FACULTAD DE EDUCACIÓN
Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa

DISEÑO Y APLICACIÓN DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA, CON BASE EN LA INGENIERÍA DIDÁCTICA, PARA FAVORECER LA COMPRENSIÓN DE LA LETRA COMO VARIABLE EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO AÑO BÁSICO.

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN
Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICAS
E INFORMÁTICA EDUCATIVA

INTEGRANTES:

MONTENEGRO FIGUEROA, NAYARETH AMALIA

PARRA HENRÍQUEZ, BÁRBARA CAMILA

PROFESOR GUÍA:

JORGE ÁVILA CONTRERAS

SANTIAGO, CHILE

2018

AGRADECIMIENTOS

Dedico el presente trabajo a mi madre, agradeciendo enormemente su apoyo e incondicionalidad durante todo mi proceso de formación profesional, por motivarme siempre a ser cada día una mejor persona y a perseguir mis sueños hasta alcanzarlos, por ser mi ejemplo y modelo a seguir. Mis logros y especialmente este han sido posibles gracias a su amparo y contención.

De igual manera quiero agradecer a mis maestros, familia y seres queridos, que desde un inicio confiaron en mí y en mis capacidades.

Muchas gracias...

Bárbara Parra Henríquez

Quisiera agradecer en primer lugar a Dios, quien ha estado a lo largo de todo mi proceso universitario, por ser mi fiel guiador, por su inmenso amor y porque todo lo que soy y lo que seré se lo debo solo a él.

A mi mami, sé que desde el cielo has estado conmigo y sé que estas inmensamente feliz por verme cumplir este sueño.

También agradezco a mis padres por apoyar desde siempre la decisión de ser profesora, por forjar en mi la perseverancia, constancia y responsabilidad y así lograr este propósito en mi vida. A mi hermana y sobrina, por siempre estar a mi lado, llenándome de energía y amor.

A mi novio Isaac, quien desde siempre estuvo a mi lado, dándome siempre una palabra de ánimo para no decaer, por cada vez que se arrodilló junto a mí para pedirle a Dios culminar esta etapa en victoria, por su paciencia enorme y por sobretodo su amor.

A mi amiga Marisol, por su cariño y preocupación siempre y por compartir conmigo la vocación de educar.

A mi compañera de tesis, con la cual pude compartir grandes momentos, a veces muy difíciles, pero jamás imposibles, por su incondicionalidad y responsabilidad a lo largo de toda la investigación y que hicieron posible la realización de este gran trabajo.

A mi familia, amigos y todo aquél que fue parte de este proceso universitario.

Nayareth Montenegro Figueroa

RESUMEN

La presente investigación muestra los resultados de la realización, aplicación y posterior validación interna de una propuesta didáctica, que se desarrolla con base en la metodología de la ingeniería didáctica, y que tiene como finalidad orientar y enfrentar ciertos errores y/u obstáculos cometidos por los estudiantes con relación a la interiorización del álgebra, más específicamente, se trata de conseguir una mejora en la interpretación de la letra como variable, teniendo en cuenta el análisis de datos obtenidos a partir de un test diagnóstico realizado a estudiantes de séptimo básico.

Como parte del marco teórico se consideran las investigaciones previas realizadas por distintos autores acerca de los errores en el uso, la significación e incorporación de las letras al álgebra, y la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Se da especial importancia a los distintos momentos que, de acuerdo a esta teoría, constituyen una situación didáctica, a saber, las situaciones de devolución, acción, formulación, validación e institucionalización.

La puesta en escena de la investigación se lleva a cabo con niños de séptimo año básico de un colegio particular subvencionado de la comuna de La Cisterna. De la información obtenida se hace un análisis cualitativo y un análisis a posteriori, para validar internamente la propuesta didáctica que se propone.

La investigación tiene un enfoque cualitativo de tipo experimental, cuyo diseño corresponde a un estudio de casos. Utiliza como metodología la ingeniería didáctica, considerando sus distintas etapas o fases: la descripción de la situación, análisis preliminar, análisis a priori, la experimentación, el análisis a posteriori y la validación interna.

Esta investigación busca contrastar el nivel de incorporación de la letra como variable, antes y luego de la situación de aprendizaje identificando a través del análisis los avances que se consigan con la implementación de la propuesta didáctica. De acuerdo a lo anterior, dentro de los principales resultados obtenidos se encontró que los estudiantes de séptimo año lograron manifestar una mejora en la comprensión de la letra en un sentido más amplio de esta. Se pudo observar que, al verse enfrentados a ejercicios como la igualdad de expresiones algebraicas con distintas letras en cada uno de los lados de la igualdad, consiguen dejar de observar la letra solo como una etiqueta y comienzan a ver el sentido de ellas según la situación matemática propuesta, principalmente se focalizó en favorecer la comprensión de la letra como variable.

A pesar de ser una actividad distinta a las comúnmente realizadas en sus clases tradicionales de aula, los estudiantes tuvieron una buena disposición a la realización de la actividad, siendo participativos y desarrollando también habilidades como las de argumentar y comunicar.

Palabras clave: Álgebra, propuesta didáctica, ingeniería didáctica.

ABSTRACT

This research presents the results of the realization, application and subsequent internal validation of a didactic proposal, which is developed based on the methodology of didactic engineering, and which aims to guide and face certain errors and / or obstacles committed by the students in relation to the internalization of algebra, more specifically, it is about achieving an improvement in the interpretation of the letter as a variable, taking into account the analysis of data obtained from a diagnostic test performed on seventh grade students.

As part of the theoretical framework, the previous research carried out by different authors on the errors in the use, the significance and incorporation of the letters to algebra, and the theory of didactic situations of Brousseau are considered. Special importance is given to the different moments that, according to this theory, constitute a didactic situation, namely, the situations of devolution, action, formulation, validation and institutionalization.

The staging of the research is carried out with children of the seventh year of a subsidized private school in the commune of La Cisterna. From the information obtained, a qualitative analysis and a posteriori analysis are carried out to validate internally the didactic proposal that is proposed.

Didactic engineering is used as a research methodology, considering its different stages or phases: the description of the situation, the preliminary analysis, the a priori analysis, the experimentation, the a posteriori analysis and the internal validation.

According to the results obtained, we seek to contrast the level of incorporation of the letter as a variable, before and after the learning situation by identifying through the analysis the progress made with the implementation of the didactic proposal. According to the above, within the main results obtained, it was found that the seventh grade students managed to show an improvement in the comprehension of the letter in a broader sense. It was observed that when students are confronted with exercises such as the equality of algebraic expressions with different letters on each of the sides of equality, they can stop observing the letter only as a label and begin to see the meaning of these according to the mathematical situation proposed, mainly focused on favoring the understanding of the letter as a variable.

Despite being an activity different from those commonly performed in their traditional classroom classes, the students had a good disposition to carry out the activity, being participatory and also developing skills such as arguing and communicating.

Keywords: Algebra, didactic proposal, didactic engineering.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la matemática no solo se constituye del conocimiento disciplinar y curricular, sino también es necesario enseñar a partir del conocimiento didáctico matemático, para así establecer los contenidos matemáticos a enseñar.

Para realizar el trabajo docente, se debe incluir los elementos de análisis adecuados desde el punto de vista de la Didáctica de las matemáticas, para poder entender y planificar dicho trabajo en el aula. De este modo el docente necesita ampliar y conectar diferentes perspectivas sobre el currículo dispuesto acerca de la asignatura de matemática, de manera tal que no solo se considere el conocimiento a partir de la lógica interna de la disciplina, sino además de los razonamientos matemáticos y didácticos propuestos, dicho de otro modo, todo el conocimiento teórico de la matemática pura, disciplinar y curricular, para ser llevado a la práctica y así poder generar aprendizajes por parte de los estudiantes, es necesaria convertirla en conocimiento matemático para enseñar.

Es por ello que cobra vital importancia la adquisición del conocimiento didáctico matemático por parte de los docentes del área mencionada, para así diseñar, evaluar, elaborar, modificar y desarrollar las diferentes programaciones curriculares existentes y así lograr un aprendizaje duradero por parte de los educandos.

El presente trabajo de investigación nace a raíz de la experiencia de las seminaristas en distintos contextos educativos, ya sea en prácticas profesionales, clases particulares, entre otras, al notar las falencias existentes en la enseñanza y el aprendizaje de la incorporación de la letra como variable en el álgebra, proponiéndose así realizar una propuesta didáctica que aborda el tema expuesto, en estudiantes de séptimo año básico, los cuales acostumbran a utilizar la letra como un objeto determinado, como incógnita específica o como letra evaluada, según las categorías que menciona Kuchemann (1980).

Considerando el conocimiento sobre didáctica de la matemática, se cree oportuno abordar este fenómeno, lo cual provoca que los estudiantes mantengan una participación activa a lo largo de su proceso de aprendizaje, haciéndoles saber y entender la importancia que esto significa para la continuidad de los conocimientos y saberes matemáticos.

De este modo para la propuesta didáctica se considera los saberes previos por parte de los estudiantes a partir de la aplicación de un test diagnóstico, con el fin de evidenciar las diversas dificultades que existen en el aprendizaje de la incorporación de la letra como variable por los estudiantes explicitados, utilizando como metodología de investigación la ingeniería didáctica.

La propuesta se sustenta en la teoría de situaciones didácticas, tomando en cuenta sus fases, buscando generar un ambiente propicio donde se pueda generar la construcción de dicho aprendizaje por parte de los estudiantes.

En cuanto al desarrollo de la investigación, esta se encuentra dividida en dos partes. La primera hace referencia a antecedentes de tipo empíricos y teóricos para dar sustentabilidad y una base de acuerdo con investigaciones previas y, una segunda parte, en donde se presenta el desarrollo de la ingeniería didáctica y sus conclusiones y análisis.

El capítulo 1 desarrolla aspectos relacionados con la teoría, el planteamiento del problema, la definición, limitaciones, justificación y los objetivos de la investigación. En cuanto al marco teórico, en el capítulo 2, se expone el aporte de autores destacados en temas de investigación en educación como Enfedaque (1990), Kuchemann (1980), Brousseau (2007), entre otros. En el capítulo 3, se explica la opción metodológica de la investigación, la que corresponde fundamentalmente a la ingeniería didáctica y sus características.

En el capítulo 4, se desarrollan en primera instancia el análisis preliminar de la propuesta didáctica, abarcando componentes epistemológicos, cognitivos y didácticos, con relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje en cuanto a la incorporación de la letra como variable. Luego se da a conocer el análisis a priori donde se definen los comportamientos esperados y el diseño paso a paso de la propuesta didáctica. Además se expone la fase experimental, donde se da a conocer la experiencia vivida por los estudiantes y las investigadoras durante la aplicación de la actividad. Y posteriormente, el análisis a posteriori, que expone un contraste entre los comportamientos esperados vistos en el análisis a priori y lo que realmente sucedió en la experimentación, considerando también la idea de rediseñar la actividad para mejorar algunas dificultades que puedan surgir en la aplicación de ésta.

En el capítulo 5 y final se establecen las conclusiones de esta investigación con relación a los objetivos planteados.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes empíricos observados y/o teóricos

En el siguiente apartado se dan a conocer dos tipos de antecedentes con relación a la investigación que se propone, el primero considera las experiencias vividas por parte de las docentes a cargo de la investigación (investigadoras) a partir de sus prácticas y/o experiencias previas y, el segundo, está relacionado con investigaciones realizadas con anterioridad por autores destacados en el área abordada.

1.1.1 Antecedentes a partir de prácticas y experiencias previas.

En el presente apartado se dan a conocer tres ejemplos observados por las investigadoras en distintos contextos educativos, el ejemplo número 1 hace referencia a una situación observada en una clase particular, relacionada con el perímetro de figuras geométricas, donde se deja en evidencia la utilización de la letra como objeto por parte de la estudiante. Por su parte en el ejemplo número 2, también dentro de un contexto de clase particular relacionada con el tema de teorema de Pitágoras, se manifiesta por parte del estudiante la utilización de la letra como objeto e incógnita específica. Y finalmente, en el ejemplo número 3, en un contexto de práctica profesional en el contenido de álgebra (específicamente, ecuaciones), se evidencian errores relacionados con la yuxtaposición de los símbolos matemáticos.

Todo esto está orientado a presentar evidencia acerca de los errores que presentan distintos estudiantes, en distintos contextos con relación al mismo objeto matemático.

Ejemplo 1: Situación perímetro de un cuadrado en estudiante de cuarto básico

En el contexto de una clase particular a una estudiante de cuarto básico se le presenta la siguiente situación; en su cuaderno se dibuja un cuadrado en donde se identifica su medida como lado de un cuadrado igual a **a**, se menciona que un cuadrado tiene cuatro lados y la medida de los cuatro lados son iguales, por lo tanto si se quiere calcular el perímetro se deben sumar los cuatro lados como se diagrama a continuación:

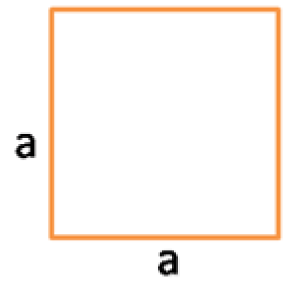


Imagen 1: Cuadrado de lado a

Perímetro del cuadrado: a + a + a+ a= 4a

Se le explica con el diagrama anterior el perímetro de un cuadrado y además a través de un ejemplo numérico se identifica el perímetro de un cuadrado de lado 2, obteniendo como resultado perímetro igual a 8. A continuación se le indica que a partir de lo explicado anteriormente resuelva la siguiente interrogante: ¿Qué ocurre si tenemos un cuadrado de lado **b**?, ¿Cuál es su perímetro? La estudiante responde que el perímetro de un cuadrado de lado **b** es “4**a**” como se muestra a continuación:

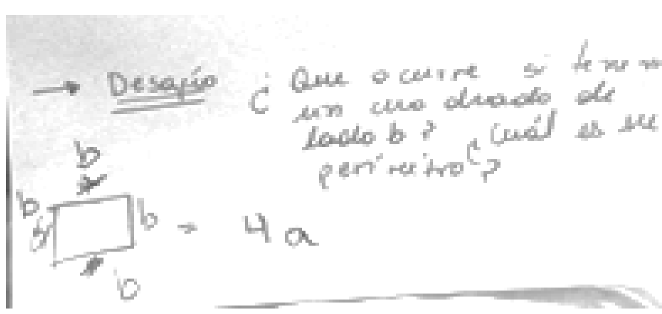


Imagen 2: Área de un cuadrado

Ejemplo 2: Lados de un triángulo rectángulo

En este segundo ejemplo también se da en un contexto de una clase particular teniendo como foco el “teorema de Pitágoras”, posterior a las clases de la docente del estudiante en aula (clase en donde se representan los catetos con las letras a y b, y la hipotenusa con la letra c).

En la clase particular se enfrentó al estudiante a un ejercicio con un triángulo rectángulo donde sus catetos son representados con las letras p, q y la hipotenusa con la letra r.

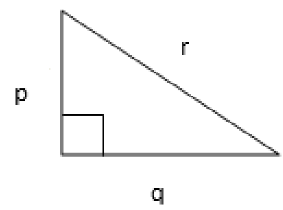


Imagen 3: Triangulo rectángulo p, q r

Y se le pide que identifique sus catetos

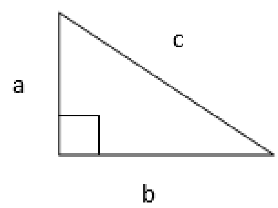


Imagen 4: Triangulo rectángulo a, b, c

La respuesta inmediata que se recibe por parte del estudiante fue “a y b son los catetos”, a pesar de que la figura que se le mostró tenía lados p, q y r, luego de su respuesta se le consultó “¿por qué sus catetos son a y b?” a lo que él respondió que sus catetos son a y b porque su profesora dijo eso: “siempre los catetos son a y b”.

Se observa que el estudiante se enfrenta a los problemas de éste tipo reproduciendo lo que en clases se le enseñó sin considerar las verdaderas características que hacen llamar, a un lado del triángulo rectángulo “cateto”. El estudiante asume como una regla que los catetos deben ser a y b aunque aparezcan letras diferentes en los lados del triángulo rectángulo. Las letras a y b de los catetos para el estudiante siguen siendo las letras que corresponden a los catetos, independiente que en un nuevo triángulo, éstos ahora se hayan denominado por “p” y “q”.

Se observa así un fenómeno similar a lo que ocurre con el ejemplo 1, que entorpece la incorporación de la letra como variable, ya que los estudiantes están asignando de manera rigurosa “sin variar” o “sin cambiar” la letra inicial que se haya usado para explicar una propiedad algebraicamente, como fue el caso del área de un cuadrado y del teorema de Pitágoras.

Ejemplo 3: Reemplazar variables en una expresión algebraica

En el contexto de práctica profesional de una de las seminaristas a cargo de la investigación, específicamente durante el contenido de algebra (ecuaciones) con niños de séptimo, se les plantea que dado un valor de x, lo reemplacen en una ecuación dada y vean si obtienen la igualdad (si la igualdad se cumple). Por ejemplo, 5x = 15 con x=3, a lo que un alumno responde 53=15 por lo tanto no se cumple la igualdad, reemplazando directamente sin considerar la yuxtaposición que existe entre los términos como lo menciona Socas (1997) convirtiendo el número en uno de dos cifras. Luego de ver esta respuesta por parte del estudiante se le pregunta el porqué de su respuesta (¿Por qué crees que el número que obtienes es 53?) a lo que responde... "Por qué reemplazando el 3 en el lugar de la x se forma el 53".

De lo anterior podemos concluir que el estudiante ve la letra como "algo" que acompaña a otro símbolo ya sea una letra o un número, pero no logra comprender o ver la operación que existe entre la letra y el otro símbolo que "la acompaña, por lo que al ver la expresión algebraica 5x pasa desapercibida la multiplicación 5·x, producto de esto solo reemplaza y deja este número "acompañando a la x".

1.1.2 Investigaciones realizadas con anterioridad por autores destacados

Diversos investigadores sostienen y exponen sus teorías acerca de la mala significación de la letra o los errores cometidos cuando se enfrentan a ellos dentro del algebra, Kieran (1990; citado en García, Segovia y Lupiañez, 2014) por ejemplo ejemplifica la dificultad que los estudiantes tienen del paso de la aritmética al algebra con un ejemplo como lo declara García, Segovia y Lupiañez, (2014) "En aritmética, 12m puede significar 12 metros, es decir, 12 veces 1 metro. Pero en álgebra, 12m puede significar 12 veces un número indeterminado de metros". Se plantea esta complejidad primeramente por el contexto en el cual adquiera significado la letra, "La variedad de significados que una sola letra puede tomar indica la complejidad que tiene para los estudiantes, especialmente cuando éstos intentan identificarlas y utilizarlas en diferentes contextos" (García, Segovia y Lupiañez, 2014. p.1548).

De forma similar menciona García, Segovia y Lupiañez (2014) que Usiskin (1988) declara que el uso de las letras en el álgebra puede aplicarse a diferentes contextos y con distintos significados en cada uno de los casos y que el concepto de variable es el de mayor nivel de entendimiento del uso de las letras, ya que esto implica que el estudiante logre superar la simple realización de cálculos y resolución de problemas de manera monótona y mecanizada para alcanzar un nivel superior de entendimiento considerando la utilidad de los procedimientos matemáticos y el porqué de estos mismos.

Las diversas dificultades que tienen los estudiantes a la hora de comprender y trabajar en algebra son de distinta naturaleza, partiendo por la complejidad de los mismos objetos del algebra, la diversidad en los mismos procesos algebraicos, dependiendo también del distinto nivel cognitivo de los alumnos que estén en el aula y no es menos importante destacar las predisposiciones que muchas veces existen para con las matemáticas.

En los últimos años se ha podido observar que la educación actual muchas veces no produce los resultados que se esperan realmente por parte de los estudiantes pues no se fomenta la construcción del conocimiento, la manipulación del material didáctico para el descubrimiento y no se da importancia a la experiencia dentro del proceso educativo, por lo que el aprendizaje no es duradero ni se logra una amplia concepción de los distintos conceptos u objetos matemáticos, objetos que incluyen la letra en algebra.

Como se menciona en *Concepto de variable: Dificultades de su uso a nivel universitario*,

> Un concepto de gran importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de difícil comprensión entre los estudiantes lo es, en particular, el concepto de variable. Las razones de su dificultad residen, entre otras, porque éste es sorprendentemente difícil de definir.
>
> (Morales y Díaz, 2003, p.109)

Generalmente para iniciar el uso de la letra como variable en los textos escolares no se da una introducción de manera experiencial que de un sustento y una base firme acerca de la idea de variable a los jóvenes estudiantes del sistema escolar, por lo que este es adquirido, pero de manera superficial y poco significativa.

Otra posible causa de los errores que se comenten en el uso de la variable es también producido por el hecho de ser un sistema de representación más abstracto, cuando los estudiantes dejan de percibir los elementos matemáticos como objetos o elementos concretos que están a su alcance y pasan a ser representaciones mediante letras, cualquiera sea su significancia.

1.2 Definición del problema y pregunta de investigación

En el contexto educativo se presentan y evidencian diversos conflictos en cuanto comienza el estudio del álgebra desde niveles iniciales. Debido a esto, a lo largo del tiempo se ha incrementado el interés por la investigación, buscando las posibles causas de los errores en los estudiantes y los obstáculos que se podrían presentar en la enseñanza y aprendizaje de un tema tan relevante como es la iniciación al álgebra.

Socas (1997), sostiene que los errores en los que incurren ciertos estudiantes tienen su incidencia u origen en un obstáculo; en la iniciación del estudio del álgebra, por ejemplo, los estudiantes suelen trabajar situaciones donde la operación adición en álgebra ya no es ni significa lo mismo que en aritmética. En este sentido también podemos visualizar, por ejemplo, la yuxtaposición de símbolos en el lenguaje algebraico donde: 5x suele notar 5 veces x, el alumnado tiende a sustituir un valor por x y convertirlo en un número de dos cifras, por ejemplo 53.

Por otro lado, diversos autores han estudiado acerca de la motivación y algunas metodologías y técnicas didácticas que demuestran ser eficaces en la concepción del aprendizaje significativo, por ejemplo Sarabia (1992; citado en Díaz y Hernández, 2002), expone técnicas participativas, discusiones y técnicas de estudio activo, exposiciones e involucramiento de los alumnos en la toma de decisiones lo que muestra la importancia que juega el rol de la motivación en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y la de generar nuevas estrategias metodológicas para conseguir una aprobación por parte del estudiante, finalmente su motivación y posteriormente con esta permitir el logro del aprendizaje del álgebra a partir del trabajo consiente en las problemáticas presentadas, considerando ésta en el plano pedagógico como “fomentar o proporcionar motivos, es decir, estimular la voluntad de aprender” (Díaz y Hernández, 2002, p. 69).

Considerando las investigaciones previas a las que se ha hecho mención y las experiencias de las investigadoras, se puede evidenciar la necesidad de la propuesta de situaciones didácticas como una alternativa metodológica de enseñanza que busque corregir y/o enfrentar estos errores comunes que se cometen por la incorrecta significación y contextualización de las letras en el álgebra. El estudio se desarrollará en un establecimiento particular subvencionado de la comuna de La Cisterna, donde se han evidenciado errores relacionados con la incorporación de las letras en el álgebra.

De acuerdo a los antecedentes expuestos con anterioridad, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera una propuesta didáctica, diseñada con base en la metodología de la ingeniería didáctica, favorece la comprensión de la letra como variable en estudiantes de séptimo básico?

1.3 Objetivos generales y específicos

1.3.1 Objetivo General

Validar a través de la ingeniería didáctica, una propuesta didáctica dirigida a estudiantes de séptimo año básico de un colegio particular subvencionado de la comuna de La Cisterna, cuyo fin es favorecer la comprensión de la letra como variable por parte de los estudiantes.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Realizar un análisis preliminar considerando los estudios didáctico, cognitivo y epistemológico de la incorporación de la letra.
- Diseñar e implementar una situación didáctica considerando las concepciones erróneas cometidas por los estudiantes en un test diagnóstico que busca recoger antecedentes de su comprensión de la letra como variable.
- Contrastar los resultados obtenidos en la secuencia, a través de una validación interna, siguiendo la metodología de la Ingeniería Didáctica.

1.4 Hipótesis o supuestos

Supuesto 1: Se espera que los estudiantes tengan dificultades a la hora de dar una significación a la letra, de esta manera se podrían definir 3 posibles errores según las categorías que expone Kuchemann (1980; citado en Enfedaque, 1990):

a. Letra evaluada
b. Letra como objeto
c. Letra como incógnita específica

Supuesto 2: Luego de la implementación de la propuesta didáctica se espera que los estudiantes adecuen el uso de las letras en distintos contextos algebraicos e incorporen sus distintas significantes según el contexto matemático, comprendiendo la letra como variable.

Supuesto 3: Existe una estrecha relación entre la modalidad de trabajo y el rendimiento o desempeño del estudiante. Se espera que al momento que se enfrenten a trabajar de manera grupal o en equipo el desempeño o rendimiento por parte de los estudiantes sea mucho más fluido y favorezca el aprendizaje del objeto matemático en estudio, en comparación al trabajo realizado de manera individual.

1.5 Justificación e Importancia

De acuerdo a los antecedentes anteriormente mencionados de tipo empíricos y teóricos, se considera pertinente la realización de la investigación, ya que es un tema que no solo hoy sale a la luz, sino que lleva mucho tiempo tratando de ser corregido, pero, como se ha visto, aún persiste en los desarrollos estudiantiles.

Las investigadoras de este trabajo consideran importante y valioso generar una propuesta didáctica que tome en cuenta las dificultades propias al establecimiento educativo, en el curso en donde se realizará el estudio, por ello se comenzó con la aplicación de un test diagnóstico, el cual dio cuenta que esta problemática también se da en dichos sujetos de estudio.

La relevancia de esta investigación radica en la utilidad que esta puede prestar a profesores de enseñanza media y básica, modificándola y adaptando de acuerdo con los distintos niveles educativos y contextos. Cada día es más difícil y son mayores las exigencias en cuanto a las condiciones didácticas y tecnológicas a las cuales se expone a los estudiantes en los establecimientos y creemos que es de suma importancia abordar los contenidos de forma que los estudiantes puedan producir o construir su conocimiento.

Se sabe que existe una amplia gama de estudios en relación a las distintas dificultades que las letras provocan en los estudiantes en el álgebra, se sabe también que no será la investigación fundadora de las situaciones de aprendizaje pero también es necesario idear este tipo de situaciones para generar estos conflictos en los estudiantes y provocar que surja de manera limpia y guiando el aprendizaje de los jóvenes, es por esto que se espera aportar en la creación de una situación de aprendizaje y esté a libre disposición de quienes día a día buscan educar de la mejor manera posible, con esa pasión que solo los docentes tienen.

Se considera que el desarrollo de este tipo de situaciones de aprendizaje favorece la adquisición de los conocimientos y que este se da con más facilidad y durabilidad producto de que este se genera luego de la experimentación, considerando la teoría de Yturralde que menciona que:

> De lo que escuchamos aprendemos tan solo el 5%, de lo que se lee únicamente el 10% y si conjugamos tanto lo que escuchamos como lo que leemos podríamos aprender en efecto el 20%; el 50% se logra si se debate y se argumenta en grupos o equipos de trabajo, el 75% cuando el aprendizaje se logra mediante la práctica y el 80% cuando enseñamos o trasmitimos el conocimiento (Ruiz, 2012, p. 6)

Y considerando la nueva concepción del aprendizaje y rol docente, estas situaciones dan la oportunidad al profesor de ser un facilitador, mediador, guía o acompañante dejando la oportunidad a los jóvenes de razonar y aplicar conocimientos adquiridos que promuevan las actividades, ya sea de manera individual o grupal, de los mismos estudiantes satisfaciendo las exigencias propias de los cambios en educación.

Es importante también ya que estas situaciones se centran en el estudiante, se les da un rol protagónico y participativo, de aquí podemos desprender también la utilidad que tienen para generar un razonamiento matemático menos dependiente, educar y guiar a los jóvenes dándole importancia y sin truncar la creatividad, curiosidad, el poder de la investigación, espontaneidad, etc., que cada día se desplaza con menos recelo en el sistema educativo.

1.6 Limitaciones

1.6.1 Complejidad emocional humana: El ser humano es un ente multifuncional por esto depende mucho de los factores psicológicos, de esta manera se puede mencionar que las respuestas emitidas por los estudiantes pueden variar según el estado anímico en que se encuentren, cosa importante considerando el carácter objetivo de las respuestas que puedan dar y a futuro lo que se pueda evaluar y generalizar en el trabajo de investigación. Es decir, el estado de ánimo puede provocar en los estudiantes simplemente no querer responder las preguntas o actividades producto de situaciones personales y no por falta de conocimientos o saberes errados.

1.6.2 Niveles cognitivos de los estudiantes: Como se expone en el libro “Teorías del aprendizaje”, del autor Schunk (2012), el conocimiento se construye, no estando sometido y sujeto a la edad evolutiva del estudiante, es decir las representaciones del conocimiento del estudiante, se dan de manera independiente a su edad y crecimiento físico.

De este modo, a la hora de la realización de las actividades, nos encontraremos con estudiantes en distintos niveles cognitivos, que puede dificultar la comprensión y la realización del problema planteado.

1.6.3 Número de estudiantes como muestra: La investigación estaba dirigida a una muestra mayor de estudiantes que a la realizada pero debido al periodo por el cual estaba cursando el establecimiento (término de año escolar) no pudo aplicarse a la totalidad pensada, es decir, la cantidad de estudiantes que se utilizó como muestra puede no representar en su totalidad y de manera objetiva la condición que se vive realmente en el establecimiento escolar.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO O CONCEPTUAL

En el presente capítulo se describe y dan a conocer algunos aspectos fundamentales acerca de la teoría de situaciones didácticas propuesta por Guy Brousseau, la cual se utiliza para dar sustento al marco teórico e investigaciones relacionadas con las dificultades de los jóvenes estudiantes en el aprendizaje y comprensión del uso de las letras en el álgebra dentro de sus distintos contextos, específicamente la incorporación de la letra como variable, la importancia que tiene el trabajo en equipo dentro del desarrollo en el aula, la motivación y el uso de material concreto.

2.1 Fundamentos teóricos

Para efectos de la presente investigación se reúnen diversos aportes de autores que referencian acerca de las significantes que dan los estudiantes a la letra dentro del algebra, antecedentes indispensables para la creación y aplicación de la propuesta didáctica que se lleva a cabo.

Enfedaque (1990) explica que Küchemann (1978-1981), dentro del proyecto CSMS (Concept in Secondary Mathematics and Science), ha estudiado las diversas maneras en que los estudiantes utilizan las letras; realizando un test con 51 apartados a 3.000 alumnos/as de segundo, tercero y cuarto de secundaria en Inglaterra, de edades 13,14, y 15 años. En el estudio propone y establece la siguiente categoría de interpretación de las letras:

a) Letra evaluada: A la letra se le asigna un valor numérico desde el primer momento. Es el caso de: Si e+f=8, entonces e+f+g=... (...)
b) Letra no usada: La letra es ignorada, o se reconoce su existencia, pero no se le da un significado ni se opera con ella. (...)
c) Letra usada como objeto: La letra es vista como una abreviatura de un objeto o como un objeto por sí misma. (...)
d) Letra como incógnita específica: La letra es un n° específico, concreto, aunque desconocido, con el cual es posible operar directamente. (...)
e) Letra como número generalizado: en que la letra puede tomar varios valores, más que uno sólo, pero sin llegar a considerar una variable. (...)
f) Letra como variable: La letra es vista como representando un rango de valores específicos, y a la vez se contempla la existencia de una sistemática relación entre dos conjuntos de valores. (...)

(Enfedaque, 1990, pp. 26-27)

Kuchemann considera que de acuerdo a esta clasificación del uso de la letra, estos niveles se alcanzan y se presentan con una dificultad de manera creciente, teniendo en cuenta esto un niño habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en algebra solo cuando sea capaz de utilizar la letra como variable, siguiendo el orden lógico propuesto por el, hasta alcanzar el nivel requerido según su nivel de enseñanza, por lo que supone que en un inicio el estudiantes obviará la existencia de una letra por su poca experiencia en la utilización de estas, luego dará paso a la utilización de la letra como objeto, solo dando el carácter de etiqueta a este símbolo, siendo más fácil esto que ver la letra como incógnita especifica por ejemplo o como numero generalizado, y así sucesivamente según el nivel que alcance de significación, siendo la letra como variable el nivel más completo y abstracto.

Ésta y otras diversas investigaciones (Mason, 1999; Kieran, 1988, Kaput, 1986; Brousseau 1996; Grupo Azarquiel, 1993) expuestas en la tesis de maestría "la generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del algebra elemental" sugieren que el paso al registro simbólico se realice sólo después de haber transcurrido suficiente tiempo y trabajo en las etapas de observación y descripción verbal de los patrones; además, recomiendan a los profesores la tarea de crear ambientes propicios para que la escritura simbólica aparezca como una necesidad del estudiante de comunicar de manera más efectiva sus registros, lo cual se considera necesario destacar y considerar a lo largo de la presente investigación . Por ejemplo, Mason (1999; citado en Pérez, 2005) afirma que:

> El movimiento hacia la notación matemática formal se debe trabajar en forma gradual, a la velocidad individual de quien aprende. Los alumnos necesitan ver que los símbolos se usan para expresar generalidades, pero sólo los emplearán en forma exitosa cuando estén listos para hacerlo, y cuando perciban una necesidad de hacerlo.
> (Pérez, 2005, p. 49)

Por su parte Kaput (1987; citado en Rico, 2009) se refiere a la dualidad que existe entre el símbolo y el concepto asociado, y muestra las dificultades que de ella se derivan para las matemáticas:

> El concepto de representación da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina el objeto representante (símbolo o representación), el otro es el objeto representado (concepto), también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados.
>
> (Rico, 2009, p. 6)

En cuanto a la importancia que se le asigna en esta investigación a la incorporación de la letra como variable, esta considera también ciertos aspectos históricos observados en general en la enseñanza de las matemáticas, la cual muchas veces no produce los resultados esperados ya que no genera que el estudiante logre producir operaciones nuevas o nociones acerca de una correcta comprensión del algebra. Entre los distintos conceptos algebraicos el concepto de variable es fundamental y uno de los que se adquiere con mayor dificultad, comenzando por que el concepto en si es muy difícil de definir y esto genera confusiones en la comprensión y aprendizaje. Philipp (1992; citado en Morales y Díaz 2003), considera que la comprensión del concepto de variable proporciona la base para la transición de la aritmética al álgebra y es necesario para el uso significativo de toda la matemática avanzada es por esto que se considera fundamental aproximar a estudiantes que utilizan conceptos algebraicos en su aprendizaje en la escuela, el concepto de variable, que de acuerdo a la experiencia de las investigadoras y diferentes investigaciones, se aborda de manera superficial en la escuela, lo que genera problemas en la comprensión y confusión en los aprendizajes matemáticos.

El aprendizaje que adquieren los estudiantes a lo largo de su escolaridad en matemáticas se considera en general poco significativo en cuanto a la incorporación de la letra como variable, estos pueden y son capaces de reconocer el papel que juegan las letras utilizadas como variable pero basta solo con agregar un poco de dificultad en el anunciado o en cambiar los símbolos que estas representan para que los alumnos caigan en contradicciones y en generalizaciones incorrectas, dando cuenta que el aprendizaje no ha sido interiorizado sino que buscan soluciones memorizadas y muchas veces reproducen sin sentido lo que recuerdan de sus lecciones.

De acuerdo a los resultados de las diversas investigaciones antes expuestas se destaca el hecho de que los alumnos tienen distintas formas de interpretar el uso de las letras, para llegar a ver la letra como variable, considerando que las variables pueden representar diversas cosas, objetos o situaciones dependiendo del problema al cual se haga referencia, producto de esto es que, a veces es errónea la interpretación que se les da a los símbolos utilizados.

La letra o factor literal puede ser utilizado en diversos contextos de distintas maneras e incluso dentro de un mismo contexto de diversas formas dentro de un mismo problema adquiriendo distintas significaciones o caracterizaciones. Para lograr una mejor comprensión se considera fundamental dentro de esta investigación que la letra se considere como algo más allá de un símbolo con el cual se puedan realizar cálculos y operaciones, que se vea como una forma de prever un suceso o situación determinada, comprender a lo que nos conduce esta interpretación y poder relacionar los distintos aspectos que están comprometidos en este proceso, que se logre interpretar, que se interiorice el verdadero sentido o papel que juega la variable en cada situación, siempre buscando representar a través de ella una situación de manera simbólica.

Es importante también destacar que para la creación de la propuesta didáctica se consideran los errores de los estudiantes, como se menciona en la revista de ciencia y tecnología "Los conocimientos matemáticos en el umbral de la universidad" señala que Brousseau (1983), define el error como:

El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que ahora se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido

(Caronía, Rivero, Operuk, Mayo, 2014, p. 7)

y de acuerdo a esto se considera en primera instancia el diagnóstico para identificar que conocimientos están implícitos dentro de sus errores y orientar la propuesta didáctica a fortalecer y reorientar estos mismos.

2.2 Teoría de situaciones didácticas

En el presente apartado se dan a conocer algunos aspectos básicos acerca de la teoría de situaciones didácticas desarrollada por Brousseau (2007) la cual se utiliza como base para la creación y poder llevar a cabo de la presente investigación.

Como se expone en el libro iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas en los inicios de los años 70 las situaciones didácticas eran las situaciones que sirven para enseñar, donde no se consideraba el rol del profesor, de esta manera para poder enseñar un conocimiento determinado se utilizan medios, ya sea textos de estudio, materiales, etcétera. La ingeniería didáctica por su parte estudia y produce dichos medios mencionados anteriormente.

Se define una Situación como: "un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado" (…) (Brousseau, 2007, p.17)

El sujeto debe disponer de un medio favorable para poder alcanzar el conocimiento y el aprendizaje, se define al medio como "un subsistema autónomo, antagonista del proceso" (…) (Brousseau, 2007, p. 17)

"La situación es, entonces, un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente, que la considera como una herramienta" (Brousseau, 2007, p.17)

Según lo referido anteriormente, se puede identificar una situación matemática, siendo ésta aquella que provoca una acción matemática en el educando sin ser intervenida por el docente, pero considerando su manipulación previa a la aplicación.

Según lo que expone Brousseau (2007) en su libro Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas, donde habla de los orígenes de la teoría de situaciones; muestra que la enseñanza es concebida a partir de la relación que existe entre el sistema educativo y el alumno. Este último visto como el receptor del conocimiento, definiendo al alumno como un transmisor del saber dado, de este modo la relación didáctica que se da en el sistema educativo se interpreta como una comunicación de informaciones.

Se asocia la concepción de la enseñanza en la que el docente organiza y maneja el saber que se desea enseñar en una serie de mensajes, de los cuales el educando toma los que debe alcanzar.

El autor realiza un esquema que permite visualizar la asignación del estudio de la enseñanza en diversas disciplinas y el papel que juegan cada uno de los objetos de estudio como se muestra a continuación:

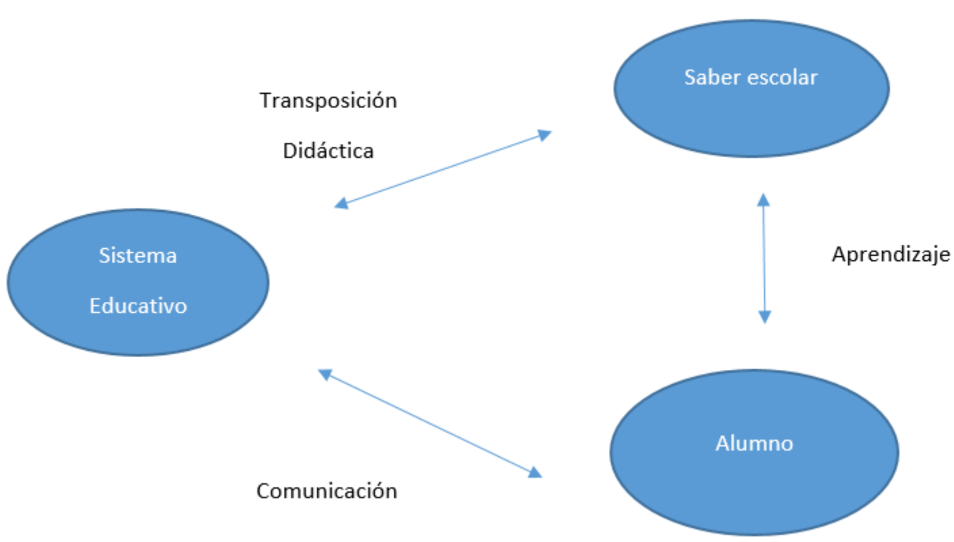


Imagen 5: Guy Brousseau 2007, iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas

En la asignación del estudio de la enseñanza podemos observar que,

> Por ejemplo, la matemática tiene la responsabilidad de legitimar el saber escolar, las ciencias de la comunicación se responsabilizan por la traducción en mensajes adaptados, la pedagogía y la psicología cognitivas por comprender y organizar las adquisiciones y los aprendizajes del alumno, etc.
>
> (Brousseau, 2007, p.13)

Respecto de los fenómenos de aprendizaje y desde diferentes perspectivas, psicólogos han demostrado la tendencia natural de los sujetos a adaptarse a su medio; por ejemplo:

> Skinner estudia el papel de los estímulos y respuesta de los sujetos, proponiendo construir un modelo de sujeto; Piaget se ocupa esencialmente de la génesis no escolar de los conocimientos y, para ello, concibe-desde su formación científica, dispositivos experimentales donde el niño revela sus modos de pensamiento y el investigador reconoce, en sus comportamientos, las estructuras y los conocimientos matemáticos a elección; Vygotsky estudia las modalidades de la influencia del medio sociocultural en el aprendizaje de los alumnos y el estudio del medio en sí mismo da lugar, en consecuencia, a un ámbito ideológico o científico.
>
> (Brousseau, 2007, p.14)

Desde estas representaciones, la enseñanza se convierte en una actividad que relaciona dos procesos: uno de enculturación y otro de adaptación independiente.

Algunos conceptos básicos de Teoría de Situaciones Didácticas:

Situación didáctica: llamaremos situación didáctica a un modelo de interacción de un sujeto con el medio que lo rodea, a un conjunto de relaciones que se establecen de manera implícita entre un grupo de estudiantes, el medio y el docente.

Esta situación se caracteriza por ser intencionada por el docente a cargo y tiene también algunos aspectos a considerar:

Contrato didáctico: De forma explícita o implícita se da a conocer las actividades a realizar, la forma en que se trabaja, las expectativas que tiene el docente al respecto y lo que el grupo también espera del docente. Son finalmente las reglas establecidas dentro de la situación.

Situación a-didáctica: Es la fase de la situación en donde el docente consigue despojarse totalmente del tema problema, donde los estudiantes se hacen cargo y toman parte de la resolución del mismo, se genera un proceso de trabajo autónomo por parte del estudiante.

Brousseau distingue cuatro fases o situaciones didácticas:

Fase 1: Situación de acción

En esta situación se establece la relación entre el estudiante y el medio al cual se expone, se aborda el problema de forma individual y se pone en acción los conocimientos de los que ya dispone el estudiante y su toma de decisiones para poder llegar a la solución de la actividad o problema planteado.

Fase 2: situación de formulación

En esta situación o fase el estudiante formula un mensaje que da a conocer acerca de las hipótesis formuladas de forma personal para la resolución del problema planteado, mensaje que es recibido por el resto de los estudiantes o grupo de estudiantes presentes en la situación didáctica y viceversa. La finalidad de esta situación es que se establezca la comunicación entre los mismos estudiantes que forman parte, para que el mensaje sea recibido y emitido de forma que todos lo entiendan, deben manipular y modificar el lenguaje coloquial utilizado por ellos y emitir utilizando un lenguaje preciso y adecuado, acorde a la situación.

Fase 3: situación de validación

En esta fase los estudiantes buscan llegar a un acuerdo con respecto a las hipótesis que dieron a conocer en la etapa anterior (formulación) y reconocer la veracidad o falsedad de las mismas. Cada opinión o respuesta al problema es sometida al juicio de los demás estudiantes o grupo de estudiantes con el propósito de que su acepción sea validada por el resto que tiene la tarea de aceptarlas como verdaderas o rechazarlas si estas son falsas. En esta oportunidad es importante que argumenten tratando de convencer de su postura y su validez al resto de alumnos.

Fase 4: Situación de institucionalización

Es la fase esencial de una situación de aprendizaje, esta fase relaciona las producciones que el alumno ha creado de manera libre a través de la situación didáctica con el saber científico. Podríamos llamar a las clases más bien tradicionales, clases de institucionalización ya que se dice lo que básicamente se quiere que el alumno sepa y aprenda, se le explica y posteriormente se busca identificar cuánto ha aprendido.

En la situación de institucionalización se debe recapitular, concluir y establecer la relación entre lo que se produjo a través de cada una de las fases anteriores de la situación y el saber cultural.

La teoría de Brousseau nos permite en la presente investigación diseñar y analizar la secuencia didáctica ideada por las investigadoras a cargo, con la intención de conseguir un ambiente propicio para la producción del conocimiento por parte de los estudiantes en el área de la incorporación de las letras en los distintos contextos matemáticos abordados contextualizando esta situación en niños de séptimo básico. Es esto lo que le da sustento a la presente investigación y a la propuesta didáctica que se busca diseñar. De acuerdo a lo anterior la tarea docente es idear situaciones matemáticas que puedan experimentar los estudiantes y provoque en ellos la concepción del conocimiento.

2.3 Importancia del trabajo colaborativo en el aula

Hoy en día es importante detenerse a pensar en el tipo de educación que se quiere entregar a los jóvenes y que habilidades buscamos que estos desarrollen en su proceso de aprendizaje, el tipo de educación que hoy prima es una educación tradicional basada en las clases de tipo expositivas dirigidas a los estudiantes que cumplen con un rol pasivo dentro del aula, con poca participación e interacción con el resto de los compañeros. Debido a este clima de aula que hoy es predominante, surge una serie de efectos que restringen de cierta forma la reflexión por parte de los jóvenes, relaciones sociales, habilidades comunicativas, etc. Al respecto surgen también, dudas acerca de cuanto influye el trabajo colaborativo en el aprendizaje de los estudiantes y si sería optimo realizar un cambio en el paradigma predominante para dar paso a un cambio de roles dentro del aula, poniendo el foco en la participación activa, en las interacciones entre estudiantes y si facilita el aprendizaje, el promover una cultura de aula cooperativa.

Para efectos de esta investigación consideraremos la cooperación o colaboración como, trabajar juntos para alcanzar ciertos objetivos comunes, dentro del contexto de enseñanza-aprendizaje los estudiantes deben tener una actitud que favorezca el trabajo en equipo y que busque conseguir su propio aprendizaje y el de los demás integrantes del grupo de trabajo. Teniendo en cuenta esto ¿Por qué será tan importante el trabajo colaborativo dentro del aula?, las primeras investigaciones acerca del tema se sitúan en el año 1898 y desde entonces se masificó su estudio.

A continuación, para una mejor comprensión de las características positivas y el efecto que tiene este trabajo colaborativo en los jóvenes y en las escuelas se presenta un cuadrado comparativo considerando 3 tipos de aprendizajes según investigaciones previas, en primera instancia el trabajo competitivo, el trabajo individualista y finalmente el trabajo cooperativo en el aula:

Tabla 1: Cuadro comparativo de aprendizajes competitivos, individualistas y cooperativos en el aula.

Trabajo competitivo	• En educación este trabajo consiste en trabajar para alcanzar un objetivo que solo puede conseguir un estudiante o unos pocos, dentro de estas

	situaciones los estudiantes buscan y son motivados a alcanzar un aprendizaje en donde los resultados sean beneficiosos solo para ellos mismos, siendo perjudicial esto para los demás. • En este tipo de trabajo el estudiante busca conseguir un tipo de desempeño mejor y más preciso que el de sus compañeros. • La competencia entre compañeros puede primar dentro de un grupo, dentro de la clase, en evaluaciones, etc. • Los estudiantes buscan interponerse en el éxito o el trabajo de los demás, no ayudan al resto y buscan disminuir el rendimiento de su competencia.
Trabajo individualista	• En educación los esfuerzos individualistas de los estudiantes consisten en trabajar solos para alcanzar sus propios objetivos, pero sin intervenir en los objetivos que se han planteado el resto de los estudiantes. • Que un estudiante consiga el éxito no influye en el hecho de que otros sean exitosos también. • Consiste en trabajar para uno mismo independiente de los esfuerzos de los demás estudiantes. • Se busca alcanzar ciertos criterios antes establecidos.
Trabajo cooperativo	• En el trabajo colaborativo los estudiantes buscan resultados beneficiosos para sí mismos y

	para los integrantes de sus grupos. • Los estudiantes estudian juntos para mejorar su propio aprendizaje y el de los demás. • Dentro del rol que le corresponde al docente dentro de este tipo de trabajo es el de coordinar, y establecer criterios para que estos de forma grupal puedan superar. • El grupo sirve como una contención y apoyo. • Entre estudiantes, estimulan el éxito de los demás, discuten acerca del tema, explican cómo completar la actividad, escuchan las explicaciones y acotaciones de los demás integrantes, se esfuerzan de forma individual y se alientan a conseguir ciertos logros. • Los estudiantes se proporcionan ayuda, en los casos que otros la necesiten.

Fuente: Elaboración propia

Se cree conveniente el aprendizaje en compañía de un trabajo colaborativo porque promueve un mayor esfuerzo para conseguir un buen desempeño, esto se ve reflejado en un rendimiento más elevado y una mayor productividad por parte de la totalidad de los estudiantes, una mayor retención a largo plazo, mayor motivación intrínseca, mayor tiempo dedicado a las tareas, nivel superior de razonamiento y pensamiento crítico. Favorece las relaciones más positivas entre estudiantes, lo que favorece el espíritu de trabajo en equipo, forja relaciones más comprometidas y valoración de la diversidad. Favorece también la integración y la capacidad de enfrentar dificultades. (Johnson, 1999)

2.4 Papel que juega el material didáctico en las clases dentro del aula cooperativa

Al planificar una clase, los docentes deben decidir que materiales son los propicios para desarrollar en el estudiante las habilidades necesarias, ciertos niveles de conocimiento y niveles cognitivos esperados, enmarcados dentro de un sistema educativo. Saber distribuir estos materiales elegidos es esencial para sacar el mayor provecho de la situación de aprendizaje buscando incrementar la colaboración entre los estudiantes.

Algunas funciones del material didáctico (concreto), que beneficia el aprendizaje de los estudiantes son:

- Motivación por parte de los participantes que utilizan el material didáctico.
- Proporciona información acerca de la actividad a realizar.
- Facilita la comunicación.
- Contextualiza a los estudiantes dentro de la actividad.
- Guía el proceso de enseñanza- aprendizaje.

La utilización de material didáctico, específicamente material concreto dentro del aula y en la presente investigación busca cumplir con los propósitos de motivar y estimular en la participación a los alumnos objeto de estudio, que estos mismos apliquen el aprendizaje para reacomodar según su conveniencia el material, que organicen los contenidos y sean partícipes mediante una enseñanza activa y concreta. Por otra parte, se busca también favorecer la adquisición de ciertas habilidades por parte de los estudiantes, como la de favorecer la argumentación y comunicación, la cual prima en el trabajo colaborativo.

A la hora de hablar de material didáctico también como docentes se debe tener en cuenta los riesgos de la incorrecta manipulación de estos mismos, asumiendo estos a la hora de utilizar en las aulas:

- Material no explotado y debido a esto no obtener los resultados esperados.
- Exceso de información en momentos inoportunos.
- No tomar conciencia acerca de la calidad y beneficios que presta la utilización del material.
- Centrar la atención en el material y no en el conocimiento que se adquiere a través de la utilización y manipulación de este material.

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

3.1 Enfoque de investigación

El enfoque a emplear en esta investigación es un estudio cualitativo, de tipo experimental. Se trabaja considerando experiencias previas por partes de las investigadoras, identificando y definiendo el problema e hipótesis, las variables y la operación de las mismas.

3.2 Diseño de investigación

El diseño de investigación cualitativa escogida fue el estudio de casos, en este se busca indagar y analizar acerca de la incorporación de la letra como variable en álgebra en un número determinado de estudiantes de un establecimiento particular subvencionado de la comuna de la Cisterna de séptimo año básico.

En el presente estudio se tiene como características indagar en un fenómeno y espacio específico, comprender e interpretar el fenómeno estudiado, buscando localizar en los rasgos profundos y las características del caso que se estaba estudiando en su forma particular y no general.

3.3 Ingeniería Didáctica

La noción de ingeniería didáctica se da a partir de los años ochenta, y se caracteriza y distingue como una forma de trabajo didáctico, comparable con el trabajo que realiza un ingeniero ya que estos en su labor se someten a un control de tipo científico.

Artigue, Douady, Gomez (1995), en su libro “Ingeniería didáctica” señala que en el proceso experimental de la ingeniería didáctica se distinguen cuatro fases:

Fase 1: Los análisis preliminares

En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. Los más frecuentes tocan:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva

- Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

(Artigue, Douady, Gomez 1995, p.38)

Fase 2: La concepción y el análisis a priori

En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado.

Artigue asigna ciertas características a esta fase que comprende una parte descriptiva y una predictiva, en primera instancia describe las características de la situación. Luego analiza que cosas podrían ocurrir, que está en juego para los estudiantes considerando las distintas posibilidades una vez puesta en práctica la propuesta en este caso. Y finalmente, prever los comportamientos posibles y asegurar de cierta forma que los cambios que existan en el conocimiento adquirido y desarrollo de la actividad por parte de los estudiantes es consecuencia de la puesta en práctica de la propuesta didáctica. Se considera al estudiante como el protagonista y principal actor de lo contrario el profesor está siendo guía en este proceso, sin intervenir directamente hasta la fase de institucionalización.

Fase 3: Fase de experimentación

En esta fase que se ejecuta lo diseñado y se recogen los datos que dan información sobre los fenómenos identificados en el análisis a priori. Es aquí donde se establece el contrato didáctico, se aplican los instrumentos de investigación y se registra todo lo observado durante la experimentación de la propuesta didáctica.

Fase 4: Fase de análisis a posteriori y evaluación

En esta fase se ve en conjunto los datos recogidos en la experimentación. Su análisis se fundamenta en una síntesis de contenido de los datos obtenidos en la implementación, para la confrontación con el análisis a priori.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación se caracteriza por estar basada en las realizaciones didácticas en el aula, la concepción, realización, observación y analizar las secuencias de enseñanza, se caracteriza también por el registro de los estudios de caso, como es el caso de la presente investigación y su tipo de validación interna.

3.4 Universo y muestra:

a) El Universo: Los estudiantes objeto de investigación están inmersos dentro del siguiente contexto:

Miembros de un establecimiento particular subvencionado de la comuna de La Cisterna. Los niveles de enseñanza que se imparten son pre básica (Pre kínder, Kínder) Básica completa y media completa. Su horario y jornada escolar es jornada escolar completa excepto enseñanza básica (hasta séptimo básico). El número de matrículas totales del establecimiento son 1412, el número promedio de matrículas por nivel es 35, el número de docentes es 62 y asistentes de la educación 50.

b) La muestra: Es un subconjunto del universo de los sujetos compuesto por 12 alumnos aproximadamente, pertenecientes a un séptimo año básico, miembros del contexto que se describió anteriormente, muestra intencionada escogida con base al conocimiento de la población.

3.5 Fundamentación y descripción de técnicas e instrumentos

En un principio se diseñará un instrumento base como evaluación diagnóstica, el cual se aplicará a los estudiantes para observar la manera en que trabajan las letras en el álgebra, y que tiene como objetivo principal identificar las distintas dificultades que presentan los educandos en la incorporación de las letras en el álgebra. Posteriormente se diseñará y aplicará una secuencia didáctica siguiendo las fases de la ingeniería didáctica Artigue, Douady, Gomez (1995). Al momento de su implementación se recurrirá a audio grabación, videograbación y recolección de producciones estudiantiles. Finalmente, para el análisis de la información y posterior contraste a efectuar como última etapa de la Ingeniería Didáctica, en caso de ser necesario, se podrá recurrir a entrevista semiestructurada para refinar el análisis de las producciones estudiantiles en la fase de validación interna de la secuencia.

La metodología de investigación es a partir de una ingeniería didáctica, siendo esta la base y orientación para la identificación, clasificación, creación y finalmente validación de la situación didáctica que se desarrollará.

3.6 Validez y confiabilidad:

a) Validez

Para garantizar la validez de los instrumentos en la presente investigación (test diagnóstico y propuesta didáctica), se acude a la validación de los instrumentos utilizados por parte de tres expertos en el área de la educación matemática, para asegurar la concordancia y utilidad de estos mismos instrumentos para el estudio y análisis del fenómeno que se quiere medir. Los expertos fueron:

Mg. Mauricio Moya Márquez, Profesor de Matemática y Computación, Magister en Educación y Máster de Entornos Virtuales para la Enseñanza y Aprendizaje mediado por Tecnologías Digitales; **Dra. Tamara Del Valle Contreras**, profesora de educación matemática e informática educativa; Magíster en enseñanza de las ciencias, mención didáctica de las matemáticas y Doctora en Didáctica de las Matemáticas; y, finalmente, **Dr. Marco Antonio Rosales Riady**, Profesor de Matemática, Licenciado en Matemática, Magíster en enseñanza de las ciencias, mención didáctica de las matemáticas y Doctor en Educación Matemática.

b) Confiabilidad

Se considera también la aplicación de la propuesta didáctica a los mismos estudiantes que fueron sometidos al estudio en la aplicación del test diagnóstico para asegurar la confiabilidad.

A través de la triangulación se procedió a combinar técnicas utilizadas, las cuales fueron el test diagnóstico, junto a la observación y datos empíricos analizados anteriormente en el marco teórico, con la finalidad de verificar que tan justos y estables son los resultados producidos.

CAPÍTULO 4: PRESENTACION Y ANALISIS DE LA INFORMACIÓN

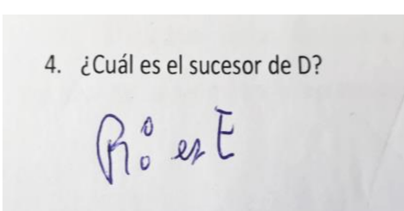
4.1 Aplicación y análisis de un diagnóstico en el lugar de estudio.

Con el fin de lograr mayor objetividad en cuanto al análisis de los contenidos previos de los estudiantes objeto de estudio, se consideró exponer la aplicación y posterior análisis del test diagnóstico aplicado a estos, lo que se muestra en detalle en los anexos de la investigación.

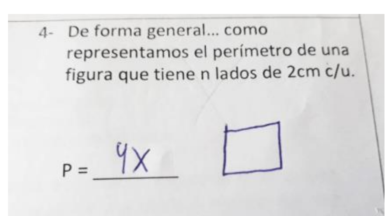
Para la aplicación del test diagnóstico (Ver anexo 1), se considera una muestra de 39 que es el total de estudiantes del curso.

Se tuvo en consideración preguntas relacionadas con nuestro marco teórico, el cual hace alusión a las problemáticas de los estudiantes considerando la letra en algebra como variable, ya que persiste la incorporación de letra en niveles más bien básicos, como la letra como objeto, como letra evaluada y como incógnita especifica. Las interrogantes expuestas en el test diagnóstico estaban especialmente ideadas para ver en qué grado existía esta dificultad antes mencionada en los estudiantes de séptimo año del colegio Manuel Arriarán Barros en particular, lo que trajo exitosos resultados de acuerdo a nuestros supuestos planteados.

Los estudiantes responden de acuerdo a lo que se esperaba, utilizan la letra como objeto en primera instancia, considerándola solo como una etiqueta sin considerar el amplio sentido de lo que significa la letra en algebra por ejemplo en las siguientes situaciones:

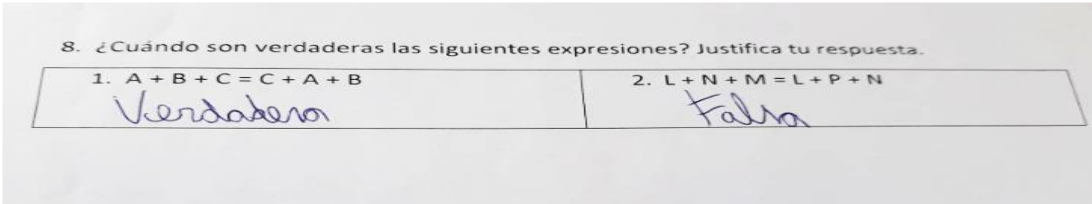


Estudiante 36

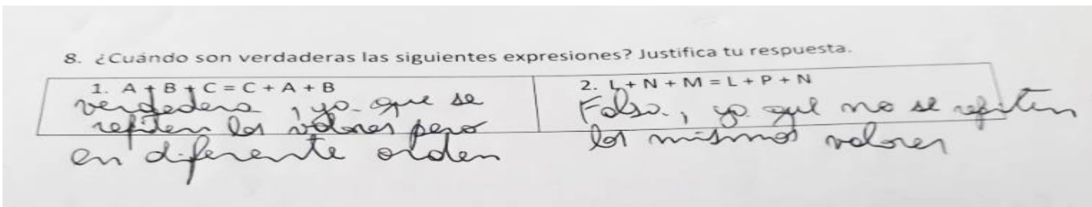


Estudiante 36

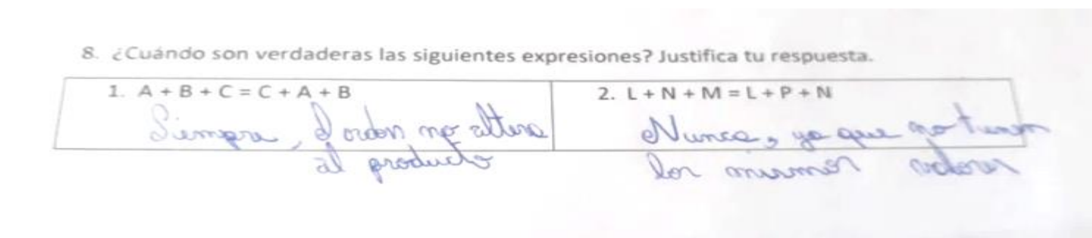
Utilizan también la letra como incógnita específica ya que para ellos no existe la posibilidad de que la letra que ellos asignan a una incógnita cambie y pueda tomar más de un valor:



Estudiante 20

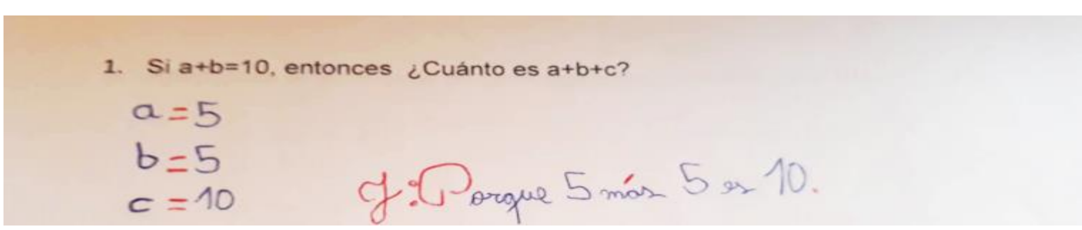


Estudiante 21

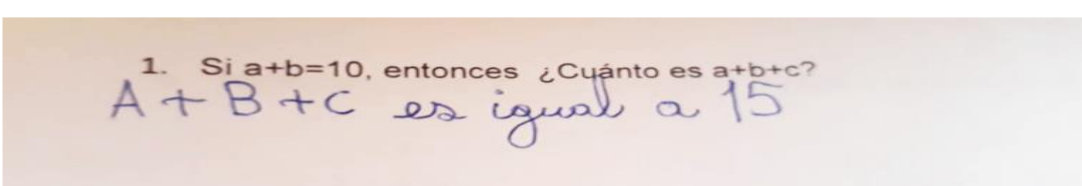


Estudiante 23

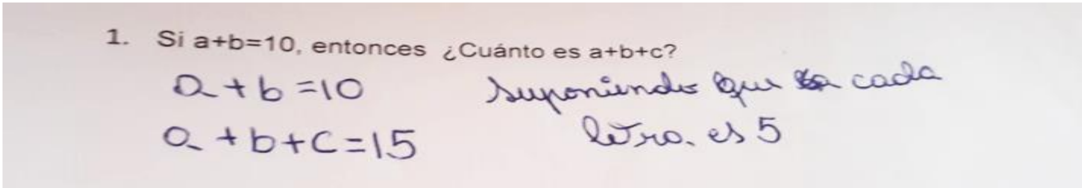
En cada uno de los casos anteriores (Estudiante 21, estudiantes 20 y estudiante 23), los estudiantes responden utilizando la letra como incógnita específica en donde esta es vista como un número específico y concreto, por ejemplo, la letra p y m expuestas en las igualdades al no ser iguales no tomarán el mismo valor. Y finalmente utilizan la letra como evaluada, le asignan un valor desde el primer momento, considerando desde el inicio que, si ambas letras suman 10, cada letra debe tomar un valor igual a 5:



Estudiante 31

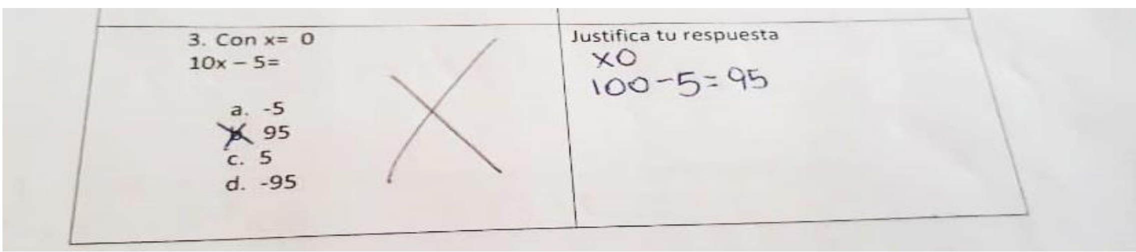


Estudiante 32

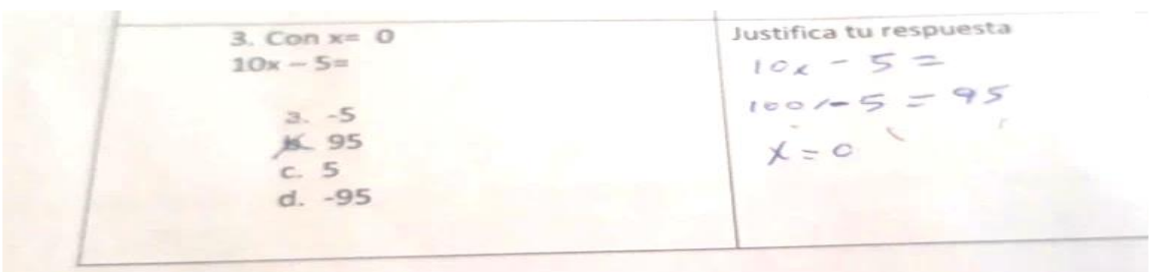


Estudiante 34

Otro hallazgo presente en el diagnóstico, corroborado luego de la teoría expuesta con anterioridad en la presente investigación es la yuxtaposición de los símbolos matemáticos, a continuación, se muestra como se presenta esto en el test diagnóstico, en donde ambos estudiantes pasan por alto la multiplicación entre el factor literal y el coeficiente numérico debido a que esta operación no está explicita:



Estudiante 34



Estudiante 38

A continuación, se presenta la justificación de cada uno de los Ítems del test diagnóstico (Anexo 1):

Tabla 2: Justificación de Test Diagnóstico

Ítem I Preguntas 1, 2, 3 y 4.	Se desea que los estudiantes relacionen las letras con cada una de las situaciones o enunciados, evidenciando si pueden llevar el lenguaje común (verbal), a lenguaje algebraico o matemático.
Ítem II Pregunta 1	Se desea identificar si los estudiantes interpretan la asignación de la letra como evaluada.

Ítem II Pregunta 2	Se desea identificar si los estudiantes ignoran la letra o reconocen su existencia pero no le dan un significado ni operan con ella.
Ítem II Pregunta 3	Se desea identificar si los estudiantes interpretan la asignación de la letra como objeto.
Ítem II Pregunta 4	Se desea identificar si los estudiantes interpretan la asignación de la letra como variable y de qué manera desarrollan y utilizan esta interpretación.
Ítem II Pregunta 5	Se espera que los estudiantes interpreten de igual manera la letra D como las letras usualmente utilizadas como incógnita en clases tradicionales (x, y, z), considerando lo aprendido acerca de lenguaje algebraico o de lo contrario no vean la relación entre la letra D con una incógnita.
Ítem II Pregunta 6	Se espera que los estudiantes consideren la letra N al momento de operar e identificar el antecesor del número que representa (N+3), o que muestren la letra como ignorada.
Ítem II Pregunta 7	Se desea identificar si los estudiantes consideran la operación involucrada entre ambos símbolos (denotada por yuxtaposición) o hacen caso omiso a su interpretación algebraica.
Ítem II Pregunta 8	Se desea identificar si los estudiantes utilizan la letra como objeto y consideran las letras de los lados del cuadrado como una etiqueta o si simplemente la ignoran al hacer el cálculo del perímetro.
Ítem II Pregunta 9	Se desea identificar si los estudiantes ven la letra como una incógnita específica, utilizando la letra como un número específico y concreto, operando directamente con él, dándole un único valor a cada letra.

Fuente: Elaboración propia

4.2 Implementación de la ingeniería didáctica

Luego de la implementación del test diagnóstico se corroboró los errores existentes en la significación de la letra en álgebra, es por esto que se lleva a cabo la aplicación de una propuesta didáctica para favorecer el significado de la letra como variable, utilizando como metodología la ingeniería didáctica:

Conocimiento:

Para realizar la propuesta didáctica debemos considerar algunos aspectos fundamentales para su elaboración, respecto al conocimiento mismo debemos considerar que este debe surgir como la respuesta al problema planteado a los estudiantes en un inicio de la actividad o bien como un medio para que se genere esta respuesta esperada.

Actividad:

La situación de aprendizaje y su diseño están dirigidos a que el estudiante en busca de la solución al problema actúe, formule, pruebe y compare algún modelo que lo lleve a la solución involucrando en él conceptos matemáticos y teorías.

Papel educativo:

Haciendo referencia a nuestro marco teórico podemos mencionar también que para Brousseau en resumen considera el aprendizaje como la modificación del conocimiento pero que es el mismo estudiante quien debe producir por sí mismo el conocimiento y que a través de la situación de aprendizaje el profesor o profesora provoca o intenciona.

Se propone la situación de manera que el estudiante produzca conocimientos como una respuesta más bien personal a un problema dado y lo piense, se pregunte, analice de acuerdo a las mismas exigencias del medio, no a las exigencias del profesor ni del sistema.

4.3 Trabajo de campo o recogida de información

Descripción de la actividad:

La actividad consiste en que los estudiantes resuelvan un problema planteado relacionado directamente con el área de figuras geométricas y cómo a través de las letras pueden representar de distintas maneras, con ayuda del material didáctico entregado; se hace entrega a cada grupo de estudiantes (aprox. De 5 alumnos por grupo) un cuadrado de cartulina con el propósito de rellenar este cuadrado con figuras geométricas en su interior (como tetris), cada una de estas figuras tendrá especificada la medida de sus lados y en conjunto formarán la figura total y que fue el cuadrado entregado al principio.

La actividad realizada está enfocada a trabajar la incorporación de la letra en el contexto de área de figuras planas.

4.3.1 Propuesta didáctica

Objetivos de aprendizaje:

- Resolver un problema planteado relacionado directamente con el área de figuras geométricas.
- Representar áreas de figuras geométricas con letras, de forma algebraica, de distintas maneras, con ayuda de material didáctico (concreto) entregado.

Conocimientos previos:

- Suma y sustracción de números enteros
- Operaciones de fracciones y de decimales positivos
- Ecuaciones e inecuaciones sencillas en $\mathbb{N}$
- Concepto de porcentaje
- Potencia de base 10 y exponente natural

Habilidades:

- Resolver Problemas
- Evaluar procedimientos y comprobar resultados propios y de otros, de un problema matemático.
- Argumentar y Comunicar:
    - Soluciones propias y los procedimientos utilizados
    - Resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas
- Representar de forma pictórica, simbólica o algebraica el llenado de la figura.

Actitudes:

- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

Indicadores de logro:

- Identifica el uso de la letra como variable

- Utilizan de manera conveniente el material concreto para la resolución del problema planteado
- Formulan conjeturas apropiadas en cada actividad propuesta
- Resuelven problemas planteados

Materiales:

- Set número 1
- Set número 2
- cuadrado de cartón de 40 cm de largo x 40 cm de ancho
- cuadernillo de preguntas
- lápices.
- goma.

Instrucciones Actividad 1:

a. Reciba cada uno el set para la primera actividad. El set contiene piezas y un cuadrado de cartón de 40cm de largo por 40cm de ancho.
b. Para comenzar con la actividad reciban el cuadernillo de preguntas, abran su set n°1 y desarrollen la pregunta n°1, n°2, n°3, n°4 y n°5 de forma individual.

Pregunta 1: ¿Con cuántas figuras rellenaste el cuadrado? Dibuja las figuras con las que rellenaste el cuadrado.

Pregunta 2: ¿De qué manera podemos expresar el llenado de la figura?, ¿Qué representa este llenado? Relacionarlo con expresiones o contenidos aprendidos con anterioridad.

Pregunta 3: Busca distintas representaciones para el llenado de la figura, hazlo de forma libre y como te parezca pertinente.

Pregunta 4: Expresa de manera algebraica el área de la figura, usando como base el modo en que rellenaste el cuadrado de cartón y justifica porqué lo hiciste de ese modo.

Pregunta 5: A partir de lo realizado, ¿Podrías identificar en la expresión algebraica alguna coincidencia o algo similar de alguna fórmula que ya conocías? Justifica tu respuesta.

Ejemplo de piezas que contiene el set n°1:

Imagen 6: set número 1

Tabla 3: Justificación de la propuesta didáctica actividad número 1

Actividad 1	Tipo de interacción	Proceder esperado
pregunta (1)	acción	Se espera que el estudiante interactúe, se apropie del material entregado y lo manipule. Luego de esto que sea capaz de elaborar procedimientos de manera personal para ponerlos en práctica y readapte según la utilidad que le presten para la resolución del problema.
	Formulación	En esta fase se espera que el estudiante formule un enunciado dando respuesta a la pregunta n°1 de la actividad, modelando su lenguaje para expresar de forma correcta su postura y explique de forma escrita de qué manera relleno el cuadrado entregado inicialmente.
pregunta (2)	Acción	Se espera que sea capaz de idear algún método algebraico de representación del llenado

		del cuadrado. Se busca que sea capaz de representar con expresiones algebraicas el llenado, identificando el relleno como el área de la figura. Por ejemplo: (3N + 7B + 2a + 3V + 3A+ 4R) Lo que se espera que haga el estudiante en este ejemplo es contar el n° de piezas identificándose por color; con 2a=amarillo 3v= verde 7B= blanco 2A= azul 4R=rojo
	Formulación	Se espera que redacten la expresión algebraica que consideren más propicia para representar el llenado del cuadrado.
pregunta (3)	Formulación	Se espera que el estudiante recuerde contenidos anteriores relacionados con geometría o álgebra, donde pueda relacionar la expresión algebraica que acaba de formular en la anterior fase de formulación con alguna expresión antes vista en clases y formule una comparación entre las fórmulas conocidas y la nueva expresión algebraica propuesta por el como respuesta a la pregunta planteada.
Pregunta (4)	Formulación	Se espera que los estudiantes

		sean capaces de formular conjeturas acerca de cómo representar el llenado de la figura a través de términos algebraicos o en su conjunto expresiones algebraicas.
Pregunta (5)		Se espera que los estudiantes vinculen con conocimientos previos la pregunta número 5 de la propuesta didáctica, recordando fórmulas como la del área de figuras geométricas y perímetro de estas.

Fuente: Elaboración propia

Instrucciones Actividad 2:

a. Hagan entrega de su set n°1 con el que trabajaron de forma personal y la hoja de cuadernillo con sus respuestas.
b. Ahora reúnanse en grupos de 3 personas (los equipos de trabajo son escogidos de forma arbitraria)
c. Reciban su set n°2 y cuadernillo con preguntas, ábranlo; desarrollen las preguntas n°6, n°7, n°8, n°7, n°9, n°10 y nº11 esta vez con sus equipos de trabajo.

Pregunta 6: ¿Con cuántas figuras rellenaron el cuadrado? Dibujen las figuras con las que rellenaron el cuadrado.

Pregunta 7: Expresen de manera algebraica el área de la figura, usando como base el modo en que rellenaron el cuadrado de cartón y justifiquen porqué lo hicieron de ese modo.

Pregunta 8: A partir de lo realizado, ¿Podrían identificar en la expresión algebraica alguna coincidencia o algo similar de alguna fórmula que ya conocían? Justifiquen su respuesta.

Pregunta 9: ¿Qué pasa con los lados de un cuadrado? ¿Qué propiedad tienen los lados de un cuadrado en cuanto a su medida o longitud?

Pregunta 10: A partir de las propiedades de los lados del cuadrado, con relación a su medida o longitud. ¿Cómo se podría representar algebraicamente esta propiedad?

Pregunta 11: ¿Cómo relacionamos la propiedad de los lados de un cuadrado, con la expresión que representa el llenado de este mismo?

Ejemplo de piezas que contiene el set n°2:

Imagen 7: set número 2

Tabla 4: Justificación test diagnóstico de actividad número 2

Actividad 2	Tipo de interacción	proceder esperado
pregunta (6)	Formulación	Se espera que los estudiantes en conjunto formulen un enunciado, dando a conocer su postura en la redacción explicitando el mensaje que desean comunicar al responder la pregunta planteada.
	Validación	Previo a nuestra fase de formulación es necesario una etapa de validación entre pares del mismo equipo de trabajo, tratando de conseguir llegar a un consenso de lo que el grupo presentará o responderá como solución al problema o a la pregunta planteada.
pregunta (7)	Acción	Se espera que los estudiantes de forma personal tomen posturas dentro del equipo de

		trabajo y elaboren hipótesis que puedan manifestar manipulando el material didáctico para luego expresar de forma algebraica el relleno del cuadrado.
	Formulación	Ahora de forma grupal formulan el mensaje que se quiere dar a conocer acerca de su postura o decisión para resolver el problema o la pregunta que se les plantea. Modelan su lenguaje, ahora limitado por las letras que se exponen en cada uno de los lados de la figura, buscando a través de ellas representar el llenado del cuadrado. Por ejemplo: (F + t + F + T) (T + T + A)
	Validación	Existe también entre nuestras fases anteriores, una fase de validación de forma interna por los mismos integrantes del equipo para llegar a formular el mensaje que antes idearon de manera individual, ahora considerando cada una de las opiniones y posturas de los demás integrantes del equipo y considerando las condiciones que esta vez nos entrega el material concreto (cada una de las piezas con sus respectivas medidas).

pregunta (8)	Formulación	Se espera que los estudiantes comenten acerca de sus experiencias o conocimientos previos, de acuerdo al análisis de figuras geométricas y expresiones algebraicas con el propósito de formular finalmente en conjunto el llenado de la figura.
	Validación	Se espera que los estudiantes correspondan el área del cuadrado con el llenado de este mismo, realizado previamente en la fase de formulación.
pregunta (9)	Formulación	Esta fase de formulación busca que los estudiantes reconozcan características propias de la figura geométrica (cuadrado), de esta manera se den cuenta que ya que todos los lados del cuadrado son iguales pueden igualar los lados de la figura (cuadrado) con sus diversas expresiones que los representan. Por ejemplo: ya que, (F + T + F + T) representa un lado del cuadrado y (T + T + A) representa otro lado, considerando que sus lados son iguales entonces: (F + T + F + T) = (T + T + A)
Pregunta (10)	Formular	Se espera que los estudiantes sean capaces de formular hipótesis de forma grupal con respecto a la igualdad de los lados de un cuadrado.

	Validación	Esta fase de validación busca conseguir que los estudiantes lleguen a un consenso luego de dar cada uno su opinión e hipótesis formuladas al respecto y defendiendo ésta argumentando y comunicando al resto porque creen que es válida, consiguiendo una respuesta validada por los integrantes del grupo.
Pregunta (11)	Formulación	Se espera que relacionen lo formulado en la pregunta número 10 con el llenado de la figura (cuadrado).
	Validación	Se espera que validen los conocimientos en conjunto con el equipo de trabajo de tal manera que cada uno pueda exponer su punto de vista y llegar a un acuerdo general relacionando los lados iguales de un cuadrado con la expresión que representa el llenado de la figura.

Fuente: Elaboración propia

Instrucciones Actividad 3:

a. Hagan entrega de su set n°2 y de su segundo cuadernillo de preguntas por equipo.
b. Escojan a un integrante que represente al equipo para dar a conocer la tendencia del equipo de trabajo.

Tabla 5: Justificación test diagnóstico de actividad número 3

Actividad 3	Tipo de interacción	Proceder esperado
	Validación	En esta etapa se espera que los estudiantes puedan validar y defender la postura que tienen de

		forma grupal ya decidida con anterioridad en las preguntas abordadas en la actividad n°2, de esta manera llegar a una conclusión general entre los 12 participantes.

Fuente: Elaboración propia

Actividad n°4:

Reciban una hoja con las siguientes preguntas (las cuales deben ser redactadas en la hoja entregada):

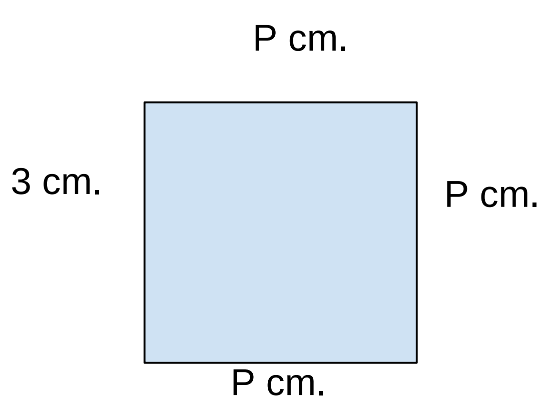
1. ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones?

a. A+B+C = C+A+B

b. L+M+N = L+P+N

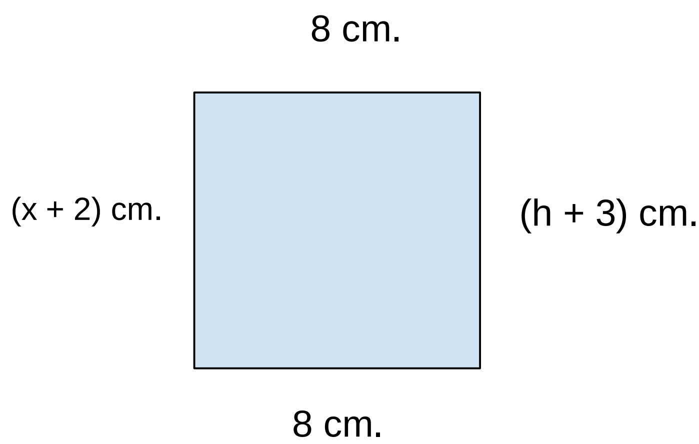
2. Calcula el área de los siguientes cuadrados:

Considera los dos siguientes cuadrados y responde lo que se pide a continuación:
i)



a) ¿Existe algún valor para P de manera que el área de ese cuadrado dé como resultado un número?

ii)



a) ¿Podría ocurrir que x+2 = h+3? Justifica tu respuesta.
b) ¿Existe algún valor para x y para h de manera que el área de ese cuadrado dé como resultado un número?

Se espera que los estudiantes sean capaces de trabajar con las letras como variable, manipulando con ellas de tal forma que igualdad entre expresiones que no necesariamente tengan las mismas letras puedan ser trabajadas como equivalentes, por ejemplo, para este caso en particular, con x+2 = h+3.

Considerando las conclusiones a las que llegaron los estudiantes en la actividad número 4, las investigadoras a cargo de la actividad institucionalizan el saber a través de:

1. Sintetizar lo expuesto por los estudiantes, rescatando lo esencial para la situación de aprendizaje.

2. Explican la relación que existe entre los lados de un cuadrado e igualan las expresiones algebraicas que representan a cada uno.

3. Le dan distintos valores a las incógnitas comprobando que se cumple efectivamente la igualdad.

4. Formalizan el saber dando a conocer la fórmula del área de un cuadrado.

Tabla 6: justificación test diagnóstico de actividad número 4

Actividad 4	Tipo de interacción	Proceder esperado
Partes (1) y (2)	Institucionalización	Se espera recapitular, sistematizar, ordenar y vincular, lo que se produjo en diferentes momentos del desarrollo de las actividades, a fin de poder establecer las relaciones entre las respuestas de los estudiantes y el saber del objeto matemático.

Fuente: Elaboración propia

4.3.2 Análisis Preliminar

En el presente apartado se hará un análisis del objeto matemático y su relación con los sujetos (objeto de la investigación), relacionándolos y considerando las siguientes dimensiones:

1. Dimensión Epistemológica

   En esta dimensión se dará una breve reseña histórica y se expondrán los fundamentos matemáticos acerca del contenido o conocimientos matemáticos (sujeto de estudio), considerando la construcción de este y el progreso a lo largo del tiempo.

2. Dimensión didáctica

   En esta dimensión se analizan las características de cómo se aborda el objeto matemático a través de los año de escolaridad más próximos al considerado como objeto de estudio a lo largo de esta investigación (Séptimo básico), con la finalidad de analizar los recursos didácticos y las estrategias de enseñanza con las cuales se desarrolla o aborda el contenido poniendo el foco de este análisis principalmente en los planes y programas de estudio (texto del estudiante) e investigaciones desarrolladas con anterioridad con respecto al tema.

3. Dimensión cognitiva

   En esta dimensión se expone el estudio realizado con relación a las estrategias y habilidades que desarrollan los estudiantes (objetos de estudio) dentro de la investigación dando énfasis también en el análisis de los errores y dificultades durante el periodo en el cual se aborda la incorporación de las letras en el álgebra, dentro de distintos contextos matemáticos.

Dimensión Epistemológica

a. Referencia histórica

Nesselman (1842; citado en Puig,1998) se menciona acerca de la construcción de la notación algebraica y que esta se construye en 3 etapas, la primera una etapa retórica o verbal que comprende entre los años 2000 – 250 a.C. en tal época surge el lenguaje matemático con la necesidad de comunicar según el contexto, como por ejemplo cuentas, préstamos, no de forma generalizada, sino que de forma específica a cada situación según el contexto.

Más tarde entre los años 250 a.C. – 1500 d.C. se amplía un poco más el campo de la aritmética debido a la actividad comercial, los cálculos en general son más complejos y pueden involucrar más de una variable por lo que buscan representar cada vez de forma más general cantidades desconocidas. A causa de esto mencionado anteriormente surge la necesidad de abreviar para generalizar el lenguaje, lo cual es fundamental considerar en el estudio que se realiza acerca de la incorporación de las letras en el álgebra para darle sentido. Esto da lugar al lenguaje sincopado (Sincopado= el principio) por lo que se entiende como el principio del uso de las abreviaciones en algebra utilizando letras como “incógnitas” representando de forma general ciertos valores desconocidos.

En cuanto al lenguaje simbólico este comprende el periodo de los años 1500 d.C. en adelante. Cada vez las necesidades eran más demandantes en el campo de las matemáticas por lo que sigue el avance llegando al lenguaje simbólico como tal. Como mencionábamos anteriormente y profundizando en ello, el álgebra y el uso de las letras como lenguaje simbólico a lo largo de la historia está directamente relacionado con los avances sociales y económicos que se desarrollan dentro de distintos contextos y culturas, la expansión del comercio y diversos usos científicos amplían a distintas áreas del conocimiento la utilidad de este lenguaje.

Para hacer un análisis más profundo acerca del avance e incorporación de las letras en el álgebra consideramos importante mencionar algunos aspectos históricos acerca de esto, en Mesopotamia por ejemplo no se utilizaban letras simbolizando palabras o cosas, sino que utilizaban las palabras o cosas en sí mismas a modo de representación.

En Grecia el álgebra alcanzó un alto nivel, lo que se dio con bastante dificultad por el uso de los simbolismos numéricos en aritmética. Diofanto fue el primer matemático que utilizó un símbolo para representar una incógnita o un valor desconocido como la abreviatura de la palabra número con un símbolo muy parecido a la letra s griega. Con él se inicia el simbolismo algebraico, de forma más bien concreta no axiomática, pero aun su lenguaje carecía de símbolos para las operaciones y las relaciones.

En su obra Triparty, Chuquet (1484; citado en Gonzalez, 2012), llama a la incognita como numero primero o primario y utiliza la abreviatura para nombrar la raíz, R^2 (Raíz cuadrada) y R^3 (Raíz cubica).
En 1494 la escuela algebrista alemana introduce los actuales símbolos de + y - . Mientras la escuela Italiana denomina a la incógnita en estos momentos aún como "la cosa" y la abreviaban como "co". Más tarde en 1557 Robert Recorde utiliza el signo = por primera vez.

Finalmente, el gran salto a lo que hoy conocemos como simbolismo lo dan Vieta y Descartes, por su parte Vieta utiliza las vocales para las incógnitas y las consonantes para representar las cantidades que suponemos conocidas, Descartes hacia los años 1637 usa por primera vez la notación actual.

Éste sistema se generaliza solo luego de 60 o 70 años, más o menos desde el año 1700.

b. Uso e incorporación de las letras en el álgebra

Dentro de los contenidos a abordar a lo largo de la escolaridad en enseñanza básica específicamente en sus últimos niveles, los estudiantes manipulan expresiones algebraicas (expresiones con letras) las operan, entre si mezclando la aritmética y el álgebra, por ejemplo, en geometría para buscar el perímetro o área de algunas figuras geométricas, en la circunferencia al querer encontrar la longitud de ésta, entre otras. Con el pasar del tiempo y avanzando en contenido se espera que los estudiantes sean capaces de ampliar el rango de valores de los símbolos aprendidos, lo que les permitiría una visión mucho más amplia acerca de la utilidad que prestan y la intencionalidad con la que realmente utilizamos estos símbolos para representar cantidades, por ejemplo, las letras x e y como variables, relaciones entre variables, interpretación del lenguaje algebraico, operar variables en conjunto con números, etc.

El álgebra escolar tiene como objetivo desarrollar el razonamiento y pensamiento algebraico en los estudiantes de forma gradual según el nivel de enseñanza que se esté cursando, lo cual consiste en un proceso de generalización y formulación de expresiones o patrones, las cuales utilizan o requieren la simbología como base, para poder utilizar estas herramientas en la resolución de problemas, modelación y por supuesto aplicación en la vida cotidiana.

En la revista Sapiens, revista universitaria de investigación (junio, 2011) se mencionan aportes como el de Torres, Valoyes, Malagón (2002) quien señala que la adquisición de este lenguaje simbólico se da encontrando el verdadero sentido de este a través de su propia experiencia.

Dimensión didáctica

a. El álgebra en textos escolares:

Unidad número 2 Séptimo año básico: Álgebra y relaciones proporcionales

A partir del texto del estudiante de séptimo año básico, Merino, Muñoz, Pérez y Rupin (2017) observaremos la manera en que se aborda la unidad de álgebra y relaciones proporcionales correspondiente a la unidad número 2 del curso mencionado anteriormente. El Hilo conductor de esta unidad es el eje de álgebra y funciones, Comenzando con lecciones enfocadas a expresar y generalizar patrones o regularidades geométricas y numéricas a través de letras, operaciones aritméticas, ya sea adición, sustracción, multiplicación o división y símbolos, en donde desde un inicio en la unidad se presenta a los estudiantes que es lo que ellos aprenderán, mencionando los siguientes puntos:

- Utilizar lenguaje algebraico.
- Reducir términos semejantes.
- Modelar y resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales.
- Comprender la proporcionalidad directa e inversa, modelando problemas y resolviéndolos.

Por otro lado, menciona la importancia del aprendizaje de los puntos descritos, y sugiere además las actitudes que deben presentar los estudiantes para la comprensión, análisis y aprendizaje de la unidad.

Señala por otro lado, preguntas y situaciones abiertas a los estudiantes de la siguiente manera:

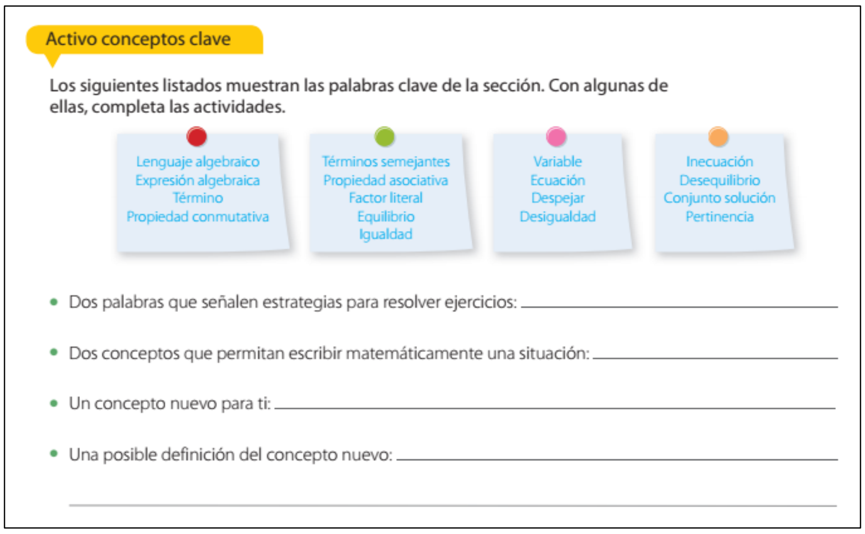
En la antigüedad el comercio operaba básicamente a través del intercambio de productos de acuerdo a una **proporcionalidad**. ¿Cómo interpretarías el significado de este concepto?

Si fueras un comerciante de la época y tu cliente te intercambia 8 naranjas por un kilogramo de arroz, ¿cómo lo representarías utilizando la balanza?

¿Qué otras situaciones cotidianas podrías representar utilizando la balanza? Nombra al menos dos e intercámbialas con un compañero o compañera.

Imagen 8: Texto del estudiante Matemática séptimo básico pág. 101

Se inicia la sección 4, con el título "ÁLGEBRA", activando las ideas previas de los educando a partir de una situación de reflexión junto a algún compañero o compañera de clases; además activan conceptos claves de la sección a partir de una actividad propuesta, como se ve a continuación:



Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran las palabras clave de la sección. Con algunas de ellas, completa las actividades.

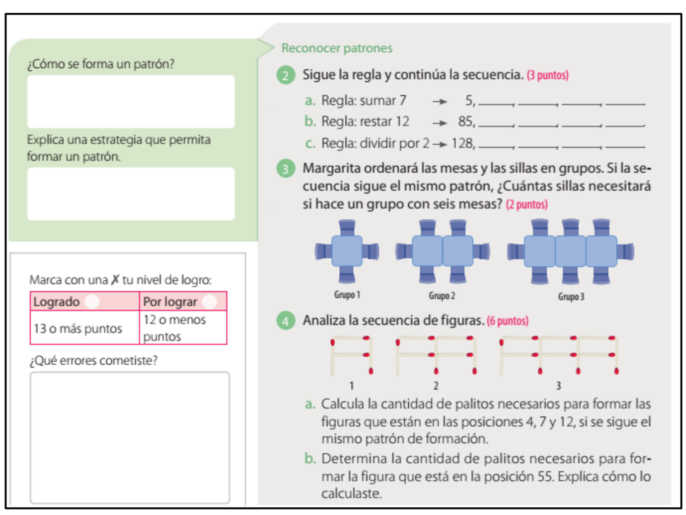
Lenguaje algebraico Expresión algebraica Término Propiedad conmutativa	Términos semejantes Propiedad asociativa Factor literal Equilibrio Igualdad	Variable Ecuación Despejar Desigualdad	Inecuación Desequilibrio Conjunto solución Pertinencia

- Dos palabras que señalen estrategias para resolver ejercicios: ______
- Dos conceptos que permitan escribir matemáticamente una situación: ______
- Un concepto nuevo para ti: ______
- Una posible definición del concepto nuevo: ______

Imagen 9: Texto del estudiante Matemática séptimo básico pág. 102

De igual modo que los apartados anteriores, se pide a los estudiantes continúen activando sus conocimientos previos respondiendo diversas preguntas abiertas tales como: ¿cómo puedes resolver operaciones combinadas?; ¿cómo se forma un patrón?; Explica una estrategia que permita formar un patrón; y resolver actividades con puntos que permita además registrar los logros obtenidos por cada uno de ellos a partir de los puntos obtenidos en cada actividad.

En las actividades los estudiantes reconocen patrones, siguen reglas y continúan las secuencias, además de analizar las secuencias de figuras como se detalla en seguida:



¿Cómo se forma un patrón?

Explica una estrategia que permita formar un patrón.

Marca con una X tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
13 o más puntos	12 o menos puntos

¿Qué errores cometiste?

Reconocer patrones

2 Sigue la regla y continúa la secuencia. (3 puntos)

a. Regla: sumar 7 → 5, ___, ___, ___, ___
b. Regla: restar 12 → 85, ___, ___, ___, ___
c. Regla: dividir por 2 → 128, ___, ___, ___, ___

3 Margarita ordenará las mesas y las sillas en grupos. Si la secuencia sigue el mismo patrón, ¿Cuántas sillas necesitará si hace un grupo con seis mesas? (2 puntos)

4 Analiza la secuencia de figuras. (6 puntos)

a. Calcula la cantidad de palitos necesarios para formar las figuras que están en las posiciones 4, 7 y 12, si se sigue el mismo patrón de formación.
b. Determina la cantidad de palitos necesarios para formar la figura que está en la posición 55. Explica cómo lo calculaste.

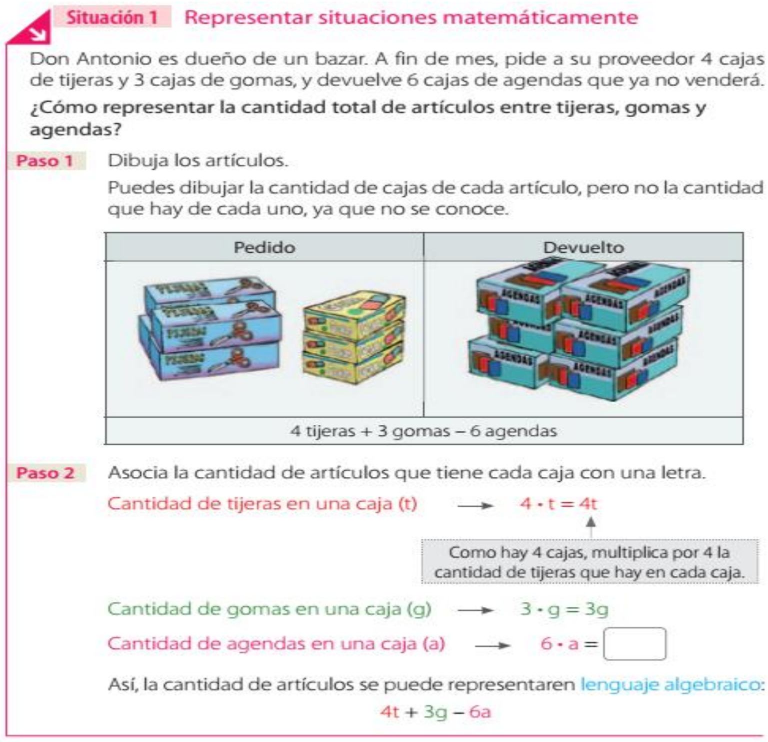
Imagen 10: Texto del estudiante Matemática séptimo básico pág. 104

Uno de los propósitos de esta sección (correspondiente en esta unidad a la sección número 4) es, que los y las estudiantes comprendan que las letras representarán algún elemento u objeto que se necesite expresar, de este modo representando cantidades usando lenguaje algebraico como se muestra en el siguiente dibujo:

Lección 15:

Título de lección 15: ¿Cómo representar cantidades con lenguaje algebraico?

Propósito: Representar cantidades utilizando lenguaje algebraico



Situación 1 Representar situaciones matemáticamente

Don Antonio es dueño de un bazar. A fin de mes, pide a su proveedor 4 cajas de tijeras y 3 cajas de gomas, y devuelve 6 cajas de agendas que ya no venderá.
¿Cómo representar la cantidad total de artículos entre tijeras, gomas y agendas?

Paso 1 Dibuja los artículos.
Puedes dibujar la cantidad de cajas de cada artículo, pero no la cantidad que hay de cada uno, ya que no se conoce.

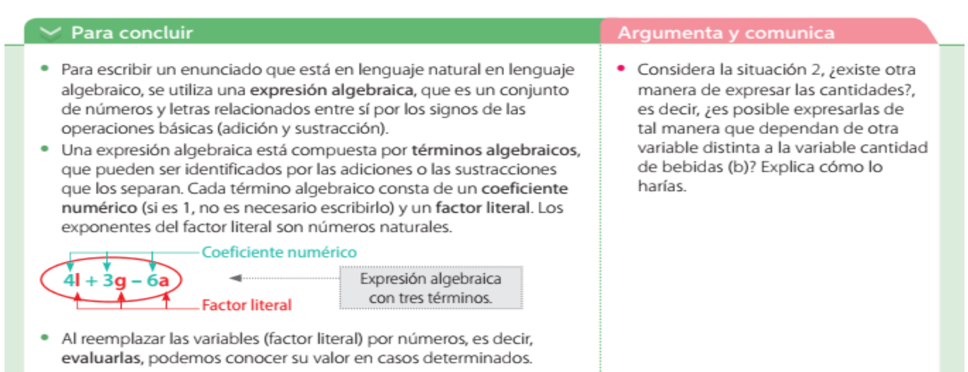
Pedido	Devuelto
4 tijeras + 3 gomas – 6 agendas	

Paso 2 Asocia la cantidad de artículos que tiene cada caja con una letra.
Cantidad de tijeras en una caja (t) ⟶ $4 \cdot t = 4t$
Como hay 4 cajas, multiplica por 4 la cantidad de tijeras que hay en cada caja.
Cantidad de gomas en una caja (g) ⟶ $3 \cdot g = 3g$
Cantidad de agendas en una caja (a) ⟶ $6 \cdot a = \boxed{}$
Así, la cantidad de artículos se puede representaren lenguaje algebraico:
$4t + 3g - 6a$

Imagen 11: Texto del estudiante Matemática séptimo básico pág. 106

Otro de los propósitos de la sección, es que las operaciones aritméticas darán paso al comportamiento que se requiere establecer con la expresión algebraica. Se amplía además los conocimientos de los estudiantes, definiendo el concepto de término algebraico. De este modo da paso a la representación de una variable en función de la otra a partir de una situación específica resuelta en donde menciona a través de pasos las relaciones existentes. Uno de los pasos es relacionar cada ítem con la variable propuesta, otro de los pasos es identificar la variable que no está en función de otra y además la representación de cada cantidad utilizando expresiones algebraicas con la variable dada y, por último, se pide que evalúe las expresiones entregadas.

Se concluye la lección 15 de la siguiente manera:



Para concluir

- Para escribir un enunciado que está en lenguaje natural en lenguaje algebraico, se utiliza una **expresión algebraica**, que es un conjunto de números y letras relacionados entre sí por los signos de las operaciones básicas (adición y sustracción).
- Una expresión algebraica está compuesta por **términos algebraicos**, que pueden ser identificados por las adiciones o las sustracciones que los separan. Cada término algebraico consta de un **coeficiente numérico** (si es 1, no es necesario escribirlo) y un **factor literal**. Los exponentes del factor literal son números naturales.

Coeficiente numérico
$4l + 3g - 6a$ ⟵ Expresión algebraica con tres términos.
Factor literal

- Al reemplazar las variables (factor literal) por números, es decir, **evaluarlas**, podemos conocer su valor en casos determinados.

Argumenta y comunica

- Considera la situación 2, ¿existe otra manera de expresar las cantidades?, es decir, ¿es posible expresarlas de tal manera que dependan de otra variable distinta a la variable cantidad de bebidas (b)? Explica cómo lo harías.

Imagen 12: Texto del estudiante Matemática séptimo básico pág. 107

Y se práctica lo aprendido a partir de distintas actividades tales como:

- Escribir expresiones algebraicas en lenguaje natural.
- Calcular el perímetro de figuras.

- Identificar el número de términos de cada expresión algebraica. Luego, determinar el coeficiente numérico y factor literal de cada expresión.
- Representar pictóricamente, con bastones, las expresiones algebraicas.
- Representar en lenguaje algebraico situaciones dispuestas en lenguaje natural.
- Representar situaciones mediante expresiones algebraicas y evaluar.
- Determinar la expresión algebraica que modela cada situación, especificando qué representa cada variable.
- Reflexionar a partir de una situación dada.
- Reforzar a partir de un juego determinado.

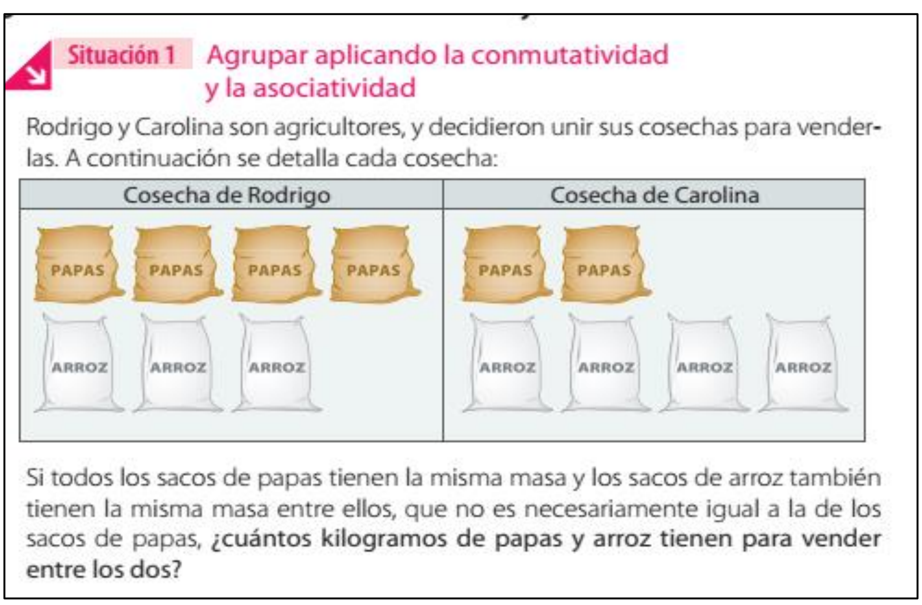
Lección 16:

Título lección 16: ¿Cómo reducir términos semejantes?

Propósito: Reducir términos semejantes en expresiones algebraicas.

Para dar inicio a la lección 16, se expone una situación determinada, en donde los estudiantes observan a través de pasos guiados, la manera en que se puede reducir los términos semejantes de una expresión algebraica determinada, respondiendo a la pregunta propuesta.

Se observa a continuación la situación y se describen los pasos a seguir para responder la pregunta:


Situación 1 Agrupar aplicando la conmutatividad y la asociatividad

Rodrigo y Carolina son agricultores, y decidieron unir sus cosechas para venderlas. A continuación se detalla cada cosecha:

Si todos los sacos de papas tienen la misma masa y los sacos de arroz también tienen la misma masa entre ellos, que no es necesariamente igual a la de los sacos de papas, **¿cuántos kilogramos de papas y arroz tienen para vender entre los dos?**

Imagen 13: Texto del estudiante Matemática séptimo básico pág. 110

Paso 1: Se expresa la situación en lenguaje algebraico.

Asigna la variable **p** a la masa de un saco de papas (en kilogramos) y la **a** a la masa de un saco de arroz (en kilogramos).

Cosecha de Rodrigo	Cosecha de Carolina
$4p + 3a$	$2p + 4a$
Cantidad total de kilogramos: $(4p + 3a) + (2p + 4a)$	

Imagen 14: Texto del estudiante Matemática séptimo básico pág. 110

Paso 2: Se aplica la propiedad conmutativa de la adición.

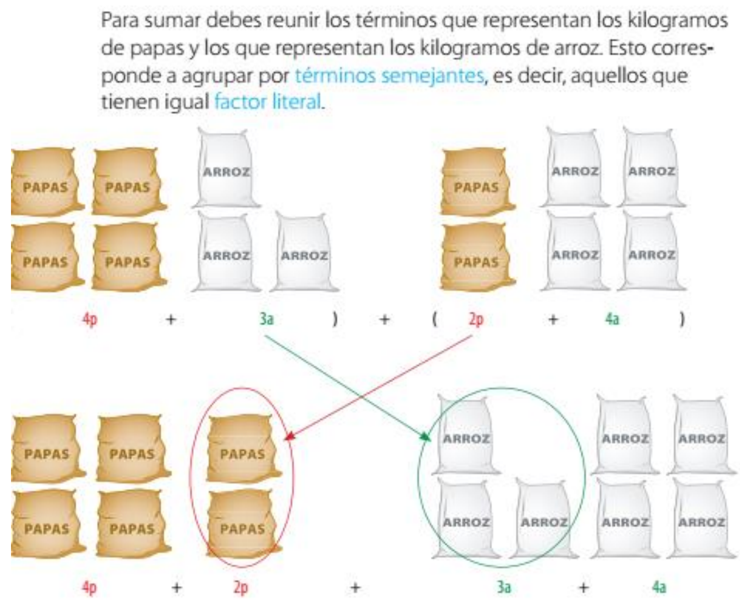


Imagen 15: Texto del estudiante Matemática séptimo básico pág. 110

Paso 3: Se agrupan los términos semejantes utilizando la propiedad asociativa de la adición.

$$(4p + 3a) + (2p + 4a) = (4p + 2p) + (3a + 4a)$$

Masa de sacos de papas

Masa de sacos de arroz

Imagen 16: Texto del estudiante Matemática séptimo básico pág. 111

Paso 4: Se reduce los términos semejantes, sumando o restando según corresponda, los términos en los que se tenga igual factor literal.

$$\begin{aligned} &(4p + 2p) + (3a + 4a) \\ =\ & 6p + 7a \end{aligned}$$

Imagen 17: Texto del estudiante Matemática séptimo básico pág. 111

De esta manera, juntando los sacos de ambos, Rodrigo y Carolina tienen 6p + 7a kilogramos para vender.

Se continúa la lección con otra situación, en donde l estudiante debe aplicar lo enseñado anteriormente y reducir los términos semejantes dispuestos.

Se concluye la lección, definiendo que los términos semejantes son aquellos que tienen el mismo factor literal. Por otro lado, se menciona que reducir términos semejantes consiste en sumar o restar los coeficientes numéricos conservando el factor literal que tienen en común, para ello pueden seguir los siguientes pasos:

1° identifica aquellos términos que sean semejantes

2° agrúpalos según su factor literal y resuelve las operaciones correspondientes.

Se práctica lo aprendido en la lección a partir de distintas actividades tales como:

- Se Identifica la cantidad de términos, el coeficiente numérico y el factor literal en cada expresión.
- Se Identifican los términos semejantes y se pintan del mismo color.
- Se reduce términos semejantes eliminando paréntesis.

b. Reflexiones acerca de la dimensión didáctica

De acuerdo al inicio de la unidad de acuerdo al texto del estudiante de séptimo año básico, se introduce el conocimiento a partir de situaciones con temas que no presentan interés por parte del estudiante, se observa que los contextos en los que se desarrollan las actividades son contextos en los cuales ellos no están inmersos. Por ejemplo, para favorecer la motivación para el aprendizaje óptimo de los estudiantes podrían generarse instancias con actividades con temas más cercanos a sus contextos y lo que viven día a día, como, por ejemplo, redes sociales, tecnologías de la información, juegos, etc. de este modo generar un aprendizaje duradero y no mecánico ni memorístico.

Por otra parte, se puede visualizar explícitamente que se induce a los estudiantes a trabajar en las diversas actividades la letra como objeto, lo que no es coherente con lo que proponen las bases curriculares en los objetivos planteados para el nivel de enseñanza. Producto de esto se encasilla al estudiante en el nivel más básico de la significancia de la letra según lo expuesto por Kuchemann (1980; citado en Enfedaque 1990).

Considerando estos antecedentes surge la necesidad de crear instancias nuevas de aprendizaje, en donde la realización de la ingeniería didáctica cobra gran relevancia, en donde se consideran las habilidades de los estudiantes y así generar una propuesta o alternativa didáctica para la enseñanza del contenido de una manera distinta, más innovadora y practica que responda a las reales necesidades y expectativas de los estudiantes.

Dimensión cognitiva

Dentro de los estudios realizados en el campo de la educación y psicología educativa entre los cuales destaca la teoría de Bruner del crecimiento cognoscitivo, y se expone en el texto Teorías del aprendizaje que "El desarrollo del funcionamiento intelectual del hombre desde la infancia hasta toda la perfección que puede alcanzar está determinado por una serie de avances tecnológicos en el uso de la mente” (Schunk, 2012, p. 192) podemos rescatar que el desarrollo del conocimiento del estudiante evoluciona de acuerdo a ciertas etapas cognitivas. Se ha demostrado a través de los años que el conocimiento se construye y que el desarrollo sin necesidad de estar sujeto a la evolución de la edad del niño, evoluciona de manera paulatina incorporando gradualmente e integrando distintas estructuras del conocimiento cada vez más amplias y con mayor precisión.

Schunk (2012) menciona que en Bruner (1996) se describen formas de representación del conocimiento en una secuencia de desarrollo, en acto, pictórico y simbólico, “La representación en acto consiste en las respuestas motoras, los modos de manipular el medio” (…) “La representación icónica es la de las imágenes mentales sin movimiento” (…) La representación simb6lica emplea sistemas de símbolos para codificar la información. Sistemas notables son el lenguaje y la notación matemática (…)” (Schunk, 2012, p. 192)

Considerando lo anterior y el acercamiento al tema considerando nuestro análisis didáctico se espera que los estudiantes en la etapa de escolaridad en la cual están (séptimo año básico) desarrollen distintas habilidades y estrategias como evaluar procedimientos y comprobar resultados propios y de otros de un problema matemático, representar de forma pictórica, simbólica o algebraica el llenado de la figura, explicar y fundamentar tanto soluciones propias y los procedimientos utilizados como los resultados mediante definiciones, axiomas, propiedad y teoremas, con relación a la incorporación de las letras en el álgebra, es importante destacar y mencionar que el avance y el desarrollo de estas habilidades y estrategias debe ampliarse a contextos de distinta naturaleza matemática, esto no quiere decir que se trate solo de un cambio mecánico entre números y letras sino que se consideren estos símbolos como variables y contextualizarlos de manera correcta en geometría y álgebra entre otros.

Entre las habilidades a desarrollar están, por ejemplo:

a. Que el niño conozca, domine y sea capaz de manipular a su antojo estas variables, generalizar y modelar situaciones, es decir, representar a través de relaciones entre las mismas variables.
b. Que sean capaces de comunicar a través del lenguaje simbólico las relaciones mencionadas anteriormente.
c. Que se tome conciencia acerca de la utilidad que presta la incorporación de las letras en el álgebra (en distintos contextos) y con esto poder utilizarlo y darle sentido, que surja la necesidad por parte de ellos de utilizar este lenguaje para facilitar y generalizar ciertos procedimientos.

Las habilidades mencionadas anteriormente a desarrollar por los estudiantes concuerdan con los propósitos sostenidos en las bases curriculares en séptimo y octavo básico, por lo que se cree oportuno y coherente desarrollar la propuesta didáctica de la presente investigación a partir de una ingeniería didáctica que potencie estas habilidades, conocimientos y actitudes dispuestas en las bases curriculares, para conseguir ser un aporte en la comprensión e incorporación de la letra en sus distintos significados.

En cuanto a las dificultades que los estudiantes de acuerdo al nivel de escolaridad pueden experimentar, podemos destacar que si bien existen restricciones según el contexto socio-cultural, cognitivo, etc. también debemos considerar que reproducir de forma monótona la aplicación de fórmulas y algoritmos no conseguiría un aprendizaje óptimo y duradero, ya que es necesario por parte de los estudiantes que argumenten y den sus propias conclusiones en relación a distintas situaciones problemáticas, para lo cual se requiere conocimiento en profundidad del tema.

Generalmente, de la forma en la que se aborda el contenido se da pie a que los estudiantes vean las letras sin un significado, lo que provoca, a su vez, la mala contextualización y la errónea resolución de problemas.

Según la literatura estudiada para efectos de esta investigación, específicamente en el texto de Erika González del lenguaje natural al lenguaje algebraico (2012) se cita a Socas (1996) quien presenta que "las dificultades que presentan los niños son de distinta naturaleza y pueden estar motivadas por distintos factores; factores de tipo cognitivo, de tipo actitudinal, de tipo didáctico y relacionados con la complejidad del álgebra" (González, 2012, p.29)

a. Factores cognitivos: Relacionados con las etapas del desarrollo cognitivo de los estudiantes y conocimientos previos.
b. Factores actitudinales: Relacionados con la predisposición y sus expectativas acerca de lo que es el álgebra y/o el uso de las letras. De antemano piensan que es difícil y lo enfrentan pensando que no serán capaces, lo que provoca la dificultad de tipo actitudinal.
c. Factores didácticos: Factores que influyen en el proceso de enseñanza.
d. Factores del álgebra: Factores propios que presenta el desarrollo del álgebra.

Particularmente, en cuanto a los factores cognitivos en el presente estudio se analiza de manera breve un diagnóstico realizado a los estudiantes de séptimo básico de un colegio particular subvencionado de la comuna de La Cisterna para conocer acerca de sus habilidades desarrolladas previamente.

Por otra parte, el desarrollo del pensamiento algebraico conlleva consigo una serie de competencias cognitivas algebraicas:

> 1. Habilidad para pensar en un lenguaje simbólico, comprender el álgebra como una aritmética generalizada y como el estudio de las estructuras matemáticas. 2. Habilidad para comprender igualdades y ecuaciones de álgebra y aplicarlas dentro del conjunto de la solución de problemas del mundo real. 3. Habilidad para comprender relaciones de cantidades a través de patrones, definición de funciones y aplicación de modelos matemáticos
>
> (Serres .2011, p 127)

Lo cierto es que los estudiantes necesitarán varias experiencias relacionada con la interpretación e incorporación de las letras en el álgebra para poder trabajar significativamente con el concepto de la incógnita o la letra como variable en su sentido más amplio, lo que se produce de forma gradual durante el periodo en el cual los estudiantes verbalicen, creen y usen expresiones algebraicas.

Luego de haber verbalizado, creado y aplicado a algunas situaciones el lenguaje simbólico en actividades de generalización como por ejemplo "la suma de números consecutivos, el sucesor de un número, el antecesor de un número, la suma de dos números desconocidos, etc." Serán capaces los estudiantes y comienza la aplicación a otros contextos matemáticos.

4.3.3 Análisis a priori

En el presente apartado se dan a conocer las posibles respuestas formuladas por los estudiantes en las 4 actividades elaboradas a lo largo de la propuesta didáctica, a partir de un cuadro en el cual se muestran la organización individual o grupal, la pregunta, sus posibles respuestas y la argumentación relacionada con la teoría estudiada.

Tabla 7: Análisis a Priori de actividad número 1

Organización: individual
Pregunta 1: ¿Con cuántas figuras rellenaste el cuadrado? Dibuja las figuras con las que rellenaste el cuadrado.
Posibles respuestas: • Con todas las piezas • Con 22 piezas (que son el total)

Argumentación: Se espera que los estudiantes de forma individual sean capaces a través de la manipulación del material concreto de hacer calzar las piezas del set entregado a cada uno, de manera que no sobren ni falten piezas (utilicen la totalidad entregada (22)) y logren el llenado de la figura geométrica. En cuanto a los dibujos, lo que se espera es que puedan representar con libertad la forma en la que armaron o rellenaron el cuadrado a través de un dibujo, de forma ordenada con regla o algún otro material que sirva de guía, considerando cada una de las piezas de manera correcta y plasmándolas en la hoja de respuestas.
Pregunta 2: ¿De qué manera podemos expresar el llenado de la figura?, ¿Qué representa este llenado? Relacionarlo con expresiones o contenidos aprendidos con anterioridad.
Posibles respuestas: • 4 figuras rojas, 3 figuras verdes, 7 figuras blancas, 2 figuras amarillas, 3 figuras naranjas, 3 figuras azules. • 22x donde x represente el área (o de forma más intuitiva el llenado) de cada figura.
Argumentación: Se espera que los estudiantes den diversas representaciones del llenado de la figura geométrica entregada en un inicio, de forma escrita (explicando un poco paso a paso lo que hicieron), a través de dibujos (parecido a la pregunta anterior) o de forma algebraica. En relación a lo que representa el llenado, se espera que ya más de algún alumno sea capaz de identificar que lo que representa el relleno es el área de la figura, otra representación que pueden dar es el perímetro, confundiendo así las definiciones aprendidas con anterioridad en clases, que hacen referencia a que el área es la superficie o el interior y el perímetro es el contorno, puesto que según lo observado en el test diagnostico los alumnos en su mayoría tendían a confundir el perímetro de una figura con su área.
Pregunta 3: Busca distintas representaciones para el llenado de la figura, hazlo de forma libre y como te parezca pertinente.
Posibles respuestas: • 4T+2C+3I+3Z+7c+3L
Argumentación: En esta fase se da el espacio para que de forma libre representen nuevamente el llenado de la figura y se espera que luego de ya haber representado a través de dibujos y con ayuda de las letras sean capaces de crear una expresión o lo relacionen de manera más directa con los contenidos antes vistos en algebra o utilicen la letra como objeto para hacer una representación de forma que cada

letra represente la forma que tienen las figuras. De acuerdo a lo señalado por Enfedaque (1990) los estudiantes verán la letra como una abreviatura de un objeto o como un objeto por sí misma, en este caso los estudiantes asignarán una letra de acuerdo a la forma que tenga cada figura entregada en el set nº1.
Pregunta 4: Expresa de manera algebraica el área de la figura, usando como base el modo en que rellenaste el cuadrado de cartón y justifica por qué lo hiciste de ese modo.
Posibles respuestas: • 4r+2a+3v+3A+7b+3n= total • x · x = área (asignando un valor igual a x a cada lado del cuadrado) • x + x + x + x = área (confusión con el perímetro)
Argumentación: De forma inversa a la pregunta anterior (en donde se esperaba que de manera espontánea idearan una expresión algebraica que representara el relleno de la figura) en esta ocasión se restringe un poco más el trabajo por parte de los estudiantes indicando de manera directa que expresen con términos algebraicos el área de la figura, usando siempre como modelo la forma en que rellenaron la figura de cartón anteriormente. Se espera que consigan representar el área de la figura (cuadrado) pero considerando la letra como objeto, esto quiere decir que utilicen la letra como una etiqueta que represente el nombre de los colores o el nombre que les den a las figuras. De esta manera se puede replicar lo realizado en el test diagnostico donde a los estudiantes se les presenta una situación en donde se les pide representar el perímetro de una figura de n lados y le asignan de manera arbitraria la letra x a los lados de la figura. Por su parte según lo observado en el test diagnostico en donde al estudiante se le pide representar el perímetro, lo confunde y representa el área multiplicando dos de sus lados.
Pregunta 5: A partir de lo realizado, ¿Podrías identificar en la expresión algebraica alguna coincidencia o algo similar de alguna fórmula que ya conocías? Justifica tu respuesta.
Posibles respuestas: • No se parece a nada • A la fórmula del área • A la fórmula del perímetro

Argumentación: Se espera que algunos estudiantes no recuerden ninguna fórmula vista con anterioridad, es decir, que no relacionen la actividad con ningún contenido o saber matemático conocido por ellos. Otra opción es también que recuerden la fórmula de área o confundan con la fórmula de perímetro como suele ocurrir en clases tradicionales. Puesto que a lo largo de nuestra experiencia en prácticas tempranas hemos evidenciado que los estudiantes tienden a confundir las fórmulas de área y perímetro en reiteradas ocasiones incluyendo el test diagnóstico realizado.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 8: Análisis a Priori de actividad número 2

Organización: Grupal
Pregunta 6: ¿Con cuántas figuras rellenaron el cuadrado? Dibujen las figuras con las que rellenaron el cuadrado.
Posibles respuestas: • Con todas las figuras que nos entregaron
Argumentación: En esta fase se realizan preguntas muy similares a la sección de la actividad nº1 de realización individual, en este caso en la pregunta nº 6 se espera que los estudiantes diseñen un nuevo modelo para armar el relleno de la figura considerando las estrategias que usaron para armarlo anteriormente de forma personal. Una posible estrategia para el llenado de forma grupal es que elijan empezar por las piezas más pequeñas primero, lo que posiblemente les traiga problemas. Luego, para poder encajar las más grandes y difíciles de ajustar. Otra posible estrategia, es que de forma inversa comiencen con las piezas más grandes y difíciles de ajustar para luego rellenar los espacios vacíos con las piezas más pequeñas utilizando estas como relleno. De acuerdo a la teoría de situaciones didácticas expuesta en el marco teórico, existe una fase de validación donde los estudiantes que participan de la situación validan sus posturas en conjunto para generar un nuevo modelo que los represente como equipo.
Pregunta 7: Expresen de manera algebraica el área de la figura, usando como base el modo en que rellenaron el cuadrado de cartón y justifiquen porqué lo hicieron de ese modo.
Posibles respuestas: • 4 figuras rojas, 3 figuras verdes, 7 figuras blancas, 2 figuras amarillas, 3 figuras naranjas, 3 figuras azules.

• Sumando las letras de los bordes del cuadrado de cada lado y posteriormente expresando la multiplicación de dos de sus lados.
Argumentación: Ya que esta actividad nº 2 incluye un set con las letras asignadas a cada lado de las figuras, será de mayor complejidad representar de forma algebraica el llenado de la figura ya que se restringen las opciones y se condiciona a utilizar las letras previamente asignadas. Se espera continúen representando con la letra como objeto, por ejemplo: • 4 figuras rojas, 3 figuras verdes, 7 figuras blancas, 2 figuras amarillas, 3 figuras naranjas, 3 figuras azules. Otra posible estrategia a utilizar es que representen el llenado sumando las letras de los bordes del cuadrado grande (representando finalmente el perímetro) o sumen las letras de uno de los lados, luego sumen las letras de otro de los lados y expresen la multiplicación de estas dos expresiones algebraicas. Se espera que le den respuesta a esta pregunta de este modo, ya que conocen desde antes el concepto de área.
Pregunta 8: A partir de lo realizado, ¿Podrían identificar en la expresión algebraica alguna coincidencia o algo similar de alguna fórmula que ya conocían? Justifiquen su respuesta.
Posibles respuestas: • Es el área • Es el perímetro • No lo relacionan con ninguna fórmula antes vista
Argumentación: Se espera que ya de forma general comiencen a validar el concepto de área ya que, al reunir a los estudiantes para formar grupos de trabajo, se espera que al menos uno de cada grupo ya haya identificado la fórmula de área en la actividad en su trabajo personal y lo trasmita a los demás compañeros de su grupo. Otra estrategia que posiblemente utilicen será tratar defender sus respuestas generadas a modo personal o que logren corregir los conceptos mal utilizados de perímetro.
Pregunta 9: ¿Qué pasa con los lados de un cuadrado? ¿Qué propiedad tienen los lados de un cuadrado en cuanto a su medida o longitud?
Posibles respuestas: • Los lados son iguales

Argumentación: Se espera que los estudiantes respondan que los lados de un cuadrado miden siempre lo mismo, expresando esto a través de distintos conceptos como: Tienen igual medida, tienen igual longitud, son iguales, son congruentes, etc. Se supone todo lo anterior considerando que de acuerdo al análisis didáctico es conocimiento ya adquirido.
Pregunta 10: A partir de las propiedades de los lados del cuadrado, con relación a su medida o longitud. ¿Cómo se podría representar algebraicamente esta propiedad?
Posibles respuestas: • Lado = lado • Que representen cada uno de los lados de acuerdo a las letras de los bordes y luego igualen los lados del cuadrado, por ejemplo: Un lado = t+a+f; Otro lado = f + f + t Por lo tanto: t + a + f = f + f + t
Argumentación: Se espera que los estudiantes ya teniendo en cuenta la propiedad de los lados de un cuadrado sean capaces de igualar las representaciones de cada lado del cuadrado por ejemplo explicando con sus palabras o de modo algebraico.
Pregunta 11: ¿Cómo relacionamos la propiedad de los lados de un cuadrado, con la expresión que representa el llenado de este mismo?
Posibles respuestas: • Los lados del cuadrado son igual, el llenado es Lado por Lado y representa el área. • a · a = área • x · x = área • Que sumen las letras de uno de los lados, luego sumen las letras de otro de los lados y expresen la igualdad entre estas dos expresiones.

Argumentación: Se espera que los estudiantes expresen que como los lados del cuadrado son igual, el llenado se representa a través de: Lado · Lado = área (considerando el valor de los lados con letras de forma arbitraria escogidas por ellos). Considerando los planes y programas expuestos en el análisis didáctico de la investigación, se considera ya entendido por los estudiantes que para obtener la longitud completa de uno de los lados del cuadrado, ellos tendrán que sumar las pequeñas medidas entregadas del borde de cada figura, luego teniendo en cuenta la propiedad anterior de la igualdad de los lados de un cuadrado, expresarán esta igualdad con las expresiones obtenidas por su propio relleno anteriormente.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 9: Análisis a Priori de actividad número 3

Instrucción: Hagan entrega de su set n°2 y de su segundo cuadernillo de preguntas por equipo.
Posible experiencia: Se espera que los estudiantes hagan entrega de los sets de trabajo grupal y puedan hacer entrega de la hoja de respuestas entregada en un inicio.
Instrucción: Escojan a un integrante que represente al equipo para dar a conocer la tendencia del equipo de trabajo.
Posible experiencia: En esta fase se espera se establezcan un dialogo entre los mismos estudiantes participes de la actividad, que escojan un integrante de cada grupo que exponga de manera objetiva la postura que adoptó el equipo de trabajo, siempre dando la posibilidad a sus demás compañeros de formar parte y argumentar.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 10: Análisis a Priori de actividad número 4

Instrucción: Reciban una hoja con las siguientes preguntas (las cuales deben ser redactadas en la hoja entregada):
Pregunta 1) a. ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones? A + B + C = C + A + B
Posibles respuestas:

• Siempre son iguales, porque en la suma no importa el orden de las letras.
Argumentación: Se espera que los estudiantes llegando al fin de la situación didáctica sean capaces de responder formulando conjeturas acerca de la veracidad de la igualdad presentada, en este caso que sean capaces de argumentar que como la suma es conmutativa siempre son estas expresiones iguales (siempre se cumple la igualdad).
Pregunta 1) b. ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones? L + M + N = L + P + N
Posibles respuestas: • Siempre son iguales, ya que M y P pueden tomar el mismo valor
Argumentación: Se espera que sean capaces de argumentar que pueden ser iguales, no necesariamente siempre, porque las letras representan incógnitas que pueden cambiar de valor y lleguen a ver la letra o tengan ya una idea de la letra como variable. Teniendo ya entendido que la letra no tiene por qué tener un valor estático, eliminando la idea de utilizar la letra como se menciona en Enfedaque (1990) como una incógnita especifica.
Pregunta 2) i) a. ¿Existe algún valor para P de manera que el área de ese cuadrado dé como resultado un número?
Posibles respuestas: • Sí, P tiene que ser igual a 3, porque los lados así serían iguales.
Argumentación: En esta fase se espera que el estudiante pueda identificar que, ya que los lados del cuadrado son iguales, P=3 por lo que para calcular el área puede expresar: 1. 3P 2. P· P 3. 3· 3
Pregunta 2) ii) a. ¿Podría ocurrir que x+2 = h+3? Justifica tu respuesta.
Posibles respuestas:

• Sí, con x+2=8 y h+3=8
Argumentación: Se espera que los estudiantes utilicen al igual que en la pregunta anterior la propiedad de los lados de un cuadrado, por lo que se espera que igualen h+3 a 8 : h+3 = 8 encontrando un valor para h y x+2 =8 encontrando un valor para x De esta forma y según la información expuesta en el marco teórico se espera que no consideren la letra como letra evaluada, como se menciona en Enfedaque (1990), que no le asignen un valor a la letra desde el primer momento y descubran que en x+ 2 = h + 3 puede darse la igualdad.
Pregunta 2) ii) b. ¿Existe algún valor para x y para h de manera que el área de ese cuadrado dé como resultado un número?
Posibles respuestas: • x= 6 y h = 5
Argumentación: Considerando la pregunta anterior y los valores que encuentren para x y para h ya tendrían la respuesta a este problema, se espera que reflexionen al respecto y den cuenta de la letra como variable en la igualdad x+2=h+3 considerando que esos valores pueden ser los lados de más de un cuadrado ya que los valores pueden variar y dependiendo de esto pueden sumar más de 8cm.

Fuente: Elaboración propia

4.3.4 Fase de experimentación

En esta fase de experimentación se hace un análisis de las actividades que fueron ideadas durante la creación de la situación didáctica y posteriormente aplicadas en el establecimiento Manuel Arriarán Barros de La Cisterna, específicamente a 12 estudiantes de séptimo año básico. Se analiza la puesta en escena, la información recogida, las dificultades y en general el desempeño de los estudiantes.

La aplicación fue realizada en horas designadas a educación matemática en el establecimiento, en una sesión de 90 min. (Dos horas pedagógicas).

Con el fin de tener evidencia acerca de lo que los estudiantes desarrollaran durante las actividades, se trabajó con una “guía” física, impresa y dirigida a cada uno de los estudiantes, para que, de forma individual y luego grupal, pudieran plasmar en ella sus respuestas y desarrollos.

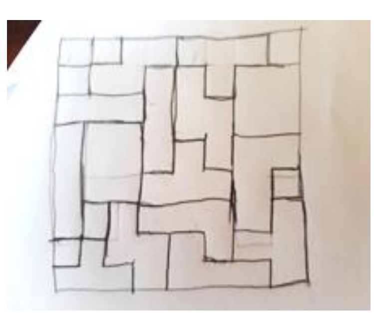
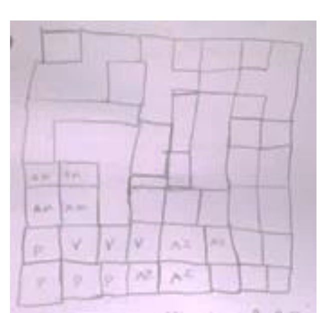
No se necesitó el apoyo adicional de ninguna docente para la aplicación de la actividad y se dio un ambiente propicio para el desenvolvimiento de los estudiantes de forma libre y respetuosa en las distintas actividades como se tenía pensado. Las dificultades que tuvieron los estudiantes o errores que presentaron fueron corregidas y aclaradas con detención al final de la aplicación para no intervenir directamente en el momento de la creación de sus conjeturas.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en cada actividad:

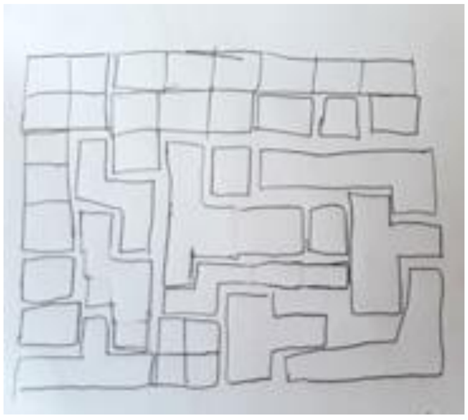
En una primera instancia se dan a conocer los resultados de los estudiantes en la actividad nº1 profundizando en cada una de las preguntas de forma detallada.

La actividad se da inicio con 12 estudiantes, se les dan las indicaciones de forma general para no intervenir de forma personal en el desarrollo de cada una de las preguntas en cada estudiante. En particular, esta actividad se desarrolla de forma individual.

Tabla 11: Análisis Experimental de actividad número 1

Organización: Individual
Pregunta 1: ¿Con cuántas figuras rellenaste el cuadrado? Dibuja las figuras con las que rellenaste el cuadrado.
Experiencia: En esta instancia los estudiantes en su totalidad responden que llenaron el cuadrado con el total de piezas entregadas, o sea con 22 piezas. Y los dibujos son diversos en cuanto a la organización de las piezas en el interior del cuadrado. Por ejemplo: *Estudiante A6*  *Estudiante A12*  *Estudiante A3* 

Estudiante A11



Estudiante A10

Pregunta 2: ¿De qué manera podemos expresar el llenado de la figura?, ¿Que representa este llenado? Relacionarlo con expresiones o contenidos aprendidos con anterioridad.

Experiencia: En esta pregunta surgen respuestas cómo:

Estudiante A3: “Rellene con 2 amarillas, 3 azules, 4 rojas, 7 blancas, 3 piel, 3 verdes = 22 figuras”

Estudiante A1:“Se puede expresar de manera algebraica:

$2c + 7b + 4t + 3i + 3L + 3z = A\ 40 \times 40$ cm.

Estudiante A10: “Lo podemos relacionar con un entero, que representa partes de figuras y de cómo encajan en el entero”

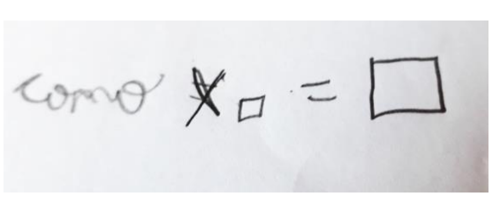
Estudiante A12: “El área del cuadrado lo rellene con distintas piezas que están formadas por pequeños cuadrados iguales”

Estudiante A11: “Se puede expresar el llenado del cuadrado formado por otras figuras más pequeñas y lo que representa es el área del cuadrado”

Pregunta 3: Busca distintas representaciones para el llenado de la figura, hazlo de forma libre y como te parezca pertinente.

Experiencia: Cuando los estudiantes se enfrentaron a esta pregunta respondieron de la siguiente manera:

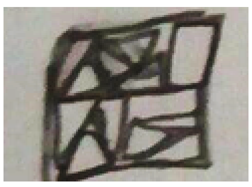
Estudiante A12: “Cada pieza está formada por muchas piezas iguales por esto lo voy a representar como:



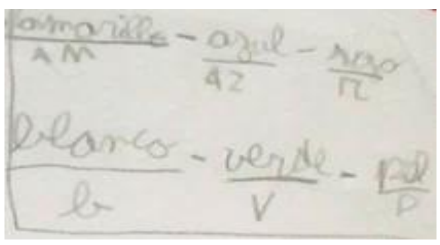
Estudiante A11: “Se puede representar como la suma de las áreas de otras figuras más pequeñas”

Estudiante A10: “Lo puedo asociar con un rompecabezas, pero de cualquier forma puede llenar el entero”

Estudiante A2: “Lo podemos hacer con rectángulos y triángulos”



Estudiante A3: “Lo represente en letras”



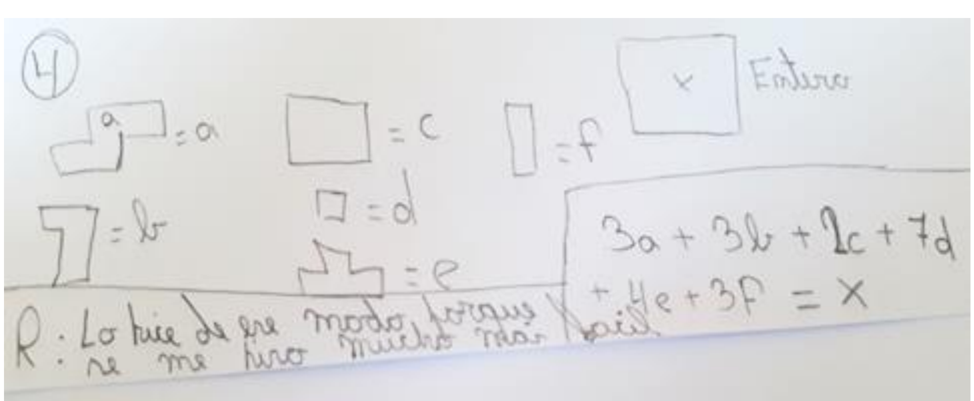
Estudiante A6: “40 x 40 = 1600 = llenado de la figura”

Pregunta 4: Expresa de manera algebraica el área de la figura, usando como base el modo en que rellenaste el cuadrado de cartón y justifica por qué lo hiciste de ese modo.

Experiencia: En esta pregunta 1 alumno no responde, dejando el espacio en blanco. Entre los estudiantes que sí contestaron esta pregunta, surgen las siguientes respuestas:

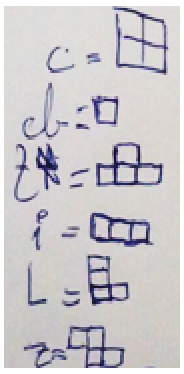
Estudiante A11: “Se puede representar como: 7A + 3B + 3C + 2D + 4E + = X, porque cada número representa un tipo de figura y sumados dan X que es el llenado del cuadrado”

Estudiante A10: “Lo hice de este modo porque se hizo mucho más fácil”:



Estudiante A10

Estudiante A1: “2c + 7b + 4t + 3i + 3L + 3z = A 40 x 40 cm.”:



Estudiante A6: “3a + 3v + 2m + 3p + 3n + 7b Lo relleno de esta manera porque así encajan las piezas”

Estudiante A5: “3v + 2a + 3A + 4r + 3n + 7b = T

A= azul a= amarillo T= rellenado total”

Pregunta 5: A partir de lo realizado, ¿Podrías identificar en la expresión algebraica alguna coincidencia o algo similar de alguna fórmula que ya conocías? Justifica tu respuesta.

Experiencia: En el desarrollo de esta pregunta 1 estudiante de los 12 no responde, dejando el espacio en blanco. De los estudiantes que si dieron respuesta a esta pregunta surgen desarrollos como:

Estudiante A11: “Si se parece a una fórmula que vi en clases, pero no recuerdo demasiado”

Estudiante A10: “No recuerdo o lo asocio con ninguna expresión algebraica”

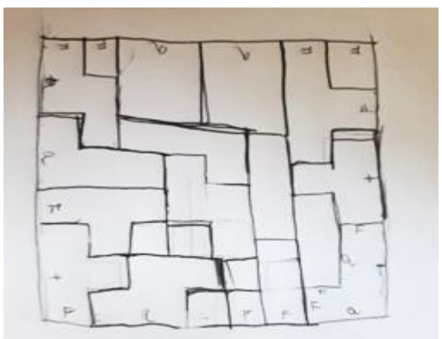
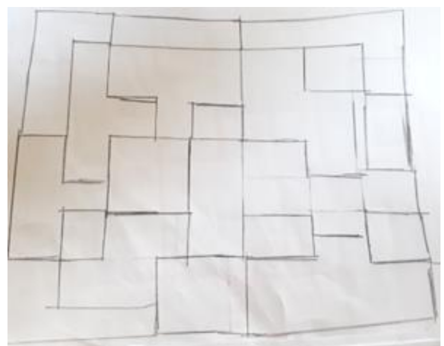
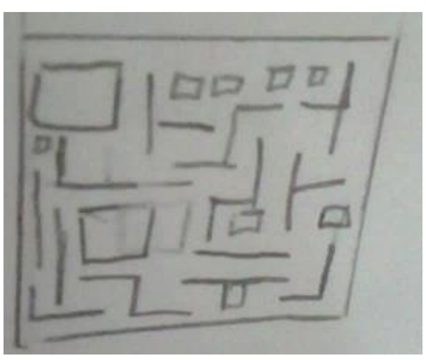
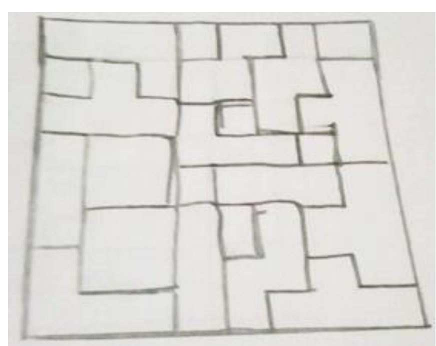
Estudiante A3: “no me acuerdo o no lo pasamos sorry”

Estudiante A5: “Si, como por ejemplo en fracciones para formar un entero”

Estudiante A6: “Sí, la expresión algebraica la vimos en el primer semestre”

Fuente: Elaboración propia

Tabla 12: Análisis Experimental de actividad número 2

<table>
<tr><td>Organización: Grupal</td></tr>
<tr><td>Pregunta 6: ¿Con cuántas figuras rellenaron el cuadrado? Dibujen las figuras con las que rellenaron el cuadrado.</td></tr>
<tr><td>Experiencia: En esta fase comienza la segunda actividad elaborada, con la pregunta nº6 comienza una nueva modalidad de trabajo grupal el cual se desarrolla de forma ordenada pero bastante desafiante, entre los mismos estudiantes se desafían a terminar de manera correcta y a representar de maneras distintas el área del cuadrado inicial a través de dibujos y surgen respuestas como:


Grupo G3 Grupo G4


Grupo G1 Grupo G2</td></tr>
<tr><td>Pregunta 7: Expresen de manera algebraica el área de la figura, usando como base el modo en que rellenaron el cuadrado de cartón y justifiquen porqué lo hicieron de ese modo.</td></tr>
<tr><td>Experiencia: Planteada la pregunta nº7 las respuestas a esta fueron las siguientes:

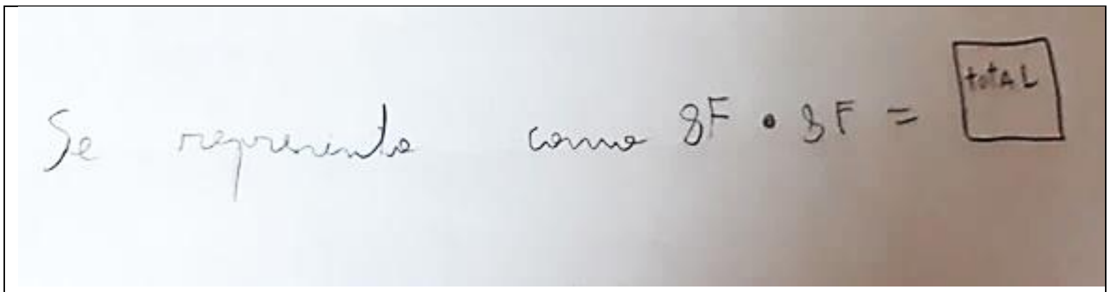
Grupo G4: “(2T + 2F · 2F + 2A + 2F) = X” Donde x representa el área total.

Grupo G1: “Se representa con letra”

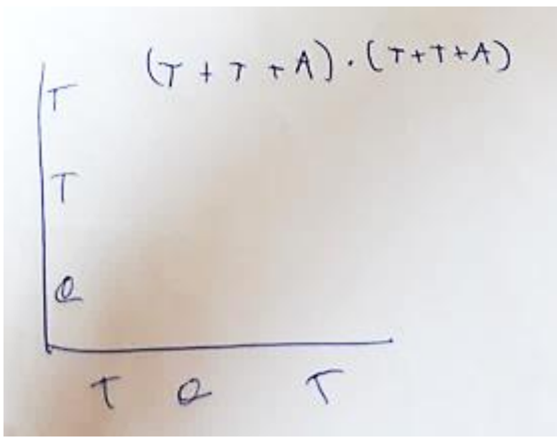
(az= azul; am= amarillo; n=naranjo; R= rojo; v=verde; b= blanco)

3az + 2am + 3n + 7b + 3v + 4r = A</td></tr>
</table>

Grupo G2: "4r + 3v+ 7b + 3n + 3A + 2a = T ; ya que se suma c/ pieza según su valor" A= azul ; a= amarillo ; T = relleno total
Pregunta 8: A partir de lo realizado, ¿Podrían identificar en la expresión algebraica alguna coincidencia o algo similar de alguna fórmula que ya conocían? Justifiquen su respuesta.
Experiencia: Los estudiantes dieron como respuestas las siguientes: Grupo G3: "Como el área, geometría y el entorno representado" Grupo G4: "No, no identifico ninguna similitud" Grupo G1: "si algebraicamente, la incógnita la usamos para rellenar el cuadrado" Grupo G2: " En fracciones ya que al sumar da el entero o relleno total
Pregunta 9: ¿Qué pasa con los lados de un cuadrado? ¿Qué propiedad tienen los lados de un cuadrado en cuanto a su medida o longitud?
Experiencia: Con relación a la propiedad de los lados de un cuadrado estas fueron algunas de las respuestas: Grupo G4: "Son todos iguales y su propiedad es conmutativa" Grupo G2: "todos son de igual medida" Grupo G1: " son iguales"
Pregunta 10: A partir de las propiedades de los lados del cuadrado, con relación a su medida o longitud. ¿Cómo se podría representar algebraicamente esta propiedad?
Experiencia: Grupo G1: "Similar a la pregunta nº5:" (az= azul; am= amarillo; n=naranjo; R= rojo; v=verde; b= blanco) 3az + 2am + 3n + 7b + 3v + 4r = A Grupo G2: "4a = perímetro"



Grupo G4



Grupo G3

Pregunta 11: ¿Cómo relacionamos la propiedad de los lados de un cuadrado, con la expresión que representa el llenado de este mismo?

Experiencia: Los estudiantes relacionan de esta manera la propiedad de los lados de un cuadrado que mencionaron anteriormente con la expresión o las expresiones que representan el llenado de la figura como se explícita a continuación:

Grupo G4: “Que es lo mismo porque los dos dan el área del cuadrado”

Grupo G3: “Son =”

Grupo G2: “ que sumando el área de c/ figura da el área total del cuadrado”

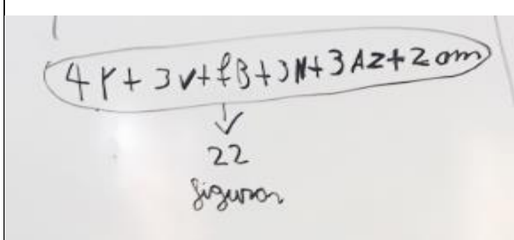
Fuente: Elaboración propia

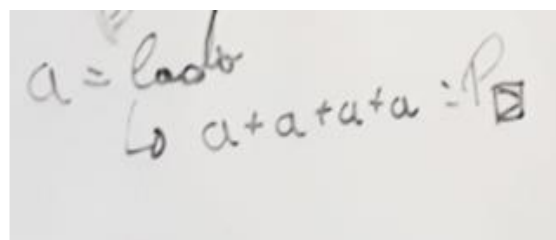
Actividad N° 3

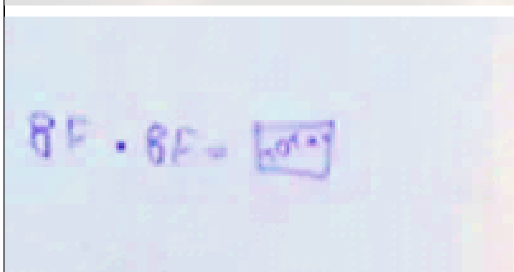
Durante la actividad nº3 se da la instancia para que los estudiantes puedan dar a conocer su postura y la postura del grupo en el cual participaron para la resolución de la actividad nº2.

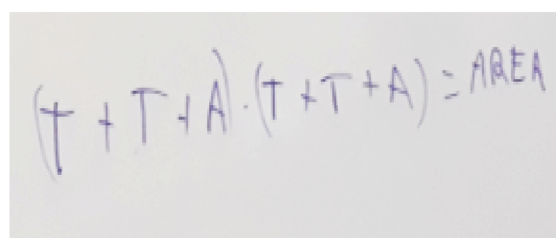
Tabla 13: Análisis experimental de actividad número 3

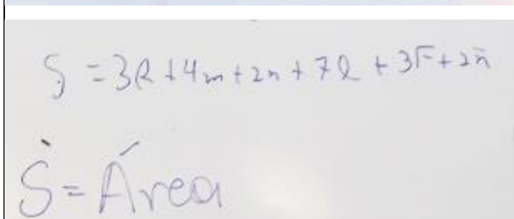
Organización: Plenaria
Experiencia: Los estudiantes escogen un integrante por grupo, el que a ellos más les acomode ya sea por afinidad, por una mejor comprensión del tema, etc. utilizaron criterios de forma independiente cada equipo de trabajo. Luego de esta elección el representante de cada equipo sale adelante para dar a conocer las conjeturas del grupo:

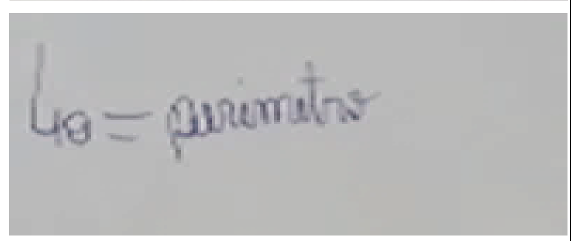


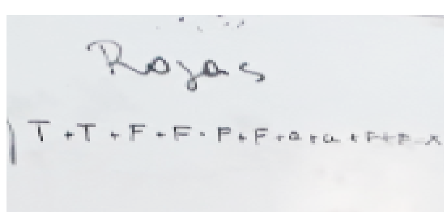












Fuente: Elaboración propia

Tabla 14: Análisis experimental actividad número 4

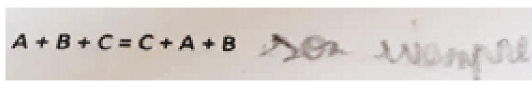
Organización: Individual

Pregunta 1 a) ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones?

A + B + C= C + A + B

Experiencia: Los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

Estudiante A7: “Son siempre”

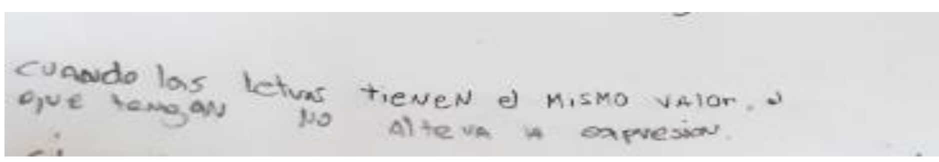

A + B + C = C + A + B Son siempre

Estudiante A1: “siempre se cumple la igualdad”

Estudiante A4: “son iguales solo cuando tienen el mismo factor, pero da lo mismo el orden”

Estudiante A5: “es verdadera”

Estudiante A8: “Cuando las letras tienen el mismo valor, el que tengan no altera la expresión”


Cuando las letras tienen el mismo valor, el que tengan no altera la expresion.

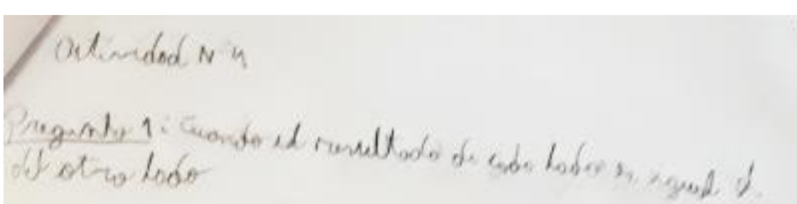
Pregunta 1 b) ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones?

L + M + N = L + P + N

Experiencia: Los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

“Cuando m y p son iguales”

Estudiante A12: “Cuando el resultado de cada lado es igual al del otro lado”

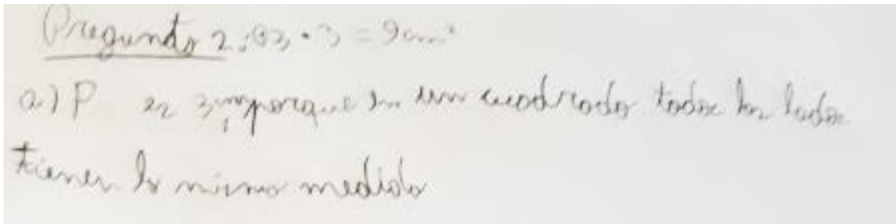

Actividad N 4

Pregunta 1: Cuando el resultado de cada lado es igual al del otro lado

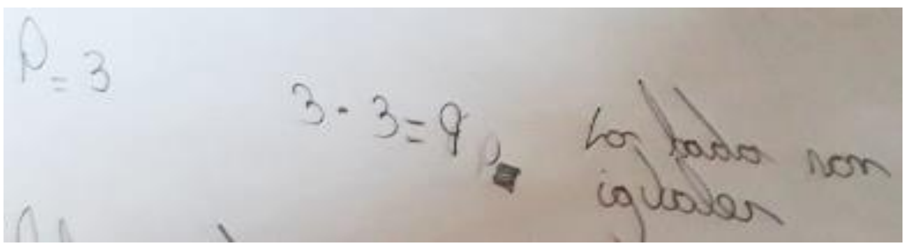
Pregunta 2 i) a) ¿Existe algún valor para P, de manera que el área de ese cuadrado dé como resultado un número?

Experiencia: Los estudiantes responden a la pregunta del siguiente modo:

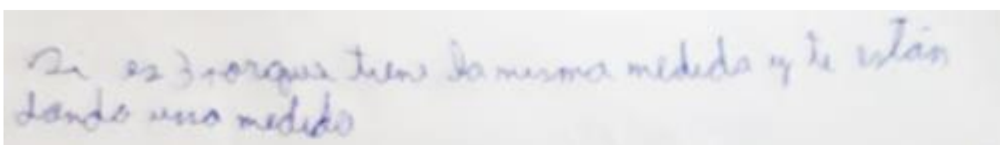
Estudiante A12: “P es 3 cm. Porque es un cuadrado, todos los lados tienen la misma medida”


Pregunta 2: 3·3 = 9cm²
a) P es 3 porque es un cuadrado todos los lados tienen la misma medida

Estudiante A11:


P = 3
3 · 3 = 9
los lados son iguales

Estudiante A9: “Si es 3 porque tiene la misma medida y le están dando una medida”


Si es 3 porque tiene la misma medida y te están dando una medida

Estudiante A10: “el valor de p es 3 porque es un cuadrado y todos los lados son iguales”

3 x 3 = 9

A = 9

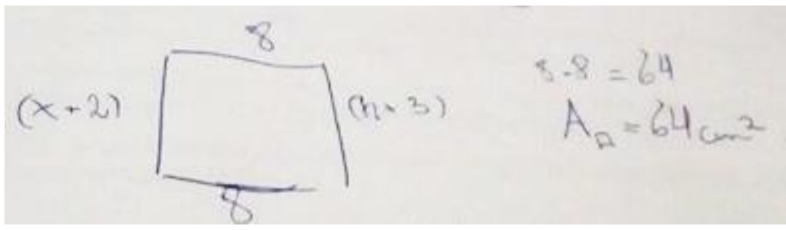
Estudiante A6: “P=3, porque 3 x 3= 9”

Estudiante A5: “si su valor es 3, ya que todos sus lados son iguales”

Pregunta 2) ii) a) ¿Podría ocurrir que x+2 = h+3? Justifica tu respuesta

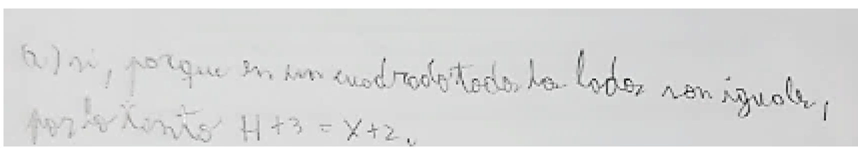
Experiencia: Los estudiantes responden a la pregunta de la siguiente manera:

Estudiante A1: “si, porque la medida de los lados de un cuadrado es igual y sino no sería un cuadrado”

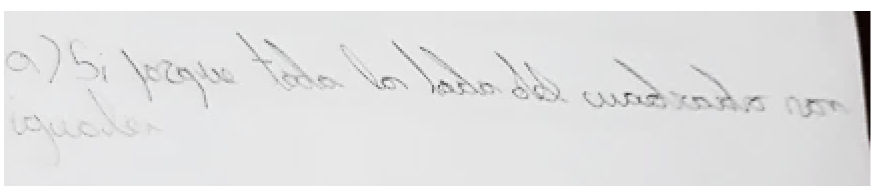


"si porque puede tener diferentes números, pero el mismo resultado"

Estudiante A6: "si porque en un cuadrado todos los lados son iguales, por lo tanto h + 3 = x + 2"



Estudiante A10: "Si por que todos los lados del cuadrado son iguales"



Pregunta 2) ii) b) ¿Existe algún valor para x y para h de manera que el área de ese cuadrado dé como resultado un número?

Expereincia: Los estudiantes responden a la pregunta de la siguiente manera:

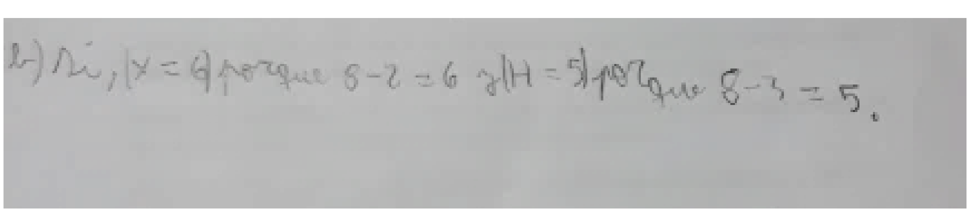
Estudiante A6: "x vale 6 y h mide 5"

"para x sería 6 y para h sería 5 para que pudiera dar 8 y ser un cuadrado"

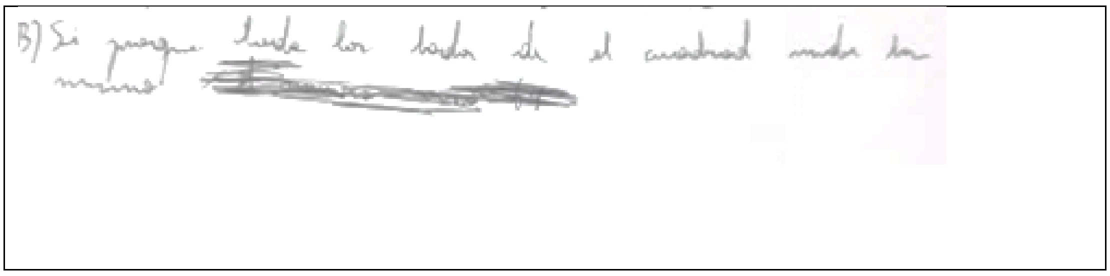
Estudiante A5: "Si, ya que c / lado de un cuadrado es igual

Si x= 6 y h= 5 para que cada lado de 8, y como área 64cm^2

Estudiante A12: "Si, x=6 porque 8-2=6 y h=5 porque 8-3=5"



Estudiante A11: "Si porque todos los lados del cuadrado miden los mismo"



Fuente: Elaboración propia

Observaciones experimentación:

Los estudiantes a través de sus respuestas por escrito en esta fase, dan a conocer sus hipótesis y conjeturas al respecto, para dar paso luego a la institucionalización.

En cuanto a la aplicación de la institucionalización se hace notar en cada momento, la costumbre que tienen los estudiantes a recibir como enseñanza solo esta fase, temiendo muchas veces a utilizar el material y responder finalmente las preguntas de forma libre.

Muchas veces consultaron si la actividad que estaban realizando era con nota y hacían preguntas constantemente acerca de las mismas respuestas a las preguntas para reafirmar su posición esperando que de alguna manera las investigadoras a cargo validaran sus conjeturas.

En el proceso mismo de institucionalización reafirmaron aún más el concepto de letra como variable y lo relacionaron con contenidos antes vistos como por ejemplo en la proporcionalidad directa e inversa, ya que al momento de modelar una expresión para cada tipo de proporcionalidad veían las variables y su significado.

4.3.5 Análisis a posteriori

En esta fase de la ingeniería didáctica utilizaremos como base para el análisis la información recolectada durante la fase experimental, en donde se presentará una comparación entre los resultados obtenidos por los estudiantes en el desarrollo de cada una de las actividades y las expectativas o comportamientos esperados, considerados en el análisis a priori.

Tabla 15: Análisis a Posteriori de actividad número 1

Organización individual
Pregunta 1: ¿Con cuántas figuras rellenaste el cuadrado? Dibuja las figuras con las que rellenaste el cuadrado.
Comparación y análisis: De acuerdo al análisis a priori se esperaba que los estudiantes pudieran de forma rápida y sencilla hacer calzar las piezas para conseguir rellenar el cuadrado entregado en un inicio de la actividad, sin embargo, hubo unos casos particulares, solo 2 de 12 alumnos en un comienzo no podían hacer calzar las piezas puesto que al poner las piezas sobre los cuadrado grande lo hacían de manera desordenada y quedaban sobrepuestas algunas piezas con otras, por lo que hacían falta más piezas para su relleno, lo que no estaba previsto, por lo que se les pidió que consideraran las dimensiones de cada una de las piezas en su totalidad y lo hicieron finalmente de forma correcta. En cuanto a los dibujos realizados por los estudiantes, hicieron lo que se esperaba en el análisis a priori, lograron dibujar las figuras con las que armaron el llenado del cuadrado, de distintas formas cada uno de los niños, algunos con figuras mucho más precisas utilizando regla y lápiz mina en caso de error y otros no con tanto detalle pero igualmente de forma correcta.
Pregunta 2: ¿De qué manera podemos expresar el llenado de la figura?, ¿Que representa este llenado? Relacionarlo con expresiones o contenidos aprendidos con anterioridad.
Comparación y análisis: En cuanto a las representaciones del llenado fueron bastante parecidas a lo que se esperaba, 7 de 12 estudiantes respondieron de forma escrita explicando paso a paso lo que estaba pensando en ese momento, pero la mayoría consideró desde ya formas algebraicas para representar en relleno. Por su parte las expresiones algebraicas estaban expresadas por letras asignadas de forma arbitraria. Al enfrentarse a la pregunta ¿Qué representa el llenado? Solo una pequeña fracción del total específicamente 5 de los 12 estudiantes mencionan verbalmente que el llenado de la figura representa el área; los demás estudiantes no mencionan nada al respecto, por lo que esto tardó más de lo que se preveía en el análisis a priori. A partir de la experiencia en particular de las investigadoras se considera que en la fracción de estudiantes que no responde o no menciona nada al respecto no existe una ausencia del conocimiento, simplemente no fueron capaces de relacionar este, desarrollando la actividad.
Pregunta 3: Busca distintas representaciones para el llenado de la figura, hazlo de forma libre y como te parezca pertinente.
Comparación y análisis: Se esperaba que luego de ya haber representado a través de dibujos y con ayuda de las letras el llenado de la figura, ahora fueran capaces de crear una nueva expresión, o nuevo modo de representar el llenado de la

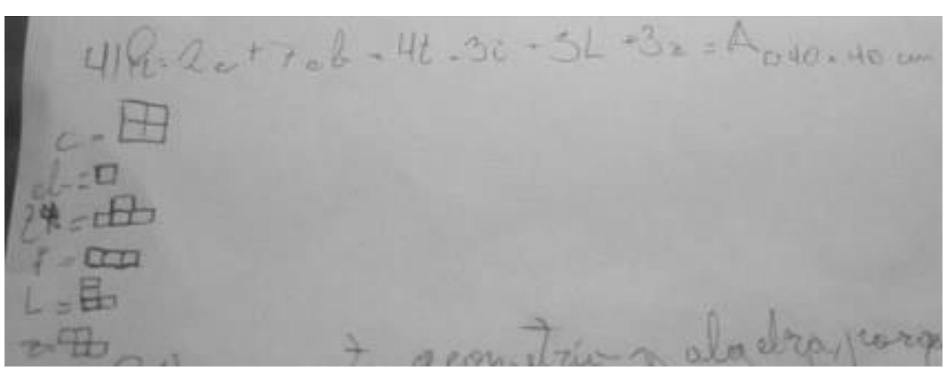
figura, relacionando lo realizado en las preguntas anteriores y relacionándolo con contenidos previos. Los estudiantes responden a la pregunta de diversas maneras y de acuerdo a lo que se esperaba, por ejemplo, un estudiante relaciona las dimensiones dadas al cuadrado con el llenado de la figura, exponiendo que

“ 40 x 40 = 1600 correspondiente al llenado de la figura”, en este caso el estudiante relaciona el conocimiento ya adquirido acerca de área de figuras geométricas con el desarrollo de la actividad y el llenado de la figura, relacionando la superficie del cuadrado entregado con el llenado del mismo; 3 de los 12 estudiantes mencionan por su parte que se puede representar como el área de la figura; uno de los estudiantes realiza un dibujo, donde explica que el cuadrado puede ser llenado con rectángulos y triángulos.

Pregunta 4: Expresa de manera algebraica el área de la figura, usando como base el modo en que rellenaste el cuadrado de cartón y justifica por qué lo hiciste de ese modo.

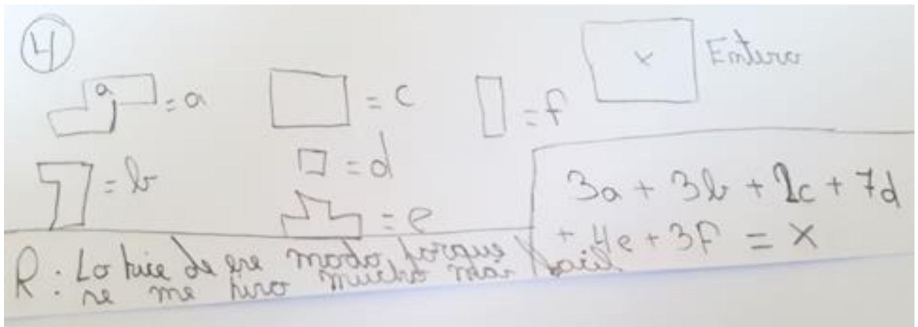
Comparación y análisis: De forma inversa a la pregunta anterior (en donde se esperaba que de manera espontánea idearan una expresión algebraica que representara el relleno de la figura), en esta ocasión se restringe un poco más el trabajo por parte de los estudiantes, pidiéndoles que expresen de manera algebraica el modo en que llenaron la figura, justificando el porqué. En esta ocasión 5 de 12 estudiantes responde según las opciones propuestas en el análisis a priori, donde a cada figura entregada le asignaron un nombre según su color. 4r+ 2a+ 3v+ 3A + 7b+ 3n= total; donde cada letra representa el color de la misma, por ejemplo, 4r representa 4 figuras de color rojo, que sumadas con las demás figuras representa el total o llenado del cuadrado. Por su parte uno de los estudiantes le asigna letras a las distintas figuras como se muestra a continuación, de este modo aparece una nueva manera de relacionar la manera en que se rellenó el cuadrado con la forma algebraica de escribir el llenado del mismo.

Estudiante A1



Por su parte uno de los estudiantes no responde a esta pregunta, haciendo alusión a que el tiempo no había sido suficiente para él.

Finalmente 3 de los 12 estudiantes participantes en la actividad, responden con letras, pero sin un sentido definido, solo asocian una letra a cada figura, no por

color ni forma, sino que de forma arbitraria y expresan de forma algebraica como por ejemplo: Estudiante A10:” lo hice de este modo porque se me hizo mucho mas fácil”  *Estudiante A10*
Pregunta 5: A partir de lo realizado, ¿Podrías identificar en la expresión algebraica alguna coincidencia o algo similar de alguna fórmula que ya conocías? Justifica tu respuesta.
Comparación y análisis: Se esperaba que algunos estudiantes no recuerden ninguna fórmula vista con anterioridad, es decir, que no relacionen la actividad con ningún contenido o saber matemático conocido por ellos. Como también que lo relacionen con el área de una figura geométrica. En este caso, 5 de los 12 estudiantes, responden que no se parece a nada, que no lo ha visto antes. El resto de los estudiantes hacen mención a contenidos previos vistos, por ejemplo, uno de los estudiantes relaciona el llenado de la figura a las fracciones, cuando se tienen fracciones y se transforman en un entero, otro estudiante por su parte lo relaciona con razones y proporciones. Por otra parte 1 estudiante menciona que si recuerda haber visto esto antes pero no exactamente como para dar un nombre.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 16: Análisis a Posteriori de actividad número 2

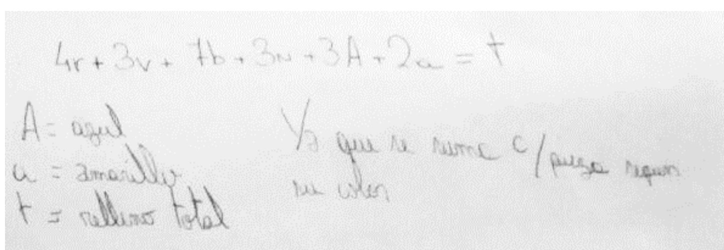
Organización Grupal
Pregunta 6: ¿Con cuántas figuras rellenaron el cuadrado? Dibujen las figuras con las que rellenaron el cuadrado.
Comparación y análisis: Es esperado que los estudiantes en esta etapa donde trabajan de manera grupal, diseñen un nuevo modelo para armar el relleno de la figura considerando las estrategias que usaron para armarlo anteriormente de forma individual. Se cumple lo esperado en el análisis a priori, la totalidad de los grupos ocupa las 22 figuras entregadas, y realiza así nuevas representaciones de lo realizado anteriormente de manera individual.

Por su parte los dibujos que realizaron en esta ocasión consideraron las letras que contenía cada una de las piezas pero solo los bordes, las letras en el interior de cada figura no fueron consideradas a la hora de hacer el dibujo.

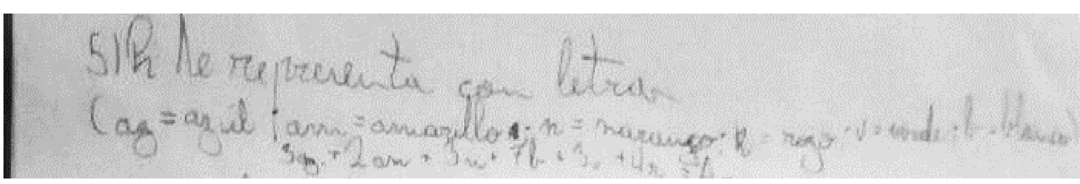
Pregunta 7: Expresen de manera algebraica el área de la figura, usando como base el modo en que rellenaron el cuadrado de cartón y justifiquen porqué lo hicieron de ese modo.

Comparación y análisis: En esta pregunta se esperaba que lo estudiantes realizaran la expresión algebraica, utilizando la letra como objeto determinado. Dos grupos responden el llenado de la figura de manera algebraica, haciendo mención a los colores de las 22 figuras entregadas utilizando la letra como objeto. Lo representan del siguiente modo:

Grupo G2



Grupo G1



Otro equipo por su parte expresa la siguiente representación:

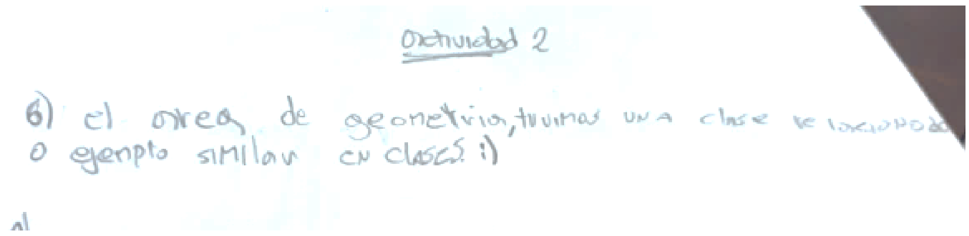
Grupo G4

"(2T + 2F · 2F + 2A + 2F) = X" advirtiendo que x representa el área la figura y que para esto calculó el "perímetro de cada lado" y luego los multiplicó. El último grupo por su parte responde y asigna letras de forma arbitraria para crear la expresión algebraica que represente el llenado del cuadrado.

Pregunta 8: A partir de lo realizado, ¿Podrían identificar en la expresión algebraica alguna coincidencia o algo similar de alguna fórmula que ya conocían? Justifiquen su respuesta.

Comparación y análisis: Un grupo de los 4 que realizaron la actividad didáctica aun a esta altura asegura que no recuerda el nombre de la formula o expresión algebraica antes vista, sin embargo, durante el desarrollo de otras preguntas si es capaz de identificar que se trata del área del cuadrado. El resto de los grupos responde que identifican la formula como la del área por ejemplo:

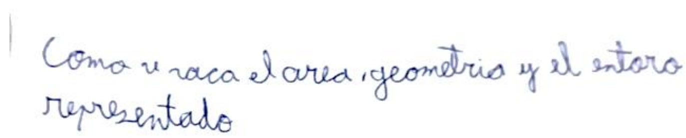
Grupo G1: “el área de geometría, tuvimos una clase relacionada o ejemplo similar en clases”


actividad 2

6) el area de geometria, tuvimos una clase relacionado
o ejemplo similar en clases :)

Grupo G1

Grupo G3: “Como (…) el área geometría y el entero representado”


Como u raca el area, geometria y el entoro
representado

Grupo G3

Pregunta 9: ¿Qué pasa con los lados de un cuadrado? ¿Qué propiedad tienen los lados de un cuadrado en cuanto a su medida o longitud?

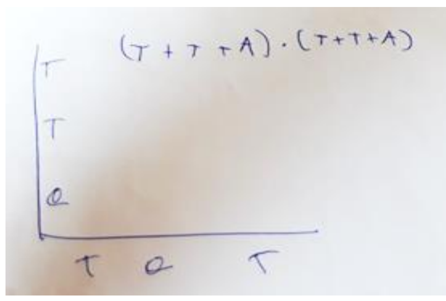
Comparación y análisis: En esta pregunta es esperado que los estudiantes respondan que los lados de un cuadrado miden siempre lo mismo. De este modo se cumple lo propuesto en el análisis a priori, puesto que todos los grupos responden que los lados son iguales o poseen igual medida.

Pregunta 10: A partir de las propiedades de los lados del cuadrado, con relación a su medida o longitud. ¿Cómo se podría representar algebraicamente esta propiedad?

Comparación y análisis: En la décima pregunta se esperaba que los estudiantes sumaran las letras representando el lado del cuadrado, considerando esto no hicieron el mismo análisis que se esperaba, pero surgieron cosas bastante interesantes con relación a la representación de los lados y posteriormente el área de la figura:

Un grupo por ejemplo relaciona de la siguiente manera los lados del cuadrado con el área de la figura inicial (cuadrado):

reduciendo todas las medidas distintas de las letras a solo una medida en función de f que era la medida del cuadrado más pequeño, generando una reflexión muy importante “que todas las figuras estaban formadas finalmente por una sola figura que se repetía varias veces, modelando distintas formas” por ejemplo el largo de la figura con forma de L estaba compuesto por 3 cuadrados de medida f por lo que en

vez de utilizar la medida como L la utilizaron como 3f, y de esta misma manera con todas las piezas. Otro grupo por su parte señala las medidas que tiene cada uno de sus lados, sumando las medidas de las figuras pequeñas que rellenan el cuadrado como se esperaba en el análisis a priori, pero no igualan los lados, solo expresan la multiplicación de estos de la siguiente manera:  *Grupo G3*
Pregunta 11: ¿Cómo relacionamos la propiedad de los lados de un cuadrado, con la expresión que representa el llenado de este mismo?
Comparación y análisis: Se espera que la respuesta de los estudiantes sea que como los lados del cuadrado son iguales, el llenado se representa a través de: Lado x Lado = área. En este caso 2 grupos responden la pregunta haciendo mención al área del cuadrado, uno de los grupos lo hace de manera verbal y el otro lo expresa matemáticamente. Los otros dos grupos solo responden “son iguales” de lo cual no se puede deducir mucho ya que no existe una relación ni una argumentación por su parte.

Fuente: Elaboración propia

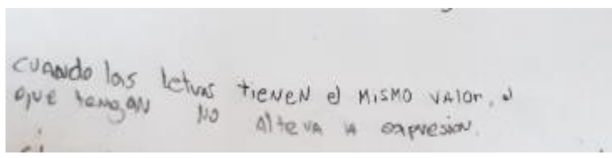
Tabla 17: Análisis a Posteriori de actividad 4

Instrucción: Reciban una hoja con las siguientes preguntas (las cuales deben ser redactadas en la hoja entregada):
Pregunta 1) a. ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones? A + B + C = C + A + B
Comparación y análisis: En su totalidad los estudiantes responden que la igualdad es verdadera siempre, algunos mencionan y argumentan que el orden no importa siempre son iguales, considerando la conmutatividad en la suma. En esta pregunta los estudiantes ya demuestran haber reconocido la letra como variable, logrando dar una respuesta pertinente y argumentando al respecto.

Pregunta 1) b. ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones? L + M + N = L + P + N

Comparación y análisis: En esta oportunidad los estudiantes responden de variadas maneras, pero en su mayoría haciendo referencia a lo que se esperaba en el análisis a priori, considerando la letra como variable, teniendo en cuenta que, aunque las letras sean distintas pueden tomar valores iguales, dependiendo el contexto, por ejemplo:

Grupo G3: “Cuando las letras tienen el mismo valor, el que tengan no altera la expresión”



Grupo G3

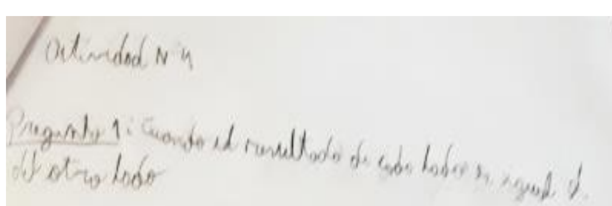
“Cuando las letras tienen el mismo valor, el que tengan no altera la expresión”

Haciendo referencia a que tomando M y P el mismo valor de cada lado de la igualdad, esta se va a cumplir.

En esta pregunta la totalidad de los estudiantes identifican la letra con un símbolo que puede tomar más de un valor, dejando de lado la concepción de letra como objeto y como incógnita específica, ya que dejan de asignar un valor fijo a cada una de las letras y distinto al de las demás, ampliando su campo de abstracción y considerando esta vez que una letra puede no siempre representar lo mismo, de esta manera, tienen una concepción más clara y precisa de la letra como variable observada a través de las respuestas dadas.

Otro ejemplo es el siguiente:

Grupo G4: “Cuando el resultado de cada lado es igual al del otro lado”



Grupo G4

Considerando ahora la posibilidad de que en ambos lados estén representados los mismos valores, a diferencia de lo que pensaban en el diagnostico aplicado en un inicio de la investigación.

Pregunta 2) i) a. ¿Existe algún valor para P de manera que el área de ese cuadrado dé como resultado un número?
Comparación y análisis: En su mayoría los estudiantes le dan valor a p= 3, argumentando que si p=3 el cuadrado tendrá sus lados iguales. En este caso los estudiantes le asignan un valor a la letra desconocida, evidenciando que esta puede cambiar o variar representando lo mismo, en este caso el lado del cuadrado.
Pregunta 2) ii) a. ¿Podría ocurrir que x+2 = h+3? Justifica tu respuesta.
Comparación y análisis: Todos los estudiantes responden que se cumple siempre que x+2 = h+3, argumentan por ejemplo que debe cumplirse ya que los lados del cuadrado son iguales , también proponen que x+2 = 8 y que h+3= 8 por lo tanto siempre son iguales consiguiendo valores también para x y para h. En esta pregunta se ve de forma más clara la noción que tienen los estudiantes de la letra como variable ya que logran aceptar como posible la igualdad entre dos expresiones algebraicas que poseen variables distintas.
Pregunta 2) ii) b. ¿Existe algún valor para x y para h de manera que el área de ese cuadrado dé como resultado un número?
Comparación y análisis: En su totalidad los estudiantes responden que el valor de x= 6 y h= 5, argumentan que lo hacen de esa manera para que cada lado mida 8 cm. y así los lados sean iguales. En este caso igualan cada expresión con el valor del lado designado (8cm.) removiendo la idea de la letra como incógnita especifica ya que no evalúan el número 8 en la expresión, sino que modifican o hacen que la letra tome distintos valores de acuerdo a la longitud del lado.

Fuente: Elaboración propia

Análisis y discusión final

Producto del análisis realizado luego de la aplicación de la propuesta didáctica se hacen algunas observaciones de forma general haciendo un breve resumen de las semejanzas y diferencias que hubo de acuerdo a lo planteado en el análisis a priori y el análisis a posteriori para generar un posterior rediseño de lo aplicado contextualizando la propuesta de acuerdo al contexto en el que docentes en el futuro quieran aplicarlo, para sacar aún más provecho y sea un aporte para educadores y agentes pertenecientes o relacionados directamente con la educación:

Tabla 18: Semejanzas y diferencias de Análisis a Priori y a Posteriori

Semejanzas	Diferencias
Algunas semejanzas encontradas fueron: • Dificultad en un inicio para ver la letra como variable, en esta etapa se ve la letra como objeto. • Representación del área con el total de figuras entregadas. • Encuentran representaciones algebraicas utilizando las letras según características visuales que los estudiantes encuentren por ejemplo color, forma, etc. • Consensuan que los lados de un cuadrado son siempre iguales o tienen la misma medida. • Algunos logran identificar la relación con la fórmula del área y otros demoran un poco más en llegar al concepto. • En la cuarta etapa ya consiguieron ver la letra como variable, por lo que coincide con nuestro anterior análisis. • En la actividad nº4 igualan los lados de los cuadrados considerando igualdades como: x+2 = h +3.	Algunas diferencias encontradas fueron: • Algunos estudiantes específicamente 2 no lograron de inmediato rellenar la figura entregada con las figuras pequeñas ya que superponía las piezas, cosa que no estaba prevista. • En la pregunta nº2 los estudiantes relacionan el total con un entero y las piezas como una fracción de ese entero. • En la pregunta nº5 un estudiante relaciona la expresión algebraica formulada con la unidad de razones y proporciones. • Un estudiante reduce a su mínima expresión cada medida de las piezas entregadas, considerando el cuadrado menor como la base de la creación de todas las otras piezas. • Los estudiantes no igualaron las expresiones algebraicas con las que representan cada lado del cuadrado entregado, sino que expresan simplemente a través del producto estas dos representaciones.

Fuente: Elaboración propia

CAPÌTULO 5: CONCLUSIONES

Por medio de la aplicación de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, se cumplió con los objetivos y supuestos propuestos, se evidenció por su parte que la propuesta didáctica aplicada a estudiantes de séptimo año básico favoreció y contribuyó a la incorporación comprensiva de las letras en el álgebra.

En la investigación realizada se observó en primera instancia con la aplicación de un test diagnóstico los 3 errores mencionados el supuesto número uno, que hacía referencia a que los estudiantes darían como significado a la letra ya sea como objeto, como letra evaluada o como incógnita específica.

Por otro lado, los estudiantes consiguieron luego de la realización de la propuesta didáctica, conocer y comprender el uso y significancia de la letra como variable. Sin embargo, no se atribuye a efectos de la presente investigación, el hecho que los estudiantes se apropien del objeto en estudio y exista así un aprendizaje que perdure a lo largo del tiempo y durante su etapa escolar.

Se visualizó además las ventajas del trabajo en equipo en comparación al trabajo individual, reafirmando lo definido en el marco teórico en relación a lo expuesto anteriormente. Las actividades realizadas por parte de los estudiantes de manera individual se desarrollaron de manera mucho más lenta, surgiendo además más errores que los dispuestos cuando se trabajó de manera grupal, en donde los estudiantes trabajaron de manera más fluida, exponiendo cada uno sus ideas y puntos de vista, haciendo valer sus posturas y validándolas con los demás integrantes del equipo.

Es importante destacar que al haber intencionado el trabajo grupal por parte de los participantes, permitió a estos mismos pasar por las fases la ingeniería didáctica, de formulación y validación, analizando y comparando sus resultados individuales con los de otros, para así poder dar una única respuesta

La utilización y manipulación del material didáctico elaborado, aportó a tener una visión más clara de lo que se buscaba investigar, de este modo acercar a los estudiantes a un aprendizaje más concreto y menos abstracto como comúnmente ocurre en la enseñanza tradicional de la asignatura de matemática.

De acuerdo a la experiencia que nos brinda la aplicación de la propuesta didáctica enunciaremos las siguientes recomendaciones:

Se recomienda al docente, utilizar e invertir tiempo en la creación de material didáctico para una mayor motivación, enseñanza, aprendizaje y aproximación del contenido por parte de los estudiantes. Además, fomentar el trabajo colaborativo y en equipo, y así los estudiantes, como es en el caso de la ingeniería didáctica puedan a través de las fases de formulación y validación, argumentar y comunicar dando a conocer la comprensión del objeto matemático, de este modo poder validar sus conocimientos y aprendizajes.

Producto de los resultados obtenidos luego de la implementación de la propuesta didáctica, se sugiere a docentes e investigadores del área implementar y enriquecer la propuesta, o emprender en nuevas investigaciones con relación a la propuesta didáctica con foco en distintos objetos matemáticos, de este modo que pueda también ser replicado en distintos niveles y áreas de enseñanza, considerando esta investigación como un aporte y en un futuro tener una visión distinta de la sala de clases, en donde a los estudiantes se les dé la oportunidad de ser participantes activos de su proceso de aprendizaje.

Como futuras docentes reconocemos la propuesta didáctica aplicada como una forma de enseñanza efectiva, en donde se trabajan las distintas habilidades, conocimientos y actitudes de los estudiantes, basándonos en las bases curriculares existentes, realizando así un trabajo coherente en la enseñanza del objeto matemático, y no solo una enseñanza basada en procedimientos mecanizados y algorítmicos. De este modo queda a libre disposición de los docentes que deseen aplicarla, pudiendo además realizar un rediseño de la propuesta didáctica, con el fin de ser aplicada en el contexto educativo en que se encuentre el docente.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M., Douady, R. y Gómez, P. (Eds.). (1995). Una empresa docente. En: *Ingeniería didáctica en educación matemática*, pp. 33-59. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial Zorsal.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Cadoche, L. (s.f). Aprendizaje cooperativo, competitivo e individualista. Sus implicancias en el aula de matemáticas. *Premisa* (42), 22-30.

Caronía, S., Rivero, M., Operuk, R., y Mayol, C. (2014). Los conocimientos matemáticos en el umbral de la universidad. *Ciencia Tecnológica* (16), 5-11.

Díaz, F., y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* México: McGraw Hill.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Semana*, (5), 23-34.

Filloy, E. (1998). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, J., Segovia, I., y Lupiañez, J. (2014). El uso de las letras como fuente de errores de estudiantes universitarios en la resolución de tareas algebraicas. *Bolema*, *28*(50), 1545- 1566.

González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Johnson, D., Johnson, R., y Holubec, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Buenos Aires: Paidós SAICF.

Mineduc. (2017). *Texto de estudiante matemática*. Providencia: Santillana.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14

Pérez, J. (2005). *La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del algebra elemental* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín.

Puig, L. (1998). *Componentes de una historia del álgebra.* Universidad de Valencia, México, DF: Grupo Editorial Iberoamericana.

Ruiz, D., y Pérez, J. (2012). *Aprendizaje experiencial, una herramienta estratégica en el desarrollo de competencias organizacionales* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia.

Schunk, D. (2012). *Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa.* México: Pearson Educación.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria*. Barcelona: Horsori.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Revista Universitaria de Investigación*, *12*(1), 122-142.

Torres, L., Valoyes, E., y Malagón, R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. *Revista EMA, 7*, (2), 227- 246.

ANEXOS

ANEXO 1: Test Diagnóstico

<u>Evaluación Diagnóstica Séptimo Básico</u>

<u>Usos de las letras en diversos contextos algebraicos</u>

Nombre: ___________________________________ Fecha: _________

Curso: ________

<u>Instrucciones:</u>

- Resuelva cada ejercicio en los espacios dispuestos.
- Responda con toda confianza y detalle lo más posible su desarrollo. Se trata de una evaluación diagnóstica, que realizamos en el contexto de un estudio que estamos efectuando para obtener nuestro Grado de Licenciada en Educación. La evaluación es sin nota.
- Usted dispone 30 minutos para realizar la evaluación.
- MUCHAS GRACIAS POR TU COLABORACIÓN.

Atentamente,

Bárbara Parra y Nayareth Montenegro
Estudiantes Seminaristas de
Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa

Ítem I: Lea cada situación, marque con una x la alternativa que considera correcta en cada caso considerando la relación que existe entre los datos entregados y argumente o explique por qué escoge esta alternativa.

1. Una compañía ha decidido donar el doble de dinero que logren reunir sus empleados en una campaña solidaria. E: Dinero reunido por los empleados. C: Dinero que aportará la compañía. a. C= E + 2 b. C= 2 · E c. E= 2 + C d. E= C + C	Justifique su respuesta
2. Fernanda tenía 4 años cuando nació su hermana Antonia. F: Edad de Fernanda. A: Edad de Antonia. a. A= F + 4 b. F= A – 4 c. 4= A + F d. A = F – 4	Justifique su respuesta
3. ¡Super oferta! En todos los productos lácteos “Pague 1 y lleve 3”. P: Productos pagados. L: Productos llevados. a. L= P · 3 b. P= L · 3 c. L= p + 2 d. L= P – 2	Justifique su respuesta
4. Para preparar el jugo, mezcle 1 litro de agua con ½ litro de pulpa.	Justifique su respuesta

J: Litros de jugo A: Litros de agua. P: litros de pulpa a. A= J + P b. P = J + A c. J = A + ½ p d. J= P + A	

Ítem II: Lee cuidadosamente cada situación y responde. Justifica tu respuesta.

1. Si a+b=10, entonces ¿Cuánto es a+b+c?

2. Tenemos los siguientes enunciados:

   A = B+3 ¿Qué le sucede a A si le añadimos 2 unidades a B?

   F=3G+1 ¿Qué sucede a F si le añadimos 2 unidades a G?

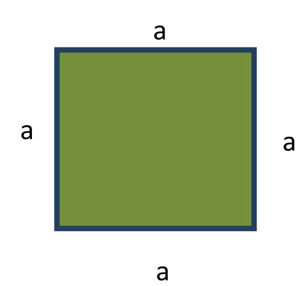
3. ¿Cuál es el sucesor de D?

4. ¿Cuál es el antecesor de N+3?

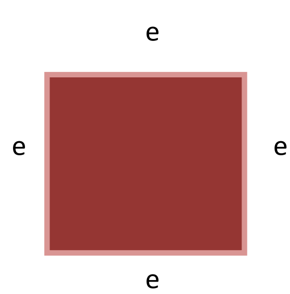
5. Reemplaza el valor dado en cada expresión y obtén el resultado.

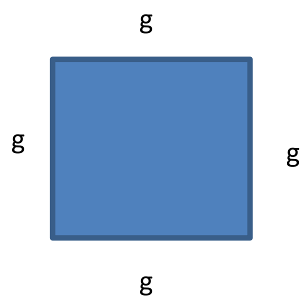
1. Con x= 3 x + 3 = a. 9 b. 6 c. 0 d. 12	Justifica tu respuesta
2. Con x = 1 3x + 2 = a. 33 b. 5 c. 6 d. 11	Justifica tu respuesta
3. Con x= 0 10x – 5= a. -5 b. 95 c. 5 d. -95	Justifica tu respuesta

6. El cuadrado de la imagen tiene sus lados de longitud a. Por lo tanto su perímetro lo representamos como P= 4a.



¿Cuál es el perímetro de estas figuras?

1-  P = __________	2-  P = __________

3-  P = __________	4- De forma general… como representamos el perímetro de una figura que tiene n lados de 2cm c/u. P = __________

8. ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones? Justifica tu respuesta.

1. A + B + C = C + A + B	2. L + N + M = L + P + N

Ítem 1 Transcripción del Test Diagnóstico

	ITEM I			
EST	p1	p2	p3	p4
E1	d	c	b	c
E2	a	c	b	c
	porque c=E+2 es lo que van aportar	porque 4 es la edad de fernanda y lo otro son los números	L son los productos que van a llevar y x3 la que se multiplica	porque al final va el jugo y al principio el agua
E3	b	a	b	c
	yo pienso que al decir que deciden donar el dinero, no puede decir 2 porque es con no que aportan mas 2 y que yo creo que 2 veces el dinero de la comañia es la respuesta	porque antonia nació cuando fernanda tenía 4 años.	porque los productos que llevan por el numero que lleva es el resultado	porque en ambos dice cuanto es cada uno
E4	a	a	b	c
	porque se asemega a la pregunta	porque hay nacio su hermana	porque eso cuesta	porque asi se hace el jugo
E5	b	a	b	d

	logica la compañía quiere reunir el doble que los empleados quieren reunir en una campaña solidaria por eso C=doble x E la compañía reune el doble que los empleados	fernanda es mayor que antonia entonces antonia es igual o menor que fernanda y fernanda mas 4 años = 3	lleve tres pague uno=3	un jugo es igual a pulpa más agua =3
E6	b	a b	c	d
	el dinero del trabajo se duplica y luego ese es el dinero que entrega	la edad de fernanda es la edad de antonia reducida en 4	los productos que lleva son los que compraste y se le suma 2	el agua mas la pulpa hacen el jugo
E7	b	b	c	
	por que dice que van a donar el doble que reunen por empleador	porque restan los años que tiene fernanda y da lo que tiene antonia	porque se mezcla todo	
E8	a	b	b	c
	porque c es igual al dinero que aportara la compañía	porque fernanda nacio 4 años antes que antonia	porque P es igual a todos los productos pagados	porque son los litros de jugo que se necesitan para preparar la pulpa
E9	b	d	b	c

	porque el dinero que van a aportar el doble del dinero de los empleados	antonia nacio 4 años despues que fernanda		el jugo es igual a un litro de agua y 1/2 de pulpa
E10	b	b d	b	d
	porque el doble deldinero es expresado algebraicamente	como fernanda tiene 4 años mas que antonia y para nacer la edad de antonia a la edad de fernanda se le aumentan 4 U	al lleva L cantidades paga P	no es la C porque la cantidad no esta definida y al poner 1/2 esta definiendo la cantidad
E11	b		b	c
	porque el dinero que aporta la compaia © es igual al doble de lo que reunen sus trabajadores (2*E)		porque por cada producto pagado (p) lleva tres (L*3)	porque para preparar el jugo (j) se necesita mesclar 1 litro de agua (a) con 1/2 litro de pulpa (1/2 p)
E12	b	d	b	d

	elegí la B ya que encuentro que es la correcta porque como a compañía decide donar el doble de dinero corresponde a una multiplicación del dinero reunido por los empleadores		elegí la b porque los productos pagados corresponden según los productos llevados , por lo tanto si llevan 3 "L"pagas 1 "P"	es la de ya que lo litros de jugo corresponde según los "P" y "A" que uses
E13	c	b	a	c
	porque E es el dinero reunido por los empleados y c es lo que aportará la comañía	fernanda es la que nació primero y despues vino antonia y así saber la edad de antonia	asi sabremos cuanto llevara y cuanto tiene que pagar	lo primero que dice es el jugo y despues el agua y por ultimo va el litro de pulpa
E14	a	a	b	c
	al sumarle esa cantidad daria el del el dinero	tiene que sumr	para que la producto aumenten	para que salga bien el jugo
E15	b	d	a	c
	porque si aumenta el dinero de la empleado tambien el de la compañía	porque antonia tiene 4 años menos que fernanda	porque si llevo más productos pago más	porque si juntamos agua y pulpa hacemos má jugo

E16	b	a	d	c
	multiplicando E*2 y el resultado es c	sumandole a la edad de antonia A 4 años Ej: antonia tenia 4 1 año y le sume 4	nose	lo hice con magia
E17	b	d	b	c
	relacioné que E*2 era el doble y que eso daba de resultado C	como antonia nació cuando fernanda tenía 4 años supongo que la prefunta es ¿Cuántos años tiene antonia? Por eso digo que es A= F-4 ya que da como resultado la edad de antonia	como dice "pague 1 y lleve 3" hay que suponer que L*3 (que seria cuantos productos van a llevar) da como resultado P	dice que hay que mezclar 1 litro de agua y 1/2 de pulpa por eso llego a J= A+ 1/2 P
E18	b	a	a	c
	es C=2E	ya que A=la edad de antonia , siempre fernanda tendra 4 años mas que antonia	por cada producto pagado va a llevar el triple	porque depende de la 1/2 de pulpa y agua para que se cree el jugo
E19	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta

E20	a	b	b	c
	ya que el dinero reunido es = a el doble que aportará la empresa	porque la edad de fernanda seria igual a la de antonia disminuida en 4	porque a los productos pagados se le sumaran 3	porque para preparar el jugo es un litro de agua con 1/2 litro de pulpa lo que es igual a: J= A +1/2p
E21	b	a	b	c
	C = E · 2 ya que el dinero que aporta es el doble de lo reunido	A = F + 4 Al armar la operación con los datos	ya que para que se cumpla lo dado la p debe ir al inicio	ya que los litros de jugo se daran al combinar la pulpa con el agua
E22	b	a	c	c
	por que van a dar todo a una campaña y dan todo lo que reunieran	por que tenia 4 años cuando nacio	por que es lo mas correcto algebraicamente	en orden algebraico es lo mas correcto
E23	b	d	c	c

	la compañía dona el doble de lo que logren reunir los empleados 2e=C	Antonia= nace, Fernanda= 4 años, Antonia = Fernanda - 4 (edad)	P1= llevo 3 , llevo 3 =pago 1 + 2 , llevo 6= pago 2 +2 =4 , llevo 6 =pago 2·3 =6	J= litros de agua + 1/2 litros de pulpa , x + 1/2 p = J
E24	b	d	d	b
	por que "c" es lo que se entrega de el dinero reunido por los empleados	por que Antonia tiene 4 años menos que fernanda	porque se lleva un total de productos y paga solo una pequeña cantidad de todo lo que se llevó	porque la mezcla de los dos productos da de resultado el jugo
E25	b	d	b	c
	porque la compañía decide donar el doble que consigan sus empleados	porque asi Fernanda tendría la edad de Antonia	porque asi pagaré uno y llevaré 3	porque asi se sumaria el litro de agua y el medio litro de pulpa
E26	b	d	a	c

	Elegí esta respuesta porque es lo mismo solamente esta expresado algebraicamente	Antonia tiene 4 años menos que su hermana	Elegí esta respuesta porque representa la afirmacion	Elegí esta respuesta porque es lo mismo pero escrito en expresion algebraica
E27	d	d	a	c
	Es porque la compañía donará el doble que de los empleados asi que 1c es el dinero por los empleados y c+c es el doble	porque la edad de Antonia la de Fernanda menos 4	por la oferta que hizo el mercado L es p-2	Esa es la reseta correcta para el jugo por los datos que nos dan
E28	b	b	b	c

	Elegí fue porque c es el dinero que aportarán y decidieron donar el doble de lo que iban a reunir osea E·2 es lo que donaron	Antonia tiene 4 años menos que Fernanda por eso es la ecuacion F= A-4	los productos llevados son el triple de los pagados	son los litros de jugo son igual a los litros de agua más medio litro de pulpa
E29	b	d	a	d
	la compañía va a dar el doble de dinero que sus empleados	Antonia tiene 4 años menos que Fernanda	voy a llevar el triple de cosas que voy a pagar	
E30	d	a	c	Responde b y c
	en la pregunta señala que la compañía decide donar el doble que logren reunir sus empleados	Fernanda tiene 4 años y antonia acaba de nacer	en la oferta dice pague 1 y lleve 3, productos llevados = p+2	los litros de jugo son 1 1/2 por que al sumar el agua con la pulpa da 1 1/2

E31	d	b	a	d
	porque es el dinero reunido por los empleados más el doble por la compañía	porque Fernanda es 4 años mayor	porque dice que lleve tres y pague uno	porque el jugo es lo que más debería llevar
E32	b	d	b	c
	Porque c significa el dinero que aportará la compañía por lo tanto es = a el doble del dinero de los empleados	porque la "A" de antonia (edad) es igual a la F de Fernanda menos 4 años	Porque la "P" (de pagar) es lo mismo que llevar "L" 3 productos	porque para preparar jugo (J) debemos mexclar o sumar en este caso los litros de agua "A" con el 1/2 de pulpa (1/2 P)
E33	b	b	d	c

	C es compañía , 2 es el doble y E son los empleados	sigo las iniciales	leo el problema hasta entenderlo	ya expliqué lo que hacía
E34	b	b	b	c
	c : dinero queaportará la compañía es igual a dinero reunido por empleados por 2	Fernanda la edad es igual a la de antonia menos 4	un producto pagado es igual a llevar 3 productos llevados	el jugo en litro es igual a un litro de agua mas un medio de pulpa
E35	b	a	a	a
	porque es el doble 2 que sus empleados E 2· E	Fernanda + 4	pague x lleve 3	jugo + pulpa
E36	b	d	a	c

	porque el dinero que aporta la compañía =c es el doble del dinero que han reunido por los empleados , c= 2·E	Antonia nacio y a Fernanda se le restan 4 años para ver su edad A= F-4	L= P·3	porque jugo es el resultado de agua con 1/2 de pulpa , J = A + 1/2 p
E37	a	b	b	c
E38	c	a	a	c
	porque : E = dinero por los empleados + 2 que vendría siendo el doble + c que es el dinero que aportará la compañía	porque nacio Antonia y F= Fernanda tenia 4 años	porque si pagas 1 llevas 3	porque se agrega jugo, luego agua y al final pulpa

Ítem 2 de Transcripción Test Diagnóstico

	ITEM II													
EST	p1	p2.a	p2.b	p3	p4	p6.a	p6.b	p6.c	7a	7b	7c	7d	8a	8b
E1	es 12	nada lo que cambia es el problema	cambia el problema	D+(d+19	N+2	b	b	a	4E	20x	4g	?		
E2	es 15 porque van de 5 en 5	queda 2B	queda F=5g+1	es c	N+2	b porque se suma x=3 x+3=6	b porque se suma x=1 3x+2=5	c porque se resta x=0	4E	50x	4g	8 cm	Esta porque sigue el orden de la anterior	
E3		se convierte en 2B+3	seria 5G+1	E	N4	b x vale 3 y el otro numero tambien es 3	b porque 3*1 = es igual a 3 y el otro numero es 2	a se multiplica y da 0 y queda el menos 5	4E	10x	4g	4n	cuando se realiza el ejercicio	no se realiza la igualdad porque la letra M no esta en la otra y hay otra letra que es la P
E4	es 12	se buelve 2B	seria 2G	es c	m	a se asemega	b por que es asi como da de resultado	c porque es asi	30	40	60	70	asi se asen	es correcto

E5	a=6 b =4 = 10 6+4+c(1)= 11	se convierte en B	se convierte en G	E se sigue el abecedario	N+2=3	b	b	a	4E	275x	4g	4cm	1+2+3=3+1+2	12+14+13= 12 +16+14
	no especifica que numeros asi que ise una solicuion simple	y B en C+5	y 3G en 3H+3			3+3 es 6 suma nomas	3x1= 3+2=5	10 x 0=0-5=-5					porque para mi A es 1 B es 2 y C es 3 por el orden del alfabeto	no son iguales pero por el oreden anterior seria de esa forma
E6	a+b+c=15	sigue siendo un numero desconocido	6G=F	es E		b	b	c	4E	4 por 5x	4G	4cm	son verdad	es falso
	cada letra es el numero 5	pero aumentado su valor		lla que sucesor es lo que viene despues	es N+3+1	si x es igual a 3, 3+3 es 6	el 3 multiplica por 1 y se le suma 2. da 5	5 menos 0 es 5					porque siempre el mismo valor solo cambia el orden	porque un valor cambia dando otro resultado
E7				la E	N+2				e4	20x	g4	8cm	V	F
													porque estan los mimos numeros	porque cambia un numero
E8	8+1+1	la A quedaria igual	no le pasa nada	el sucesor de D es E	ñ+2	b	c	c	4E	10X	4G	8 cm		
		la B quedaia 2B	quedaria igual			porque = 3 y 3+3 es = 6	porque si x= a 1 y 3+1+2 =6	porque x es = 0 cero					cuando tienen los	estas no tienen las mismas letras

													mismos valores	
E9	seria 15			D+1	N+2	b	b	a	4E	12x	4G	8cm		
	porque a, b yc son igual a 5					porque x=3	porque 3x=3	x=o osea nada						
E10	puede ser de cualquier numero al no definirse una cantidad	el resultado de A seria 5	el resultado de G seria 7	D+1	N+2	b	b	a	4E	20x	4G	2N	v	F
						al remplazar x con 3 quedaria 3+3 y eso da 6	al remplazar x con 1 quedaria 3*1+2=5	al remplazar x con 0 quedaria 10 *0 = 0 -5 =-5					porque tiene las mismas letras	al no tener las mismas letras tienen distintos valores
E11		A < B+3+2	F<3G+1+2	D+1	N+3-1	b	b	c	4E	20x	4G	n2	esta expresion es verdadera	esta expresion no es verdadera

		Ay B son iguales , pero si a B le añaden 2 unidades A va a ser mas pequeño que B	Fy G son iguales , pero si a G se le añaden 2 unidades F va a ser menor que G			porque x es tres entonces 3+3 es 6	si x es 1 entonces 3*1 es 3 y 3+2 es 5	x es 0 entonces 10 * 0 es 0 y no hay operación que hacer					ya que la suma es conmutativa , y si se suman A+B+C es igual a que se sumen C+A+B	porque
E12	no se podría saber	el numero que represanta "A" aumenta	aumenta su valor	E	N+2	b	b	a	4E		4G	2cm* x		
	ya que sabemos que el valor de "a" + "b" es igual a 10 pereo no sabemos el valor de "c" por lo tanto el resultado final siempre va a ser una incognita					x=3 por lo tanto 3+3=6	es 5 porque 2*1=3 3+2=5	es -5 ya que todo multiplicado por 0 es 0 y 10*0 = 0 0-5=-5						
E13	a+b+c=15	sigue normal y corriente	sigue normal	F	nose	b	b	a						

	5+5=10 vedad oviamente hay que agregar otro 5					3+3=9 en que sale en las alternativas	3+2=5							
E14	a=E b=E c=4	se multiplica por 2	se multiplica por 2 enbez de 3	E	N+2	b	b	a	4E	45x	4G		si	si
						porque 3+3 es 6	porque 3x1 es = a 3 mas 3 es = a 5	porque 0-5 es -5						
E15	a+b+c=x	A tendria un valor diferentepara que sean iguales	F= 3G+2+1	D+1	N+3-1	b	b	c	4E	4* 5x	4G	4*2	es verdadera	es falsa
	porque no se cuanto equivale cada letra		(F) tendria que ser otro valor	no se porque no tiene un valor asignado	le reste 1 porque es el antecesor	remplaza x por un 3	remplaza la x por un1	remplaza x por un 0					porque a un lado tien A+B+C y en el otro igual pero de forma desordenada	porque en un lado tiene L+M+N y en el otro lado L+P+N y por lo tanto no son iguales

E16	eso no se puede saber	cambia según el valor de B	cambia segunel valor de G	debemos saber el valor de la incognita	nose	b	b	a	4E	nose	4G	42	nose	nose
	ya que tanto a como b son incognitas de 0 el numero puede variar y no se puede saber los numeros exactos			pero el de D es E		x=3 x+3 3+3	multiplicar 3*1 y sumar 2	multiplicando 10 *0 y le resto 5						
E17	es 15	se puede encontrar su valor	cambia su valor	D+1	N+2	b	b	a	4E	4=5x	4G	no se puede ya que no se nombra que figura es	verdadera	falsa
	suponiendo que A=5 B=5 y C=5					porque 3+3=6	porque x cambia su valor y quedaria 3*1+2=5	porque x cambia su valor y eso provoca que quede 10*0-5=-5					ya que las letras no se cambian en ningun momento	ya que cambia un factor alterando el producto

E18	es 10 c	aumenta A	aumenta F	D+1	N´2	b	b	a	4E	10X	4G	8n	cuando hay propiedad conmutativa ya que es = a 1+2=2+1 3 tambien porque es una	cuando la variable m tiene independiente ya que m=p porqu m es dependiente de p
	porque a+b=10 entonces a+b=10 +c es 10c					ya que si x=3 3+3=6	ya que x=1 3*1+2=5	ya que si x=0 10*0-5=-5						
E19	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta	no contesta

	ITEM II													
EST	p1	p2.a	p2.b	p3	p4	p6.a	p6.b	p6.c	7a	7b	7c	7d	8a	8b
E20	A+B+C= 10+C No se puede saber exacto porque no te dan el valor de c pero se puede escribir A+B+C =10+C	aumenta su valor o no serían iguales	no serian iguales ya que cambia el valor por completo	E	N+2	b ya que reemplazamos x por 3 y nos da 3+3 lo que es 6	b porque reemplazamos los numeros y ahí me da el resultado	a ya que reemplazamos los numeros respectivos y nos da -5	4E	20x	4g	Sumamos todos los lados	Verdadera	Falsa
E21	15 , ya que cada letra valdria 5	Cambiaria su valor	cambiaria el valor de F	D+1	N+2	b x+3 = ? , 3+3=6	b 3· 1+ 2 =? , 3·1 +2=5	a 10x-5=? , 10· 0 -5 = -5	4E	20x	4g	8 cm	Verdadera ya que se repiten los valores pero en diferente orden	Falsa ya que no se repiten los mismos valores
E22				D+1	N+3-1	b	b	a	E4	$5x^2$	g4	n4		

	a = 3 , b= 3 , c=4	B se multiplica por 2				por que 3+3 da 6	3· 1 = 3+2 = 5	10 · 0 = 0- 5 =- 5					Por propiedad conmutativa	
E23	no se puede sacar ya que hay bastantes variables o valores que se le pueden dar a A y B por ejemplo: a=4 y B=6 , A= 3 y B=7 , A=2 y B=8 .	aumenta tambien en dos unidades	aumenta en dos unidades	D+1	N+2	b x+3 = 3+3=6	b 3x + 2 , 3·1 + 2 , 3+2=5	a 10x -5 , 10·0 - 5 , 0-5=-5	4E	20x	4g	2n	siempre, el orden no altera el producto	nunca, ya que no tienen los mismos valores
E24	Siguiendo la logica sería 15 por que 10 dividido en dos da 5 entonces se llega a la conclusion de que a,b y c serian 5	aumenta el valor incognito de "A"	aumenta el valor de la incognita	es E	2N	b porque se reemplaza x con 3 y 3+3=6	b porque 3 se multiplica por uno	a por que 10· 0 es 0	4E	20x	4g	2+n	Verdadera porque hay conmutativid ad	falsa por que hay una incognita diferente

E25	a+b+c =10+c	Dejaria de haber igualdad	Dejaria de haber igualdad	D+1	N-1+3	b	b	a	4e	20x	4g	2n	Es verdadera	Es falsa
	porque no sabemos lo que es c	por que hay que sumarle 3 unidades a B para que sea A	porque a F tendríamos que sumarle 1 unidad para que hubiese igualdad	porque no sabemos que es D	porque no sabemos que es N	porque x=3 entonces se suma x+3 que es lo mismo que 3+3 y el resultado es 6	porque 1 al multiplicar con otro factor ese factor no cambia	si se multiplica por 0 el resultado es 0					porque todos los factores son iguales y en la suma no importa el orden	porque no todos los factores son iguales
E26	no se puede calcular	se aumentó	Se aumentó	D-1	N+2	b	b	a	4e	20x	4G	n·2	Esta expresión es verdadera	Esta expresion es falsa
	porque faltan datos					3+3 =6	3+2=5	0-5=-5					porque se esta usando la propiedad conmutativa	porque L + N + M ‡ L +P + N
E27	20			D+1	N+2	b	b	a	4e	20x	4g	n+2 cm		no son iguales

		A aumenta su resultado	F aumenta su resultado			porque x vale 3 y se suma con 3 el resultado es 6	x vale 1 y es 3x más 2 es 5	x vale 0 y por 10 es 0 menos 5 es -5					porque tiene la unidad conmutativa	
E28	es 10 + c	queda A+2 = c+3	F= 5G + 1	D+1	N+3-1	b fue porque x es 3 y reemplacé la x y me quedo 3+3	b remplacé u quedo 3+2 y es 5 multipliqué	a queda -5 porque 10 · 0 es 0 y queda el menos adelante	4e	20x	4G	2N	Verdadera	verdadera
E29	No responde	tambien aumenta A	aumenta 2	no responde	no responde	no responde	no responde	no responde	no responde	no responde	no responde	no responde	no responde	no responde

E30	a+b+c= 15	no responde	no responde	no responde	no responde	b	c	c	4e	10x	4g	no responde	no responde	no responde
	porque a+b =10 entonces si le sumas x da 15					dice que x=3 entonces x+3 =6	x=1 , 3+x+2=6	10x-5=5						
E31	a= 5 , b= 5 , c= 5	Cambiaría la ecuacion y quedaría asi: 2A = 2B + 3	Quedaría igual y a G se aumentaría	El sucesor de 1D	El antecesor es N+2	b	b	a	4e	10x	4g	4p	Son verdaderas cuando tienen letras y numeros	
	porque 5 más 5 es 10					porque 3 mas tres es 6	por que es 3x quedaría igual	porque el 10x queda en 0						
E32	A+B+C es igual a 15	"A" no podría satisfacer la igualdad	"F" no podría satisfacer la igualdad	Es D+1	Es n+2	b	b	a	4E	20x	4g	8e	Son verdaderas solo cuando se cambia el orden de los factores no el factor	

						porque al sumar la incognita ya revelada podemos saber que 3(x) + 3 =6	si multiplica mos cualquier numero por 1 siempre será el mismo por lo que la operación sigue normal	porque al multiplicar un numero por 0 este siempre será 0 por lo que solo queda restar 5 a 0						
E33	10+c	el valor de A aumenta	el valor de F aumenta	D+1	N-2	b	b	a	4e	2· 5x	4g	n·2 cm	Verdad era	Falsa
	creo que es ese ya que no dan el valor de c					es obvio y facil	hay que reemplaza r el valor de x por el numero que dan						es conmut ativa	p no está en la anterior
E34	a+b =10 , a+b+c =15	A=5 , A=2+5	F=33 , F= 32+1	e	M+2	b	a	b	4e	20	4g	8cm	A+B+C = A+B+C	M+ N + L = L + P + N

	suponiendo que cada letra es 5			por el abecedario		x=3 , 3+3=6	x=1 , 31+2 =33	x0 , 100 - 5 =95						
E35	20	F	i	e	o	b	c	c	no responde	10x	no responde	8 cm	C +A + B	M + L + N
						3+3	1+3+2	10 menos 5						
E36	Sería 10 + c	quedaría A + 2B	sería F + 6G + 1	es e	N+2	b	b	a	4e	20x	4g	4x	cuando en las 2 hay mismos números	puede ser solo que la P y M quedan solas

	(10) + (10) + c					3+3 =6 , III + III = IIIIII = 6	3(1) + 2 =3+2 = 5	10(0) -5 =-5						
E37	No responde	queda A = B+2	Queda F= 3G +2	Es e	no respon de	b	b	a	4e	25x	4g	no respon de	Es A+B+c	no responde
E38	15	B+5	5G+ 1	E	M+3	b	a	b	4e	105	4g	22		
	porque a+b valen 5 , 5+5 =10 + c(5) =15					porque x=3 . Si a x(3) le agregamos 3 es 6	3x+ 2 = 33 por que dice a x=1 entonces, 31+2 =33	10x - 5 = 100 - 5 =95 , x=0						

ANEXO 2: Validaciones de expertos

SOLICITUD DE VALIDACIÓN

Estimado(a) Experto(a):

Junto con saludar y por intermedio de la presente, solicito a usted, realizar validación del instrumento de la Tesis de Pre Grado titulada: *"DISEÑO Y APLICACIÓN DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA, CON BASE EN LA INGENIERÍA DIDÁCTICA, PARA FAVORECER LA COMPRENSIÓN DE LA LETRA COMO VARIABLE EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO AÑO BÁSICO"*.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿De qué manera la implementación de una situación didáctica contribuye a la incorporación comprensiva de las letras en el álgebra en niños de séptimo básico?

OBJETIVO GENERAL:

Validar una propuesta didáctica dirigida a estudiantes de séptimo año básico, con relación a la incorporación de las letras en el álgebra en diversos contextos algebraicos, con el fin de contribuir a una mejora en la comprensión del tema por parte de los estudiantes.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1) Realizar un análisis preliminar de la incorporación de la letra en matemáticas, considerando las dimensiones didáctica, cognitiva y epistemológica.
2) Crear y aplicar una situación didáctica considerando los conceptos errados cometidos por los estudiantes en el test diagnóstico.
3) Contrastar los resultados obtenidos en la secuencia, a través de una validación interna, siguiendo la metodología de la Ingeniería Didáctica.

Muchas gracias por la disposición y las observaciones que pueda realizar.

Saluda cordialmente a usted,

Nayareth Amalia Montenegro Figueroa
Bárbara Camila Parra Henríquez

Estudiantes Seminaristas de Licenciatura en Educación y
Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa
Universidad Católica Silva henríquez

INFORMACIÓN GENERAL DEL EXPERTO

PERSONALES
Nombre: MARCO ANTONIO ROSALES RIADY
Titulo(s) Profesional(es) y/o Grado(s) Académico(s): PROFESOR DE MATEMÁTICA LICENCIADO EN MATEMÁTICA MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, MENCIÓN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICA DOCTOR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Principal(es) Área(es) de Trabajo o de investigación (máximo tres): GEOMETRÍA FORMACIÓN DE PROFESORES
INSTITUCIÓN DONDE LABORA
Nombre de la Institución: UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
Cargo o función que desempeña: ACADÉMICO INVESTIGADOR
Firma:

INFORMACIÓN GENERAL DEL EXPERTO

PERSONALES
Nombre: MAURICIO ESTEBAN MOYA MÁRQUEZ
Título(s) Profesional(es) y/o Grado(s) Académico(s): PROFESOR DE ESTADO EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN MAGÍSTER EN EDUCACIÓN, MENCIÓN INNOVACIÓN DIDÁCTICA
Principal(es) Área(es) de Trabajo o de investigación (máximo tres): INFORMÁTICA EDUCATIVA PRÁCTICAS PROFESIONALES GEOMETRÍA Y ESTADÍSTICA
INSTITUCIÓN DONDE LABORA
Nombre de la Institución: UNIVERSIDAD CATÓLICA SILVA HENRÍQUEZ
Cargo o función que desempeña: ACADÉMICO INVESTIGADOR
Firma:

INFORMACIÓN GENERAL DEL EXPERTO

PERSONALES
Nombre: TAMARA DEL VALLE CONTRERAS
Título(s) Profesional(es) y/o Grado(s) Académico(s): LICENCIADO EN EDUCACIÓN PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA EDUCATIVA MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DOCTORA EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
Principal(es) Área(es) de Trabajo o de investigación (máximo tres): MODELACIÓN MATEMÁTICA SOCIOEPISTEMOLOGÍA
INSTITUCIÓN DONDE LABORA
Nombre de la Institución: UNIVERSIDAD CATÓLICA SILVA HENRÍQUEZ
Cargo o función que desempeña: ACADÉMICA INVESTIGADORA
Firma: