obtiene que las coordenadas del punto p':

$$p' = \left(-x + 2\left(\frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2}\right), -y + 2\left(\frac{b^2y - abx - ac}{a^2 + b^2}\right)\right)$$

En el caso de que se trate de la recta $y = x \to \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$ la expresión se reduciría a:

$$p' = (y, x)$$

Casos especiales:

Rotar el vector $z = a + bi$, 180° con respecto al origen.

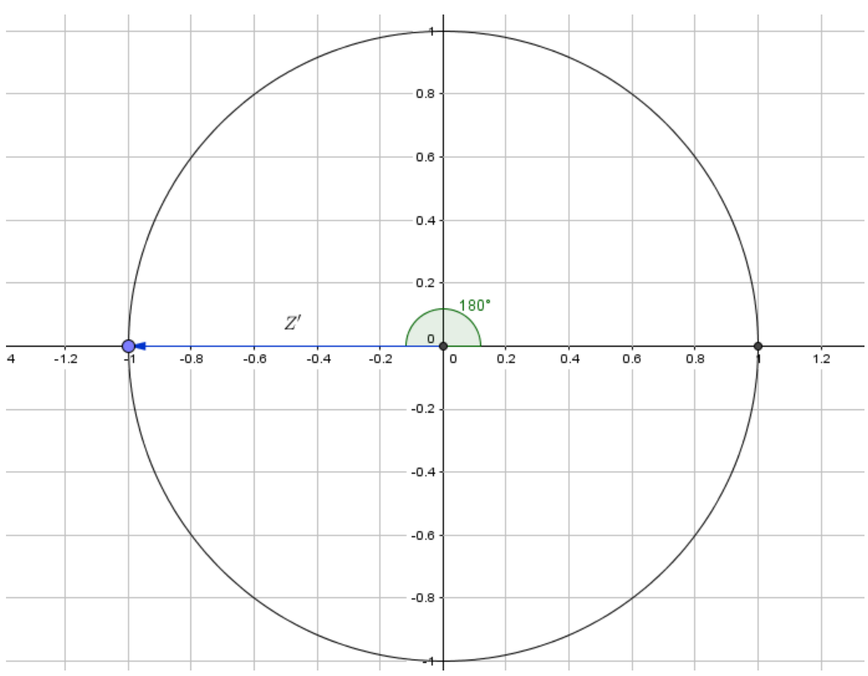
$$R(z) = (a + bi)(a' + b'i)$$

Trigonométricamente:

$$z' = \cos(180°) + isen(180°)$$

$$z' = (-1) + i(0)$$

Geométricamente:



En donde $z' = -1 + 0i$, por lo que al rotar 180° un punto cualquiera corresponde a la multiplicación:

$$R(z) = (a + bi)(-1 + 0i) \text{ /Producto de complejos}$$

$$R(z) = (-a - bi)$$

Trigonométricamente:

$$z' = \cos(180°) + isen(180°)$$

$$z' = (-1) + i(0)$$

Lo cual corresponde al opuesto de un complejo: $z = -z$

Rotar el vector $z = a + bi$, 90° con respecto al origen.

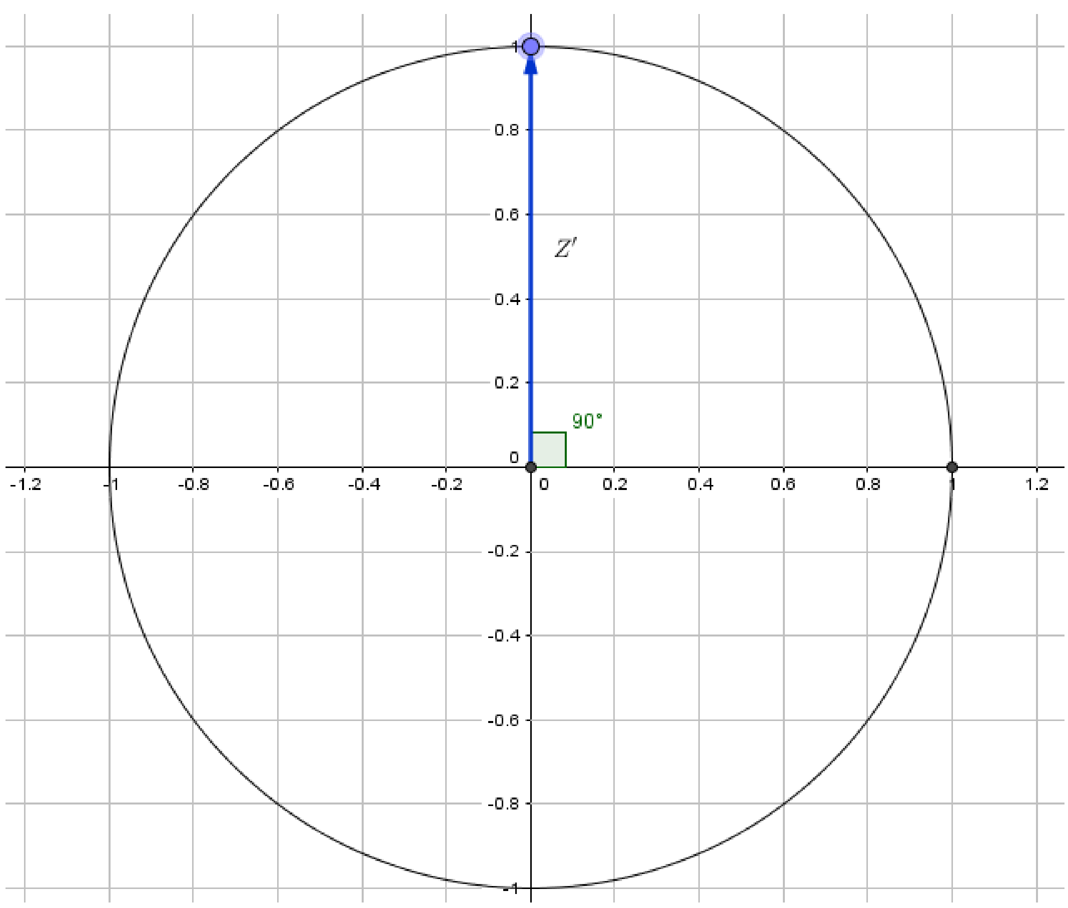
$$R(z) = (a + bi)(a' + b'i)$$

Trigonométricamente:

$$z' = \cos(90°) + isen(90°)$$

$$z' = (0) + i(1)$$

Geométricamente:



En donde $z' = 0 + i$, por lo que al rotar 90° un punto cualquiera corresponde a la multiplicación:

$$R(z) = (a + bi)(0 + i) \text{ /Producto de complejos}$$

$$R(z) = (-b + ai)$$

GRUPO DE ENFOQUE

En base a la entrevista de foco, inicialmente se explicitó los aprendizajes necesarios para comprender de mejor manera el diseño didáctico, para optimizar el flujo de la validación del instrumento, ya que, no se pretendía enseñarles las transformaciones isométricas, sino que enjuiciarán la estructura de la propuesta.

5: Esta completa, puesto que va por parte preguntando.

1: porque va por parte desglosando, desde lo más general a lo más específico.

M: Recuerden que estas preguntas, deben ser guiadas por el docente, ya que el diseño está enfocado en la teoría de Ausubel.

M: A partir de estas preguntas se define traslación como (…).

2: La pregunta ¿para qué sirve?, ¿guarda relación para el que sirve de forma matemática o cotidiana?, el estudiante podría confundir si las transformaciones isométricas guardan relación con lo cotidiano, ya que, podría decir: “no ocupo esto cuando quiero trasladar una canastita”, por ende la pregunta debería ir dirigida a: “¿en qué contexto social, esto me permite resolver este problema?”.

1: Además que la pregunta es muy amplia, ya que, el estudiante podría confundir respecto a donde va dirigida.

2: Creo que sería bueno buscar alguna aplicación social.

M: El psicológico Ausubel, habla del conocimiento en sí.

M: La definición (…)

3: Sí, Argand fue el que descubrió este plano, en el colegio Bicentario de la Católica se enseña esto.

M: Se enuncia (…)

4: Sí, no hay problema si saben ya sumar vectores, no habrá problema en las traslaciones, ya que no varían mucho respecto a cómo se realizan en el plano cartesiano.

M: También se puede realizar en proceso inverso, es decir, dada una traslación, con que vector traslación se llegó a ese resultado, dándole aplicación también a la resta de los números complejos, y como se vio anteriormente con la traslación se le da aplicación a la suma de los números complejos.

4: Ah, sí

M: Yo cuando realice mi práctica, me tomo ver como se enseñaba las transformaciones isométricas, y me llamo la atención cual era el procedimiento para realizar las rotaciones, primero que todo se enseñaban las rotaciones de 90°, 180°, 270° y 360, y se realizaba una tabla, en donde, se decía por ejemplo una rotación de 90° corresponde a (-y,x), etc.

4: Ah, sí.

M: La idea que tiene esta propuesta, es crear esa tabla, o realizar cualquier rotación con una herramienta algebraica eficaz.

2: No, si entiendo eso, pero ahí estas como relacionando el plano complejo con el plano cartesiano, y ahí pueden haber complicaciones. Si yo trabajo en el plano de los complejos puedo asociarlo como particularidad en el plano cartesiano, ahora no se si lo que se cumple en el plano de los complejos siempre se puede asociar al cartesiano. Si R^2 es isomorfo a los complejos no hay drama.

M: de hecho, sí, una transformación en el plano es una biyección de C en C

2: tu cuando construyes el plano de Argand, como que giras el plano, al igual que las coordenadas polares, a través de los senos y cosenos. Y como caso particular al rotar 90° se nota al tiro que corresponde a (-y,x)

M: definir lo que es rotación…

1: qué pasa si multiplico un número complejo con su conjugado.

M: esto corresponde (…)

2: Tu cuando rotas, es más sencillo verlo con las coordenadas polares

M: Sí, de hecho toda esta teoría está sustentada en las coordenadas polares, pero, en la escuela no se ve, por ende no tiene sentido enseñarlo de esa forma, por eso se recurre a los vectores, y si no lo saben no se considera aprendizaje previo.

1: No entiendo, en el sentido de cómo al multiplicar dos vectores generó una rotación.

M: si bien, en el plano argand se genera ángulos, pero en definitiva lo que uno está haciendo es una multiplicación de números complejos. A través de lo que es el producto geométrico, que la multiplicación de dos números complejos corresponde a la multiplicación de los módulos y la suma de sus amplitudes. Si quiero hacer una rotación de 180° (…)

4: hay que multiplicar por (-1).

M: En el plano complejo:

5: -1+0i

M: ¿qué operación describe este cambio?. Multiplicación

3: creo que no será tan fácil que digan -1+0i.

M: (se sigue explicitando el diseño)

2: Me cuesta entender, porque una multiplicación de dos números complejos, siempre es una rotación, ¿siempre funciona?

M: Sí, ya que está sustentado bajo la demostración del producto en las coordenadas polares.

M: según una rotación fuera del origen, ¿cómo se haría?

2: se traslada el punto al origen.

M: exacto, realizando una composición de transformaciones isométricas.

M: Reflexión central, que corresponde a una rotación de 180°, inducir al estudiante a esto, y fuera del origen.

4: está bien estructurado, ya que, como se enseño rotación anteriormente y ahora lo vinculan con reflexión central, se entenderá mejor.

M: Reflexión Axial: acotarlo al eje real y eje imaginario.

5: esta correcto, y ordenado, haciendo surgir que los estudiantes, comprendan la aplicación de los números complejos.

M: ¿Alguna acotación?, ¿pregunta?, ¿observación?, ¿consideran que falta alguna aplicación de los números complejos que no se vea en este diseño?

1: la división de los complejos

M: eso está relacionado con la homotecia, la cual no tiene relación con las transformaciones isométricas.

M: ¿alguna sugerencia?

1,2,3,4,5: No

2: de hecho esto es interesante, me llama la atención, si el tipo está captando esto de las rotaciones, cuando tu mas adelante tienes polinomios con soluciones complejas, es más fácil entender los números complejos y sus aplicaciones. Logrando extenderlo a un proceso más abstracto, y tiene una visión más amplia del conocimiento matemático. Lo encuentro interesante.

VALIDACIÓN DE DISEÑO DIDÁCTICO EXPERTO N°1

NOMBRE DEL ESTUDIO:

PROPUESTA DE UN DISEÑO DIDÁCTICO QUE COMPLETE A qué se refieren con complete?? Que mejore, que aporte el uso de números complejos a la enseñanza de las trans…) LA ENSEÑANZA DE LAS TRANSFORMACIONES ISOMETRICAS A TRAVES DEL USO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS. BASADO EN LA TEORIA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE DAVID AUSUBEL.

Integrantes:

Gino Fulvio Mangili Cuadra.

Aldo Sebastián Sánchez Barros.

Profesor guía:

Pablo Salvador Figueroa Salgado.

PROPOSITO DE LA TESIS:

Se evidencia en el currículum nacional una intención de integrar los conceptos matemáticos enseñados durante toda la etapa escolar, aun así esto no se ve plasmado tanto en los planes y programas como en los textos escolares existiendo una desarticulación de los contenidos matemáticos separándolo en cuatro ejes fundamentales: Números, Algebra, Geometría, Datos y azar

En lo que respecta al eje de la geometría, específicamente en el estudio de las transformaciones isométricas, tal como lo estructura el currículum nacional, en octavo básico involucra construcciones con regla y compas, en primero medio se lleva al plano cartesiano, pero solo se abordan las traslaciones, simetrías axiales acotadas a los ejes coordenadas y simetrías centrales respecto del origen, además de las rotaciones solo en ángulos de 90°, 180°, 270° y 360° con respecto al origen.

Hasta este nivel el tema se ha visto solo como operaciones en las coordenadas de un punto para generar su imagen, para esta investigación esta forma del saber de las transformaciones isométricas se considerará incompleta, puesto que se limita a casos puntuales, no habiendo un proceso de algebrización que permita adquirir una herramienta algebraica eficaz para realizar cualquier transformación dadas las coordenadas cartesianas de los puntos.

Por otro lado se evidencia en tercer año medio el trabajo de los números complejos, el cual es visto en base a su operatoria, con el fin de elaborar técnicas para resolver ejercicios repetitivos, junto con esto se establece como una herramienta ineficaz para la resolución de problemas, descontextualizando así el contenido.

El estudio de los números complejos puede ser enfocado a la tarea de completar el concepto de transformación isométrica en la escuela, de modo de establecerse como una herramienta efectiva para realizar cualquier transformación isométrica. De hecho, la traslación está relacionada con la suma de complejos, la rotación con la multiplicación y la reflexión con una composición entre ellas.

En síntesis, el fin de esta investigación es diseñar una propuesta didáctica sustentada en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, la cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas.

OBJETIVO GENERAL:

Elaborar un diseño didáctico el cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas a través de los números complejos, con el fin de guiar el proceso de enseñanza, basándose en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.

OBJETIVOS ESPECIFICOS A LOS CUALES APUNTA EL DISEÑO DIDÁCTICO:

Este diseño didáctico busca generar un material potencialmente significativo para el uso del docente, el cual genere una completitud de la enseñanza de las transformaciones isométricas en la escuela

Estimado/a Especialista:

Nombre:

En el marco de nuestra investigación y considerando su expertiz en ésta materia, tenemos a bien solicitarle pueda emitir su juicio de experto/a, respecto del instrumento que le presentamos. Junto con agradecer su buena disposición, le pedimos pueda hacernos llegar su juicio mediante e-mail: gino.mangili@gmail.com

CRITERIOS DE EVALUACION	OBSERVACIONES

Estructura	Justificar márgenes. Podría usar formato de planificación de clase a clase.
Relación con los objetivos específicos señalados	Me preocupa más el grado de cohesión que tiene el diseño de las clases con el marco teórico empleado.
Ortografía	Mejorar redacción y ortografía de todo el escrito.

DISEÑO DIDÁCTICO:

Justificación:

Presentación:

Esta guía para el profesor ha sido elaborada con el propósito de apoyar el quehacer docente a través de un diseño didáctico que apoye el proceso de enseñanza de las transformaciones isométricas , buscando completar su enseñanza a través de los números complejos basándonos en la teoría del aprendizaje significativo, tema para el cual no existe material didáctico disponible.

Los contenidos y actividades que encontrarán en esta propuesta serán:

- Conocimientos previos:
    - Números complejos.
    - Trasformaciones isométricas.
- Movimientos rígidos en el plano de los complejos:
    - Traslación
    - Rotación
    - Reflexión central
    - Reflexión axial

Se debe tener en cuenta que el docente debe promover una participación activa del estudiante, exponiendo el conocimiento y generando instancia de pregunta - respuesta. A continuación se presenta el diseño didáctico que consta de seis clases principalmente expositivas con una evaluación final.

Contradice la propuesta anterior de que se promueve la participación del estudiante, ya que una clase expositiva habla de la exposición del profesor, dejándolo de protagonista de ella.

CLASE N°1

Objetivo:

- Conocer que las traslaciones no sólo opera en el plano cartesiano, sino también en el plano Argand.

Aprendizaje Esperado:

- Comprende la relación que existe entre la suma de los números complejos con las traslaciones.

Inicio:

INICIO:

Para averiguar los conocimientos previos que poseen los alumnos se sugiere utilizar breves preguntas, como por ejemplo:

- ¿Qué conocen por transformaciones isométricas?
- ¿Qué características poseen?
- ¿Qué tipo de transformaciones isométricas conocen?
- ¿En qué se diferencian unas con otras?

Una vez que se conocen los conocimientos previos del alumno de las transformaciones isométricas y se hayan reforzado las debilidades encontradas. Se comienza a explicar el tema comenzando con el concepto de traslación.

DESARROLLO:

Traslación: Son aquellas isometrías que permiten desplazar en línea recta cualquier punto en el plano. Si denotamos un punto$p$ con coordenadas (x, y) y su imagen p' como (x', y') y traslación$\vec{T}_{(a,b)}$, para significar que trasladamos "a" unidades en dirección horizontal y "b" unidades en dirección vertical, generando la ecuación de traslación.

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

- ¿Para qué sirve?
- ¿Es posible "trasladar" figuras geométricas?

La definición sugerida se nutra con las respuestas de los alumnos para consensuar una definición adecuada para los estudiantes.

Luego de esto se busca (Cómo se realiza esa búsqueda??) que los estudiantes recuerden que el plano cartesiano no es el único existente, con el fin de tomar los aprendizajes previos que poseen del plano de Argand, para así vincularlo con las transformaciones isométricas.

- ¿El plano cartesiano es el único existente?(Si los estudiantes no)
- ¿En el plano Argand qué números se encuentran?

-Se enuncia que se puede efectuar las traslaciones en el plano de los complejos al igual que en el plano cartesiano, lo que es equivalente a sumar número complejos.

(¿Cómo se puede lograr un aprendizaje significativo si ellos no son participes de la construcción del conocimiento? Dentro del contexto de describe una clase tradicional, donde el profesor dice cómo se deben hacer las cosas).

Una traslación en el plano de los complejos al igual que en el plano cartesiano corresponde a un desplazamiento en línea recta a cualquier punto en el plano, matemáticamente un punto $z \in \mathbb{C}$de la forma, $z = a + bi$ y un vector traslación $\vec{T}$ que corresponde a z_0 , la traslación para el vector $\vec{T}$ corresponde a la función

$$T(z) = z + z'$$

$$T(z) = a + a' + i(b + b')$$

Correspondiente al par ordenado $(a + a', b + b')$.

El alumno debe realizar los ejercicios 1 y 2 de la guía.

CIERRE:

Establecida la definición en el plano de los complejos en lo que respecta a las traslaciones, la evaluación formativa consiste en realizar el ejercicio 3 de la guía, además se invita al docente (Si quiere hacer partícipe al estudiante, podría ser él quien realice este resumen) generar un resumen de los visto en la clase.

PROPÓSITO DE LA CLASE N°1:

INICIO: conocer cuáles son los conocimientos previos que posee el alumno respecto de las transformaciones isométricas

DESARROLLO: busca (Cómo se efectúa la búsqueda?) recordar el conocimiento de las traslaciones isométricas en el plano cartesiano, para relacionarlo en el plano de Argand.

CIERRE: se genera una evaluación formativa la cual contemple todos los conocimientos vistos hasta el momento.

ACTIVIDAD N°1: A partir de la generalización expuesta en el desarrollo, el estudiante deberá llevarlo a un caso en particular aplicando la noción de suma de los números complejos

ACTIVIDAD N°2: Generar el proceso inverso de la Actividad n°1

ACTIVIDAD N°3: tiene como objetivo que el estudiante no solo puede trasladar figuras geométricas en el plano cartesiano, sino que también pueden ser llevadas al plano complejo. Adicionalmente recuerda la idea de que la suma de los vectores traslación es igual a cero, lo que implica que la figura resultante será igual que la figura inicial. Junto con esto le otorga una aplicación repetitiva a la traslación, lo cual visto desde la teoría de Ausubel busca mejorar la retención en el alumno.

CLASE N°2

Objetivo:

- Construir una generalización algebraica de las rotaciones de 90°, 180°, 270° y 360° en el plano complejo.

Aprendizaje Esperado:

- Conocer la relación existente entre el producto geométrico y las rotaciones en el plano complejo.

INICIO:

- ¿Qué son las rotaciones?
- ¿Para qué sirve?

Rotación: Una rotación es aquella isometría que mueve un objeto respecto a un punto fijo y para poder aplicar una rotación es necesario conocer el ángulo de rotación (θ), el punto (c) denominado centro de rotación, y finalmente el sentido de rotación.

DESARROLLO:

-En base a los conocimientos previos de los estudiantes de las rotaciones y la definición. Al igual que las traslaciones las rotaciones también pueden ser vistas desde el plano de los complejos.

Recordar la definición del producto geométrico de dos vectores tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

- Tomando en cuenta cualquier punto en la recta, realice una rotación de 180° en la recta. ¿qué operación describe este cambio?

Al percatarse el estudiante que una rotación de 180° en la recta, corresponde a multiplicar por (-1), esto es equivalente a expresarlo como $x \cdot (-1)$.

- ¿Qué ocurre si hablásemos en el plano de los complejos?, si quisiésemos rotar un punto $a + bi$ en 180°.
- ¿Qué operación describe este cambio?
- ¿A qué número complejo es equivalente?, ¿qué módulo tiene este vector y que ángulo genera en el eje real?

Por ende si se quisiese realizar una rotación de 90°, sabiendo que realizar una rotación de 180° corresponde realizar dos rotaciones de 90°, estamos buscando que al multiplicar dos números de cómo resultado (-1).

$$(X) \cdot (X) = -1$$

$$X^2 = -1$$

$$X = \sqrt{-1}$$

$$X = i$$

$$\therefore X = 0 + i$$

- ¿Funciona? ¿por qué?
- ¿Qué coordenadas tendría un punto cualquiera al ser rotado 90°?
- ¿Por qué una rotación de 90° es $(y, -x)$?

CIERRE (Esta clase invita más a la reflexión.**):** una vez asimilado el concepto de reflexión en el plano complejo se busca que se elabore una tabla la cual generalice de manera algebraica la rotación de un punto según los ángulos de 90º, 180º, 270º y 360º

- ¿Qué rotación hay entre un punto y su opuesto?
- ¿Se podría hacer una generalización, para los ángulos 90°,180°,270° y 360°? (elabore un cuadro).

PROPOSITO DE LA CLASE N°2

INICIO:

Conocer cuáles son los conocimientos previos que posee el alumno respecto de las rotaciones en el plano cartesiano.

DESARROLLO:

El estudiante a través de los conocimientos aprendidos con anterioridad sobre la rotación de 180° en el eje real, prueba si se cumple de igual manera en el plano complejo, lo que en este caso es multiplicar por (-1). Para que luego el estudiante comprenda que el número (-1) debe ser expresado como número complejo $-1 + 0i$. Además el estudiante al identificar que multiplicar cualquier número complejo por $0 + i$ da como resultado una rotación de 90°, busca el porqué ocurre esto, es entonces donde relaciona que el modulo del vector por el cual se debe multiplicar el vector a rotar debe ser 1 y la amplitud que genera con el eje real es de 90°.

CIERRE:

Ahora que el alumno conoce como se realiza una rotación de 90° y de 180° podrá generar (a través de dichos conocimientos previos) rotaciones de los ángulos 270° y 360°.

CLASE N°3

Objetivo:

- Realizar cualquier rotación en el plano complejo.
- Establecer una composición de transformaciones isométricas (traslación y rotación) para las rotaciones fuera del origen.

Aprendizaje Esperado:

- Conocer la relación existente entre el producto geométrico y las rotaciones en el plano complejo, que sirve para todo ángulo.

INICIO:(materiales calculadora científica)

Se recuerda la definición de rotación e interpretación geométrica del producto de vectores. Tomando la idea de la clase pasada una rotación de 90° y 180° correspondía a multiplicar por un vector z' de la forma $a' + b'i$ que poseía módulo 1 y ángulo 90° y 180° respectivamente respecto al eje real, es decir:

- La rotación de 90°: $(a + bi) \cdot (0 + i)$
- La rotación de 180°: $(a + bi) \cdot (-1 + 0i)$

DESARROLLO:

Pero esto no satisface la necesidad de realizar una rotación respecto a cualquier ángulo que se desee. Por lo tanto para realizar una rotación respecto al ángulo θ y centro en el origen se propone la aplicación:

$$r(z) = z \cdot z'$$

Que corresponde a la multiplicación del vector a rotar (cuyo argumento es α) y el nuevo vector, el cual debe ser de módulo 1 y ángulo θ.

- $arg[r(z)] = \alpha + \theta$
- $|r(z)| = |z|$

- ¿Cómo se podría hacer una rotación de 45°?

Las coordenadas de este vector $a' + b'i$ para conocerlas hay que recurrir a trigonometría, en donde:

$$\cos\beta = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

- ¿Cuáles son las coordenadas del vector que genera un ángulo 45° con respecto al eje real con módulo 1? ¿a qué número complejo es equivalente?
- Al multiplicar $3 + 4i$ por el número complejo resultante. ¿Corresponde a una rotación de 45°? ¿por qué?
- ¿Cómo rotaría 135°?
- Ejercicio 4 guía.

A partir de este momento, el estudiante es capaz de realizar cualquier rotación.

CIERRE: (Todo lo anterior es exposición del profesor Con un grupo curso ideal posiblemente lograría complementar los conocimientos de las transformaciones isométricas, pero la dinámica no se justifica desde el aprendizaje significativo de ausubel. **)**

- Rotación fuera del origen. (pregunta guía)
- Ejercicios guía

PROPOSITO DE LA CLASE N°3

INICIO:

Recordar los aprendizajes vistos la clase anterior, con el fin de introducir la noción de rotación para cualquier ángulo.

DESARROLLO:

El estudiante a partir de los conocimientos previamente adquiridos pueda establecer de manera visual cómo será el vector rotación, que en este caso se debe cumplir que tenga módulo 1 y amplitud 45° y que encuentren estas coordenadas a partir de razones trigonométricas ya conocidas y que lo relacione con el número complejo equivalente.

Luego se pretende validar la propuesta establecida anteriormente de forma visual, con el ejercicio 4 propuesto en la guía.

CIERRE:

Finalmente el estudiante ya comprende (Quién le asegura que ya ha comprendido.) la rotación en el origen, pero no la fuera de este aun así conoce la traslación vista en la primera clase, por lo que a través de una composición de transformaciones isométricas tiene las herramientas para relacionar estos conceptos y trasladar el centro de rotación al origen para luego efectuar la rotación deseada para luego realizar la traslación inversa a la hecha inicialmente, obteniendo el vector final.

ACTIVIDAD N°6:

A través de la práctica reforzar los conocimientos aprendidos.

CLASE N°4

Objetivo:

- Establecer el procedimiento para realizar cualquier reflexión central, respecto a cualquier punto, a través de una composición de transformaciones isométricas (traslación y rotación) para reflexiones centrales, en donde su punto de reflexión no sea el origen.

Aprendizaje Esperado:

- Comprender la relación que existe entre una reflexión central y la rotación de 180º.

INICIO:

¿qué es? (Qué cosa??)

- ¿qué tipos hay?(de qué?)

Reflexión central: Es aquella isometría en la que un punto z es transformado en otro punto z', a través de un centro O (de simetría) de tal manera que el segmento $\overline{zz'}$tiene a O como punto medio.

DESARROLLO:

Realice una reflexión central respecto al origen al punto al punto 3 + 2i gráficamente.

- ¿Existe otra isometría, la cuál de cómo resultado el mismo punto?
- ¿Toda reflexión central es una rotación de 180°? ¿por qué?
- Reflexión central fuera del origen (ejercicio).

CIERRE: Evaluación formativa.

Se le presentara al alumno una guía impresa en la cual se presentaran (resaltar) 4 planos de Argand, en donde ellos tendrán que realizar cada una de las transformaciones isométricas vistas hasta el momento, siendo estas: traslación, rotación (tanto en los ángulos de 90º, 180º, 270º y 360º como para cualquier ángulo) y reflexión central. Con el fin de que pueda apreciar visualmente las transformaciones isométricas.

PROPOSITO DE LA CLASE N°4

INICIO:

Reforzar los conocimientos de la reflexión central que ya conocían en el plano cartesiano y relacionarlo con el plano complejo, y con las transformaciones isométricas vistas anteriormente.

DESARROLLO:

A partir de la visualización geométrica de la reflexión axial del punto $3 + 2i$, el alumno relacionará que la reflexión axial es lo mismo que efectuar una rotación de 180° para cualquier punto.

CIERRE:

Generar una evaluación en medio de la enseñanza con el fin de que el alumno pueda a través de la práctica trabajar los conocimientos y también conocer en que se equivocó a través de una próxima retroalimentación del docente.

CLASE N°5

Objetivos:

- Establecer un procedimiento que permita realizar cualquier reflexión axial, con respecto a ambos ejes.

Aprendizajes Esperados:

- Comprender la relación que existe entre una reflexión axial y la rotación de 180º.

INICIO:

Reflexión Axial: el estudio de la reflexión axial se centrara solo entorno a los ejes x e y.

- ¿qué es?
- ¿qué tipos hay? (completar)

DESARROLLO:

Reflexión axial: Es aquella isometría en la que un punto z es transformado en otro punto z', a través de una recta l (de simetría) de tal manera que el segmento $\overline{zz'}$tiene a la recta l como mediatriz.

Conociendo la definición anterior se propone generar el punto reflejado de la siguiente manera: a través de una composición de transformaciones isométricas primero se traslada el punto para que coincida con el eje imaginario para luego generar una rotación de 180° respecto al origen, para finalmente volver aplicar la traslación inversa

Sea l coincidente con el eje x, aplique una reflexión axial del punto $z = 3 - 6i$.

-¿A qué punto corresponde la reflexión axial del punto z?

-¿Cuál es el conjugado de z? ¿Coincide con la reflexión axial? ¿Toda reflexión axial con respecto al eje x corresponde al conjugado del número?

-¿qué sucede si l es coincidente con el eje y?

CIERRE:

- **Prueba final (**para el caso de su investigación es un test que pueden contrastar con el diagnóstico para evidenciar mejoras.)

PROPOSITO DE LA CLASE N°5:

INICIO:

Reforzar los conocimientos de la reflexión axial que ya conocían en el plano cartesiano y relacionarlo con el plano complejo, y con las transformaciones isométricas vistas anteriormente.

DESARROLLO:

Relacionar la reflexión axial con el concepto ya conocido del conjugado de un número complejo.

Establecer un procedimiento que permita realizar una reflexión axial con respecto al eje y, según lo aprendido con respecto al eje x.

CIERRE:

Tiene como objetivo el reconocer lo que los alumnos han aprendido generando una retroalimentación para ellos, junto con esto realizar una retroalimentación al diseño didáctico en sí mismo, ya que en base a los resultados obtenidos se podrá modificar este diseño

EVALUACIÓN CLASE A CLASE

NÚMERO DE LA CLASE	¿LA CLASE ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
1			
2			
3			
4			
5			

GUÍA DE PRÁCTICA PARA EL ALUMNO

NOMBRE:

CURSO:

FECHA:

1.- Si se tiene el vector $\vec{p} = 2 + 2i$ trasládelo según el vector traslación $\vec{q} = 9 + 6i$.

2.- al vector $\vec{e} = 4 + 5i$ se le aplicó una traslación dando el vector $\vec{u} = 7 + i$ como resultante, ¿cuál es el vector traslación?

3.- Sea el triángulo ABC, con vértices en A= $(3 + 3i)$, B= $(-1 - i)$ y el punto C= $(7 + i)$.

a) Traslade el triángulo ABC según el vector traslación $\vec{l} = -3 + 2i$

b) La figura resultante trasládelo según el vector traslación $\vec{k} = 5 - 5i$

c) La figura resultante trasládelo según el vector traslación $\vec{\tilde{n}} = -2 + 3i$

d) ¿Existe un único vector que genere la misma traslación que las tres anteriores?

4.- Si se tiene el vector $\vec{y} = -3 - 6i$ rótelo 33º con centro en el origen.

5.- Si se tiene el vector $\vec{b} = -3 - 6i$ rótelo 33º con centro en el punto $m = 3 + 6i$

6.- Si se tiene el triángulo PQR con vértices en $P = (1 + 5i), Q = (6 - 3i)$ y $R = (-5 - 4i)$, realice una rotación de 60° con respecto al origen.

7. Si se tiene un triángulo MNO con vértice $M = (-3 + 2i), N = (-7 + 4i)$ y O=$(-5 + 7i)$, realice una reflexión central con respecto al origen.

EVALUACIÓN DE LA GUIA DE PRÁCTICA PARA EL ALUMNO

NÚMERO DE LA ACTIVIDAD	¿LA ACTIVIDAD ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

PRUEBA FINAL

NOMBRE:

CURSO:

FECHA:

1.- Si se tiene un triángulo KEL con vértice $K = (-3 + 2i), E = (-7 + 4i)$ y L=$(-5 + 0i)$, realice una reflexión axial con respecto al eje real.

2.- Si se tiene el punto $W = -5 + 3i$ realice dos transformaciones isométricas diferentes tal que el resultado de esta sea el punto $I = 5 - 6i$.

3.- ¿A qué valor pertenece la expresión i^{83}?

* Recuerde que $i \cdot i = i^2$

- ¿A qué ángulo corresponde esta rotación?

EVALUACIÓN DE EVALUACION FINAL

<table>
<tr><td rowspan="2">NÚMERO DE LA PREGUNTA</td><td colspan="2">¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?</td><td rowspan="2">OBSERVACIONES</td></tr>
<tr><td>SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

VALIDACIÓN DE DISEÑO DIDÁCTICO EXPERTO N°2

NOMBRE DEL ESTUDIO:

PROPUESTA DE UN DISEÑO DIDÁCTICO QUE COMPLETE LA ENSEÑANZA DE LAS TRANSFORMACIONES ISOMETRICAS A TRAVES DEL USO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS. BASADO EN LA TEORIA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE DAVID AUSUBEL.

Integrantes:

Gino Fulvio Mangili Cuadra.

Aldo Sebastián Sánchez Barros.

Profesor guía:

Pablo Salvador Figueroa Salgado.

PROPOSITO DE LA TESIS:

Se evidencia en el currículum nacional una intención de integrar los conceptos matemáticos enseñados durante toda la etapa escolar, aun así esto no se ve plasmado tanto en los planes y programas como en los textos escolares existiendo una desarticulación de los contenidos matemáticos separándolo en cuatro ejes fundamentales: Números, Algebra, Geometría, Datos y azar

En lo que respecta al eje de la geometría, específicamente en el estudio de las transformaciones isométricas, tal como lo estructura el currículum nacional, en octavo básico involucra construcciones con regla y compas, en primero medio se lleva al plano cartesiano, pero solo se abordan las traslaciones, simetrías axiales acotadas a los ejes coordenadas y simetrías centrales respecto del origen, además de las rotaciones solo en ángulos de 90°, 180°, 270° y 360° con respecto al origen.

Hasta este nivel el tema se ha visto solo como operaciones en las coordenadas de un punto para generar su imagen, para (.Para) esta investigación esta forma del saber de las transformaciones isométricas se considerará incompleta, puesto que se limita a casos puntuales, no habiendo un proceso de algebrización que permita adquirir una herramienta algebraica eficaz para realizar cualquier transformación dadas las coordenadas cartesianas de los puntos.

Por otro lado se evidencia en tercer año medio el trabajo de los números complejos, el cual es visto en base a su operatoria con el fin de elaborar técnicas para resolver ejercicios repetitivos, junto con esto se establece como una herramienta ineficaz para la resolución de problemas, descontextualizando así el contenido.

El estudio de los números complejos puede ser enfocado (hacia la) la tarea de completar el concepto de transformación isométrica en la escuela, de modo de establecerse como una herramienta efectiva para realizar cualquier transformación isométrica. De hecho, la traslación está relacionada con la suma de complejos, la rotación con la multiplicación y la reflexión con una composición entre ellas. Dos rotaciones

En síntesis, el fin de esta investigación es diseñar una propuesta didáctica sustentada en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, la cual complete la enseñanza de las transformaciones isométricas.

OBJETIVO GENERAL:

Elaborar un diseño didáctico el cual (que) complete la enseñanza de las transformaciones isométricas a través de los números complejos, con el fin de guiar el proceso de enseñanza, basándose en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.

OBJETIVOS ESPECIFICOS A LOS CUALES APUNTA EL DISEÑO DIDÁCTICO:

Este diseño didáctico busca generar un material potencialmente significativo para el uso del docente, el cual genere una completitud de la enseñanza de las transformaciones isométricas en la escuela

Estimado/a Especialista:

Nombre:

En el marco de nuestra investigación y considerando su expertiz en ésta materia, tenemos a bien solicitarle pueda emitir su juicio de experto/a, respecto del instrumento que le presentamos. Junto con agradecer su buena disposición, le pedimos pueda hacernos llegar su juicio mediante e-mail: gino.mangili@gmail.com

CRITERIOS DE EVALUACION	OBSERVACIONES
Estructura	

Relación con los objetivos específicos señalados bien	
Ortografía Redacción	

DISEÑO DIDÁCTICO:

Justificación:

Presentación:

Esta guía para el profesor ha sido elaborada con el propósito de apoyar el quehacer docente a través de un diseño didáctico que apoye el proceso de enseñanza de las transformaciones isométricas, buscando completar su enseñanza a través de los números complejos basándonos en la teoría del aprendizaje significativo, tema para el cual no existe material didáctico disponible.

Los contenidos y actividades que encontrarán en esta propuesta serán:

- Conocimientos previos:
  - Números complejos.
  - Trasformaciones isométricas.
- Movimientos rígidos en el plano de los complejos:
  - Traslación
  - Rotación
  - Reflexión central
  - Reflexión axial

Se debe tener en cuenta que el docente debe promover una participación activa del estudiante, exponiendo el conocimiento y generando instancia de pregunta - respuesta. A continuación se presenta el diseño didáctico que consta de seis clases principalmente expositivas con una evaluación final.

CLASE N°1

Objetivo:

- Conocer que las traslaciones no sólo opera en el plano cartesiano, sino también en el plano Argand.(son distintas maneras de representar el mismo plano).

Aprendizaje Esperado:

- Comprende la relación que existe entre la suma de los números complejos con

Inicio:

INICIO:

Para averiguar los conocimientos previos que poseen los alumnos se sugiere utilizar breves preguntas, como por ejemplo:

- ¿Qué conocen por transformaciones isométricas?
- ¿Qué características poseen?
- ¿Qué tipo de transformaciones isométricas conocen?
- ¿En qué se diferencian unas con otras?(bien)

Una vez que se conocen los conocimientos previos del alumno de las transformaciones isométricas y se hayan reforzado las debilidades encontradas. Se comienza a explicar el tema comenzando con el concepto de traslación.

DESARROLLO:

Traslación: Son aquellas isometrías que permiten desplazar en línea recta cualquier punto en el plano. Si denotamos un punto p con coordenadas (x, y) y su imagen p' como (x', y') y traslación$\vec{T}_{(a,b)}$, para significar que trasladamos "a" unidades en dirección horizontal y "b" unidades en dirección vertical, generando la ecuación de traslación.

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

- ¿Para qué sirve?
- ¿Es posible "trasladar" figuras geométricas?

La definición sugerida se nutra (e) con las respuestas de los alumnos para consensuar una definición adecuada para los estudiantes.

Luego de esto se busca que los estudiantes recuerden que el plano cartesiano no es el único existente, con el fin de tomar los aprendizajes previos que poseen del plano de Argand(son representaciones distintas), para así vincularlo con las transformaciones isométricas.

- ¿El plano cartesiano es el único existente?
- ¿En el plano Argand qué números se encuentran?

-Se enuncia que se puede efectuar las traslaciones en el plano de los complejos al igual que en el plano cartesiano, lo que es equivalente a sumar número complejos.

Una traslación en el plano de los complejos al igual que en el plano cartesiano corresponde a un desplazamiento en línea recta a cualquier punto en el plano, matemáticamente un punto $z \in \mathbb{C}$ de la forma, $z = a + bi$ y un vector traslación $\vec{T}$ que corresponde a z_0 , la traslación para el vector $\vec{T}$ corresponde a la función

$$T(z) = z + z'$$

$$T(z) = a + a' + i(b + b')$$

Correspondiente al par ordenado $(a + a', b + b')$.

El alumno debe realizar los ejercicios 1 y 2 de la guía.

CIERRE:

Establecida la definición en el plano de los complejos en lo que respecta a las traslaciones, la evaluación formativa consiste en realizar el ejercicio 3 de la guía, además se invita al docente generar un resumen de los visto en la clase.

PROPÓSITO DE LA CLASE N°1:

INICIO: conocer cuáles son los conocimientos previos que posee el alumno respecto de las transformaciones isométricas

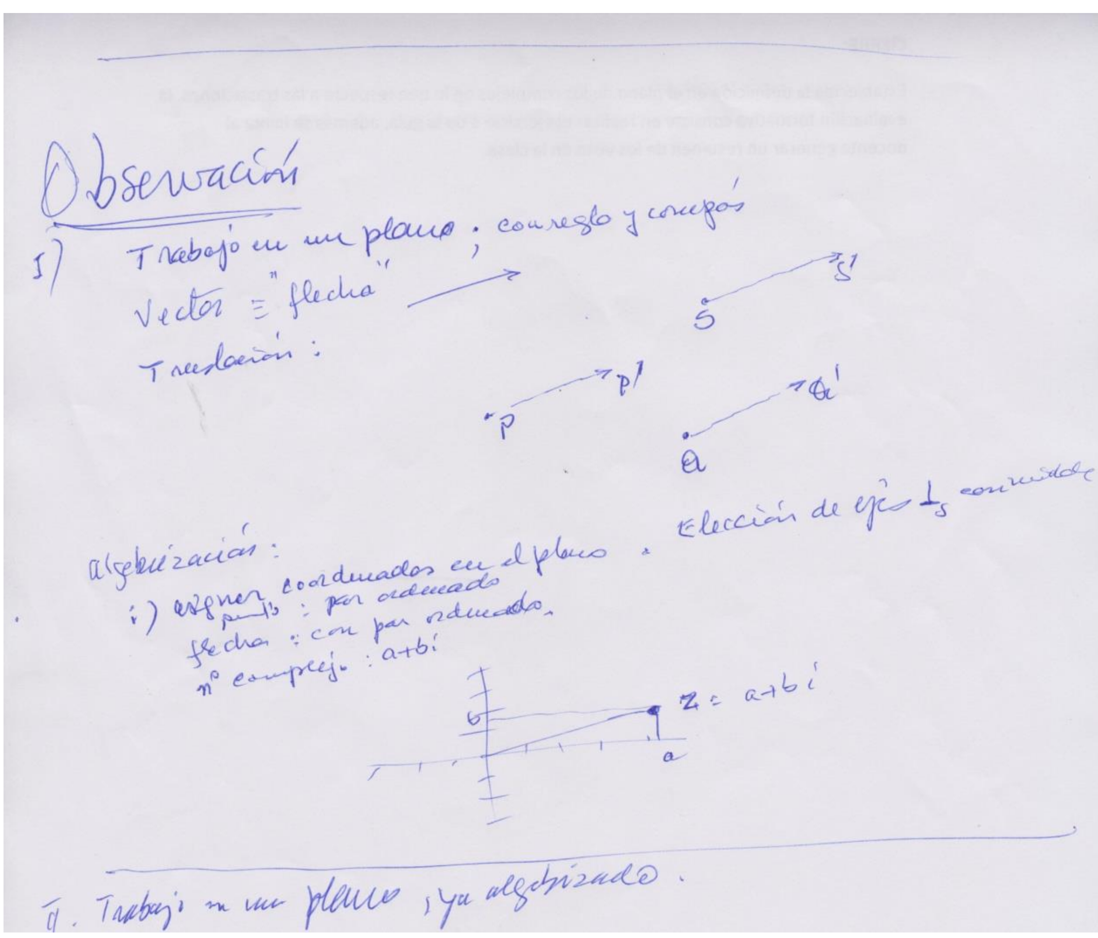
DESARROLLO: busca recordar el conocimiento de las traslaciones isométricas en el plano cartesiano, para relacionarlo en el plano de Argand.

CIERRE: se genera una evaluación formativa la cual contemple todos los conocimientos vistos hasta el momento.

ACTIVIDAD N°1: A partir de la generalización expuesta en el desarrollo, el estudiante deberá llevarlo a un caso en particular aplicando la noción de suma de los números complejos

ACTIVIDAD N°2: Generar el proceso inverso de la Actividad n°1

ACTIVIDAD N°3: tiene como objetivo que el estudiante no solo puede trasladar figuras geométricas en el plano cartesiano, sino que también pueden ser llevadas al plano complejo. Adicionalmente recuerda la idea de que la suma de los vectores traslación es igual a cero, lo que implica que la figura resultante será igual que la figura inicial. Junto con esto le otorga una aplicación repetitiva a la traslación, lo cual visto desde la teoría de Ausubel busca mejorar la retención en el alumno.



CLASE N°2

Objetivo:

- Construir una generalización algebraica de las rotaciones de 90°, 180°, 270° y 360° en el plano complejo. (con centro en el origen de un plano ya representado)

Aprendizaje Esperado:

- Conocer la relación existente entre el producto geométrico y las rotaciones en el plano complejo

INICIO:

- ¿Qué son las rotaciones?
- ¿Para qué sirve?

Rotación: Una rotación es aquella isometría que mueve un objeto respecto a un punto fijo y para poder aplicar una rotación es necesario conocer el ángulo de rotación (θ), el punto (c) denominado centro de rotación, y finalmente el sentido de rotación.

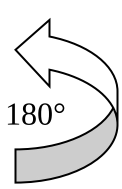
DESARROLLO:

-En base a los conocimientos previos de los estudiantes de las rotaciones y la definición. Al igual que las traslaciones las rotaciones también pueden ser vistas desde el plano de los complejos.

Recordar la definición del producto geométrico de dos vectores (de dos números complejos) tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

Cartesiano

Trigonometría



- Tomando en cuenta cualquier punto en la recta, realice una rotación de 180° en la recta. ¿qué operación describe este cambio?¿centro de rotación?

Al percatarse el estudiante que una rotación de 180° en la recta, corresponde a multiplicar por (-1), esto es equivalente a expresarlo como $x \cdot (-1)$.

- ¿Qué ocurre si hablásemos en el plano de los complejos?, si quisiésemos rotar un punto $a + bi$ en 180°.
- ¿Qué operación describe este cambio?

- ¿A qué número complejo es equivalente?, ¿qué módulo tiene este vector y que ángulo genera en el eje real?

Por ende si se quisiese realizar una rotación de 90°, sabiendo que realizar una rotación de 180° corresponde realizar dos rotaciones de 90°, estamos buscando que al multiplicar dos números de cómo resultado (-1).

$$(X)\cdot(X) = -1$$

$$X^2 = -1$$

$$X = \sqrt{-1}$$

$$X = i$$

$$\therefore X = 0 + i$$

- ¿Funciona? ¿por qué?
- ¿Qué coordenadas tendría un punto cualquiera al ser rotado 90°?
- ¿Por qué una rotación de 90° es $(y, -x)$? $(x, y) -> (-x, y)$

CIERRE: una vez asimilado el concepto de reflexión en el plano complejo se busca que se elabore una tabla la cual generalice de manera algebraica la rotación de un punto según los ángulos de 90º, 180º, 270º y 360º

- ¿Qué rotación hay entre un punto y su opuesto?
- ¿Se podría hacer una generalización, para los ángulos 90°,180°,270° y 360°? (elabore un cuadro).

PROPOSITO DE LA CLASE N°2

INICIO:

Conocer cuáles son los conocimientos previos que posee el alumno respecto de las rotaciones en el plano cartesiano.

DESARROLLO:

El estudiante a través de los conocimientos aprendidos con anterioridad sobre la rotación de 180° en el eje real, prueba si se cumple de igual manera en el plano complejo, lo que en este caso es multiplicar por (-1). Para que luego el estudiante comprenda que el número (-1) debe ser expresado como número complejo $-1 + 0i$. Además el estudiante al identificar que multiplicar cualquier número complejo por $0 + i$ da como resultado una rotación de 90°, busca el porqué ocurre esto, es entonces donde relaciona que el modulo del vector por el cual se debe multiplicar el vector a rotar debe ser 1 y la amplitud que genera con el eje real es de 90°.

CIERRE:

Ahora que el alumno conoce como se realiza una rotación de 90° y de 180° podrá generar (a través de dichos conocimientos previos) rotaciones de los ángulos 270° y 360° (con centro en el origen).

CLASE N°3

Objetivo:

- Realizar cualquier rotación en el plano complejo.
- Establecer una composición de transformaciones isométricas (traslación y rotación) para las rotaciones fuera del origen.

Aprendizaje Esperado:

- Conocer la relación existente entre el producto geométrico (de números complejos) y las rotaciones en el plano complejo, que sirve para todo

INICIO:(materiales calculadora científica)

Se recuerda la definición de rotación e interpretación geométrica del producto de vectores (complejos). Tomando la idea de la clase pasada una rotación de 90° y 180° (con centro en el origen) correspondía a multiplicar por un vector z' de la forma $a' + b'i$ que poseía módulo 1 y ángulo 90° y 180° respectivamente respecto al eje real, es decir:

- La rotación de 90°: $(a + bi) \cdot (0 + i)$
- La rotación de 180°: $(a + bi) \cdot (-1 + 0i)$

DESARROLLO:

Pero esto no satisface la necesidad de realizar una rotación respecto a cualquier ángulo que se desee. Por lo tanto para realizar una rotación respecto al ángulo θ y centro en el origen se propone la aplicación:

$$r(z) = z \cdot z'$$

Que corresponde a la multiplicación del vector (no) a rotar (cuyo argumento es α) y el nuevo vector, el cual debe ser de módulo 1 y ángulo θ.

- $arg[r(z)] = \alpha + \theta$
- $|r(z)| = |z|$

- ¿Cómo se podría hacer una rotación de 45°?

Las coordenadas de este vector $a' + b'i$ para conocerlas hay que recurrir a trigonometría, en donde:

$$\cos\beta = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

- ¿Cuáles son las coordenadas del vector que genera un ángulo 45° con respecto al eje real con módulo 1? ¿a qué número complejo es equivalente?
- Al multiplicar $3 + 4i$ por el número complejo resultante. ¿Corresponde a una rotación de 45°? ¿por qué?
- ¿Cómo rotaría 135°?
- Ejercicio 4 guía.

A partir de este momento, el estudiante es capaz de realizar cualquier rotación.

CIERRE:

- Rotación fuera del origen. (pregunta guía)
- Ejercicios guía

PROPOSITO DE LA CLASE N°3

INICIO:

Recordar los aprendizajes vistos la clase anterior, con el fin de introducir la noción de rotación para cualquier ángulo.

DESARROLLO:

El estudiante a partir de los conocimientos previamente adquiridos pueda establecer de manera visual cómo será el vector rotación, que en este caso se debe cumplir que tenga módulo 1 y amplitud 45° y que encuentren estas coordenadas a partir de razones trigonométricas ya conocidas y que lo relacione con el número complejo equivalente.

Luego se pretende validar la propuesta establecida anteriormente de forma visual, con el ejercicio 4 propuesto en la guía.

CIERRE:

Finalmente el estudiante ya comprende la rotación en el origen, pero no la (Hasta cuando el centro de rotación esta) fuera de este aun así conoce la traslación vista en la primera clase, por lo que a través de una composición de transformaciones isométricas tiene las herramientas para relacionar estos conceptos y trasladar el centro de rotación al origen para luego efectuar la rotación deseada para luego realizar la traslación inversa a la hecha inicialmente, obteniendo el vector final.

ACTIVIDAD N°6:

A través de la práctica reforzar los conocimientos aprendidos.

CLASE N°4

Objetivo:

- Establecer el procedimiento para realizar cualquier reflexión central, respecto a cualquier punto, a través de una composición de transformaciones isométricas (traslación y rotación) para reflexiones centrales, en donde su punto de reflexión no sea el origen.

Aprendizaje Esperado:

- Comprender la relación que existe entre una reflexión central y la rotación de 180º.

INICIO:

- ¿qué es?
- ¿qué tipos hay?

Reflexión central: Es aquella isometría en la que un punto z es transformado en otro punto z', a través de un centro O (de simetría) de tal manera que el segmento $\overline{zz'}$ tiene a O como punto medio.

DESARROLLO:

Realice una reflexión central respecto al origen al punto (representado por el complejo) 3 + 2i gráficamente.

- ¿Existe otra isometría, la cuál de cómo resultado el mismo punto?
- ¿Toda reflexión central es una rotación de 180°? ¿por qué?
- Reflexión central fuera del origen (ejercicio).

CIERRE: Evaluación formativa.

Se le presentara al alumno una guía impresa en la cual se presentaran 4 planos de Argand, en donde ellos tendrán que realizar cada una de las transformaciones isométricas vistas hasta el momento, siendo estas: traslación, rotación (tanto en los ángulos de 90º, 180º, 270º y 360º como para cualquier ángulo) y reflexión central. Con el fin de que pueda apreciar visualmente las transformaciones isométricas.

PROPOSITO DE LA CLASE N°4

INICIO:

Reforzar los conocimientos de la reflexión central que ya conocían en el plano cartesiano y relacionarlo con el plano complejo, y con las transformaciones isométricas vistas anteriormente.

DESARROLLO:

A partir de la visualización geométrica de la reflexión axial del punto $3 + 2i$, el alumno relacionará que la reflexión axial es lo mismo que efectuar una rotación de 180° para cualquier punto.

CIERRE:

Generar una evaluación en medio de la enseñanza con el fin de que el alumno pueda a través de la práctica trabajar los conocimientos y también conocer en que se equivocó a través de una próxima retroalimentación del docente.

CLASE N°5

Objetivos:

- Establecer un procedimiento que permita realizar cualquier reflexión axial, con respecto a ambos ejes.

Aprendizajes Esperados:

- Comprender la relación que existe entre una reflexión axial (central) y la rotación de 180º.

INICIO:

Reflexión Axial: el estudio de la reflexión axial se centrara solo entorno a los ejes x e y.

- ¿qué es?
- ¿qué tipos hay?

DESARROLLO:

Reflexión axial: Es aquella isometría en la que un punto z es transformado en otro punto z', a través de una recta l (de simetría) de tal manera que el segmento $\overline{zz'}$ tiene a la recta l como mediatriz.

Conociendo la definición anterior se propone generar el punto reflejado de la siguiente manera: a través de una composición de transformaciones isométricas primero se traslada el punto para que coincida con el eje imaginario para luego generar una rotación de 180° respecto al origen, para finalmente volver aplicar la traslación inversa

Sea l coincidente con el eje x, aplique una reflexión axial del punto $z = 3 - 6i$.

-¿A qué punto corresponde la reflexión axial del punto z?

-¿Cuál es el conjugado de z? ¿Coincide con la reflexión axial? ¿Toda reflexión axial con respecto al eje x corresponde al conjugado del número?

-¿qué sucede si l es coincidente con el eje y?

CIERRE:

- **Prueba final**

PROPOSITO DE LA CLASE N°5:

INICIO:

Reforzar los conocimientos de la reflexión axial que ya conocían en el plano cartesiano y relacionarlo con el plano complejo, y con las transformaciones isométricas vistas anteriormente.

DESARROLLO:

Relacionar la reflexión axial con el concepto ya conocido del conjugado de un número complejo.

Establecer un procedimiento que permita realizar una reflexión axial con respecto al eje y, según lo aprendido con respecto al eje x.

CIERRE:

Tiene como objetivo el reconocer lo que los alumnos han aprendido generando una retroalimentación para ellos, junto con esto realizar una retroalimentación al diseño didáctico en sí mismo, ya que en base a los resultados obtenidos se podrá modificar este diseño.

EVALUACIÓN CLASE A CLASE

NÚMERO DE LA CLASE	¿LA CLASE ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
1			
2			
3			
4			
5			

En general: hay una manera no tradicional de representar los puntos del plano: hay una identificación con vectores y números complejos no acordes con las definiciones usadas para las isometrías.

GUÍA DE PRÁCTICA PARA EL ALUMNO

NOMBRE:

CURSO:

FECHA:

1.- Si se tiene el vector $\vec{p} = 2 + 2i$ (punto de coordenadas (2,2))trasládelo según el vector traslación $\vec{q} = 9 + 6i$. (9,6)

2.- al vector $\vec{e} = 4 + 5i$(4,5) se le aplicó una traslación dando el vector $\vec{u} = 7 + i$ como resultante, ¿cuál es el vector traslación?

3.- Sea el triángulo ABC, con vértices en A= $(3+3i)$, B= $(-1-i)$ y el punto C= $(7+i)$.

a) Traslade el triángulo ABC según el vector traslación $\vec{l}=-3+2i$

b) La figura resultante trasládelo según el vector traslación $\vec{k}=5-5i$

c) La figura resultante trasládelo según el vector traslación $\vec{\tilde{n}}=-2+3i$

d) ¿Existe un único vector que genere la misma traslación que las tres anteriores?

4.- Si se tiene el vector $\vec{y} = -3 - 6i$ rótelo 33º con centro en el origen.

5.- Si se tiene el vector $\vec{b} = -3 - 6i$ rótelo 33º con centro en el punto $m = 3 + 6i$

6.- Si se tiene el triángulo PQR con vértices en $P = (1 + 5i), Q = (6 - 3i)$ y $R = (-5 - 4i)$, realice una rotación de 60° con respecto al origen.

7. Si se tiene un triángulo MNO con vértice $M = (-3 + 2i), N = (-7 + 4i)$ y O=$(-5 + 7i)$, realice una reflexión central con respecto al origen.

EVALUACIÓN DE LA GUIA DE PRÁCTICA PARA EL ALUMNO

NÚMERO DE LA ACTIVIDAD	¿LA ACTIVIDAD ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

Salvo lo que aparece como 33°, que supongo quieren decir 30°

PRUEBA FINAL

NOMBRE:

CURSO:

FECHA:

1.- Si se tiene un triángulo KEL con vértice $K = (-3 + 2i), E = (-7 + 4i)$ y L=$(-5 + 0i)$, realice una reflexión axial con respecto al eje real.

2.- Si se tiene el punto $W = -5 + 3i$ realice dos transformaciones isométricas diferentes tal que el resultado de esta sea el punto $I = 5 - 6i$.

3.- ¿A qué valor pertenece la expresión i^{83}?

* Recuerde que $i \cdot i = i^2$

- ¿A qué ángulo corresponde esta rotación?

Ud quiere: si multiplica el punto por un número complejo a+bi, a que ángulo corresponde la rotación

EVALUACIÓN DE EVALUACION FINAL

NÚMERO DE LA PREGUNTA	¿LA PREGUNTA ES PERTINENTE?		OBSERVACIONES
	SI	NO	
1			
2			
3			No es clara al multiplicar i^{83} un punto de complejo…

PRIMER DISEÑO

PRESENTACIÓN

Esta guía para el profesor ha sido elaborada con el propósito de apoyar el quehacer docente a través de un diseño didáctico que apoye el proceso de enseñanza de las transformaciones isométricas, buscando completar su enseñanza a través de los números complejos basándonos en la teoría del aprendizaje significativo, tema para el cual no existe material didáctico disponible.

Los contenidos y actividades que encontrarán en esta propuesta serán:

- Conocimientos previos:
  - Números complejos.
  - Trasformaciones isométricas.
- Movimientos rígidos en el plano de los complejos:
  - Traslación
  - Rotación
  - Reflexión central
  - Reflexión axial

Se debe tener en cuenta que el docente debe promover una participación activa del estudiante, exponiendo el conocimiento y generando instancia de pregunta - respuesta. A continuación se presenta el diseño didáctico que consta de seis clases principalmente expositivas con una evaluación final.

CLASE N°1

Objetivo:

- Conocer que las traslaciones no sólo opera en el plano cartesiano, sino también en el plano Argand.

Aprendizaje Esperado:

- Comprende la relación que existe entre la suma de los números complejos con las traslaciones.

INICIO:

Para averiguar los conocimientos previos que poseen los alumnos se sugiere utilizar breves preguntas, como por ejemplo:

- ¿Qué conocen por transformaciones isométricas?
- ¿Qué características poseen?
- ¿Qué tipo de transformaciones isométricas conocen?
- ¿En qué se diferencian unas con otras?

Una vez que se conocen los conocimientos previos del alumno de las transformaciones isométricas y se hayan reforzado las debilidades encontradas. Se comienza a explicar el tema comenzando con el concepto de traslación.

DESARROLLO:

Traslación: Son aquellas isometrías que permiten desplazar en línea recta cualquier punto en el plano. Si denotamos un punto p con coordenadas (x, y) y su imagen p' como (x', y') y traslación$\vec{T}_{(a,b)}$, para significar que trasladamos "a" unidades en dirección horizontal y "b" unidades en dirección vertical, generando la ecuación de traslación.

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

- ¿Para qué sirve?
- ¿Es posible "trasladar" figuras geométricas?

La definición sugerida se nutra con las respuestas de los alumnos para consensuar una definición adecuada para los estudiantes.

Luego de esto se busca que los estudiantes recuerden que el plano cartesiano no es el único existente, con el fin de tomar los aprendizajes previos que poseen del plano de Argand, para así vincularlo con las transformaciones isométricas.

- ¿El plano cartesiano es el único existente?
- ¿En el plano Argand qué números se encuentran?

-Se enuncia que se puede efectuar las traslaciones en el plano de los complejos al igual que en el plano cartesiano, lo que es equivalente a sumar número complejos.

Una traslación en el plano de los complejos al igual que en el plano cartesiano corresponde a un desplazamiento en línea recta a cualquier punto en el plano, matemáticamente un punto $z \in \mathbb{C}$de la forma, $z = a + bi$ y un vector traslación $\vec{T}$ que corresponde a z_0 , la traslación para el vector $\vec{T}$ corresponde a la función

$$T(z) = z + z'$$

$$T(z) = a + a' + i(b + b')$$

Correspondiente al par ordenado $(a + a', b + b')$.

El alumno debe realizar los ejercicios 1 y 2 de la guía.

CIERRE:

Establecida la definición en el plano de los complejos en lo que respecta a las traslaciones, la evaluación formativa consiste en realizar el ejercicio 3 de la guía, además se invita al docente generar un resumen de los visto en la clase.

PROPÓSITO DE LA CLASE N°1

INICIO: conocer cuáles son los conocimientos previos que posee el alumno respecto de las transformaciones isométricas

DESARROLLO: busca recordar el conocimiento de las traslaciones isométricas en el plano cartesiano, para relacionarlo en el plano de Argand.

CIERRE: se genera una evaluación formativa la cual contemple todos los conocimientos vistos hasta el momento.

ACTIVIDAD N°1: A partir de la generalización expuesta en el desarrollo, el estudiante deberá llevarlo a un caso en particular aplicando la noción de suma de los números complejos

ACTIVIDAD N°2: Generar el proceso inverso de la Actividad n°1

ACTIVIDAD N°3: tiene como objetivo que el estudiante no solo puede trasladar figuras geométricas en el plano cartesiano, sino que también pueden ser llevadas al plano complejo. Adicionalmente recuerda la idea de que la suma de los vectores traslación es igual a cero, lo que implica que la figura resultante será igual que la figura inicial. Junto con esto le otorga una aplicación repetitiva a la traslación, lo cual visto desde la teoría de Ausubel busca mejorar la retención en el alumno.

CLASE N°2

Objetivo:

- Construir una generalización algebraica de las rotaciones de 90°, 180°, 270° y 360° en el plano complejo.

Aprendizaje Esperado:

- Conocer la relación existente entre el producto geométrico y las rotaciones en el plano complejo.

INICIO:

- ¿Qué son las rotaciones?
- ¿Para qué sirve?

Rotación: Una rotación es aquella isometría que mueve un objeto respecto a un punto fijo y para poder aplicar una rotación es necesario conocer el ángulo de rotación (θ), el punto (c) denominado centro de rotación, y finalmente el sentido de rotación.

DESARROLLO:

-En base a los conocimientos previos de los estudiantes de las rotaciones y la definición. Al igual que las traslaciones las rotaciones también pueden ser vistas desde el plano de los complejos.

Recordar la definición del producto geométrico de dos vectores tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

- Tomando en cuenta cualquier punto en la recta, realice una rotación de 180° en la recta. ¿qué operación describe este cambio?

Al percatarse el estudiante que una rotación de 180° en la recta, corresponde a multiplicar por (-1), esto es equivalente a expresarlo como $x \cdot (-1)$.

- ¿Qué ocurre si hablásemos en el plano de los complejos?, si quisiésemos rotar un punto $a + bi$ en 180°.
- ¿Qué operación describe este cambio?
- ¿A qué número complejo es equivalente?, ¿qué módulo tiene este vector y que ángulo genera en el eje real?

Por ende si se quisiese realizar una rotación de 90°, sabiendo que realizar una rotación de 180° corresponde realizar dos rotaciones de 90°, estamos buscando que al multiplicar dos números de cómo resultado (-1).

$$(X) \cdot (X) = -1$$

$$X^2 = -1$$

$$X = \sqrt{-1}$$

$$X = i$$

$$\therefore X = 0 + i$$

- ¿Funciona? ¿por qué?
- ¿Qué coordenadas tendría un punto cualquiera al ser rotado 90°?
- ¿Por qué una rotación de 90° es $(y, -x)$?

CIERRE: una vez asimilado el concepto de reflexión en el plano complejo se busca que se elabore una tabla la cual generalice de manera algebraica la rotación de un punto según los ángulos de 90º, 180º, 270º y 360º

- ¿Qué rotación hay entre un punto y su opuesto?
- ¿Se podría hacer una generalización, para los ángulos 90°,180°,270° y 360°? (elabore un cuadro).

PROPOSITO DE LA CLASE N°2

INICIO:

Conocer cuáles son los conocimientos previos que posee el alumno respecto de las rotaciones en el plano cartesiano.

DESARROLLO:

El estudiante a través de los conocimientos aprendidos con anterioridad sobre la rotación de 180° en el eje real, prueba si se cumple de igual manera en el plano complejo, lo que en este caso es multiplicar por (-1). Para que luego el estudiante comprenda que el número (-1) debe ser expresado como número complejo $-1 + 0i$. Además el estudiante al identificar que multiplicar cualquier número complejo por $0 + i$ da como resultado una rotación de 90°, busca el porqué ocurre esto, es entonces donde relaciona que el modulo del vector por el cual se debe multiplicar el vector a rotar debe ser 1 y la amplitud que genera con el eje real es de 90°.

CIERRE:

Ahora que el alumno conoce como se realiza una rotación de 90° y de 180° podrá generar (a través de dichos conocimientos previos) rotaciones de los ángulos 270° y 360°.

CLASE N°3

Objetivo:

- Realizar cualquier rotación en el plano complejo.
- Establecer una composición de transformaciones isométricas (traslación y rotación) para las rotaciones fuera del origen.

Aprendizaje Esperado:

- Conocer la relación existente entre el producto geométrico y las rotaciones en el plano complejo, que sirve para todo ángulo.

INICIO:(materiales calculadora científica)

Se recuerda la definición de rotación e interpretación geométrica del producto de vectores. Tomando la idea de la clase pasada una rotación de 90° y 180° correspondía a multiplicar por un vector z' de la forma $a' + b'i$ que poseía módulo 1 y ángulo 90° y 180° respectivamente respecto al eje real, es decir:

- La rotación de 90°: $(a + bi) \cdot (0 + i)$
- La rotación de 180°: $(a + bi) \cdot (-1 + 0i)$

DESARROLLO:

Pero esto no satisface la necesidad de realizar una rotación respecto a cualquier ángulo que se desee. Por lo tanto para realizar una rotación respecto al ángulo θ y centro en el origen se propone la aplicación:

$$r(z) = z \cdot z'$$

Que corresponde a la multiplicación del vector a rotar (cuyo argumento es α) y el nuevo vector, el cual debe ser de módulo 1 y ángulo θ.

- ❖ $arg[r(z)] = \alpha + \theta$
- ❖ $|r(z)| = |z|$

- ¿Cómo se podría hacer una rotación de 45°?

Las coordenadas de este vector $a' + b'i$ para conocerlas hay que recurrir a trigonometría, en donde:

$$\cos\beta = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

- ¿Cuáles son las coordenadas del vector que genera un ángulo 45° con respecto al eje real con módulo 1? ¿a qué número complejo es equivalente?
- Al multiplicar $3 + 4i$ por el número complejo resultante. ¿Corresponde a una rotación de 45°? ¿por qué?
- ¿Cómo rotaría 135°?
- Ejercicio 4 guía.

A partir de este momento, el estudiante es capaz de realizar cualquier rotación.

CIERRE:

- Rotación fuera del origen. (pregunta guía)
- Ejercicios guía

PROPOSITO DE LA CLASE N°3

INICIO:

Recordar los aprendizajes vistos la clase anterior, con el fin de introducir la noción de rotación para cualquier ángulo.

DESARROLLO:

El estudiante a partir de los conocimientos previamente adquiridos pueda establecer de manera visual cómo será el vector rotación, que en este caso se debe cumplir que tenga módulo 1 y amplitud 45° y que encuentren estas coordenadas a partir de razones trigonométricas ya conocidas y que lo relacione con el número complejo equivalente.

Luego se pretende validar la propuesta establecida anteriormente de forma visual, con el ejercicio 4 propuesto en la guía.

CIERRE:

Finalmente el estudiante ya comprende la rotación en el origen, pero no la fuera de este aun así conoce la traslación vista en la primera clase, por lo que a través de una composición de transformaciones isométricas tiene las herramientas para relacionar estos conceptos y trasladar el centro de rotación al origen para luego efectuar la rotación deseada para luego realizar la traslación inversa a la hecha inicialmente, obteniendo el vector final.

ACTIVIDAD N°6:

A través de la práctica reforzar los conocimientos aprendidos.

CLASE N°4

Objetivo:

- Establecer el procedimiento para realizar cualquier reflexión central, respecto a cualquier punto, a través de una composición de transformaciones isométricas (traslación y rotación) para reflexiones centrales, en donde su punto de reflexión no sea el origen.

Aprendizaje Esperado:

- Comprender la relación que existe entre una reflexión central y la rotación de 180º.

INICIO:

- ¿qué es?
- ¿qué tipos hay?

Reflexión central: Es aquella isometría en la que un punto z es transformado en otro punto z', a través de un centro O (de simetría) de tal manera que el segmento $\overline{zz'}$ tiene a O como punto medio.

DESARROLLO:

Realice una reflexión central respecto al origen al punto al punto 3 + 2i gráficamente.

- ¿Existe otra isometría, la cuál de cómo resultado el mismo punto?
- ¿Toda reflexión central es una rotación de 180°? ¿por qué?
- Reflexión central fuera del origen (ejercicio).

CIERRE: Evaluación formativa.

Se le presentara al alumno una guía impresa en la cual se presentaran 4 planos de Argand, en donde ellos tendrán que realizar cada una de las transformaciones isométricas vistas hasta el momento, siendo estas: traslación, rotación (tanto en los ángulos de 90º, 180º, 270º y 360º como para cualquier ángulo) y reflexión central. Con el fin de que pueda apreciar visualmente las transformaciones isométricas.

PROPOSITO DE LA CLASE N°4

INICIO:

Reforzar los conocimientos de la reflexión central que ya conocían en el plano cartesiano y relacionarlo con el plano complejo, y con las transformaciones isométricas vistas anteriormente.

DESARROLLO:

A partir de la visualización geométrica de la reflexión axial del punto $3 + 2i$, el alumno relacionará que la reflexión axial es lo mismo que efectuar una rotación de 180° para cualquier punto.

CIERRE:

Generar una evaluación en medio de la enseñanza con el fin de que el alumno pueda a través de la práctica trabajar los conocimientos y también conocer en que se equivocó a través de una próxima retroalimentación del docente.

CLASE N°5

Objetivos:

- Establecer un procedimiento que permita realizar cualquier reflexión axial, con respecto a ambos ejes.

Aprendizajes Esperados:

- Comprender la relación que existe entre una reflexión axial y la rotación de 180º.

INICIO:

Reflexión Axial: el estudio de la reflexión axial se centrara solo entorno a los ejes x e y.

- ¿qué es?
- ¿qué tipos hay?

DESARROLLO:

Reflexión axial: Es aquella isometría en la que un punto z es transformado en otro punto z', a través de una recta l (de simetría) de tal manera que el segmento $\overline{zz'}$tiene a la recta l como mediatriz.

Conociendo la definición anterior se propone generar el punto reflejado de la siguiente manera: a través de una composición de transformaciones isométricas primero se traslada el punto para que coincida con el eje imaginario para luego generar una rotación de 180° respecto al origen, para finalmente volver aplicar la traslación inversa

Sea l coincidente con el eje x, aplique una reflexión axial del punto $z = 3 - 6i$.

-¿A qué punto corresponde la reflexión axial del punto z?

-¿Cuál es el conjugado de z? ¿Coincide con la reflexión axial? ¿Toda reflexión axial con respecto al eje x corresponde al conjugado del número?

-¿qué sucede si l es coincidente con el eje y?

CIERRE: Prueba final

PROPOSITO DE LA CLASE N°5:

INICIO:

Reforzar los conocimientos de la reflexión axial que ya conocían en el plano cartesiano y relacionarlo con el plano complejo, y con las transformaciones isométricas vistas anteriormente.

DESARROLLO:

Relacionar la reflexión axial con el concepto ya conocido del conjugado de un número complejo.

Establecer un procedimiento que permita realizar una reflexión axial con respecto al eje y, según lo aprendido con respecto al eje x.

CIERRE:

Tiene como objetivo el reconocer lo que los alumnos han aprendido generando una retroalimentación para ellos, junto con esto realizar una retroalimentación al diseño didáctico en sí mismo, ya que en base a los resultados obtenidos se podrá modificar este diseño.