

**Registro de representación semiótica como estrategia  
de fortalecimiento de acuerdo con las dificultades y  
errores en el aprendizaje de funciones lineales y  
cuadráticas en estudiantes de Pedagogía en  
Matemáticas e Informática Educativa de una universidad  
privada**

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN  
EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA  
EN MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

**Autores:**

Jesús Duran Quineche  
Catalina Gómez Anticoy  
Christopher Martínez Mora  
Alexander Soto Mesa

**Profesora guía:**

Maritza Silva Acuña

SANTIAGO, CHILE  
**2020**

## AGRADECIMIENTOS

Nuestro agradecimiento a familiares, amigos, parejas y profesores que nos han apoyado incondicionalmente durante todo nuestro transcurso universitario.

Le agradecemos a nuestra directora de escuela Sra. Maritza Silva, por su colaboración y consejos como guía de tesis.

A la secretaria de escuela Sra. Maritza Mardones le agradecemos por su arduo trabajo y facilitarnos el material que necesitábamos para nuestra investigación.

Le agradecemos a los profesores Daniel Franzani, Carlos Gómez y a la profesora Sally Navarrete que nos brindaron su experiencia y su conocimiento para la validación de los instrumentos de investigación.

A los profesores de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa le agradecemos por las sugerencias y recomendaciones durante esta investigación.

Agradecemos la participación desinteresada de los estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa durante la recolección de datos.

## ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	6
<b>CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b> .....	8
1.1    Antecedentes .....	8
1.2    Definición del Problema.....	13
1.3    Objetivos .....	15
1.4    Supuestos.....	15
1.5    Justificación .....	15
1.6    Limitaciones.....	16
<b>CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO</b> .....	17
2.1    Evolución del concepto función .....	17
2.2    Función lineal .....	18
2.3    Función cuadrática .....	19
2.4    Conceptos fundamentales.....	20
2.5    Enseñanza y aprendizaje .....	22
2.6    Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas .....	24
2.7    Representación mental a representación semiótica .....	27
2.8    Teoría de registros de representación semiótica.....	30
2.8.1    La formación de una representación.....	31
2.8.2    El tratamiento .....	31
2.8.3    La conversión.....	31
2.9    Registros de representaciones semióticas en las matemáticas.....	33
2.10    Proceso de transformación en matemáticas .....	34
2.11    ¿Por qué el proceso de conversión es crucial en la comprensión de la matemática en los estudiantes?.....	36
<b>CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO</b> .....	38
3.1    Diseño de la investigación.....	38
3.2    Universo y muestra .....	39
3.3    Recolección de datos.....	39
3.4    Instrumentos para la recogida de información .....	40
3.5    Validez y confiabilidad .....	42

<b>CAPÍTULO 4: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN</b> .....	43
4.1    Resultados.....	43
4.2    Análisis .....	53
4.3    Propuesta de una estrategia.....	62
<b>CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES</b> .....	70
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	73
<b>ANEXOS</b> .....	77

## RESUMEN

Este estudio busca detectar errores y dificultades en el aprendizaje de las funciones lineales y cuadráticas en 8 estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, con la finalidad de proponer una estrategia de mejora para la enseñanza de estos contenidos. La investigación es de carácter cualitativo y se fundamenta en la Teoría de los Registros Semióticos de Raymond Duval, quién propone que el aprendizaje de estas funciones es realmente sustantivo cuando los registros semióticos son dominados casi en su totalidad, ya que permite la conceptualización y el razonamiento sobre un objeto matemático. La estrategia propuesta durante esta investigación consta de una serie de acciones sugeridas basadas en la conversión de registros mediante Tics y modelización para abordar los errores y dificultades más persistente en los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada.

## ABSTRACT

This study seeks to detect errors and difficulties in the learning of linear and quadratic functions in eight students of Pedagogy in Mathematics and Educational Informatics, this with the aim of proposing an improvement strategy for the teaching of these contents. The research is of a qualitative nature and is based on the Theory of Semiotic Records of Raymond Duval, who proposes that the learning of these functions is really substantive when the semiotic records are almost completely mastered, since it allows conceptualization and reasoning about a mathematical object. The strategy proposed during this research consists of a series of suggested actions based on the conversion of records by means of ICTS and modelling to address the most persistent errors and difficulties in students of Mathematics Pedagogy and Educational Computing at a private university.

## INTRODUCCIÓN

Esta investigación lleva como título “registro de representación semiótica como estrategia de fortalecimiento de acuerdo con las dificultades y errores en el aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas en estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una Universidad privada” en virtud de la importancia que tiene el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, más específicamente de las funciones, especialmente cuando la pluralidad de estos sistemas de representación son una ayuda significativa para la comprensión de estos objetos matemáticos.

Como objetivo general de esta investigación busca Proponer estrategias de fortalecimiento de acuerdo con las dificultades y errores de aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas en estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada, considerando que el trabajo investigativo se orienta en los diversos errores y dificultades en los cambios de registro de las funciones lineales y cuadráticas llevadas a cabo por los estudiantes en cuestión, los que se verán complementados con las experiencias proporcionadas por ellos mismos permitiendo enriquecer la información obtenida y tener una idea más generalizada para el levantamiento de la propuesta.

Los objetivos específicos presentes en esta investigación son identificar las dificultades y errores presentes en las funciones lineal y cuadrática, interpretar las dificultades y errores en las funciones lineal y cuadrática y finalmente diseñar estrategias para la comprensión de función lineal y cuadrática en estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa.

La presente investigación consta de cinco capítulos que estructuran el estudio. El capítulo 1 plantea el problema que sustenta nuestra investigación, presentando los antecedentes sobre dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y el bajo rendimiento académico de los estudiantes, siendo la base de nuestra investigación. También se presenta la pregunta de investigación, los objetivos generales y específicos del estudio y sus limitaciones y justificación.

El capítulo 2 se conforma por el marco teórico el cual fundamenta la investigación, estableciendo las bases del estudio como la enseñanza y el aprendizaje, error y dificultades en el aprendizaje y la Teoría de Registro de Representación Semiótica.

La estructura del capítulo 3 se compone por el marco metodológico, el cual detalla el diseño de la investigación, el universo y muestra seleccionados para el estudio, la forma en que se recolectan los datos de la investigación y finalmente los instrumentos para la recogida de información utilizados en este estudio.

El capítulo 4 se estructura por la presentación y análisis de la información de la investigación, declarando los resultados obtenidos, el análisis de los instrumentos

aplicados y la propuesta de una estrategia que permita el fortalecimiento del aprendizaje de las funciones lineales y cuadráticas.

Finalmente, el capítulo 5 contiene la conclusión de la investigación, estableciendo los resultados y propuesta estratégica obtenidas en el estudio.

Luego se presenta la bibliografía, la cual contiene la lista de libros, investigaciones y documentos utilizados, que dan sustento a nuestra investigación, para finalmente presentar los anexos utilizados en este estudio cualitativo, encontrando así los instrumentos de recolección de información utilizados en los sujetos en investigación y las tablas de análisis que permitieron lograr una mejor comprensión de la información obtenida de los estudiantes

## CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1 Antecedentes

El aprendizaje de las matemáticas es un proceso complicado de concebir para los jóvenes de enseñanza básica y media, esto es producto de las diversas dificultades que pueden presentar los estudiantes a lo largo de su recorrido estudiantil. Minte, Sepúlveda, Díaz y Payahuala (2020) a través de su investigación, afirma que unos de los principales factores que obstaculizan la comprensión de los contenidos en las matemáticas, en estudiantes de séptimo y octavo básico junto con egresados de cuarto medio, es debido a la falta de compromiso hacia la asignatura por parte de los mismos alumnos. Sin embargo, generar una motivación en los educandos no es una misión sencilla de cumplir, más ahora en un mundo tan tecnologizado lleno de distracciones, tal como señalan los profesores encuestados en el trabajo de Guzmán (2020), no es fácil lograr que un estudiante disfrute de una disciplina inevitablemente abstracta, de la cual solo se puede conseguir una buena calificación con un arduo trabajo previo, de ensayo y error.

Por su parte Guzmán (2020), señala que la falta de interés por parte de los estudiantes genera que el docente inconscientemente tome una actitud negativa frente a sus estudiantes a la hora de hacer clases, causando que este a la hora de planificar pierda la motivación de buscar nuevas estrategias y métodos que atribuyen al aprendizaje de conceptos matemáticos en las nuevas generaciones. A causa de este desánimo, el autor también denota que se genera una persistente resistencia a las herramientas tecnológicas en el transcurso de la clase por parte del docente, limitando la didáctica y el dinamismo de las cátedras.

De esta manera la desmotivación por parte de los estudiantes no es la única causa que dificulta el aprendizaje de un objeto matemático. Entre los múltiples factores que impiden el aprendizaje de un estudiante, existen elementos de carácter personal y ligados estrictamente a lo disciplinario.

Un tema importante para considerar como parte de la dificultad de aprender un objeto matemático es lo mencionado por Minte et al. (2020), en una encuesta donde un 67,8% de los estudiantes de educación básica señalan que es difícil aprender una materia debido a la complejidad existente en los conceptos matemáticos. Minte también describe el aspecto personal distinguiendo el lado socioemocional de los niños de educación básica, al evidenciar las inquietudes que se presentan a la hora de abordar problemas matemáticos, como: cansancio al momento de enfrentarse a los ejercicios (con un 14,1%); materia muy abstracta (con un 11,3%); contenidos que son alejados de su vida cotidiana (con un 8,7%) y la gran cantidad de nombres y fórmulas que aprender (con un 5,2%). A su vez, paralelamente se consideró en la investigación a los jóvenes de enseñanza media, en donde, un 13,9 % señala que es complicado comprender un contenido matemático. Este factor nuevamente afecta al

aspecto socioemocional, puesto que, la asignatura de matemáticas les genera molestia y frustración al no ser comprendida, los demás factores que afectan el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de enseñanza media corresponden a: la cantidad de fórmulas empleadas para explicar un contenido (con un 12,9%); lo alejado que está el contenido de la realidad (con un 12,6%) y lo difícil que es la materia (con un 11,7%).

Todos estos elementos negativos que cohabitan en la cotidianidad de un estudiante afectan directamente al desempeño académico (notas), provocando que tomen una actitud de rechazo frente a la asignatura de matemáticas. Estas actitudes además de verse reflejadas en sus resultados académicos también pueden afectar directamente en evaluaciones que miden el rendimiento estudiantil a nivel nacional como lo es la prueba de selección universitaria (PSU) e internacional como lo son el programa internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) y el estudio internacional de tendencia en matemáticas y ciencia (TIMSS).

Para poder analizar el rendimiento de los estudiantes que realizaron la PSU, se tomará como base los puntajes nacionales obtenidos durante los años 2015 y 2018. Según las bases del Departamento de Evaluación medición y Registro Educacional (DEMRE) entre los años 2015 y 2018 en las asignaturas como lenguaje e historia, las personas con puntajes nacionales no superan las 15 personas, finalmente, en lo que se refiere a matemáticas, durante este periodo es la que más destaca cada año por su alta cantidad de personas que obtienen puntaje nacional, comenzando en el 2015 con 37 estudiantes aumentando hasta el 2018 con 199 participantes. Hasta el momento se podría decir que Chile a nivel nacional va bien encaminado a lo que se refiere al rendimiento académico en el ámbito de las matemáticas, logrando destacar cada año. Estos resultados podrían deberse a varios hitos que sucedieron durante ese periodo 2010-2018, comenzando con la aprobación de la agencia de calidad de la educación aprobada en el 2011, aumentando la rigurosidad y la fiscalización, el nuevo reglamento a la PSU dejando de descontar puntos por cada 3 preguntas erradas implementada el año 2014, hasta la nueva reforma a la educación superior otorgando en el 2017 la gratuidad a miles de estudiantes.

La PSU siempre ha sido un tema controversial para los miles de estudiantes que cada año quieren ingresar a la educación superior. Se cataloga a la evaluación como segregadora e injusta, debido a que los sectores con mejores situaciones económicas son los más beneficiados, mientras que por otro lado los sectores con una gran vulnerabilidad económica o zonas rurales son los que obtienen los peores resultados en dicha evaluación tal como señala Miranda (2017).

Por su parte, TIMSS (2015), indicó que, aunque hubo mejoras en comparación al informe previo del año 2011, el rendimiento de los estudiantes sigue siendo bajo con respecto al promedio del estudio, indicando que uno de cada tres estudiantes chilenos no es capaz de sobrepasar los 400 puntos.

Por otro lado, el informe PISA en el año 2015, indicó que los chilenos poseen un bajo rendimiento en matemáticas tras obtener un puntaje promedio de 423 puntos, siendo este muy por debajo de la media de la OCDE con 493 puntos y aún más lejos de los líderes como Singapur y Japón con 556 y 538 puntos respectivamente, posicionando al país en el lugar 48 de 70 (Cebrián, Trillo y González 2019), muy por debajo de la mitad de los países que participaron, con estando cerca del 32% de los países con peores resultados. Uno supondría que con el tiempo estos resultados cambiarían para mejorar y reforzar todas las dificultades presentadas por el informe, pero al momento de observar el más reciente informe PISA (2018), vemos algo totalmente opuesto. Si bien en los resultados PISA (2018), se ve a países como Perú, Brasil y México subir tanto en puntaje como en posición dentro de los países, Chile no solamente baja su puntaje a 417, sino que también baja lo suficiente para quedar dentro del 25% de los países con peores resultados durante ese año. Es preocupante observar que en nuestro país no se puede mantener la posición y el puntaje en los informes PISA, sino que se logra bajar considerablemente llegando a estar posicionado en los peores resultados a nivel internacional.

El bajo rendimiento académico de los estudiantes chilenos en matemáticas se puede ver profundamente arraigado hasta un nivel educativo superior. Tal como se presenta en la conferencia realizada por Portales (2017) en donde se menciona que los principales ejemplos sobre las dificultades en la comprensión de las matemáticas, se presenta en los estudiantes de primer año de la Pontificia Universidad Católica de Chile (UC) en donde los adolescentes de primer año presentan una alta reprobación de cursos matemáticos afectando directamente el desempeño, siendo este una de las causas de la deserción universitaria. Saber que una universidad tan prestigiosa como la UC la universidad en Chile, es considerable ver que incluso presentan dificultades en estudiantes de primer año a lo que se refiere en matemáticas. Si la Universidad católica con más de un siglo de historia el día de hoy presenta dificultades, una universidad que apenas lleva 38 años de existencia y que hace un par de años a la fecha les aplica una selección a sus estudiantes, es evidente que presentará dificultades similares o aún mayores

De acuerdo con la información entregada por estudios internacionales y nacionales como PISA y TIMSS, el bajo rendimiento de los estudiantes universitarios en cátedras de matemática se podría considerar “normal” tras poseer una base poco preparada para enfrentar conceptos nuevos. Sin embargo, cuando se habla de futuros docentes en pedagogía en matemáticas, se pensaría que serían más minuciosos al momento de aprender estos conceptos; no obstante, estos problemas de aprendizaje no son indiferentes a ellos.

En base a la información entregada por la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada que hasta el año 2018 no era selectiva, podemos evidenciar que las asignaturas en donde los estudiantes

presentan más problemas en su rendimiento académico corresponden a Álgebra I, Álgebra II, Cálculo I, Cálculo II y Cálculo III. Si se quiere ver esto desde lo empírico, al observar las tasas de reprobación entre los años 2015 y 2018, se puede advertir que las cátedras contempladas presentan una fluctuación entre un 11% y un 62% de reprobación, entre las cuales destacan álgebra I con un 53.3%, álgebra II con un 41.7%, Cálculo I con un 61.5%, Cálculo II con un 40% y cálculo III con un 62.2%, siendo estos las tasas de reprobación más significativas de las cátedras de cada año. Esto evidencia que las dificultades existentes podrían encontrarse en los contenidos que se abarca durante esas asignaturas específicamente (de álgebra al cálculo),

En la información entregada por la escuela (**anexo 1**), al observar los promedios del periodo 2015 – 2018 se puede ratificar que mientras más relación exista entre la cátedra y el aprendizaje de funciones, el rendimiento es generalmente más bajo. Esta afirmación se puede reflejar en cursos como Cálculo III, en donde, en los años 2015, 2017 y 2018 obtuvo promedios aproximados de 3.2, presentando una excepción en el año 2016 con un promedio 4.58; y en el caso de álgebra II donde los promedios bordean el 3.8 en años como 2015, 2016 y 2017, presentando una excepción en el año 2018, manteniendo ambas asignatura una estricta relación con funciones estimadas en un 66,6% según los planes y programas de la carrera de matemática e informática educativa, en otras palabras, tanto Cálculo III como Álgebra II, más de la mitad de los contenidos se trata sobre el trabajo con funciones estrictas.

Uno de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior radica en la comprensión de las funciones, ya que tal y como se mencionó con anterioridad, mientras una cátedra posea más estrecha relación al concepto de función, más dificultad genera la conceptualización de parte del estudiante, de ahí que ciertos autores recalcan la problemática añadiendo una causa al conflicto.

Cuevas y Delgado (2016), menciona dificultades en el aprendizaje de funciones, señalando que una de estas podría ser la incompreensión generada cuando el docente enseña una materia con un pensamiento, mientras que el estudiante lo visualiza de otro modo (en ocasiones, totalmente distinto), permitiendo establecer que las metodologías de enseñanza tienen una directa influencia en la comprensión de algunos conceptos y en los procesos de conversión de registros, los cuales se podrían ver limitados por la acción de los sujetos en cuestión.

En otro estudio realizado por Gómez, Hernández y Chaucañés (2015), también se puede visualizar las problemáticas en el trabajo de funciones, pero esta vez, desde la mirada de los aprendizajes. El enfoque de su investigación, en palabras de los autores, recae en tres aspectos fundamentales, los cuales son: la identificación y relación de los elementos de la relación funcional involucrada en la situación, la identificación y uso del patrón de regularidad y de crecimiento de la situación para modelarla, identificación y uso de un modelo de la situación y en el uso del concepto

de ecuación para la consecución de una incógnita. (Gómez, Hernández y Chaucañés 2015, p. 284). Estas deficiencias se ven directamente reflejadas en los resultados que presentan los sujetos en estudio, ya que estos no son para nada satisfactorios en el proceso de enseñanza y del aprendizaje. Solo con ver que, en ninguno de los cuestionarios aplicados, el porcentaje de acierto no supera el 52.17%, es decir, solo un poco más de la mitad de los estudiantes no logra comprender el objeto matemático en sí, dejando en evidencia la dificultad latente en el aprendizaje de funciones. Lo mencionado anteriormente es alarmante de ver, para evitar situaciones como esta es que se debe identificar las dificultades y errores que se presentan en los resultados lo antes posibles, con la finalidad de que los estudiantes obtengan un mejor rendimiento académico, ya que, si no, es posible que lleguen a conclusiones incorrectas.

Así mismo Alpízar (2018) señala que, si bien los estudiantes logran puntualizar la expresión algebraica, no necesariamente logran extraer las conclusiones correctas, esto se debe a la dificultad para interpretar los parámetros otorgados, presentando problemas con la representación gráfica de la función lineal. Esto se puede deber en gran medida a la metodología empleadas por los docentes, la cual se basa generalmente en un trabajo estructurado de resolución de ejercicios paso a paso, llevando a cabo una simple tarea de aplicación de algoritmos. Relativo a la misma dificultad, Alpízar (2019) identifica el mismo problema de habilidades de análisis, que llevan al estudiante a presentar dificultades con la representación gráfica, su uso y significación de los coeficientes, permitiéndonos establecer que si los estudiantes lograran llevar a cabo otro registro como en este caso sería el gráfico, los estudiantes tendrían un dominio más completo sobre el objeto estudiado, permitiéndoles una mayor comprensión y manejo de la información en cuestión.

Al hablar del concepto función se señala que es un objeto matemático complejo debido a la intangibilidad de este, de tal manera que la concepción solo depende de las representaciones que el estudiante le atribuya. Estas representaciones a primera instancia pueden ser expresadas de manera verbal, icónica y/o simbólica, sin embargo, Duval (1998) se refiere a estas representaciones, como representaciones semióticas. A pesar de que este concepto se maneja en los planes y programas chilenos desde sexto básico (y de a partir de ahí no se deja de enseñar), este sigue siendo una piedra angular para la comprensión de los estudiantes.

El proceso de transitar desde una representación a otra es un obstáculo presente en las personas que estudian matemática, más aún cuando el contenido a tratar consta de funciones. Así mismo Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015), recalca la dificultad de conversión entre las diversas representaciones por medio de una investigación realizada a 109 estudiantes universitarios. Este comienza realizando un trabajo de conversión de registros con la finalidad de observar algunas dificultades a la hora de articular representaciones gráficas y algebraicas en funciones lineales y

cuadráticas, considerando 4 actividades determinadas por un eje conceptual y otro contextual. En el caso de conversión de registro, del algebraico al gráfico de una función lineal, se identifica que cerca de un 50% de los estudiantes no es capaz de realizar el proceso de conversión, mientras que cerca de un 60% de los estudiantes encuestados no es capaz de realizar la conversión de representación algebraica a gráfica de la función cuadrática especificada. En el caso de conversión de representación gráfica a la algebraica, cerca de un 50% de los estudiantes no es capaz de llevarla a cabo en la función lineal, mientras que un 60% no es capaz de realizarlo en la función cuadrática. Según los resultados obtenidos se evidencia cómo los estudiantes presentan una dificultad mayor al convertir el registro gráfico al algebraico, y al observar ambas funciones la articulación de representaciones en la función cuadrática es más acentuada que en la función lineal.

## 1.2 Definición del Problema

Desde la enseñanza básica a la enseñanza media los estudiantes presentan una variedad de dificultades al aprender un concepto matemático, esto es debido a factores de carácter personal y disciplinarios. Una de las componentes que más influyen dentro de este aprendizaje se debe a la falta de compromiso y de interés por parte de los mismos estudiantes. Conforme a este desánimo, los docentes son afectados indirectamente y a su vez evitan de forma inconsciente nuevas estrategias didácticas que motiven e incentiven el aprendizaje de los estudiantes con respecto a la asignatura de matemáticas.

Lo mencionado anteriormente es reflejado en informes internacionales como PISA o TIMSS que muestran que los estudiantes chilenos poseen un mal rendimiento en la asignatura de matemáticas, siendo inferior al promedio esperado y posicionándose por debajo del 32% del total de los países asociado a los informes, poniendo en tela de juicio el proyecto educativo junto a las acciones alrededor del sistema educación que se está llevando a cabo en el país de Chile.

Los estudiantes que presentan problemas con la asignatura de matemáticas, tras avanzar a los estudios superiores se encuentran con una dificultad aún mayor, puesto que se enfrentan a conceptos más avanzados, por lo que es común ver estudiantes de primer año con una alta tasa de reprobación frente a cátedras matemáticas. Los errores presentes en estudiantes universitarios son considerados “normales” frente al rendimiento que se lleva arrastrando desde la enseñanza básica y media, sin embargo, cuando uno habla de estudiantes de Pedagogía en Matemáticas, se pensaría que no hay problema al concebir un concepto; no obstante, la dificultad persiste.

En el caso de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, podemos notar que entre los años 2015 y 2018 existe una alta tasa de reprobación en cátedras como Álgebra y Cálculo, presentando una fluctuación entre un 11% y un

62% de reprobación. Tras analizar los planes y programas de la escuela podemos ver que en los ramos donde se presentan peores resultados, el contenido más trabajado es funciones con un estimado de 66,6%.

Debido a esta situación se puede inferir que el problema de comprender conceptos matemáticos en la enseñanza superior radica en la comprensión de las funciones. Como se mencionó con anterioridad mientras una cátedra posea más estrecha relación al concepto de función, más conflicto le genera al estudiante para la conceptualización, de ahí que ciertos autores recalcan la problemática añadiendo una causa al conflicto.

Uno de los principales factores es mencionado por Díaz et al. (2015), este indica que el conflicto se debe a la complicada o nula capacidad de articulación entre registros semióticos, es decir, un estudiante es incapaz de comprender que una función puede ser representada de diversas formas, y que su conceptualización puede variar de diversas maneras.

Debido a las múltiples razones que dificultan aprender funciones es necesario identificar alguna estrategia didáctica que mejore el desempeño de los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa. Para esto es necesario conocer qué tipo de errores presentan los estudiantes de la carrera, y a su vez es importante establecer una estrategia didáctica que supla las necesidades de los estudiantes. Como la conceptualización de los objetos matemáticos sólo pueden ser a través de diversas representaciones debido a la intangibilidad de estos, esta investigación tratará de proponer una estrategia didáctica basada en los cambios entre registros de representaciones semióticas para la aprehensión de funciones lineales y cuadráticas en lo/as estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa.

Para esto es necesario responder a la siguiente pregunta ¿Por qué los cambios entre registros de representaciones semióticas deben incluirse en una estrategia didáctica que tiene la intención de fortalecer la aprehensión de funciones lineales y cuadráticas en lo/as estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa?

### 1.3 Objetivos

#### **Objetivo general:**

- Proponer una estrategia de fortalecimiento de acuerdo con las dificultades y errores de aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas en lo/as estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada.

#### **Objetivos específicos:**

- Identificar las dificultades y errores presentes en las funciones lineal y cuadrática de lo/as estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada.
- Interpretar las dificultades y errores en las funciones lineal y cuadrática que poseen lo/as estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada.
- Diseñar una estrategia para la comprensión de función lineal y cuadrática en lo/as estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada.

### 1.4 Supuestos

Durante esta investigación se espera que los cambios entre registros semióticos proporcionen una estrategia didáctica que permita solucionar los errores y dificultades respecto a las funciones lineales y cuadráticas de lo/as estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada de la región metropolitana.

### 1.5 Justificación

Como se ha señalado, lo/as estudiantes de educación superior presentan dificultades en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, y siendo más acotados a la investigación, muestran dificultades en el trabajo con las funciones lineales y cuadráticas, es por eso, que considerando la relevancia que para un docente en Matemáticas tiene el manejo de la disciplina misma, se ha desarrollado esta investigación, buscando comprender estos errores y dificultades presentados por las y los estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada de la región metropolitana, con dos instrumentos para recoger información que permitirán identificar estas dificultades, permitiendo tenerlas a disposición y analizarlas con la finalidad de levantar una propuesta para mejorar ciertos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas.

## 1.6 Limitaciones

La investigación se acota a las funciones lineales y cuadráticas, debido a la importancia de que toman en el Currículum Nacional, también se acotan los sujetos en investigación a 8 participantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada de la región metropolitana, que se encuentren entre los niveles 600, 700 y 800 correspondiente a estudiante de 3° y 4° año, permitiendo tener una muestra representativa a los distintos niveles, considerando cambios de profesores, entre otros. Estos estudiantes deben tener probada las cátedras como Álgebra I, Álgebra II, Cálculo I, Cálculo II y Cálculo III, las cuales fueron seleccionadas por su estricta relación con el concepto de función y no con su aplicabilidad, que es el factor de interés para nuestro estudio.

## CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

### 2.1 Evolución del concepto función

Con el transcurso natural del tiempo, los diversos conocimientos y maduración de éstos en manos de diversos especialistas, el concepto de función ha evolucionado constantemente, Kline (1972) indica el concepto función como significado de cantidades, las cuales fluctúan según la variación de los puntos de la curva, permitiéndoles a estas cantidades, depender de un variable, traduciendo así el significado del concepto para Leibniz, permitiendo ver que los estudios de funciones en el siglo XVII, trataban el concepto de función como curvas, o como sucesiones de operaciones que permitían obtener cantidades a partir de otras, permitiendo así, ver como las funciones no se encontraban completamente identificadas como en la actualidad.

Gottfried Wilhelm Leibniz fue el primero que utilizó la palabra función, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente.

Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler empleo la palabra “función” para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él quien introdujo la notación. (Larson, Hostetler, & Edwards, 2006)

La diversidad de definiciones establecidas para el concepto función se logran reflejar en los distintos textos matemáticos, en los que se evidencia variadas explicaciones para un mismo objeto. “una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto exactamente un elemento, llamado, de un conjunto” (Stewart, 2013, p.10). Otra definición corresponde a “Sean  $X$  y  $Y$  conjuntos de números reales. Una función real  $f$  de una variable real “ $x$ ” de  $X$  a  $Y$  es una regla de correspondencia que asigna a cada número “ $x$ ” de  $X$  exactamente a un número “ $y$ ” de  $Y$ ” (Larson et al., 2006, p.19). En ambos casos, la definición de función es llevada a cabo a través de la correspondencia de objetos pertenecientes a conjuntos, sin embargo, también se puede realizar una definición de función como conjunto de pares ordenados, donde “una función es un conjunto de pares ordenados ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento” (Apostol, 2001, p.65). Otra definición un poco más restrictiva puede ser si “una función es un conjunto de pares ordenados de números  $(x, y)$  en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número” (Leithold, 1998, p.4). Lo que permite una definición de gráfica, en la cual, si es una función, entonces la gráfica de es el conjunto de todos los puntos del plano para los cuales es un par ordenado de (Leithold, 1998, p.6).

Dentro de las formas más comunes de representación de las funciones es con un diagramas o esquemas, tal como lo hacen (Stewart, 2013); (Leithold, 1998) y (Apostol, 2001)

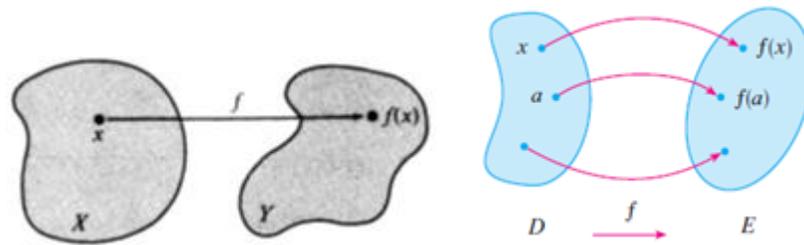


Figura 1: Representación del concepto función.

## 2.2 Función lineal

Una función  $g$  definida para todo real  $x$  mediante una fórmula de la forma  $g(x) = ax + b$  se llama función lineal porque su gráfica es una recta. El número  $b$  es la ordenada en el origen; es la coordenada  $y$  del punto  $(0, b)$  en el que la recta corta al eje  $y$ . El número  $a$  es la pendiente de la recta. Un ejemplo,  $g(x) = x$ , está dibujado en la figura 2, donde también se muestra otro  $g(x) = 2x - 1$ . (Apostol, 2001, p.67)

Se denomina función afín a aquella de la forma  $f(x) = mx + n$ , donde  $m$  y  $n$  son números reales distintos de cero. En el caso de la función lineal, las variables dependiente e independiente tienen una relación proporcionalmente directa, mientras que en la función afín la condición cambia (Huircan & Carmona, 2013).

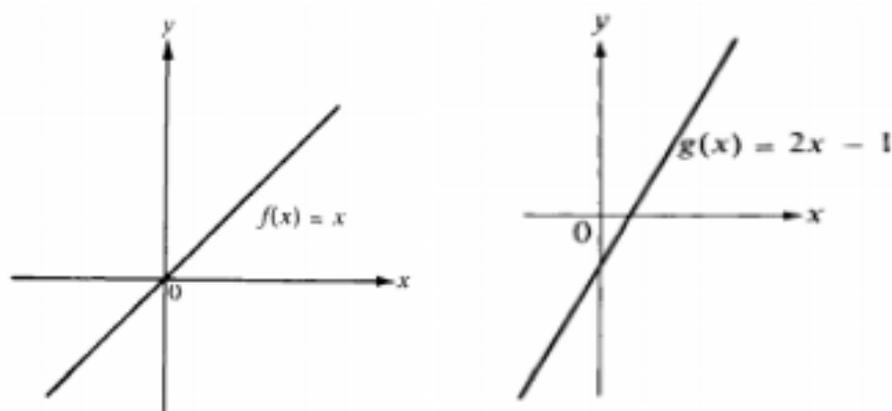


Figura 2. Función lineal.

### Pendiente de una recta

La pendiente de una recta no vertical es una medida del número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de variación horizontal de izquierda a derecha.

La pendiente  $m$  de una recta no vertical que pasa por los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  es tal como se señala en la figura 3.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2.$$

Figura 3. Fórmula de la pendiente.

Es decir los puntos  $P1(x_1, y_1)$  y  $P2(x_2, y_2)$  pertenecen a una recta, se define la pendiente  $m$  de esa recta como el cociente entre la diferencia de coordenadas  $y$  y la diferencia de coordenadas  $x$  (Huircan y Carmona, 2013, p.33)

### Ecuación punto pendiente

Se puede escribir la ecuación de una recta si se conocen su pendiente y las coordenadas de uno de sus puntos.

La ecuación de la recta con pendiente  $m$  que pasa por el punto  $(x_1, y_1)$  está dada por la siguiente fórmula presentada en la figura 4.

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Figura 4. Fórmula ecuación punto pendiente.

### 2.3 Función cuadrática

“Una polinomial de grado 2 es de la forma  $p(x) = ax^2 + bx + c$  y se llama función cuadrática. Su gráfica es siempre una parábola obtenida por desplazamientos de la parábola  $y = ax^2$ . La parábola abre hacia arriba si  $a > 0$  y hacia abajo si  $a < 0$ ” (Stewart, 2001, p. 27) tal como se muestra en la figura 5:

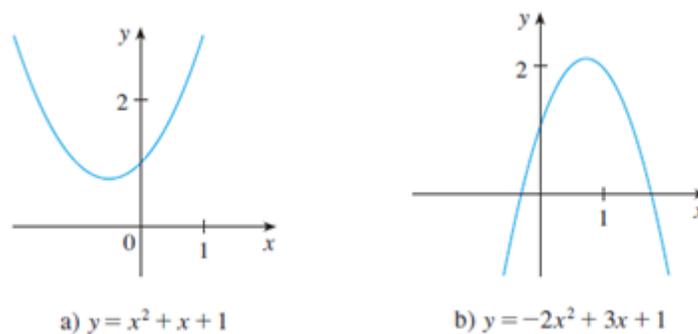


Figura 5. Gráfica de funciones cuadráticas, concavidad según parámetro

El intercepto en el eje determina cuánto se desplaza la gráfica en el eje vertical, si, se desplaza  $c$  unidades hacia arriba y si, se desplaza  $c$  unidades hacia abajo.

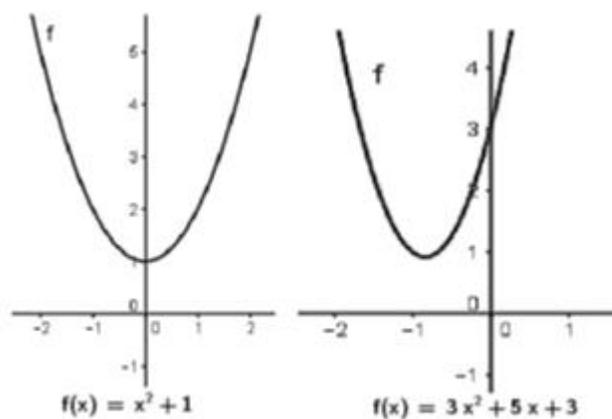


Figura 6. Desplazamiento del intercepto en el eje y según el parámetro

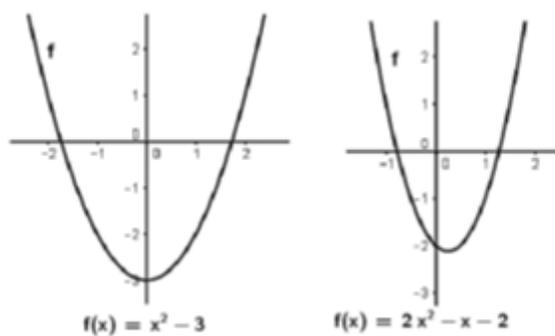


Figura 7. Desplazamiento del intercepto en el eje y según el parámetro

## 2.4 Conceptos fundamentales

### Dominio y recorrido de una función

Llamaremos **dominio de la función y lo escribiremos**  $Dom f ()$  al conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente.

El conjunto formado por los valores que puede tomar la variable dependiente se denomina **recorrido o imagen de la función y lo escribiremos**  $Rec f ()$  o  $Im f ()$ . (Huircan y Carmona, 2013,p.9)

### Simetría de una función

Existen tres tipos de simetría las cuales pueden servir para graficar:

1. Una gráfica es **simétrica respecto al eje y** si, para cada punto  $(x, y)$  de la gráfica, el punto  $(-x, y)$  también pertenece a la gráfica. Esto significa que la porción de la gráfica situada a la izquierda del eje y es la imagen especular de la situada a la derecha de dicho eje. (Larson et al., 2006).

Es decir, “si una función  $f$  satisface  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x$  en su dominio, entonces  $f$  es una función par” (Stewart, 2013, p.17)

Esta simetría se puede ver a continuación en la figura 8.

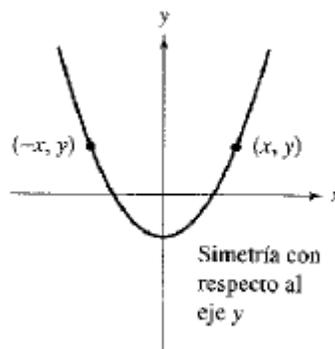


Figura 8. Simetría respecto al eje y.

2. Una gráfica es **simétrica respecto al eje x** si, para cada punto  $(x, y)$  de la gráfica, el punto  $(x, -y)$  también pertenece a la gráfica. Esto quiere decir que la porción de la gráfica situada sobre el eje x es la imagen especular de la situada bajo el mismo eje. (Larson et al., 2006).

Esta simetría se observa en la figura 9 presentada a continuación.

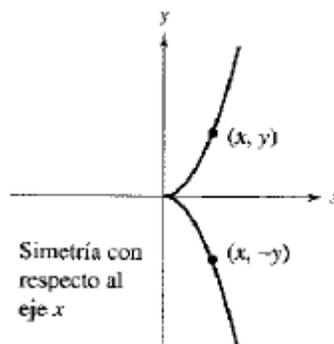


Figura 9. Simetría respecto al eje x.

3. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si, para cada punto  $(x, y)$  de la gráfica, el punto  $(-x, -y)$  también pertenece a la gráfica. Esto significa que la gráfica permanece inalterada si se efectúa una rotación de  $180^\circ$  respecto al origen. (Larson et al., 2006).

Es decir, "si  $f$  satisface  $f(-x) = -f(x)$  para cada  $x$  en su dominio, entonces  $f$  es una función impar" (Stewart, 2013, p.17)

Esta última simetría se ve en la figura 10 presentada a continuación

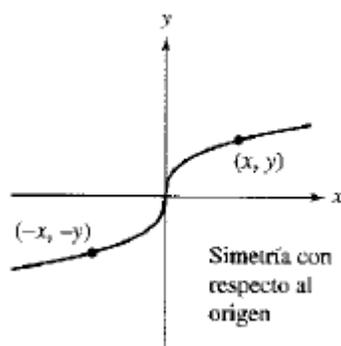


Figura 10. Simetría respecto al origen.

## 2.5 Enseñanza y aprendizaje

Al estudiar el proceso de enseñanza y aprendizaje se encuentran autores que señalan que son procesos que se dan de forma conjunta, es decir, no existe la enseñanza sin un proceso de aprendizaje para los involucrados, ya que al enseñar también se aprende y el sujeto que aprende también enseña (Freire, 1997). Según este pensamiento es que esta investigación continúa su curso, considerando que tanto docentes como estudiantes realizan un proceso conjunto de enseñanza y aprendizaje, tal vez con enfoques distintos, siendo el estudiante quien se enfoque en el contenido, mientras que el docente acentúe su aprendizaje en los métodos con los cuales asegurar un mejor proceso educativo, pero ambos llevan ese proceso al mismo tiempo.

Autores como Barcia y Carvajal (2015) señala que “el proceso de enseñanza aprendizaje debe ser desarrollador, que posibilite al estudiante la apropiación activa y creadora de la cultura, el auto-perfeccionamiento constante de su autonomía y autodeterminación en íntima relación con los procesos de socialización” (p.143). Este pensamiento reafirma el nuevo estilo educativo que permite al estudiante tener un rol más activo y crítico sobre sus aprendizajes, permitiendo romper el antiguo pensamiento de estudiante pasivo que adquiere conocimientos. Barcia también señalará que independientemente que el docente presente un rol de guía más que el transmisor de todo conocimiento, eso no quita que el proceso educativo sea intencionado y estructurado por él, ya que deberá asegurar el qué se enseña y qué se desea que se aprenda por parte de los estudiantes.

Ahora, al verificar el proceso de enseñanza, existirán autores como Molina y García (2019) que se refieren a este proceso como un acto llevado a cabo por el docente, el cual busca proporcionar a los estudiantes todas las herramientas y oportunidades necesarias y posibles para que el educando pueda lograr un aprendizaje. Esto no se aleja de lo anteriormente señalado, permitiendo pensar que un proceso de enseñanza acorde a estos lineamientos será aquel que brinde al estudiante oportunidades de

analizar y ser partícipes de este proceso de forma activa y conjunta, desarrollando todo tipo de habilidades cognitivas, sociales y afectivas. Por su parte Sáez (2018) señala el proceso de enseñanza como un arte, el cual presenta una exigencia de habilidades como la flexibilidad y adaptación, que permiten la realización y la mejora del proceso de aprendizaje a través de una correcta comprensión y análisis de la información en cuestión, recalcando así, que el aprendizaje no es un proceso mecánico. Es así como se reafirma que todo docente deberá de ser un constante aprendiz de sus propias decisiones educativas, teniendo la misión interminable de ir en la búsqueda de mejoras para un proceso de enseñanza efectivo para cada aula y contexto.

Respecto al proceso de aprendizaje autores como Molina y García (2019) afirman que “es la conjugación de actividades realizadas por los alumnos con el objetivo de encontrar prominentes resultados o cambios de conducta intelectual, afectivo-volitiva y psicomotriz con determinados éxitos” (p.396). Gvirtz y Palamidessi (1998) señalan que “el aprendizaje es una modificación relativamente estable de las pautas de conducta realizada en función de lograr una adaptación al medio en que vive el organismo o individuo” (p.117). Esto reafirma el pensamiento de un proceso educativo integral y activo por parte del estudiante, involucrando aspectos tanto emocionales como cognitivos, los que se potenciarán e influyen directamente en el aprendizaje del educando, determinando que el proceso tenga más posibilidades de ser exitoso o no. De esta misma manera, Sáez (2018) señala que “aprender es el proceso de asimilar información con un cambio resultante en el comportamiento. Se puede definir como un cambio de comportamiento relativamente permanente que se produce como resultado de la experiencia o la práctica” (p.8).

Según Colom, Salinas y Sureda mencionados por Zepeda y González (2016) utilizan el concepto de estrategia didáctica como una instancia que acoge tanto métodos, como medios y técnicas de aprendizaje, considerando que el concepto proporcionaba mayor flexibilidad y utilidad en el proceso didáctico. Estos autores también hablan de Tobón (2010) donde menciona que las estrategias son un conjunto de acciones que se planifican y se ponen en marcha de forma ordenada para alcanzar un determinado propósito. Dadas estas definiciones, para esta investigación se definirá a las estrategias didácticas para el aprendizaje, al conjunto de acciones, tareas y actividades que emplea el docente de forma sistemática para comunicar el conocimiento, con la finalidad de promover la adquisición y comprensión de este mismo.

Continuando con lo que se refiere a estrategia, no se puede dejar de lado una herramienta presente en la actualidad y en las nuevas generaciones estudiantiles, este es el uso de Tics en el quehacer docente que según UNESCO (2005) “... con la aparición de las sociedades del conocimiento, ha empezado a imponerse una nueva percepción social, política y filosófica del propio proceso educativo. Con la noción de

educación para todos a lo largo de toda la vida, educación ya no es sinónimo de escolaridad.” (p.75), con esto en mente ya se puede consolidar que las estrategias tradicionales están siendo desplazadas por un sin fin de herramientas virtuales que pueden ser usadas en el proceso educativo. Esto se puede reafirmar con el impresionante avance del conocimiento en la implementación de las Tics al momento de ser usado para el aprendizaje que, a pesar de la diversidad estudiantil, la forma de aprender se puede fortalecer y potenciar para mejorar en lo que se refiere al proceso educativo (UNESCO, 2005).

Si queremos hablar de herramientas enfocadas en tecnologías de la información y la comunicación, llámese TIC, no se puede dejar olvidar de GeoGebra (Hohenwarter, 2001) es un software de enseñanza de matemáticas de código abierto para la enseñanza y el aprendizaje en todos los grados. Proporciona recursos interactivos gratuitos sobre geometría, álgebra, cálculo diferencial, integral y estadística. También se ha traducido a más de sesenta y dos idiomas a partir del año 2012 y se ha distribuido en ciento sesenta países (p.190). Esta herramienta educativa favorece la enseñanza de objetos matemáticos debido a que facilita la obtención de sistemas de representaciones de los objetos matemáticos, ya que, al ser un graficador, facilita la forma visualizar de mejor manera lo algebraico, gráfico o tabular.

Para finalizar con los aspectos pedagógicos, se va a concretar que el área en el cual se va a trabajar esta investigación va a ser en el área de las matemáticas, haciendo mención como última herramienta la modelación, en palabras de Schmmidt citado por Bua, Fernández, Salinas (2015), el autor menciona lo siguiente:

“Modelización matemática en general se refiere al uso de las matemáticas para resolver problemas reales y abiertos. Al mismo tiempo, la definición exacta varía en función de los objetivos, qué modelo en el proceso de modelado se está utilizando y la naturaleza del contexto asignado a la tarea de modelización”.

Con respecto a esto, para esta investigación se va a referir como modelación al uso de los registros matemáticos para describir algún fenómeno real, con el fin de resolver los problemas matemáticos existentes.

## 2.6 Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Cuando un estudiante es expuesto a un contenido matemático es común notar la presencia de errores y/o dificultades que impiden la conceptualización de éste. Un cálculo mal realizado, una concepción equivocada o una base mal establecida, son parte de los factores que impiden el aprendizaje óptimo del estudiante, causando que su formación académica quede incompleta o con deficiencias.

Pérez, Porto y Merino (2008) definen una dificultad como un problema u aprieto que nace de la acción de un sujeto, es decir son las barreras o inconvenientes

presentes tras intentar conseguir un determinado objetivo. También señalan que las dificultades pueden ser manifestadas bajo todo tipo de circunstancias. Las dificultades manifestadas en el aprendizaje son las que afectan directamente a los estudiantes que pese a no tener una discapacidad o una inteligencia inferior con respecto a los demás compañeros obtienen un rendimiento académico por debajo de lo esperado.

Dentro de la disciplina de matemática Socas (citado en (Herrera Ruiz, 2010)) señala ciertas dificultades que se relacionan entre ellas

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas: se relaciona con el lenguaje en la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos y el lenguaje cotidiano como mediador en la interpretación de los signos.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático: se relacionan con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático; los ejemplos, los dibujos en el pizarrón, las imágenes estandarizadas, pueden generar errores.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas: los métodos de enseñanza deben ser acordes con la organización institucional escolar y la secuencia curricular.
- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos: al momento de diseñar los recursos y estrategias en la enseñanza se deben considerar las etapas del desarrollo cognitivo de los estudiantes, sus características y capacidades.
- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas: en esta investigación el dominio afectivo comprende las creencias, actitudes y emociones, que actúan como fuerza impulsadora o de resistencia al cambio de la actividad matemática. (Martínez Padrón, 2008)

Cabe mencionar que Cebrián y Gonzales mencionado por Alpízar (2018), aseguran que cuando una dificultad se manifiesta de manera visible se estará en presencia del error, y este último es observable mediante las actividades realizada por los estudiantes, generando respuestas incorrectas a ejercicios o problemas planteados por el docente.

De esta manera que, para identificar correctamente los errores y dificultades presentes en los estudiantes, será necesario ver su naturaleza, de esta manera, para inferir la fuente del error se puede realizar un rastreo en al menos tres direcciones, las cuales tienen diversos orígenes, Socas (1997) señala el obstáculo, la ausencia de sentido y las actitudes afectivas y emocionales

1. El obstáculo: Brousseau (Como se citó en Cid, 2015) señala que el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, tal como

se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos. Entre los obstáculos presentes serán de naturaleza:

i) Epistemológica: En el caso de Cid (2015) señalará que es “cuando ese mismo obstáculo se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo” (p.12). o que en palabras del mismo Brousseau (2007) serán “aquellos que no se pueden ni se deben evitar porque son constitutivos del conocimiento mismo” (p. 47).

ii) Ontogenética: plaza (2020) se refiere a que son originarios del propio estudiante, es decir, no serán aprendidos sino más bien iniciados en la etapa escolar, afectando su desarrollo y el análisis de conceptos u objetos matemáticos.

iii) Didáctica: Brousseau (2007) señalará que “los de origen didáctico son los que parecen depender de las elecciones que se hacen en la enseñanza” (p.47). En otras palabras, cuando el obstáculo se debe específicamente a los métodos y estrategias didácticas llevadas a cabo por las entidades educativas y sin oportunidad de renegociación o cambio. (Cid, 2015).

2. La ausencia de sentido: cuando existen carencias en la comprensión de contenidos matemáticos (conceptos, teoremas, procedimientos, entre otros)

3. Las actitudes afectivas y emocionales: si las actitudes afectivas y emocionales no se traducen en motivación positiva se pueden manifestar errores de diversa índole como la falta de concentración, bloqueos, olvidos, entre otros.

En cuanto a los errores, se pueden tipificar a partir de las diversas fuentes que las originan, entre las cuales se consideran más significativas según las necesidades de la investigación.

Radatz (1980), propone una tipificación de errores presentadas con más frecuencia en las matemáticas, las cuales se pueden acotar en:

- Errores derivados de la simbología y términos matemáticos, como por ejemplo errores de traducción desde un esquema semántico a un lenguaje matemático.
- Errores provenientes de representaciones icónicas, como reconocer los lados de una figura geométrica, pero al rotarlos ya no lo logra.
- Errores por deficiencia en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos matemáticos, a través de conocimiento inadecuado, procedimientos incorrectos en la aplicación, entre otros.

- Errores por rigidez de pensamiento, por razonamientos incorrectos o conceptos u operaciones que interfieren en el proceso de resolución del ejercicio.

Dada estas definiciones, para esta investigación cuando se quiere hablar de dificultad se va a referir a las situaciones cognitivas que impida o afecte el proceso de resolución de ejercicios y/o problemas, mientras que por error se entenderán aquellas situaciones observables donde el estudiante proporcione una respuesta equívoca.

## 2.7 Representación mental a representación semiótica

Para poder hablar sobre la teoría de registro de representaciones semióticas presentada por Duval (1999) debemos indagar sobre los inicios de las representaciones, el autor ha nombrado este concepto durante tres ocasiones distintas a lo largo de la historia, estos son mencionados con nombres como: las representaciones mentales, la representación computacional y por último las representaciones semióticas.

Para Duval, la primera vez que aparece el concepto de representación es en los estudios de Piaget relacionados con la psicología de los niños. En estas investigaciones Piaget se enfoca en el estudio de las creencias y las explicaciones de los niños pequeños sobre los fenómenos naturales y físicos. Él se percató que al finalizar el periodo sensorio motor de un infante aparece una función mental, la cual permite al individuo crear representaciones de un objeto ausente o un acontecimiento.

Al final del periodo sensorio motor, hacia del 1 ½ o 2 años, aparece una función fundamental para la evolución de las conductas posteriores, que consiste en poder representar algo (un “significado” cualquiera: objetos acontecimientos, esquemas conceptuales, etc.) por medio de un “significante” diferenciado y que solo sirve para esta representación: lenguaje, imagen mental, gesto simbólico, etc. (Piaget, 1997, p.48)

Gracias a que las personas construyen representaciones mentales sobre el entorno que los rodea, sobre sí mismos, sobre la sociedad en la que están inmersos, etc., se puede decir, que las representaciones mentales forman parte de los seres humanos desde las etapas iniciales de la infancia, jugando un papel fundamental para la formación como individuos y como futuros profesionales.

La segunda vez que aparece el concepto de representación, se presenta como representación interna o computacional, según Duval (1999) dice que las representaciones computacionales o internas es una teoría con énfasis en la “transformación”, por ende, el individuo realiza una conversión o transformación a un sistema de información para poder adaptarlo a la situación adecuada y cuando el

individuo lo estime conveniente. Un ejemplo claro de este proceso sería cuando los estudiantes aprenden números romanos, los números como tal ya están incorporados en un esquema mental, pero ellos al afrontar un nuevo registro del mismo concepto, deben transformar la información que ya poseen de los números y adecuarlos a la situación en la cual se está aplicando, en este caso los números romanos, es aquí cuando se ve reflejado el proceso de transformación.

Dado estos dos conceptos, se plantea una nueva forma de ver las representaciones como tal, ya no solo como una alusión a un objeto ausente como en las representaciones mentales de Piaget, sino que, desde la mirada de las representaciones computacionales o internas. En palabras de Duval:

La noción de representación resulta entonces esencial en tanto que forma bajo la cual puede describirse una información y tomarse en cuenta en un sistema de transformación. Así pues, esto no tiene nada que ver con una “creencia” ni con una “evocación” de objetos ausentes” que remita a la conciencia vivida de un sujeto. Por el contrario, se trata de una “codificación de la información”. (Duval, 1999, p.26)

Desde esta perspectiva se empiezan a tomar las representaciones como la sistematización de información que reciben los individuos, dándole énfasis a saber las respuestas a las preguntas como ¿De qué forma pueden entrar en el sistema las informaciones del exterior? ¿Cómo ocurre la transformación dentro del individuo?

Para finalizar, la tercera vez que aparecen las representaciones es cuando se empieza a relacionar este concepto con las matemáticas. Duval (1999) asegura que este tipo de representaciones se basa en un sistema de signos, esto quiere decir que el lenguaje cotidiano, la escritura algebraica, los gráficos cartesianos o incluso tablas de datos, todos estos pueden ser convertidos en representaciones “semejantes” en otro sistema semiótico, pero a su vez, permite que el individuo pueda tomar significaciones al momento de utilizar cada representación, en otras palabras, que el estudiante sea consciente de que se está trabajando con una de las representaciones de un objeto matemático y no con el objeto como tal.

Al momento de hablar sobre la noción de representaciones semióticas, se debe tener en cuenta dos procesos cognitivos por el cual debe pasar un individuo. El primer proceso hace alusión a diferentes tipos de sistemas semióticos de un objeto matemático, según Duval (1999) los objetos matemáticos pueden ser poseen distintas representaciones en distintos sistemas semióticos, estos pueden ser sistema tabular, sistema gráfico sistema algebraico entre otros, mientras que en el segundo se refiere al proceso de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro, este último quiere decir que el individuo realiza un “cambio de forma” de un conocimiento que ya está representado. Una situación en el cual se puede presentar el segundo proceso es al momento de aplicar una actividad que relaciona

resolución de problemas y ecuación de primer grado, en este ejercicio, el estudiante en cuestión debe poder pasar del enunciado, el cual se presenta en lenguaje cotidiano o escritura literal, hacia una expresión algebraica realizando el llamado "cambio de forma" del conocimiento que se está representando. Este cambio de registro también se ve afectado por la comprensión lectora del estudiante, debido a que al comprender lo que lee en el enunciado de un ejercicio o problema podrá asociarlo con el contenido trabajado, si esto no se logra realizar de una manera óptima, su desempeño también disminuye, esto se ve reflejado en el trabajo de Alfaro (2018) "implica que a mayor comprensión lectora más resolución de problemas matemáticos por el contrario si su comprensión lectora es baja, la capacidad de resolución de problemas también es baja"(p. 222).

A pesar de la importancia y relevancia que se ha mencionado sobre las distintas representaciones, dejan a la sombra el papel que toman éstas en la actividad cognitiva de las personas, este desconocimiento según Duval (1999) se ven expuesta de dos maneras:

El primer desconocimiento sobre las representaciones semióticas es el tratar estas representaciones solamente como medio por el cual el individuo comunica un concepto ya representado, y esto no es correcto debido que si bien las representaciones semióticas cumplen la función de comunicar, no es la única acción que esta ejecuta, sino que también, efectúa el proceso de conversión o transformación de la información, donde el individuo "cambia" una representación de un sistema semiótico a otro y que a su vez cumple con la función de objetivación o toma de conciencia, donde el individuo es consciente de que está trabajando con una representación de (en el caso de la matemáticas) un objeto matemático, tal como menciona Duval (1999): "Consiste en decir que las representaciones semióticas cumplen con la función de comunicación, olvidando que igualmente cumplen funciones tan primordiales de transformación de la información y de objetivación o toma de conciencia". (p.28)

Antes de señalar el segundo desconocimiento, se debe mencionar dos procesos cognitivos que suceden al momento de aprender un concepto matemático, estos son la semiosis y noesis, estos conceptos los explica Duval en su investigación: "se denomina "semiosis" a la aprehensión o producción de una representación semiótica, y "noesis" a la aprehensión conceptual de un objeto" (p.270), esto se puede ver reflejado cuando un individuo aprende y hace propio el concepto matemático. Una buena forma de entender mejor esto es a través de un ejemplo, en este caso, aprender funciones, a este proceso cognitivo se le llama noesis, pero al momento de aprender la representación de este objeto matemático, ya sea algebraico, gráfico y/o tabular, y adaptarla a la situación en la que se encuentra, se le denomina propiamente tal como semiosis.

Una vez ya aclarado lo que se entiende por semiosis y noesis, se puede empezar a mencionar el segundo desconocimiento existente al momento de hablar de representaciones semióticas, este desconocimiento que se presenta está ligado con los procesos cognitivos de semiosis y noesis. Debido a que a las representaciones semióticas solo se le ve como un soporte de las representaciones mentales, genera que las representaciones de un objeto pasen espontáneamente de la forma en la que se representa al contenido expuesto, en otras palabras, no se puede separar el contenido de su representación tomando en cuenta que no ocurre un proceso cognitivo que une a ambos. Entonces Duval (1999) plantea que el problema que se refleja en el momento de tomar en cuenta esta perspectiva es el de dar a entender que existe la noesis sin la semiosis.

La premisa que afirma que no existe semiosis sin noesis es totalmente desmentida por el mismo Duval, esto se demuestra en un estudio donde menciona “Se ha probado que cambiar de forma de una representación es, para muchos alumnos de diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposibles”, esto se logra reafirmar llevado más a la actualidad en el trabajo de Díaz et al. (2015) , en cual se basa en “Las dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas”, en donde, los mismos datos que se obtienen de su estudio, refleja que una considerable proporción de los estudiantes no logra establecer una articulación espontánea y libre de errores de sus representaciones respectivas.

Con todo el estudio de representaciones de Duval nombrados anteriormente se logra observar que la operación cognitiva de “conversión” o “transformación” entre registros semióticos no se originan por sí solo, llegando a una hipótesis de que no se puede separar la concepción de un objeto matemático de una de las representaciones de este mismo, tal como menciona: “En otros términos se comprueba que la operación de conversión no es ni trivial ni cognitivamente neutra. Entonces no se puede suponer que el contenido representado es separable de la forma que lo representa, como si la noesis fuera independiente de la semiosis” (Duval, 1999, p.28)

Ya aclarada las principales definiciones de Duval sobre las representaciones y haber expuesto dos desconocimientos recurrentes entre las personas, se puede pasar al tema fundamental que plasma el autor.

## 2.8 Teoría de registros de representación semiótica

Es bien sabido que para Duval el proceso de “conversión” cumple un papel importante al momento de estudiar conceptos matemáticos, sobre todo cuando éstas son articuladas con sus respectivas representaciones, en donde, se consideran los sistemas semióticos en relación con las representaciones, favoreciendo el conocimiento de un concepto y las representaciones de este mismo. Es así como

nace su teoría “registros de representación semiótica”, donde Raymond Duval plantea que todo sistema semiótico permite que un individuo pueda cumplir tres procesos cognitivos esenciales para toda representación, estas son: la creación de una representación, el tratamiento de una representación en un registro dado y por último la conversión de una representación producida de un registro a otro.

A continuación, se detallará cada uno de estos procesos.

### 2.8.1 La formación de una representación

La formación de una representación debe tener un sistema semiótico para poder ser un registro de representación, es el que tiene la capacidad de formar una representación reconocible como interpretación de un contenido u objeto matemático, esto en palabras de Raymond Duval (1999) se refiere a que: “En primer lugar, construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como *una representación de alguna cosa* en un sistema determinado.”, estas representaciones pueden ser de la siguiente forma: Enunciado de una oración (el cual debe estar expresado en el lenguaje que un individuo entienda), figuras geométricas, elaboración de esquemas, expresión de una fórmula, etc. Estas interpretaciones en términos de Duval deben cumplir una norma que el individuo debe tener en cuenta al momento de seleccionar una representación de un contenido y esta es que la representación seleccionada debe estar de acuerdo con las unidades y reglas de entrenamiento específicas del registro cognitivo, en otras palabras, esta selección no debe ser ajena al contenido del que se está trabajando si no debe mantener las normas de este mismo.

### 2.8.2 El tratamiento

El segundo proceso, hace alusión a la transformación de las representaciones, pero sin salir del sistema semiótico donde se encuentra, palabras de Duval: “Transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtenga otras representación que puedan construir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales”(Duval, 1999, p.29), en otras palabras el tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el mismo registro donde se formó. estos tratamientos según Duval y Moretti (2012), consideran operaciones cognitivas como, por ejemplo: la paráfrasis y la inferencia (tratamiento en lenguaje natural), el cálculo numérico, algebraico, proposicional (tratamiento de expresiones simbólicas), la reconfiguración (tratamiento de figuras geométricas), entre otras.

### 2.8.3 La conversión

El tercer proceso se refiere en palabras de Duval en: “convertir las representación producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera que éstas últimas permiten explicitar otras significaciones relativas a aquello que es

representado”(Duval, 1999, p.29), en otras palabras la conversión de una representación es la transformación de ésta en otro registro, conservando todo o parte del contenido de la representación original, estas conversiones según el autor considera operaciones como por ejemplo: la ilustración (conversión de una representación lingüística en una representación figurativa), la traducción (conversión de una representación lingüística de otro tipo de idioma), entre otras, además asegura que la conversión es una transformación externa al registro de inicio, lo que quiere decir que solo se llamará al proceso de conversión cuando la representación cambiará de un sistema a otro.

La siguiente imagen (figura 11) tiene como fin, el de explicar en los procesos cognitivos de los registros de representación semiótica, donde primero debe reconocer una representación de un contenido, segundo proceso a realizar el cambio de representación en el proceso de conversión, con el fin de adaptarlo a la situación, y para finalizar el proceso tratamiento donde hay una secuencia de varias transformaciones, pero sin salir del registro dado.

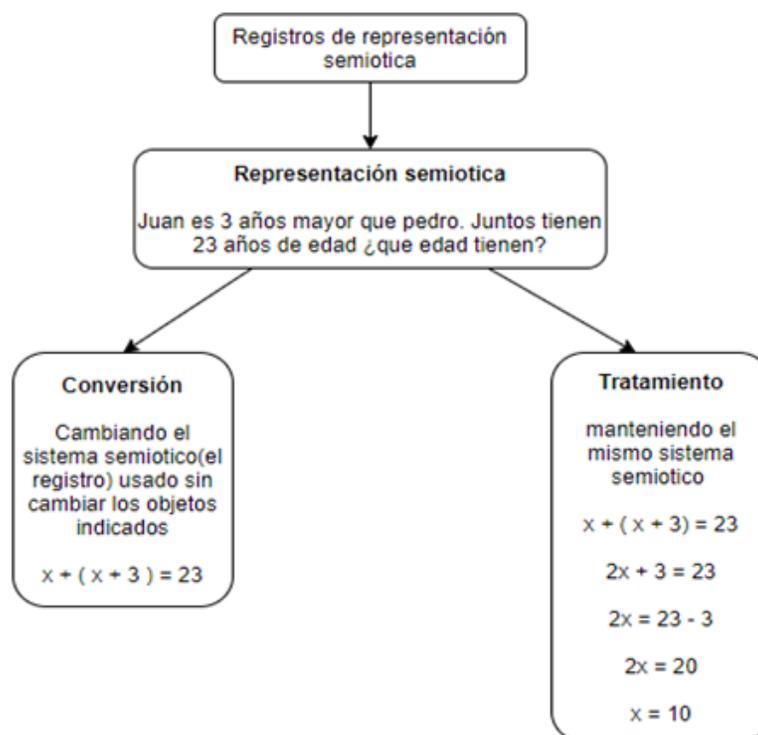


Figura 11: Proceso cognitivo del registro de representación semiótica

Dados estos tres procesos que el autor Raymond Duval plantea, su teoría, la cual se refiere a que un individuo aprehende un el concepto de un objeto, cuando éste es capaz de reproducir las representaciones de este objeto, el cual debe poseer al menos dos representaciones de sí mismo y realizar el proceso de conversión de un sistema semiótico a otro de forma natural, esto en palabras de Duval (1999):

Para los sujetos una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, permitirle el acceso al objeto

representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso... y que “espontáneamente” puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. Cuando estas dos condiciones no se cumplen, la representación y el objeto representado se confunden, y no se pueden reconocer dos representaciones diferentes de un mismo objeto como representaciones de ese mismo objeto. (p.30)

## 2.9 Registros de representaciones semióticas en las matemáticas

Según Duval (2006) existen dos observaciones comunes acerca de la gran variedad de “contextos de representación” en los que aparecen los objetos de conocimiento matemático.

Primero plantea que la actividad matemática se realiza necesariamente en un “contexto de representación” y éstos se puede ver claramente cuando enseñamos, por ejemplo, números racionales, los representamos con figuras geométricas, como términos aritméticos, entre otros.

Segundo plantea que los estudiantes deberían estar aptos para reconocer el mismo objeto matemático sin importar el contexto de las representaciones y también el que puedan ocupar estas representaciones, esto quiere decir que el estudiante debe ser capaz de reconocer un objeto matemático sin importar la representación en la cual se presenta y a su vez sea capaz de utilizarla dado un contexto dado.

Dadas estas observaciones Duval se plantea: “Los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran.”(Duval, 2006, p.145), esto quiere decir que al momento de hablar que las matemáticas se enseñan y se aprenden en un contexto de funciones y además el estudiante debe poder reconocer los objetos matemáticos sin importar la representación en la cual se presenta, se toma siempre en cuenta el papel de las representaciones implicadas en el proceso de la enseñanza y como ya vimos en capítulos anteriores estas representaciones son de carácter semiótica, lo cual significa que se deben estudiar las formas en las cuales estas inciden en las matemáticas y qué procesos están involucrados. Para eso Raymond Duval destaca dos requisitos cognitivos que involucran representaciones semióticas dentro del ámbito matemático.

El primer requisito en palabras de Raymond Duval: “Lo que importa es su propiedad de transformación porque el procesamiento matemático siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas. En matemáticas los signos

no son prioritarios para presentar objetos sino para sustituirlos por otros como, por ejemplo, en el cálculo. Además, esta transformación depende del sistema semiótico de representación dentro de las representaciones que se producen. En ese sentido no hay una “mediación semiótica” sino “mediaciones semióticas bastante diferentes. (Duval, 2006, p.145)

En otras palabras, lo que quiere decir este requisito es que está enfocado que al trabajar con matemáticas es fundamental usar el procedimiento cognitivo de transformación entre registros, dado que los objetos matemáticos son representados por distintas representaciones semióticas.

La actividad matemática requiere que, aunque los individuos emplean diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), solo elijan una según el propósito de la actividad. En otras palabras, la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significaran dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos “contextos de representación” diferentes del mismo objeto. (Duval, 2006, p.145)

Este segundo requisito se refiere que a pesar de que existen distintas representaciones para un objeto matemático, los individuos deben elegir el más adecuado y adaptarlas según el contexto.

Entonces según Raymond Duval (2006) estos dos requisitos son esenciales para la actividad matemática y no se pueden considerar separadas una de la otra al momento de establecer y comprender el problema en el aprendizaje de ésta, además también aparecen los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático: “la conversión” y “el tratamiento” de representaciones semióticas y la complejidad cognitiva que poseen estos procesos para el individuo, es por eso que el autor se pregunta ¿Por qué tanto problema recurrente acerca de la conversión de representación y cómo lograr que los estudiantes comprendan y realicen adecuadamente la conversión de representaciones en matemáticas?.

Para poder responder esta incógnita, se hablará acerca del proceso cognitivo de “transformación” de representaciones semióticas, con respecto a las matemáticas.

## 2.10 Proceso de transformación en matemáticas

El proceso cognitivo de transformación dada cualquier actividad matemática planteado por Duval (2006), poseen dos clases, éstas son: el proceso de tratamiento y de conversión, como ya se mencionó anteriormente el tratamiento hace alusión a transformaciones de las representaciones pero dentro del mismo sistema semiótico, este con el fin de poder aportar más datos que la representación inicial y

según el contexto en el cual el individuo se encuentra y por otra lado el proceso de conversión se refiere a la transformación de una representación semiótica producidas en sistema en otro registro o sistema semiótico, conservando todo o parte del contenido de la representación original. Al retomar la Figura 11, se realizó un “cambio” de registro del objeto matemático en cuestión donde pasa de una representación de lenguaje cotidiano hacia una presentación algebraica que era requerida para su solución, a este proceso se le llama “conversión”, pero por otro lado esta representación algebraica pasa por el proceso de tratamiento donde se pueden observar una secuencia de varias transformaciones, pero sin salir del registro algebraico.

Desde el punto de vista matemático Raymond Duval plantea que la conversión y el tratamiento son muy importantes cuando hablamos de resolución de problemas, dándole énfasis en la importancia del tratamiento, debido que éste hace más notable la elección del registro más adecuado a la situación del problema planteado, esto en palabras de Duval:

la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas. Es más, lo que importa es el tratamiento que es el que hace relevante la elección del “mejor” cambio de registro (economía de medios, más potencia para la generalización, o más intuitivo...) para resolver el problema dado. (Duval, 2006, p.149)

Aunque, si bien el tratamiento y la conversión son un proceso fundamental para la resolución de problemas, según el autor no responden a la interrogante planteada, donde el problema es más profundo, que solo problemas en la conversión y el tratamiento de representaciones.

Además de la resolución de problemas el proceso de conversión y tratamiento también puede verse favorecido en la modelización de hechos reales, esto es reafirmado por Villalobos, Guzmán, Rentería y Lares (2018) “La aplicación de estos diferentes registros hace que el proceso cognitivo de la modelación matemática sea más transparente al transitar del objeto cognitivo hacia su imagen matemática (modelo matemático) la cual, implementada en algoritmos lógico numéricos, permite estudiar las cualidades del proceso original. Este método de cognición conjuga las ventajas de la teoría y del experimento” (p.65), gracias a esto se puede afirmar que la teoría de registro de representación semiótica ayuda a la metodología de modelización matemática debido a los procesos cognitivos de tratamiento en un registro y conversión entre registros.

## 2.11 ¿Por qué el proceso de conversión es crucial en la comprensión de la matemática en los estudiantes?

Dada la investigación en la cual trabaja Raymond Duval nos muestra que los signos en las matemáticas son comúnmente usados, debido a que al momento de enseñar las matemáticas se utilizan ciertos tipos de notaciones arbitrarias, en palabras de Duval: “Los signos se asocian muy a menudo con notaciones convencionales como son el uso de letras en geometría y el uso de símbolos en álgebra.”(Duval, 2006, p.157), desde ese punto de vista se nos presentan dos formas de ver las matemáticas, por un lado tenemos, el objeto matemático o el contenido conceptual y por el otro las representaciones semióticas que se pueden elegir de acuerdo al contexto en el cual el estudiante se está enfrentando, dado esto se plantea que el proceso de conversión realizado de manera correcta está ligado con la comprensión del concepto matemático y los problemas asociados con la conversión da a entender que el objeto matemático no se aprendió de manera correcta, esto es planteado por Duval de la siguiente manera:

Desde este punto de vista restrictivo hacemos una aproximación dual a la actividad matemática: por un lado, el contenido matemático conceptual y no semiótico, y por otras representaciones semióticas que se pueden elegir de acuerdo con las necesidades de comunicación o teniendo en cuenta el coste del tratamiento. Desde este punto de vista, la conversión sería el resultado de la comprensión conceptual y cualquier problema con la conversión sería indicativo de conceptos erróneos. (Duval, 2006, p.157)

Según Raymond Duval (2006) la actividad matemática debe satisfacer dos requisitos que entran en conflicto:

1. Las representaciones semióticas deben ser usadas necesariamente, incluso si se elige el tipo de representación semiótica.
2. Los objetos matemáticos representados nunca deben confundirse con el contenido de las representaciones semióticas utilizadas.

El primer requisito presentado es importante según Raymond Duval debido a que resalta el obstáculo epistemológico en las matemáticas dado que los objetos de conocimiento matemático ya sean los números, funciones y sus propiedades, etc., son objetos que no son tangibles o perceptibles por el tacto mediante instrumentos, haciendo que única forma de acceder a ellas sea mediante representaciones semióticas, pero eso no se limita solo en la forma en la que se representa estos objetos sino que también en cómo estas representaciones no permiten trabajar, operar y analizar el objeto para su entendimiento, en otras palabras para el proceso de tratamiento.

Sin embargo, la necesidad de signos no se limita a esto, pues su principal papel no es representar objetos matemáticos sino trabajar en ellos y con ellos, sustituyendo unos signos por otros. Los sistemas semióticos son principalmente usados para operar, es decir para el tratamiento. Podemos resumir esto diciendo: sin “mediaciones semióticas” no es posible la actividad matemática. (Duval, 2006, p.157)

Y el segundo requisito se refiere a que “El contenido de cada representación semiótica no depende solo de los conceptos o de los objetos representados, sino también de los sistemas semióticos de representación empleados” (Duval, 2006, p.158), y esto porque al cambiar de un sistema a otro significa cambiar el contenido u objeto matemático de representación sin cambiar las propiedades que éste nos entrega.

Dado estos requisitos conflictivos para la enseñanza de las matemáticas, nace la paradoja cognitiva de Raymond Duval, donde él asegura que los estudiantes tropiezan al momento de enfrentarse al umbral de conversión entre representación, además asegura que estos requisitos son los causantes del problema en el estudio de esta área. Esto se ve reflejado en las siguientes palabras de Duval: “La mayor piedra de toque para la comprensión es la posibilidad de TRANSFERIR lo que se ha aprendido a nuevos y diferentes contextos, dentro y fuera de las matemáticas, y esto siempre implica la conversión de representación.” (Duval, 2006, p.158)

Entonces dado esta paradoja cognitiva, la comprensión no significa pasar desde el contenido de una representación hasta el concepto matemático representado, si no en relacionar diversos contenidos de representación del mismo concepto. Esos contenidos de representación según Raymond Duval (2006) dependen no solo de lo que es representado, sino que también de los registros de representación usadas, es decir que el estudiante requiere de una “coordinación interna” entre los diversos sistemas de representación semióticas que pueda escoger y usar de manera que lo adapte al contexto en el que se encuentra. También asegura que, si un estudiante no desarrolla esta coordinación, no podrá cruzar el umbral de conversión de representación, generando problemas al momento de comprender ciertos conceptos, como ya se mencionó anteriormente.

En palabras de Duval: “Lo que primero importa para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos.” (Duval, 2006, p.159) Y de esa manera poder generar una comprensión de un contenido dado.

## CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

### 3.1 Diseño de la investigación

Durante esta investigación se consideró una metodología de carácter cualitativa descriptiva no experimental. Este tipo de investigación se caracteriza por generar una profundidad a los datos obtenidos, permitiendo así al investigador interpretar de una manera enriquecedora los resultados, aportando un punto de vista fresco o natural frente a los fenómenos estudiados. Otra razón por la que se optó por esta metodología es debido a la cualidad de tener un enfoque multimetódico, en este se le atribuye un acercamiento interpretativo e íntimo con los sujetos en estudio, con la intención de dar sentido a los fenómenos en base a los significados que las personas les otorgan.

A esta metodología se le ha asignado su nombre específico ("cualitativa"), porque se refiere a cualidades de lo estudiado, es decir, a la descripción, relación y/o desarrollo de características del objeto de estudio. Por lo general prescinde del registro de cantidades, frecuencias de aparición o de cualquier otro dato reducible a números, realizándose la descripción de cualidades por medio de conceptos y de relaciones entre conceptos. "La metodología cualitativa se refiere, entonces, a procedimientos que posibilitan una construcción de conocimiento que ocurre sobre la base de conceptos. Son los conceptos los que permiten la reducción de complejidad y es mediante el establecimiento de relaciones entre estos conceptos que se genera la coherencia interna del producto científico" (Krause, 1995, p.21).

Conforme a las palabras de Chávez (citado en Teoría, 2000) las investigaciones descriptivas, son todas aquellas que se orientan a recolectar informaciones relacionadas con el estado real de las personas, objetos, situaciones o fenómenos, tal cual como se presentaron en el momento de su recolección. De esta forma el análisis de la información se ha llevado a cabo a través de tres categorías que nacen desde el marco teórico, las cuales corresponden a error, dificultad y experiencia describiendo con exactitud los errores y dificultades predominantes en el aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas de los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, resumiendo cautelosamente los datos obtenidos, a fin de extraer una generalización significativa para la formulación de una estrategia didáctica.

Esta investigación al ser no experimental pretende observar los problemas presentes en los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, sin hacer uso de la manipulación en ninguna de sus variables asociadas.

### 3.2 Universo y muestra

**Población:** La población de investigación corresponde a la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa.

**Descripción de sujetos:** Se considerará una muestra de 8 estudiantes los cuales se identificarán como  $E_n$  (E sub n), con  $n= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  con la condición de:

- Los estudiantes seleccionados pertenecen entre los niveles 600 y 900 de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa.
- Los estudiantes escogidos han cursado Álgebra I, Álgebra II, Cálculo I, Cálculo II y Cálculo III como mínimo.
- Los estudiantes encuestados no deben haber reprobado tres de los ramos mencionamos a continuación: Álgebra I, II y Cálculo I, II y III.
- Los encuestados deben estar entre el rango 600 a 800.
- La muestra que realiza el test inicial será la misma que realice la entrevista final sin excepciones.

Estas condiciones aseguran que la muestra sea representativa respecto de los contenidos impartidos según la programación de la carrera (no homogénea), respecto a la diversidad de contenido y el contexto en el que nos encontramos. En el caso de las reprobaciones la intencionalidad es que el “grado” de conocimientos adquiridos por los estudiantes sea lo más equitativo posible, tomando en cuenta el posible cambio de docente entre los años y cátedras consideradas para la investigación; y, en el caso de las técnicas de recolección, la realización del test inicial y entrevista final por la misma muestra, que permitirá llevar a cabo un análisis e inferencia de información respecto a los mismos sujetos en estudio.

### 3.3 Recolección de datos

Para la recolección de datos se consideró a estudiantes con ciertas características que brindarían un estudio representativo respecto a la población seleccionada. A esta muestra se le aplicó dos tipos de instrumentos, el primero que consta de un cuestionario y el segundo referente a una entrevista.

El primer instrumento tiene la intencionalidad de esclarecer las principales dificultades de los estudiantes en torno a las funciones lineales y cuadráticas. El segundo instrumento permite identificar los procesos cognitivos de los estudiantes al momento de enfrentarse a ciertas problemáticas, como también experiencias personales frente al contenido estudiado.

Para que se logrará la aplicación de ambos instrumentos sin ninguna complicación, se les envió el cuestionario mediante un correo electrónico para que lo desarrollaran en un tiempo estimado de 60 minutos, posterior a eso se les otorga un descanso de

15 a 20 minutos, para luego dar paso a la entrevista, la cual tiene una duración de unos 40 minutos aproximadamente.

De acuerdo con la información entregada por los entrevistados, se realizó un levantamiento de categorías que nos permite a establecer los tipos de dificultades que presentan los estudiantes, esto es con la finalidad de proponer una estrategia didáctica que supla todas las necesidades educativas de los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa.

### 3.4 Instrumentos para la recogida de información

Para la investigación se consideró dos instrumentos de recolección de datos, una encuesta y posteriormente una entrevista. Según Casanova “La encuesta consiste en la obtención de información relativa a un tema, problema o situación determinada, que se realiza habitualmente mediante la aplicación de cuestionarios orales o escritos”(Casanova, 1999, p.140), además plantea que el objetivo de este instrumento, es el de poder averiguar y describir condiciones existentes en el desarrollo de la situación evaluada, descubrir formas de conducta o de funcionamiento con las que se puede comparar situaciones anteriores y determinar las relaciones existentes entre diversos acontecimientos o situaciones entre personas (Casanova 1999), entonces dada estas características nuestro primer instrumento consta de un cuestionario que tiene la intención de indagar acerca de las dificultades y errores que presentan los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa respecto a la comprensión de las funciones lineales y cuadráticas. En este instrumento se menciona el nombre de la investigación, el objetivo del cuestionario, la importancia de la investigación y las instrucciones del cuestionario.

La estructura de este instrumento (**anexo 2**) consistió en 8 preguntas que tienen la intencionalidad de que los estudiantes utilicen un cambio de registro entre diversas representaciones semióticas las cuales se detallan continuación:

#### **intencionalidad Pregunta 1**

Esta pregunta tiene como finalidad identificar si el encuestado es capaz de realizar un **cambio de registro desde una representación en registro algebraico a una representación en registro gráfico**, tomando en cuenta el papel que cumplen los parámetros con respecto al desplazamiento de una función cuadrática.

#### **Intencionalidad Pregunta 2**

Esta pregunta tiene como objetivo identificar si el encuestado es capaz de realizar un **cambio entre registro desde una representación en registro cotidiano a cualquier otra representación entre otro registro**, identificando la función lineal

detrás de la pregunta y tomando en cuenta los parámetros que se entrega en lenguaje cotidiano

### **Intencionalidad Pregunta 3**

Esta pregunta tiene como propósito identificar si el encuestado es capaz de realizar un **cambio entre registro desde una representación en registro gráfico a una representación en registro de lenguaje cotidiano**, identificando los puntos críticos de la función representada, sin necesidad de articular otro registro.

### **Intencionalidad Pregunta 4**

Esta pregunta tiene como propósito identificar si el encuestado es capaz de realizar un **cambio entre registro desde una representación en registro gráfico a una representación en registro algebraico**, identificando los puntos críticos de la función representada, y realizando un tratamiento dentro del mismo registro para así aproximar a la representación algebraica.

### **Intencionalidad Pregunta 5**

Esta pregunta tiene como propósito identificar si el encuestado es capaz de realizar un **cambio entre registro desde una representación en registro algebraico a una representación en registro de lenguaje cotidiano**, identificando la función lineal representada de forma algebraica y tomando en cuenta el dominio y recorrido de la función.

### **Intencionalidad Pregunta 6**

Esta pregunta tiene como propósito identificar si el encuestado es capaz de realizar un **cambio entre registro desde una representación en registro de lenguaje cotidiano a una representación en registro gráfico**, identificando la función lineal representada de forma cotidiana, tomando en cuenta los datos entregados y pudiendo graficar a partir de este sin necesidad de articular otro registro.

### **Intencionalidad Pregunta 7**

Esta pregunta tiene como propósito identificar si el encuestado es capaz de realizar un **cambio entre registro desde una representación en registro tabular a una representación en registro gráfico**, identificando la función lineal representada de forma tabular, tomando en cuenta los datos entregados y pudiendo graficar a partir de este sin necesidad de articular otro registro.

### **Intencionalidad Pregunta 8**

Esta pregunta tiene como objetivo identificar si el encuestado es capaz de realizar un **cambio entre registro desde una representación en registro cotidiano a**

**cualquier otra representación entre otro registro**, identificando la función lineal detrás de la pregunta y tomando en cuenta los parámetros que se entrega en lenguaje cotidiano, para articular el enunciado en otro registro.

Por otro lado, tendremos una entrevista en la cual Casanova describe como: “una conversación intencional. Dada su similitud con el cuestionario, también se conceptúa como un cuestionario, más o menos estructurado o abierto, planteado y respondido de forma oral en situación de comunicación personal directa.(Casanova, 1999, p.140)”, instrumento según Casanova (1999) ofrece ventajas en comparación con otras técnicas, debido que esta garantiza de que los datos obtenidos son ciertos, posibilita captar la actitud del entrevistado hacia el problema planteado, y profundiza las respuestas obtenidos por otro instrumento de recolección, es por eso que nuestro segundo instrumento utilizado para esta investigación consta de una entrevista, que tiene la intencionalidad de ser complementaria al cuestionario ya realizado, para así clasificar las dificultades de los estudiantes con respecto al contenido de funciones lineales y cuadráticas. Al igual que en el cuestionario, en la entrevista nuevamente se menciona el nombre de la investigación, el objetivo de la entrevista, la importancia de la investigación y las instrucciones de la entrevista.

La estructura del segundo instrumento es asociada a las respuestas del cuestionario, es decir por cada respuesta del cuestionario, se realizan preguntas entorno a la forma de desarrollo empleada por los entrevistados, esta entrevista consta con un total de 22 preguntas, cabe destacar que la entrevista es semiestructurada y puede variar conforme a las respuestas entregadas por los estudiantes.

Ambos instrumentos en conjunto tienen como propósito que el investigador intérprete si las transformaciones entre registros semióticos tienen posibilidad de mejorar la comprensión de funciones lineales y cuadráticas en estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa. Para así generar una estrategia didáctica que permita al estudiante suplir todas las falencias demostradas durante esta investigación.

### 3.5 Validez y confiabilidad

Ambos instrumentos utilizados durante esta investigación fueron validados bajo tres profesores universitarios especializados en el área de conocimiento matemático. Todos aquellos con gran conocimiento frente al objeto de estudio y una amplia gama de estrategias didácticas, que nos aportaron sugerencia al momento de realizar el instrumento de investigación.

## CAPÍTULO 4: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

### 4.1 Resultados

Acorde a la siguiente investigación se revisaron los 8 resultados de los estudiantes que participaron en la investigación, identificando los errores y dificultades en cuanto a el aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas, los cuales se contabilizaron y categorizaron en base a la respuesta obtenidas.

En la tabla 1 se presentan los resultados que se obtuvieron en el cuestionario aplicado a los estudiantes de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa de una universidad privada de la región metropolitana, considerando las respuestas correctas como “C”, las incorrectas como “I” y las omitidas como “-”. Además, se señala la intencionalidad de cada pregunta, identificando el registro de partida y el solicitado, para esto se utilizó la sigla de cada registro para anotarlos, denotándolo con los nombres de “A” para el registro algebraico; “L” para el registro de lenguaje cotidiano; “G” para registro gráfico, “T” para el registro tabular y “O” un registro a elección del estudiante. Por último, para denotar el cambio entre registro, se representó con las siglas de cada tipo de registro continuado con un guion, por ejemplo, cuando se quiera referir del registro algebraico al gráfico se va a escribir de la forma “A-G”.

x	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	T. O	T. C	T. I	Conversión			
Pregunta 1	I	I	I	C	C	C	C	C	0	0,0%	5	62,5%	3	37,5%	A-G
Pregunta 2	I	I	C	C	C	C	-	C	1	12,5%	5	62,5%	2	25,0%	C-O
Pregunta 3	I	I	I	I	C	C	-	I	1	12,5%	2	25,0%	5	62,5%	G-C
Pregunta 4	I	-	C	-	C	I	I	C	2	25,0%	3	37,5%	3	37,5%	G-A
Pregunta 5	I	-	I	I	I	C	-	I	2	25,0%	1	12,5%	5	62,5%	A-C
Pregunta 6	I	C	I	I	C	C	I	I	0	0,0%	3	37,5%	5	62,5%	C-G
Pregunta 7	I	-	I	C	I	I	I	I	1	12,5%	1	12,5%	6	75,0%	T-G
Pregunta 8	I	-	-	-	-	I	I	I	4	50,0%	0	0,0%	4	50,0%	C-O

Tabla 1. Resultados del cuestionario.

La presente tabla indica que, del total de los estudiantes encuestados, un 37.5% no logró responder correctamente la pregunta número 1, la cual tenía como finalidad la conversión desde un registro algebraico hacia un registro gráfico. En cuanto a la segunda pregunta, un 25% no logró responder correctamente y se presenta una omisión de respuesta, considerando que la finalidad de la pregunta es la conversión desde un registro cotidiano, hacia otro registro de su preferencia. Como tercera

pregunta, con la intencionalidad de convertir un registro gráfico a otro de lenguaje cotidiano, se observó que el 100% de los estudiantes no la responde correctamente u omite su respuesta. En cuanto a la pregunta número 4, un 37.5% de los estudiantes responde de forma incorrecta considerando una conversión desde un registro gráfico a uno algebraico, destacando que existen dos respuestas omitidas. La pregunta número 5, presenta que el 100% de los estudiantes no es capaz de responder correctamente u omite su respuesta en un ejercicio planteado desde un registro algebraico hacia uno de lenguaje cotidiano. En la pregunta número 6 un 50% de los estudiantes logró responder la pregunta correctamente, mientras que en la pregunta 7 un 75% no responde correctamente un ejercicio de conversión de registro tabular a gráfico, presentando una omisión de respuesta, y finalmente en la pregunta número 8, un 37.5% de los estudiantes responde de forma incorrecta el ejercicio que solicitó convertir desde un registro cotidiano hacia otros dos registros de su preferencia.

En la tabla 2, se indica las observaciones realizadas respecto a errores, dificultades y estrategias detectados por medio de los cuestionarios y entrevistas aplicadas a los estudiantes, estructurando categorías las cuales han sido señaladas en el marco teórico.

Categorías	Sub categorías	Indicador	Observaciones
Error	Conceptual	No reconoce las características y coeficientes de una función lineal	<ul style="list-style-type: none"> <li>Confunde una función lineal con una sucesión (E3)</li> </ul>
		No reconoce las características y coeficientes de una función cuadrática	<ul style="list-style-type: none"> <li>Confunde una función cuadrática con una exponencial (E3)</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>Confunde parámetro b con el desplazamiento que tendrá la cónica (E1) (E5) (E7)</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>Confunde parámetro c con el desplazamiento que tendrá la cónica (E1) (E8)</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>Relaciona la pendiente a una función cuadrática (E2)</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>No considera la simetría de la función cuadrática (E2)</li> </ul>

			<ul style="list-style-type: none"> <li>• Asocia el coeficiente <math>b</math> a la posición del punto mínimo de la curva (E3)</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>• Asocia al parámetro <math>b</math> la expansión y contracción de la cónica (E5) (E7)</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>• Asocia el coeficiente "<math>c</math>" a la posición del vértice (E5) (E7)</li> </ul>
	No reconoce conceptos matemáticos		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Asigna un negativo a un coeficiente imparcial en este caso "<math>a</math>" (E1)</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>• Asigna un negativo a un coeficiente imparcial en este caso "<math>b</math>" (E6)</li> <li>• No entiende lo que es "disminuido" (E1)</li> <li>• No diferencia lo que es una variable y una incógnita (E1) (E6)</li> <li>• No reconoce lo que es un inverso multiplicativo asumiendo que el inverso multiplicativo de 3 es -3 (E2)</li> <li>• Identifica una función solo con su expresión algebraica (E7)</li> </ul>
Tratamiento	No realiza correctamente el tratamiento		<ul style="list-style-type: none"> <li>• No evalúa correctamente <math>x=2</math> en la tabla de valores (E2)</li> <li>• Sumaria 2 unidades al coeficiente <math>c</math> para trasladar la función en 2 unidades hacia la derecha (E8)</li> </ul>
Articulación de registros	No realiza la conversión desde un registro		<ul style="list-style-type: none"> <li>• No logra la conversión L – O, indicando dos representaciones distintas (E1) (E2)</li> </ul>

		<p>de lenguaje cotidiano</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No logra la conversión L – O, multiplicando una x de mas (E2)</li> <li>• Error con la intersección del eje Y, impide la conversión de L-G (E1)</li> <li>• Error en el gráfico, considera más puntos de los solicitados en conversión L-G) (E1) (E7) (E8)</li> <li>• No realiza la conversión de L-G porque asigna un cuadrado de forma incorrecta (E4)</li> <li>• No realiza la conversión de L-G porque asigna coeficientes erróneos (E4)</li> <li>• No realiza la conversión de L-G porque asocia una ecuación en vez de una función (E3)</li> <li>• Aparece una función compuesta tras hacer la conversión L-G (E8)</li> </ul>
		<p>No realiza la conversión desde un registro algebraico</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La intercepción con el eje y está mal realizada impidiendo la conversión desde un registro A-G (E1)</li> <li>• Error en la conversión A-G, presenta 3 preimágenes para una imagen (E2)</li> <li>• El estudiante solo asocia, pero no consigue modelar la función en conversión A-L (E1) (E8)</li> <li>• Plantea mal las variables en la conversión de A-L (E3) (E5)</li> <li>• No asigna la función solicitada en la conversión de A-L (E4)</li> </ul>

		No realiza la conversión desde un registro tabular	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se considera más puntos de los solicitados en el grafico (E1) (E3) (E5) (E6) (E7) (E8)</li> </ul>
		No realiza la conversión desde un registro grafico	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se equivoca en los valores de los coeficientes, impidiendo la conversión G-A (E1) (E7)</li> <li>Realiza un registro algebraico como intermediario (E1) (E2) (E3) (E5) (E6)</li> <li>No realiza la conversión G-L, solo asocia un contexto (E1) (E8)</li> <li>No realiza la conversión G-L, no asigna la función solicitada (E3)</li> </ul>
Dificultad	Conceptual	Se le dificulta reconocer las características y coeficientes de una función lineal	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se confunde entre variable dependiente e independiente (E2)</li> <li>No reconoce la importancia del dato cambio de temperatura constante (E4)</li> <li>El estudiante no señala diferencias ni la existencia de la función afín (E3) (E5) (E6) (E7) (E8)</li> <li>El estudiante no reconoce las características, solo por la forma de la gráfica determina que es lineal (E6)</li> </ul>
		Se le dificulta reconocer las características y coeficientes de	<ul style="list-style-type: none"> <li>Solo reconoce una cuadrática por la palabra "cuadrado" (E2)</li> <li>Del coeficiente a, solo reconoce concavidad, pero no identifica la contracción y expansión de la</li> </ul>

		una función cuadrática	cónica (E1) (E3) (E5) (E6) (E7) (E8)
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Significado de cóncavo y convexo (E3) (E6) (E7)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• No reconoce la funcionalidad de los coeficientes "b" y "c" (E1) (E3) (E7)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• El estudiante no reconoce la funcionalidad del coeficiente "b" (E2) (E3) (E4) Solo posee noción del coeficiente "c" (E5)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtiene una noción del coeficiente "b" mediante el tanteo (E6)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• No reconoce el coeficiente "c" (E6)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• El estudiante no reconoce completamente las características, de la función cuadrática (E5) (E6)</li> </ul>	
		Se le dificulta reconocer conceptos matemáticos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No reconoce lo que es un inverso multiplicativo (E1) (E7)</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>• Confunde el inverso multiplicativo con el neutro (E6)</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desde la perspectiva del estudiante, el lenguaje matemático cuesta más (E3) (E7)</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Confunde signo de la formula (E5)</li> </ul>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No reconoce la importancia del concepto constante (E4)</li> </ul>		

Articulación de registros	Se le dificulta realizar la conversión desde un registro de lenguaje cotidiano	<ul style="list-style-type: none"> <li>Registro algebraico como primera opción de conversión en la conversión de L- O (E1) (E2) (E3) (E4) (E5) (E6) (E8)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Necesita de un registro algebraico para realizar la conversión L-G (E1) (E2) (E3) (E5) (E6) (E7) (E8)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Necesita de una expresión algebraica como tratamiento para realizar la conversión de L-G (E1) (E5) (E6) (E8)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Le dificultaría realizar la conversión desde el lenguaje cotidiano al grafico (E1) (E2) (E3) (E5) (E6) (E7)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Desde la perspectiva del estudiante necesitaría de una tabla de valores para aplicar la reversibilidad de conversión (E1)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>No reconoce el registro de lenguaje cotidiano como un registro (E1)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Necesita de un registro algebraico y tabular para realizar la conversión L-G (E2) (E6)</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Señala dificultad para organizar datos (E3) (E4) (E5)</li> </ul>	
	Se le dificulta realizar la conversión	<ul style="list-style-type: none"> <li>Le dificulta la conversión de registro A-L (E2) (E4) (E5) (E6) (E7)</li> </ul>

		desde un registro algebraico	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Necesita transitar por los registros A-T-G (E2)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Necesita dar valores a los coeficientes para la conversión A-G (E2) (E3) (E5) (E6) (E8)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desde la perspectiva del estudiante, necesita la realización de un tratamiento algebraico para realizar la conversión A-G (E1) (E2) (E6) (E8)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Necesita de un bosquejo grafico para realizar la conversión de A-L (E1)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Señala ser literal para realizar la conversión de A-L (E3) (E4)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• No presenta la problemática a la modelación (E6)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• El estudiante señala dificultad al trabajar cantidades negativas desde este registro al registro cotidiano (E7)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• El estudiante señala que para funciones complicadas ve la necesidad de usar un registro auxiliar para visualizar el contexto(E8)</li> </ul>	
		Se le dificulta realizar la conversión desde un registro tabular	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se confunde en como colocar los ejes (E2)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Observa la conversión de registros como algo secuencial (E1) (E3) (E7)</li> </ul>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Registro tabular como intermediario para realizar el</li> </ul>	

		gráfico (E1) (E2) (E3) (E5) (E6) (E7)
Se le dificulta realizar la conversión desde un registro grafico		<ul style="list-style-type: none"> <li>Desde la perspectiva del estudiante se le dificulta la conversión de G-A (E1) (E3) (E7)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Necesita comprobar lo realizado graficando reiteradamente, dificultando así la conversión de G-A (E3)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Necesita un registro algebraico como apoyo para realizar el problema cotidiano (E1) (E2) (E3) (E4) (E5) (E6)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Hace énfasis en su poco manejo del lenguaje cotidiano (E2)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>No presenta una problemática (E5) (E6)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Necesito realizar más intentos para hallar la expresión algebraica (E3)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Necesita de un registro T y A (E4) (E8)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Realiza de un tratamiento algebraico para hallar la función (E4) (E5) (E8)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante señala dificultad para lograr conversión G-L (E7)</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>Necesita de un registro tabular para hallar la expresión algebraica en la conversión G-A (E8)</li> </ul>
Compresión		<ul style="list-style-type: none"> <li>Desde su perspectiva existe una dificultad en comprensión</li> </ul>

		Se le dificulta la comprensión lectora	<p>lectora para utilizar un registro cotidiano (E1) (E2)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Otorgar un valor positivo teniendo la restricción de <math>a &lt; 0</math> (E3)</li> <li>• No transcribe el ejercicio adecuadamente (E1)</li> <li>• Dificultad en reconocer la palabra proporciones simétricas (E3)</li> <li>• No comprende lo que se debe realizar (E4)</li> </ul>
Experiencia	Perspectiva del estudiante	Registro más familiarizado por parte del estudiante	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Algebraico y grafico (E1) (E2) (E4) (E6)</li> <li>• Algebraico y grafico (E3) (E8) (E8)</li> </ul>
		Estrategia utilizada por el docente	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No se realiza énfasis en los parámetros de la función cuadrática (E1)</li> <li>• En el optativo de funciones se realiza conversión de grafico a algebraico (E2) (E3) (E6)</li> <li>• Se trabaja de manera teórica y práctica dejando afuera el análisis (E2)</li> <li>• En el colegio se trabajó el proceso de graficar (E4)</li> <li>• No se realiza la conversión del registro grafico a algebraico (E4)</li> </ul>

			<ul style="list-style-type: none"> <li>• Algebra I se trabajó la conversión del registro algebraico a lenguaje cotidiano (E4)</li> <li>• El registro de lenguaje cotidiano es el menos utilizado (E1) (E2) (E5) (E6) (E7)</li> <li>• Los docentes priorizan el trabajo en el registro algebraico y gráfico (E3) (E4) (E7)</li> <li>• Los docentes priorizan el trabajo en el registro algebraico (E1) (E2) (E6)</li> <li>• Se realizan ejercicios simples para explicar y complicado en los exámenes (E8)</li> <li>• Algebraico como principal registro y grafico ocasional (E8)</li> </ul>
--	--	--	---

Tabla 2. Errores, dificultades y estrategias presentes en el aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas.

Tras observar la primera categoría correspondiente a los errores presentes en las respuestas del cuestionario y de las entrevistas, podemos notar que las respuestas de los estudiantes son variadas. Dentro de estos errores podemos encontrar los de tipo conceptual, de tratamiento y de articulación de registros.

Para el error conceptual podemos señalar que los estudiantes no presentan mayor problema en cuanto se refieren a las funciones lineales, percibiendo que el conflicto es producido por un solo estudiante al confundir una función lineal con una sucesión, que conforme al marco teórico puede atribuirse a un error en el manejo de conceptos matemáticos.

Cuando nos referimos a funciones cuadráticas los errores cometidos por los estudiantes, son referidos a confundir una función cuadrática con una exponencial, relacionar la pendiente a una función cuadrática y no reconocer su carácter simétrico. En cuanto a los coeficientes de la función cuadrática, podemos indicar que los estudiantes confunden la funcionalidad de **b** y **c** con el desplazamiento de la cónica, con la posición del punto mínimo de la curva, con la expansión y contracción de la

cónica o la posición del vértice. Estos errores indican que los estudiantes no son capaces de reconocer en su totalidad las características y coeficientes de la función cuadrática, permitiendo detectar un error en el manejo de conceptos y contenidos matemáticos tal y como se plantea en el marco teórico según Radatz.

En cuanto a los conceptos matemáticos más generales podemos indicar errores que destacan por su propia naturaleza, haciendo alusión a los obstáculos epistemológicos presentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como la asignación de un negativo a un coeficiente imparcial como a y b, ignorando el hecho de que este coeficiente puede tener un valor negativo tal como se evidencia en la siguiente imagen:

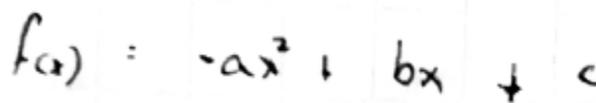

$$f(x) = -ax^2 + bx + c$$

Imagen 1. Error en asignación de negatividad a una incógnita.

Otro de los errores presentados por los estudiantes consta de no reconocer el lenguaje matemático como por ejemplo un “disminuido” en un enunciado, o lo que es un inverso multiplicativo asumiendo que el inverso multiplicativo de 3 es -3, como se puede evidenciar en la imagen 2. Tampoco se diferencia lo que es una variable y una incógnita.


$$x = (2x - (-3))$$

Imagen 2. Error en la interpretación de inverso multiplicativo.

Estos tipos de errores conceptuales provoca que el estudiante genere estructuras cognitivas que quedarán arraigadas en su formación, generando así que el estudiante no realice un aprendizaje óptimo del contenido, creando vacíos que posteriormente serán notorios para la persona y que generan más conflictos para su formación como docente de pedagogía en matemáticas.

Cuando hablamos de errores de tratamientos hacemos referencia a los errores presentes dentro de un registro, para los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa podemos señalar que este conflicto afecta de manera personal a cada estudiante y que se relaciona estrictamente al ejercicio al que estén desarrollando, dentro de la investigación podemos notar errores de tratamiento como evaluar incorrectamente el valor de x en una tabla de valores, o señalar la suma de

unidades a un coeficiente  $c$  para desplazar la función hacia la derecha, tal como se observa en la imagen 3. Estos errores, aunque no influyen de manera reiterativa en los sujetos encuestados, pueden ser cruciales bajo ciertos contextos.

tiene que ser positivo en este caso, el menor de los positivos eso sí, Y para trasladarlo 2 unidades a la derecha a mi función tendría que sumar al “ $c$ ”.

Imagen 3. Traslado de la función.

Por último, tenemos el error basado en la articulación de registros o conversión, durante esta subcategoría se evidencian errores en los registros de lenguaje cotidiano, algebraico, tabular y gráfico. Cuando el registro de partida corresponde al lenguaje cotidiano, podemos señalar que los estudiantes no logran realizar adecuadamente una conversión a registro gráfico por diversos motivos, siendo los menos recurrentes el error con la intersección con el eje Y, asignar de forma incorrecta un cuadrado a la función, asignar coeficientes erróneos a la función y asociar una ecuación en vez de una función, mientras que el error que se puede visualizar más frecuentemente consiste en considerar más puntos de los solicitados, extendiendo la gráfica de manera infinita hacia el positivo y/o el negativo cuando el enunciado habla de dinero y kilos de frutas, considerando que se consideran problemáticas contextualizadas que no requieren esta extensión.

Cabe mencionar que cuando hablamos de un problema situado bajo un contexto cotidiano se debe considerar la lógica del problema, puesto que en caso contrario estaríamos considerando situaciones inadmisibles para la razón, como por ejemplo que menos 3 kilos de fruta cuesten menos mil pesos, en este caso se puede indicar que los estudiantes no realizan una distinción entre la coherencia de un ejercicio establecido dentro de un contexto cotidiano y un problema matematizado tal y como se señala en la imagen 4 presentada a continuación.

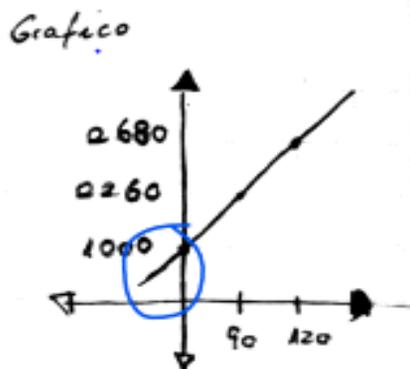


Imagen 4. Error de extensión infinita de la función.

En donde se puede observar que el estudiante ignora los parámetros del enunciado y solo realiza lo que está acostumbrado a “realizar”.

Para la conversión desde un registro algebraico podemos indicar en menor medida que existe un problema hacia el registro gráfico y hacia la conversión de un registro de lenguaje cotidiano. Para el registro gráfico podemos indicar de manera particular que no se aplica correctamente la intercepción con el eje Y, además de una representación de tres pre imágenes para una sola imagen, mientras que para la conversión hacia el registro de lenguaje cotidiano podemos notar que los estudiantes asocian una situación al gráfico, pero no modelan explícitamente la función, que hay un error en planteamiento de las variables o que no asignan adecuadamente la función solicitada.

Cuando el registro de partida comienza desde un registro tabular se observa que la disposición frente al ejercicio es de una actitud positiva, sin embargo, los resultados obtenidos nos muestran que la mayoría de los estudiantes no grafica correctamente la información proporcionada por la tabla ya que considera más puntos de los solicitados, tal y como se observa en la imagen 5 presentada a continuación, aun cuando en el enunciado indica que deberán graficar conforme a la información proporcionada.

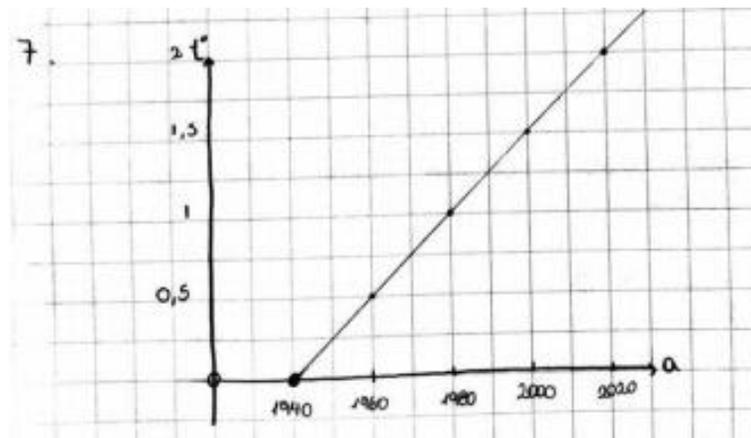


Imagen 5. Extensión de la gráfica a más puntos de los solicitados.

Este error evidenciado en los estudiantes se debe a la confianza y al mecanismo secuenciado que poseen los estudiantes, puesto que es realizado de manera espontánea e inconsciente, ya que la conversión de T-G, por palabras de los estudiantes es realizada de forma directa y no requiere ningún tipo de mediación.

Para la conversión desde un registro gráfico podemos notar que el error más frecuente denota en la conversión hacia un registro algebraico, puesto que consideran números aleatorios para los coeficientes de la función cuadrática, además en el caso de la conversión a lenguaje cotidiano, se evidencia que los estudiantes solo logran asociar un contexto, pero no necesariamente presentar correctamente la problemática ni la identificación de las variables presentes.

Estos tipos de errores presentados en la articulación de registros indican que los estudiantes no comprenden en su totalidad los objetos matemáticos trabajados durante esta investigación, cabe mencionar que Duval (2006) se refiere a estos registros como un medio de comunicación para el objeto matemático, por lo tanto, si un estudiante no logra realizar una conversión de manera adecuada, quiere decir que el objeto matemático no es aprendido de manera correcta.

Tras observar la segunda categoría correspondiente a las dificultades de los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, podemos indicar que se caracterizan por ser homogéneas entre los estudiantes, es decir, los estudiantes poseen dificultades similares entre ellos. Dentro de estas dificultades podemos encontrar los de tipo conceptual, de articulación de registros y de comprensión.

Para las dificultades de tipo conceptual, podemos indicar que los estudiantes presentan distintas dificultades para las funciones lineales como confundir una variable dependiente e independiente, no considerar la importancia de la constancia o solo reconocer la función por su forma gráfica, sin embargo, la más persistente dentro de ésta corresponde a la carente distinción de la función lineal y afín.

En cuanto a la función cuadrática podemos indicar que a ciertos estudiantes se les dificulta reconocer las características de este tipo de función, algunos estudiantes no son capaces de reconocer la funcionalidad de los parámetros  $b$  y  $c$ , mientras que otros solo logran asociar parcialmente su funcionalidad a través de un tanteo otorgando valores aleatorios a los coeficientes. En el caso del parámetro  $a$ , 6 de 8 sujetos encuestados demuestra asociar la relación entre este coeficiente y la concavidad de la función, sin embargo, esta relación es expresada de manera superficial, ya que no reconocen si las funciones son cóncavas o convexas, si no que se refieren a éstas con expresiones como “carita feliz” “carita triste” o “cerritos” tal y como se muestra a continuación en la imagen 6.

ósea de .... partida yo sabía que el... si el  $x$  cuadrado era negativo, la curvatura iba... así ... así al revés como un cerro, y en este caso le asigne el menos 1 así que yo sabía que me tenía que dar esa forma, si o sí.

Imagen 6. Dificultad en el reconocimiento de la concavidad de la función.

Los estudiantes tampoco logran identificar la contracción y expansión de la cónica, es decir, la dificultad más persistente dentro de las funciones cuadráticas corresponde al hecho de no reconocer la funcionalidad gráfica de los coeficientes “ $a$ ,” “ $b$ ” y “ $c$ ”, siendo el coeficiente “ $a$ ” solo reconocido por su concavidad, el coeficiente “ $b$ ” el menos reconocido por los estudiantes, y considerando el coeficiente “ $c$ ” como el que sube y baja la función. En menor medida, pero no menos importante, es la dificultad que se

observa en los sujetos encuestados en el caso de que el enunciado no dijese “cuadrado” indicando incluso que “no afectaría como en el tipo de función, solo como en la forma”.

En referencia a conceptos más generales de las matemáticas, podemos visualizar que no existe una dificultad predominante dentro de los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, este tipo de dificultad solo recae en la concepción que tienen los estudiantes en torno a lo que es un inverso multiplicativo de un número. Cabe señalar que durante esta investigación uno de los estudiantes no reconoce de manera inmediata, sino más bien lo presenta con dudas, siendo incluso preguntado a los entrevistadores, tal y como se evidencia en la imagen 7 presentada a continuación.

¡Ah claro! ¿El inverso multiplicativo de 3 vendría siendo  $\frac{1}{3}$  cierto? O nada que ver.

Imagen 7. Dificultad para reconocer el inverso multiplicativo.

Este tipo de dificultades conceptuales bajo ciertos contextos pueden inducir a un tipo de error y obstáculo, por lo cual no es concebible para la formación de un estudiante de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, ya que como fue mencionado con anterioridad un error puede ocasionar equivocaciones fundamentales, que bajo ciertos contextos pueden funcionar de manera correcta, pero en la mayoría de los casos será deficiente.

Para las dificultades de articulación de registros podemos notar patrones que se repiten continuamente. Para el registro de lenguaje cotidiano tenemos la dificultad de que todos los estudiantes recurren como primera opción hacia la conversión del registro algebraico, independientemente si se les solicita transitar de un registro de lenguaje cotidiano a uno gráfico. Cuando solicitamos realizar una conversión desde un registro de lenguaje cotidiano a uno gráfico notamos que los sujetos en investigación presentan dos formas de realizar la conversión, uno de aquéllas corresponde a emplear una expresión algebraica y su tratamiento, tal como se ve en la imagen 8, mientras que la otra corresponde a utilizar una expresión algebraica y un registro tabular como intermediario, tal y como se evidencia a continuación en la imagen 9.

6.-

$$f(x) = (x - 3)^2$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

$$a = 1 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b = -6$$

$$c = 9$$

$$V = \frac{-b}{2a} \quad V = (3, 0)$$

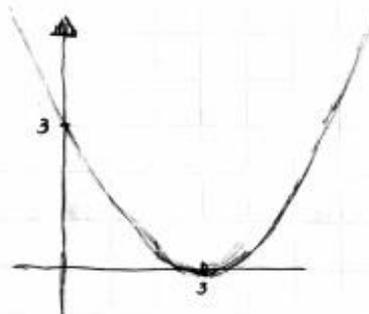
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{-(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$f(3) = 9 - 18 + 9 = 18 - 18 = 0$$

$$x = \frac{6}{2} \quad |x = 3|$$



Es importante recordar las formulas

Imagen 8. Dificultad que requiere uso de un tratamiento algebraico.

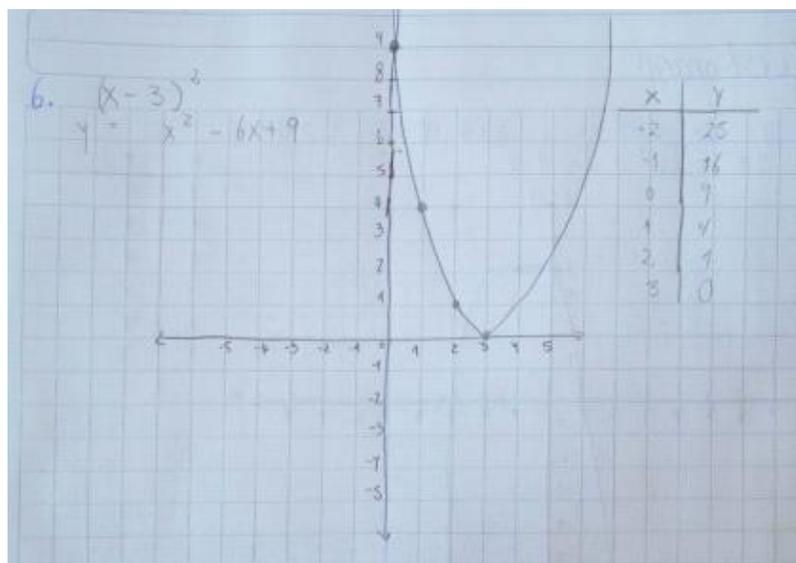


Imagen 9. Utilización de expresión algebraica y registro tabular.

Estas formas de realizar la conversión hacia un registro gráfico, comenzando desde un registro de lenguaje cotidiano, son consideradas dificultades, puesto que para el estudiante los registros empleados, son utilizados como medio de apoyo para alcanzar el gráfico, siendo incapaces para los sujetos seleccionados transitar de

manera directa entre los registros solicitados. Cabe mencionar que para los estudiantes este registro de partida se les dificulta más que los otros indicando incluso que son incapaces de organizar los datos plasmados en el enunciado o no reconocer los parámetros de la función solicitada.

Cuando el registro de partida comienza desde una expresión algebraica, a los estudiantes se les dificulta realizar una conversión hacia un registro de lenguaje cotidiano indicando que son literales para crear un problema de esta naturaleza o que se les dificulta trabajar cantidades negativas. Al realizar la conversión hacia un registro gráfico podemos indicar que los estudiantes necesitan de la expresión algebraica con sus respectivos coeficientes y de una tabla como medio de apoyo para la conversión, así como también un tratamiento algebraico para realizar la conversión.

Cuando nos referimos a la conversión desde un registro tabular podemos indicar que los estudiantes, se presentan con buena disposición frente a este registro, denotando que la conversión desde un registro tabular a gráfico se realiza de forma directa y sencilla, sin embargo, lo interesante es que 6 de los 8 sujetos escogidos para la investigación señalan utilizar el registro tabular como un registro intermediario necesario para realizar la conversión a un registro gráfico, cabe mencionar que 3 de 8 estudiantes denotan una secuencialidad entre la conversión de registros.

Las dificultades de conversión desde un registro gráfico, son referidas mayormente cuando se realiza la conversión hacia un registro de lenguaje cotidiano, puesto que los estudiantes no acentúan adecuadamente la función, solo asocian una situación como se ve en la imagen 10 presentada a continuación, siendo incapaces de realizar una conversión de manera directa, e incluso en 6 de los 8 encuestados presentando la necesidad de realizar un registro algebraico como apoyo para realizar la conversión a un registro de lenguaje cotidiano.

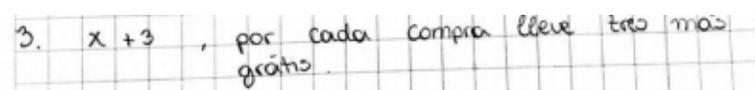


imagen 10. Asociación de una situación.

Cuando la conversión es hacia el registro algebraico los estudiantes realizan un tratamiento algebraico basados en puntos claves de la función como el vértice, las intersecciones, entre otros, cabe destacar que para esta conversión los estudiantes realizan de igual manera el registro tabular como método de apoyo.

Esta dificultad en la articulación de registro impide que el estudiante pueda actuar de manera eficiente y dependiente, es decir, cada vez que un estudiante sea expuesto a un problema en donde vea la necesidad de realizar una conversión, este tendrá que transitar de manera secuencial, incluso si el registro transitorio es más complicado para la necesidad del problema, esta dificultad como ya hemos mencionado puede

ocasionar concepciones erróneas dentro de un desarrollo, los cuales serán considerados como correctos por el estudiante y serán arraigados en su formación.

Para las dificultades de comprensión tenemos como caso particular el conflicto con la comprensión lectora. esta dificultad recae de manera particular en cada estudiante, teniendo como ejemplo la incompreensión de los ejercicios, no reconocer las palabras solicitadas y/o la incapacidad de redacción para crear un problema de registro de lenguaje cotidiano.

La tercera categoría correspondiente a la experiencia va descrita conforme a la perspectiva del estudiante, debido a que durante esta investigación se observó que el registro con el cual se familiarizan más los estudiantes corresponde al registro algebraico y gráfico, señalando además que el registro de lenguaje cotidiano es con el que menos se familiarizan.

Desde la percepción del estudiante los registros más utilizados o priorizados por los docentes durante su formación profesional corresponde al algebraico y gráfico denotando así una estrecha relación con los que más se familiarizan. Cabe destacar, que desde la perspectiva del estudiante el trabajo dentro de estos dos registros es realizado de algebraico al gráfico sin tomar en consideración el trabajo de reversibilidad y el tránsito entre los otros registros, lo cual es crucial para la aprehensión de un concepto matemático, además cabe señalar que desde la perspectiva de los estudiantes los docentes realizan de manera escasa el trabajo de un registro de lenguaje cotidiano.

Otra de las características mencionadas por los estudiantes corresponde a la escasa actividad analítica realizada por parte de los docentes, es decir, priorizan el cálculo y la ejercitación de ciertos problemas en vez de analizar las características propias de una función, como lo son los coeficientes de una función cuadrática y su comportamiento.

Estos comportamientos monótonos frente a las actividades matemáticas se relacionan con la dificultad de los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática, puesto que como menciona Duval, la conceptualización de un objeto matemático requiere de diversos registros, por lo que centrar una clase a solo dos registros es perjudicial para la formación de los estudiantes, puesto que será incapaz de realizar un análisis completo del objeto matemático.

### 4.3 Propuesta de una estrategia

Para esta última parte de nuestro análisis, se busca dar término al objetivo general de este trabajo: “Proponer una estrategia de fortalecimiento de acuerdo con las dificultades y errores en el aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas en estudiantes de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa de una universidad privada” Por lo cual se diseñó una estrategia para la comprensión de funciones lineales y cuadráticas basados en los resultados del análisis realizado.

Tomando en cuenta la definición de estrategia que utilizaremos en esta investigación, se definirá a las estrategias para el aprendizaje, al conjunto de acciones, tareas y actividades que emplea el docente de forma sistemática para comunicar el conocimiento, con la finalidad de promover la adquisición y comprensión de este mismo. Es dado esto que las actividades que propondremos a continuación permiten al estudiante desarrollar habilidades matemáticas, como la resolución de problemas y modelización, destacando la importancia de la modelización matemática, la cual está definida para esta investigación como el uso de los registros matemáticos para describir algún fenómeno real, con el fin de resolver los problemas matemáticos existentes.

Para diseñar esta estrategia se tomará en consideración los errores y dificultades que se encuentren presentes en al menos 3 sujetos en investigación, considerando como los más persistentes dentro de este estudio:

- Error: Confundir el parámetro  $b$  con el desplazamiento de la cónica
- Error: Considerar más puntos de los solicitados para realizar una gráfica
- Dificultad: No señala diferencias ni la existencia de la función afín
- Dificultad: Coeficiente  $a$ , solo reconoce concavidad, pero no identifica la contracción y expansión de la cónica
- Dificultad: Significado de cóncavo y convexo
- Dificultad: No reconoce la funcionalidad de los coeficientes " $b$ " y " $c$ "
- Dificultad: Registro algebraico como primera opción de conversión en la conversión de L - O
- Dificultad: Necesita de un registro algebraico para realizar la conversión L-G
- Dificultad: Necesita de una expresión algebraica como tratamiento para realizar la conversión L-G
- Dificultad: Señala dificultad para organizar datos en registro de lenguaje cotidiano
- Dificultad: La conversión de registro A-L
- Dificultad: Necesita dar valores a los coeficientes para la conversión A-G
- Dificultad: Necesita la realización de un tratamiento algebraico para realizar la conversión A-G
- Dificultad: Registro tabular como intermediario para realizar el gráfico
- Dificultad: Observa la conversión de registros como algo secuencial

- Dificultad: La conversión de G-A
- Dificultad: Necesita un registro algebraico como apoyo para realizar la conversión G- L
- Dificultad: Realiza un tratamiento algebraico para hallar la conversión G-A

De esta manera la estrategia propuesta en esta investigación consta de un conjunto de acciones sugeridas basadas en la conversión de registros de representación semiótica, a través de la modelización y/o el uso de recursos TIC's como GeoGebra para el fortalecimiento de los errores y dificultades.

Dificultades	Acciones sugeridas para afrontar los errores y dificultades
Error: Considerar más puntos de los solicitados para realizar una gráfica	Para poder afrontar este error, se sugiere dar énfasis en el proceso cognitivo de conversión desde los registros algebraico, tabular o lenguaje cotidiano, hacia el registro gráfico, permitiendo al estudiante poder articular según la coherencia del ejercicio.
Dificultad: No señala diferencias ni la existencia de la función afín	Para poder afrontar esta dificultad, se sugiere realizar el proceso cognitivo de tratamiento dentro del registro gráfico y algebraico, analizando la diferencia entre una función lineal y una función afín apoyándose en recursos tecnológicos como PowerPoint o graficadores.
<p>Error: Confundir el parámetro b con el desplazamiento de la cónica</p> <p>Dificultad: Coeficiente a, solo reconoce concavidad, pero no identifica la contracción y expansión de la cónica</p> <p>Dificultad: No reconoce la funcionalidad de los coeficientes "b" y "c"</p>	Para poder afrontar estos errores y dificultades, se sugiere realizar el proceso cognitivo de tratamiento dentro del registro gráfico apoyándose en recursos tecnológicos como GeoGebra, que permite analizar visualmente el comportamiento que cumple cada coeficiente en una gráfica.
Dificultad: Significado de cóncavo y convexo	Para interiorizar el significado de cóncavo o convexo se sugiere relacionar expresiones coloquiales con su registro gráfico o algebraicos.

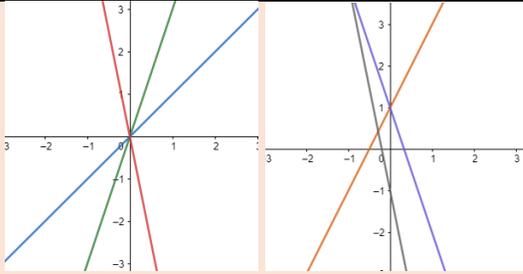
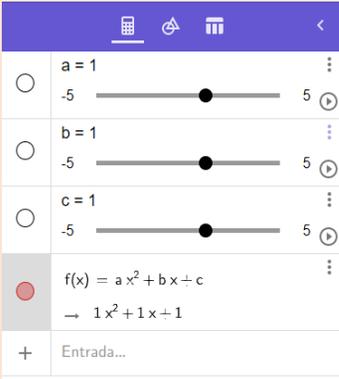
<p>Dificultad: Registro algebraico como primera opción de conversión para la articulación de L - O</p> <p>Dificultad: Necesita de un registro algebraico para realizar la conversión L-G</p> <p>Dificultad: Necesita de una expresión algebraica como tratamiento para realizar la conversión L-G</p>	<p>Potenciar el reconocimiento del lenguaje matemático mediante asimilaciones verbales y trabajar el proceso cognitivo de conversión de manera directa sin un registro intermediario. Utilizando recursos digitales cuando se estime conveniente.</p>
<p>Dificultad: Señala dificultad para organizar datos en registro de lenguaje cotidiano</p>	<p>Fortalecer el tratamiento de los datos dentro de un registro de lenguaje cotidiano con la intención de conocer su funcionalidad dentro del registro.</p>
<p>Dificultad: La conversión de registro A-L.</p>	<p>Fortalecer la relación entre las expresiones algebraicas y el lenguaje matemático, con el fin de realizar un trabajo cognitivo de conversión de manera directa. Utilizando recursos digitales cuando se estime conveniente.</p>
<p>Dificultad: Necesita dar valores a los coeficientes para la conversión A-G.</p> <p>Dificultad: Necesita la realización de un tratamiento algebraico para realizar la conversión A-G</p>	<p>Potenciar el reconocimiento del registro algebraico mediante el manejo de los coeficientes, apoyándose en recursos tecnológicos como GeoGebra, que permite analizar visualmente el comportamiento que cumple cada coeficiente en una gráfica.</p>
<p>Dificultad: Registro tabular como intermediario para realizar el gráfico.</p>	<p>Potenciar el reconocimiento del registro algebraico mediante el manejo de los coeficientes y trabajar el proceso cognitivo de conversión de manera directa sin un registro tabular como intermediario.</p>
<p>Dificultad: Observa la conversión de registros como algo secuencial.</p>	<p>Fortalecer el proceso cognitivo de conversión, tomando diversos registros de partida, considerando la acción directa entre la</p>

	articulación. Utilizando recursos digitales cuando se estime conveniente.
Dificultad: Necesita un registro algebraico como apoyo para realizar la conversión G- L.	Potenciar las características visuales del gráfico, como intercepto con los ejes, vértice o pendiente según sea el caso, con el fin de tener noción de la función que se requiere trabajar.
Dificultad: Realiza un tratamiento algebraico para hallar la conversión G- A.	Proporcionar diversos métodos y formas de resolución como la potenciación de las características visuales del gráfico que permitan realizar la conversión directa y no solo recaer en el uso de fórmulas y su tratamiento.

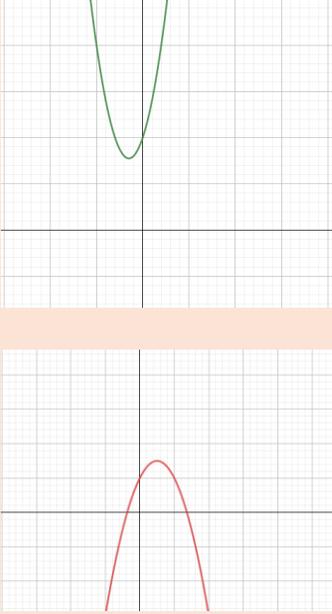
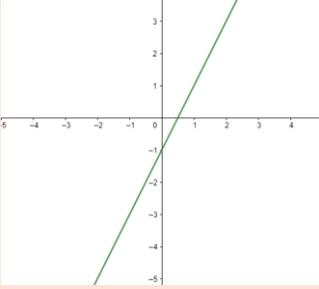
Tabla 3. Acciones sugeridas para afrontar los errores y dificultades

De esta manera se va a considerar las diversas sugerencias realizadas anteriormente en la tabla 3, para diseñar las actividades propuestas para el fortalecimiento del aprendizaje de las funciones lineales y cuadráticas.

N°	Indicador de logro	Desarrollo actividad	Error y/o dificultad a fortalecer
1	Comprenden las características de la función lineal	Se presentan 3 gráficas de función lineal y 3 gráficas de función afín en GeoGebra, señalando a los estudiantes que deberán realizar un trabajo de conversión hacia un registro algebraico. Luego los estudiantes deberán analizar y señalar las diferencias entre ambas funciones, considerando el registro algebraico.  Una vez finalizado el análisis, los estudiantes crearán una expresión algebraica correspondiente a una función lineal y una afín, para posteriormente elaborar la gráfica correspondiente a cada expresión.	No señala diferencias ni la existencia de la función afín con respecto a la función lineal

																											
2	<p>Comprenden las características de la función lineal</p>	<p>Dado dos tablas de valores, correspondiente a función lineal y función afín, los estudiantes deberán hacer una conversión desde un registro tabular a un registro algebraico analizando y señalando las diferencias entre ambas funciones, considerando el registro algebraico utilizado.</p> <p>1. Asocie y describa una situación o fenómeno real que se pueda modelar por siguientes tablas, considerando que las variables son contantes y de crecimiento o decrecimiento monótono.</p> <table border="1" data-bbox="639 966 1118 1096"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1000</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>1030</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td>1060</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>1090</td> </tr> <tr> <td>40</td> <td>1120</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" data-bbox="639 1133 1118 1263"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>27</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>54</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>81</td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	0	1000	10	1030	20	1060	30	1090	40	1120	x	g(x)	0	0	1	9	3	27	6	54	9	81	<p>No señala diferencias ni la existencia de la función afín con respecto a la función lineal</p>
x	f(x)																										
0	1000																										
10	1030																										
20	1060																										
30	1090																										
40	1120																										
x	g(x)																										
0	0																										
1	9																										
3	27																										
6	54																										
9	81																										
3	<p>Comprenden y reconocen las características de los coeficientes de una función cuadrática</p>	<p>En GeoGebra, los estudiantes deberán escribir en la entrada de texto la expresión: <math>ax^2+bx+c</math> apareciendo los deslizadores de forma automática, permitiendo visualizar la funcionalidad de cada parámetro de una función cuadrática para luego llevarlo a un registro verbal.</p> 	<p>Confundir el parámetro b con el desplazamiento de la cónica.</p> <p>Coficiente a, solo reconoce concavidad, pero no identifica la contracción y expansión de la cónica.</p> <p>Significado de cóncavo y convexo.</p>																								

			No reconoce la funcionalidad de los coeficientes "b" y "c"
4	Comprenden y reconocen las características de los coeficientes de una función cuadrática	<p>Se ubicarán diferentes expresiones en una guía, la cual contendrá expresiones coloquiales como: "carita feliz" "cerro", las cuales deberán unir con una línea según las gráficas presentadas como cóncava y convexa.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p style="text-align: center; color: blue; font-weight: bold;">Unir con una línea la expresión con el gráfico</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• "Carita feliz"</li> <li>• "Carita triste"</li> <li>• "Cerro"</li> <li>• "Forma de U"</li> <li>• "Forma de N"</li> <li>• "Para arriba"</li> <li>• "Para abajo"</li> <li>• "Forma de arcoíris"</li> </ul> <div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center; gap: 20px;">  <div style="text-align: center;"> <p style="color: blue; font-weight: bold;">Convexa</p> <p style="color: blue; font-weight: bold;">Concava</p> </div> </div> </div>	<p>Confundir el parámetro b con el desplazamiento de la cónica.</p> <p>Coficiente a, solo reconoce concavidad, pero no identifica la contracción y expansión de la cónica.</p> <p>Significado de cóncavo y convexo.</p> <p>No reconoce la funcionalidad de los coeficientes "b" y "c"</p>
5	Comprenden y reconocen las características de los coeficientes de una	Se presentarán diferentes gráficas correspondientes a funciones cuadráticas sin otorgar valor alguno, solicitando a los estudiantes describir el comportamiento de los coeficientes (a, b y c), y señalando que no	Confundir el parámetro b con el desplazamiento de la cónica.

	<p>función cuadrática</p>	<p>deben indicar un valor específico a los parámetros.</p> 	<p>Coeficiente a, solo reconoce concavidad, pero no identifica la contracción y expansión de la cónica.</p> <p>Significado de cóncavo y convexo.</p> <p>No reconoce la funcionalidad de los coeficientes "b" y "c"</p>
6	<p>Modelan situaciones de la vida cotidiana con funciones afines.</p>	<p>Mediante una gráfica proyectada en GeoGebra, los estudiantes deberán analizar una función afín, interpretando un punto de cada uno de los cuadrantes según corresponda, para luego, revisar dos enunciados de lenguaje cotidiano, argumentando que situación corresponde a la gráfica presentada, y porque la otra situación no es posible de representar de esa manera.</p> 	<p>Error:</p> <p>Considerar más puntos de los solicitados para realizar una gráfica</p>
7	<p>Modelan situaciones de la vida cotidiana con funciones</p>	<p>Los estudiantes deberán comprender un ejercicio de función lineal y función afín que estarán expresados en un registro de lenguaje cotidiano, para luego llevarlo a un registro que no sea algebraico.</p>	<p>Señala dificultad para manipular datos en registro de</p>

	lineales y a fines.	Un feriante de la vega central se percató que el precio de los plátanos que vende ha ido en aumento de manera constante teniendo los siguientes datos: al inicio del año el precio de los plátanos era de \$1000 por kilogramo y al pasar 90 días el precio de los plátanos era de \$2260 por kilogramo y al paso de 120 días el precio de los plátanos es de \$2680 por kilogramo. Modele el costo de los plátanos en función del tiempo en al menos dos tipos de representaciones (algebraica, gráfica, tabular y/o lenguaje natural).	lenguaje cotidiano
--	------------------------	--	-----------------------

Tabla 4. Actividades propuestas.

Con la estrategia metodológica propuesta se tiene como finalidad implementar en las instituciones universitarias el reforzamiento de la conversión de los sistemas de registro de representación semiótica y sus respectivos tratamientos, buscando una aprehensión conceptual efectiva del objeto matemático de funciones lineales y cuadráticas en los estudiantes de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa. De esta manera, las actividades consideran la consolidación de los registros Algebraico, Tabular, de Lenguaje cotidiano y Gráfico, teniendo en cuenta la reversibilidad entre los mismos registros y la mejora en la capacidad de análisis de la información proporcionada en los ejercicios propuestos.

Es así como la estrategia propuesta en base a los sistemas de registro de representación semiótica, busca romper el esquema secuencial tradicional de las representaciones semióticas, trabajando no solamente en los registros algebraicos y gráficos, sino que además, utilizar de una manera pertinente los demás registros menos frecuentes; esto último, es con la intencionalidad de que los estudiantes tengan un mejor dominio sobre el registro de lenguaje cotidiano y a través de éste, puedan hacer la conversión hacia otros. También se pretende superar el obstáculo entorno a la falta de comprensión de información en el registro de lenguaje cotidiano, permitiendo a los estudiantes reconocer los datos presentados para luego poder manipularlos de la manera más apropiada.

El uso e implementación de las Tics, tiene como propósito facilitar la aprehensión de los contenidos referente a función lineal y función cuadrática en los estudiantes, tomando como ejemplo GeoGebra. Esta herramienta para realizar gráficas, permite al alumno y al docente, analizar de forma gráfica, algebraica y tabular de las funciones expresadas. Esta aplicación de las Tics será útil para afrontar los errores y dificultades que están presentes entorno a la conversión entre los registros semióticos, ya que la ejecución en GeoGebra también puede contemplar el lenguaje cotidiano, haciendo que la ejercitación pueda partir desde cualquier registro

Por otro lado, la implementación de la modelización como potenciador de la articulación entre registros, permite al estudiante crear una estrecha relación entre las conceptualizaciones matemáticas y la realidad, permitiendo al alumno desarrollar competencias para desenvolverse en un entorno tecnológico (Blomhoj 2004).

## CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

Una vez finalizada la investigación cualitativa y con los datos obtenidos, se evidencian diversos errores y dificultades manifestados por los sujetos en estudio, los cuales se encuentran presentes en las funciones lineales y cuadráticas en los estudiantes universitarios de la Carrera de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa de una universidad privada de la Región Metropolitana a través de los cuales se puede concluir que:

Con la utilización de dos instrumentos de recogida de información, cuestionario y entrevista, se puede señalar que según el análisis por categorías a priori formuladas según el marco teórico planteado, se estableció como objetivo “Proponer una estrategia de fortalecimiento de acuerdo con las dificultades y errores de aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas en lo/as estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa de una universidad privada”, permitiendo dar conocer a la comunidad educativa información que permita mejorar las estrategias educativas y tomar los resguardos pertinentes en cuanto a la enseñanza de las funciones lineales y cuadráticas en los futuros docentes.

Los análisis realizados a ambos instrumentos de recolección de datos correspondiente a 8 sujetos en estudio escogidos de forma intencionada han permitido, en primer lugar, detectar los errores y dificultades presentados por los estudiantes con la intención de identificar la naturaleza de su origen, las cuales se ven reflejadas en las calificaciones presentadas por los estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa. En segundo lugar, específicamente con la entrevista como instrumento, se ha permitido interpretar en mayor profundidad los errores y dificultades detectadas en la articulación de registros algebraico, gráfico, tabular y de lenguaje cotidiano de los sujetos en estudio a través del cuestionario, señalando con mayor profundidad la razón de sus errores o dificultades, es decir, en el caso del error conocer si su origen es a través del obstáculo (epistemológico, ontogenético y/o didáctico), ausencia de sentido o por las actitudes afectivas y emocionales; o en el caso de las dificultades, si provienen de la complejidad del mismo objeto matemático, de los procesos de pensamiento matemático, del proceso de enseñanza, del desarrollo cognitivo o las actitudes emocionales hacia las matemáticas. En tercer lugar, a través de la misma entrevista, conocer las perspectivas de los sujetos en estudio sobre las estrategias utilizadas por los docentes de la carrera de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa en la enseñanza de funciones lineales y cuadráticas, y los registros con los que ellos se encuentran más familiarizados, permitiendo tener sus concepciones sobre sus propias experiencias y poder diseñar una estrategia para mejorar la comprensión de las funciones lineales y cuadráticas en los estudiantes de Pedagogía en Matemática e Informática Educativa.

Con relación a los errores presentados por los estudiantes, es importante destacar que en gran medida tienen un origen en la comprensión de los conceptos matemáticos y las características de las funciones, confundiendo las funcionalidades de los parámetros, especialmente de la función cuadrática. También existen errores en la misma articulación de los registros, especialmente cuando tenían como registro de partida el lenguaje cotidiano y algebraico, modelando erróneamente las funciones, considerando equivocadamente las intersecciones con el eje  $y$ , u otorgando 3 pre imágenes a una imagen. De forma menos frecuente se pueden evidenciar errores desde un registro tabular.

En el caso de las dificultades observadas, se evidencia que conceptualmente existe un problema como confundir variables (dependientes e independientes), no dan señales de conocer la función afín, y nuevamente se presenta la dificultad para reconocer las características, especialmente de la función cuadrática, logrando reconocer algunos comportamientos a través del ensayo y error con la experimentación de valores aleatorios para los coeficientes de la función. En el caso de la articulación de registros, se evidencian más frecuentemente dificultades en los registros de lenguaje cotidiano, algebraico y gráfico, evidenciando de forma recurrente la necesidad de realizar un registro de apoyo o como intermediario para poder concretar la conversión entre registros, así como también una visión secuencial de los registros, es decir, consideran en primera instancia un registro de lenguaje cotidiano, un registro algebraico, luego el paso a un registro tabular, para finalizar con el registro gráfico, sin considerar que el tránsito entre estos registros no necesita de un orden específico. En menor medida, pero no por eso menos alarmante, es el caso de las dificultades de comprensión lectora observados en algunos de los sujetos en estudio, ya sea porque no comprenden lo que debían realizar, o la problemática para distinguir la información y organizarla.

En cuanto a las experiencias obtenidas por los estudiantes es llamativo como la mayoría de los estudiantes señaló sentirse más familiarizado con los registros gráficos y algebraicos, lo que cobra más sentido al relacionar las estrategias utilizadas por los docentes, indicando que se da prioridad a los registros gráficos y algebraicos, y que no se considera la reversibilidad de las conversiones de los registros.

Respecto a los mismos registros se evidenció una mayor presencia de dificultades que errores en los sujetos en estudio, al revisar el registro de lenguaje cotidiano, se ve que al menos 5 de 8 estudiantes presenta errores impidiendo la modelación o la gráfica correcta de la función solicitada, en el registro algebraico los errores suelen ser cometidos por 3 de 8 estudiantes, impidiendo modelar correctamente e indicar los puntos característicos de la función correctamente. Para el registro tabular al menos 6 de 8 sujetos en estudio presentó errores específicamente en la gráfica de la función lineal, considerando datos inexistentes y otorgando valores irracionales según la problemática planteada al extender las gráficas hacia valores negativos y/o positivos.

Finalmente, en el registro gráfico, solo 2 de 8 estudiantes presenta error por otorgar equivocadamente valores a los coeficientes.

De acuerdo con las dificultades observadas, en el registro de lenguaje cotidiano 7 de 8 sujetos en estudio presentó dificultades, liderando el hecho de necesitar un registro algebraico de apoyo para identificar la función y la dificultad de articular una conversión a registro gráfico. En el registro algebraico, los 8 estudiantes presentan dificultades, necesitando de un registro tabular para lograr la gráfica de la función solicitada. Como registro gráfico nuevamente la totalidad de los estudiantes presenta dificultades en la comprensión de la información, necesitando tratamientos y registros de apoyo para su conversión.

De esta manera se puede concluir que los registros que presentan mayor error o dificultad corresponden al registro de lenguaje cotidiano y el registro gráfico, necesitando mayor tratamiento y registros de apoyo para la comprensión de la información proporcionada en los enunciados presentados, destacando que los sujetos en estudio no saben interpretar la funcionalidad de los parámetros de las funciones y que en los problemas planteados de forma verbal, no saben interpretar la información y se les dificulta determinar las expresiones algebraicas involucradas.

De acuerdo con los datos obtenidos, las observaciones realizadas y las conclusiones planteadas, se diseña una estrategia de fortalecimiento para el aprendizaje de las funciones lineales y cuadráticas, en base a la modelización matemática y el uso de Tics con un énfasis especial en las conversiones de los registros semióticos, permitiendo a los estudiantes mejorar las problemáticas señaladas de conversión de registros, la comprensión del objeto matemático y el trabajo con contextos cotidianos y el manejo del lenguaje verbal en las situaciones planteadas destacando que la articulación de los registros no es de forma espontánea, ya que se evidencia la necesidad de transitar por registros de apoyo como el caso entre un registro algebraico a uno gráfico, donde el intermediario es el registro tabular, así como también la realización de tratamientos que permiten adecuar la información a conveniencia de modo que sea más comprensible, permitiendo inferir una ausencia de aprehensión conceptual de las funciones lineales y cuadráticas.

Conforme a la estrategia propuesta basada en acciones y actividades sugeridas, se recomienda que los futuros investigadores que quieran mejorar esta investigación, ejecuten las sugerencias que buscan fortalecer el proceso cognitivo de conversión de registros de representación semiótica, así como también ampliar el objeto de estudio, es decir, ampliándola al resto de funciones existentes, detallando errores y dificultades no solo de estudiantes universitarios, sino también en escolares, permitiendo idealmente diseñar nuevas estrategias que fortalezcan los errores y dificultades presentes.

## BIBLIOGRAFÍA

Alfaro, M. Y. C. (2018). Comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en estudiantes de un colegio privado de Lima. *Revista de investigación en psicología*, 21(2), 215-224.

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. L., & Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de investigación y divulgación en matemática educativa*, 9(1), 6-19.

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. L., & Quesada, S. (2019). Limitaciones de aprendizaje que evidencian estudiantes de educación secundaria en el estudio de la función cuadrática.

Apostol, T. M. (2001). *Calculus (Vol. 1. Portugues) (Vol. 1)*. Reverté. Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Heyd, D. E., & Abellanas, L. (2006). *Cálculo*. McGraw-Hill.

Barcia, J., & Carvajal, B. (2015). EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR. *Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa (REFCaE)*. Recuperado en octubre de 2020

Blomhøj, M. (2004) Modelización Matemática – Una teoría para la práctica. Recuperado de: [www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-2/Modelizacion1.pdf](http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-2/Modelizacion1.pdf)

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (D. fregona, Trad.) Buenos Aires. Recuperado en octubre de 2020

Búa Ares, J. B., Fernández Blanco, T., & Salinas Portugal, M. (2015). Una modelización matemática como medio de detección de obstáculos y dificultades de los alumnos sobre el concepto de función: alargamiento de un muelle sometido a un peso. *Educación matemática*, 27(1), 91-122.

Casanova, M. A. (1999). Manual de evaluación educativa. *Colección: Aula Abierta*

Cebrián, A., Trillo, A., & González, A. (2019). PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español. Ministerio de Educación.

Cid, E. (2015). *Obstáculos Epistemológicos en la Enseñanza de los números negativos*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, Zaragoza. Recuperado el septiembre de 2020

Colom, A.; Sureda, Jaume; Salinas, Jesús (1988). Tecnología y medios educativos. CincelKapelusz. Barcelona; España.

Cuevas, C. A., & Delgado, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? *El Cálculo y su Enseñanza*, 7, 108-119.

Díaz, M. E., Haye, E. E., Montenegro, F., & Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 41, 20-38.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 173-201

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.

Duval, R., & Moretti, T. M. T. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registros de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 266-297.

Freire, P. (1997). *Pedagogía de la autonomía. Saberes necesarios para la practica educativa* (Primera ed.).

Gómez, E, Hernández, H & Chaucañés, A. (2015). Dificultades en el Aprendizaje y el Trabajo Inicial con Funciones en Estudiantes de Educación Media. *Scientia et technica*, 20(3), 278-285

Guzmán Contreras, J. (2020). La didáctica de las matemáticas: Un vistazo con futuros docentes. *Revista Electrónica De Conocimientos, Saberes Y Prácticas*, 3(1), 11-18. <https://doi.org/10.5377/recsp.v3i1.9788>

Gvirtz, S., & Palamidessi, M. (1998). *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza* (Vol. 1). Buenos Aires: Aique.

Herrera Ruiz, M. L. (2010). OBSTÁCULOS, DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES. Obtenido de OBSTÁCULOS, DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES:

<http://funes.uniandes.edu.co/4547/1/HerreraObst%C3%A1culosALME2010.pdf>

Hohenwarter, M. (2001). Geogebra Online, Geo-Gebra. Recuperada en Mayo 15, 2016, del sitio Web temoa: Portal de Recursos Educativos Abiertos (REA) en <http://www.temoa.info/es/node,24754>.

Huircan, M., & Carmona, K. (2013). *Guía de Aprendizaje N°4 Funciones lineales y afín*. Santiago. Obtenido de <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/1986>

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza. Recuperado el Octubre de 2020, de [https://www.academia.edu/35760342/Morris\\_kline\\_el\\_pensamiento\\_matematico\\_de\\_la\\_antigüedad\\_a\\_nuestros\\_dias](https://www.academia.edu/35760342/Morris_kline_el_pensamiento_matematico_de_la_antigüedad_a_nuestros_dias)

Krause, M. (1995). La investigación cualitativa: un campo de posibilidades y desafíos. *Revista temas de educación*, 7(7), 19-40.

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (2006). *Cálculo con geometría analítica* (Octava ed., Vol. 1). Recuperado el Octubre de 2020

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (Séptima ed.).

MINTE MÜNZENMAYER; SEPÚLVEDA OBREQUE; DÍAZ LEVICOY ;PAYAHUALA VERA, A. A. D. H. (2020). Aprender matemática: dificultades desde la perspectiva de los estudiantes de Educación Básica y Media. *Espacio*, 41(09), 30-37. <http://sistemasblandosxd.revistaespacios.com/a20v41n09/a20v41n09p30.pdf>

Miranda, F. (2017). Análisis espacial del comportamiento espacial de los resultados de la PSU (proceso de admisión 2016). *Revista CIS*, 14(22), 63-86.

Molina-García, P. F., & de los Ángeles García-Farfán, I. (2019). El proceso de enseñanza-aprendizaje en la Educación Superior. *Dominio de las Ciencias*, 5(1), 394-413.

Padrón, O. J. M. (2008). Actitudes hacia la matemática. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 9(1), 237-256.

Peréz Porto, J., & Merino, M. (2008). Definición de dificultad. Obtenido de Definición de dificultad: <https://definicion.de/dificultad/>

Piaget, J., & Inhelder, B. (1997). *Psicología del niño* (Vol. 369). Ediciones Morata.

Pisa, (2018), Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes.

Plaza, L., González, J., & Vasyunkina, O. (2020). Obstáculos en la Enseñanza - Aprendizaje de la Matemática. Revisión sistemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(1), 295 - 304. Recuperado el Septiembre de 2020

Portales, S., Estay, G., & Cabezas, M. (2017). Nivelación Académica En Matemática: ¿Un Factor Que Aporta A La Disminución Del Abandono?

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of mathematics*, V.1, N°1, pp.16-20.

Raymond, D. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle

Sáez, J. (2018). *Estilos de Aprendizaje y Métodos de Enseñanza*. Recuperado el Septiembre de 2020, de <https://pdfdfde816cd91c279943dcb85a957df318.odilo.us/#/fdc8795aad9f48e9a326dec7e608c053/37c2c7c3726ac43fd4d185545258855058a33073d2c9ea5f2012313e8f5ac710>

Socas R., M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En R. L. otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secuendaria* (págs. 125-154). Barcelona: Horsori.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una Variable, transcendentales tempranas*. Thomson.

Stewart, J. (2013). *Cálculo de una variable* (Séptima ed.).

Teoría, F. B. J. (2000). *Metodología de la investigación*. Lima-Perú. Edt. UNMSM.

TIMSS, (2015), *Resultados TIMSS Chile: Estudio internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias 2015*.

TIMSS, (2019), *TIMSS 2019 Marcos de la evaluación*.

Tobón, Tobón M (2010). *Formación integral y competencia, Pensamiento Complejo, diseño curricular y didáctica*. ECOE. Bogotá Colombia.

UNESCO, I. M. (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento*. Publicaciones Unesco. París. Recuperado de: <http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/1449>.

Villalobos, J. L., Guzmán, M. A., Rentería, V. H., & Lares, A. V. (2018). Estrategia didáctica para promover la Modelación Matemática en un contexto educativo en base a competencias. *AMIUTEM*, 6(1), 63-73.

Zepeda, F. J. R., & González, A. J. (2016). Estrategia didáctica para la formación por competencias básica Teaching strategy for the competency training. *Revista EDUCATECONCIENCIA*, 9(10).

## ANEXOS

### Anexo 1

Promedio							
C	2015	2016	2017	2018	Promedio general 2017-2018	% Función estricto	% Función aplicación
AI I	4,889	3,780	3,964	3,925	4,139	30,7%	30,7%
AI II	3,591	4,147	3,625	4,311	3,918	66,6%	66,6%
CI I	4,138	4,442	3,638	3,900	4,030	38,4%	92,3%
CI II	3,735	3,900	4,400	3,753	3,947	0,0%	85,7%
CI III	3,119	4,588	3,140	3,331	3,544	66,6%	66,6%

Reprobación de estudiantes año 2015-2018								
C	2015	2016	2017	2018	% de Reprobación 2015	% de Reprobación 2016	% de Reprobación 2017	% de Reprobación 2018
AI I	1	16	16	9	11,11%	53,33%	44,44%	37,50%
AI II	3	4	10	5	27,27%	26,67%	41,67%	13,51%
CI I	6	2	8	6	28,57%	16,67%	61,54%	24,00%
CI II	5	3	1	6	29,41%	23,08%	12,50%	40,00%
CI III	23	6	6	4	62,16%	18,18%	40,00%	30,77%

## Anexo 2

### Cuestionario

Este cuestionario tiene por finalidad aportar datos que sustenten una investigación realizada por estudiantes de Pedagogía en Matemática e Informática, permitiéndoles aprobar el seminario de grado.

**Nombre de investigación:** Registro de representación semiótica como estrategia de fortalecimiento de aprehensión de funciones lineales y cuadráticas en estudiantes de pedagogía en matemática e informática educativa

**Objetivo del cuestionario:** Indagar acerca de las dificultades que presentan los estudiantes de pedagogía en matemática e informática educativa respecto a la comprensión de algunas funciones básicas y sus registros de representación semiótica.

**Importancia de la investigación:** Entre los años 2015 y 2018 la carrera de pedagogía en matemática e informática educativa ha presentado un bajo rendimiento en cátedras relacionadas estrictamente a funciones, de tal manera que esta investigación tiene como finalidad indagar en el modelo de representaciones semióticas para proponer una metodología que mejore los resultados en el aprendizaje de estos conceptos matemáticos.

Para llevar a cabo dicha investigación es necesario identificar el conocimiento de funciones de los estudiantes de pedagogía en matemática e informática educativa, por lo cual se solicita su colaboración para completar el siguiente cuestionario. Se solicita además responder con sinceridad para así garantizar un buen análisis de los datos. Cabe destacar que este cuestionario es de carácter anónimo, por lo cual, no se publicará la información personal de los encuestados.

#### **Instrucciones sobre cuestionario**

- Se solicita hacer el desarrollo mediante una hoja de papel de manera ordenada y legible.
- Entregar el desarrollo del cuestionario a través de un PDF.

**Pregunta número 1:**

Esboce una gráfica de la función  $y = ax^2 + bx + c$ , para algún valor de  $a < 0$ ;  $b \neq 0$  y  $c > 0$ .

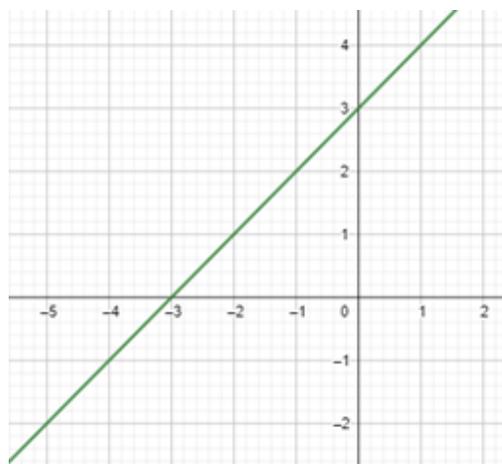
**Pregunta número 2:**

¿Existe una función que a cada número real se le asigne su doble disminuido en el inverso multiplicativo de tres? En el caso de que exista expréselo y en el caso contrario explique el por qué no puede existir una función con estas características.

¿Podría representar la misma función en dos registros distintos? ¿cuáles y por qué?

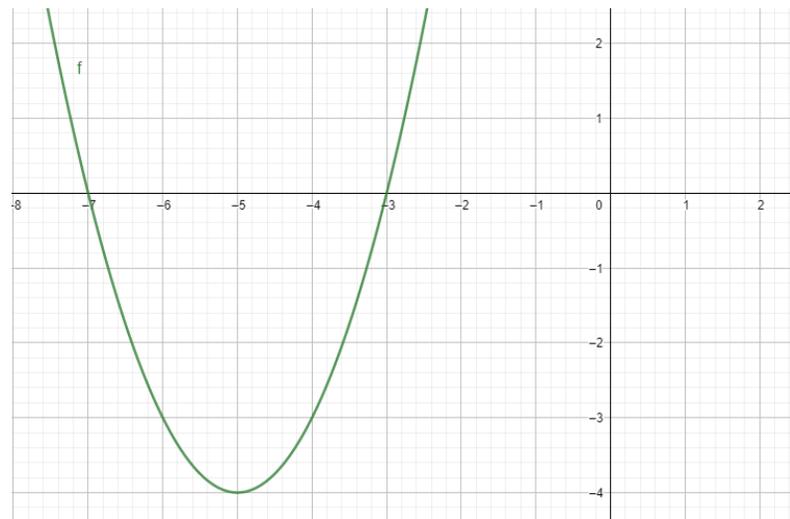
**Pregunta número 3:**

Asocie y describa una situación o fenómeno real que se pueda modelar por la función representada en el gráfico.



**Pregunta número 4:**

De acuerdo con el siguiente gráfico: Determine una expresión algebraica que se aproxime a la función  $f$ .



**Pregunta número 5:**

Asocie y describa una situación o fenómeno real que se pueda modelar por la función  $f(x) = 2x - 4$ .

**Pregunta número 6:**

Elabore una gráfica de la función que, a cada número real disminuido en tres, se le asigne su cuadrado. ¿Qué dificultades tuviste para graficar la función?

**Pregunta número 7:**

Represente mediante un gráfico con proporciones simétricas la información entregada en la tabla adjuntada a continuación, considerando que el aumento de temperatura es constante:

Aumento de la temperatura en Celsius	Años
0	1940
0,5	1960
1	1980
1,5	2000
2	2020

Tabla n°1

**Pregunta número 8:**

Un feriante de la vega central se percata que el precio de los plátanos que vende ha ido en aumento de manera constate teniendo los siguientes datos: al inicio del año el precio de los plátanos era de \$1000 por kilogramo, al pasar 90 días el precio de los plátanos era de \$2260 por kilogramo y hoy al paso de 120 días el precio de los plátanos es de \$2680 por kilogramo. Modele el costo de los plátanos en función del tiempo en al menos dos tipos de representaciones (algebraica, gráfica, tabular y/o lenguaje natural).

### Anexo 3

#### Solucionario de cuestionario

##### Pregunta 1

Esboce una gráfica de la función  $y = ax^2 + bx + c$ , para algún valor de  $a < 0$ ;  $b \neq 0$  y  $c > 0$ ..

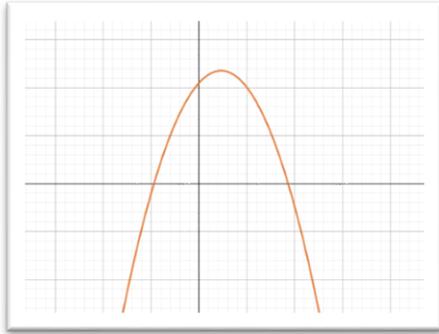


Imagen de referencia

Respuesta: la gráfica corresponde a una función cuadrática cóncava con el vértice en el cuadrante uno y dos debido a que el parámetro  $c$  (que indica el corte en el eje "y") pertenece a los  $\mathbb{R}^+$

##### Pregunta 2

¿Existe una función que a cada número real se le asigne su doble disminuido en el inverso multiplicativo de tres? En el caso de que exista expréselo y en el caso contrario explique el por qué no puede existir una función con estas características.

¿Podría representar la misma función en dos registros distintos? ¿cuáles y por qué?

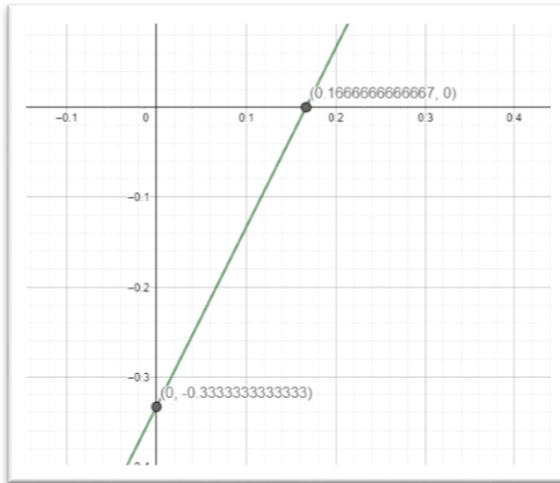
Respuesta:  $f(x) = 2x - \frac{1}{3}$  ¿Por qué? Se pide una función que a cada número real se le asigne su doble, en términos algebraicos quedaría de como  $2x$ : además se le indica que este disminuye en el inverso multiplicativo de 3, el inverso multiplicativo es  $\frac{1}{3}$ , dejando la función de la siguiente manera:  $f(x) = 2x - \frac{1}{3}$

**Formas en la que se puede representar:**

**Representación algebraica:**

$$f(x) = 2x - \frac{1}{3}$$

### Representación Gráfica:



### Puntos críticos:

$$Y=0$$

$$0=2x-1/3$$

$$1/3=2x$$

$$1/6=x$$

$$X=0$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1/3$$

$$f(0) = -1/3$$

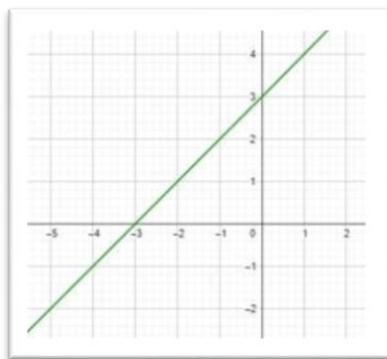
### Representación tabular posible:

x	f(x)
1	5/3
0.5	2/3
0.16666667	0
0	-1/3
-0.1666667	-6/9
-0.5	-4/3
-1	7/3

La representación tabular puede tomar cualquier valor que se desee entregar, pero se debe entregar los puntos críticos de la función con el fin de saber los cortes en los ejes de la función.

### Pregunta número 3

Asocie y describa una situación o fenómeno real que se pueda modelar por la función representada en el gráfico.



**Posibles respuestas:**

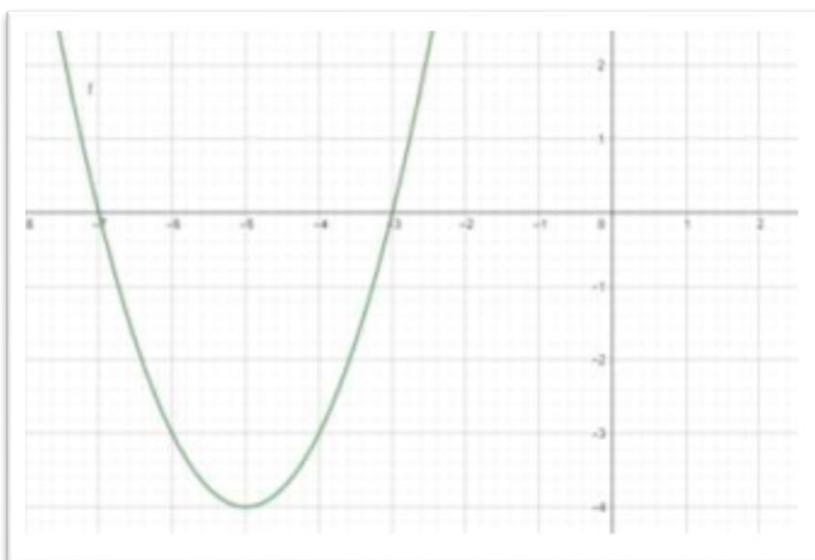
**Directamente del gráfico:** Estas respuestas son las que el encuestado no tuvo que articular ninguna representación en otro registro para poder encontrar situación de vida cotidiana que pueda ser presentada por el grafico entregado. (Estos registros pueden ser de carácter algebraico o tabular)

**Recurrir a un registro algebraico** Estas respuestas son las que el encuestado tuvo que articular un registro algebraico para poder dar con una respuesta: la expresión algebraica utilizada para esta grafica está dada por  $f(x) = x + 3$ .

**Recurrir a un registro tabular** Estas respuestas son las que el encuestado tuvo que articular un registro tabular para poder dar con una respuesta en un registro de lenguaje cotidiano, para eso el encuestado puede dar se puntos entregados por la gráfica y poder modelar una situación.

**Pregunta número 4**

De acuerdo con el siguiente gráfico: Determine una expresión algebraica que se aproxime a la función  $f$ .



**Posibles respuestas:**

**Convertir en el registro algebraico**

Estas respuestas son las que el encuestado no tuvo que articular ninguna representación en otro registro para poder encontrar una expresión algebraica que se aproxime a la función dada

Esta función se puede aproximar con los puntos entregados: las raíces  $(-7,0)$  y  $(-3,0)$  y el vértice  $(-5,-4)$

$$f(x) = (x + 7)(x + 3) \text{ ó } f(x) = x^2 + 10x + 21$$

**Pregunta número 5:**

Asocie y describa una situación o fenómeno real que se pueda modelar por la función  $f(x) = 2x - 4$ .

**Posibles respuestas:**

**Convertir en un registro de lenguaje cotidiano directamente**

Estas respuestas son donde le encuestado puede asociar y describir a un registro de lenguaje cotidiano, modelando una situación o fenómeno real, tomando en cuenta los reales negativos de la función.

**Recurrir a otro registro para articular un registro de lenguaje cotidiano**

Estas respuestas son donde le encuestado tuvo que articular otro registro para poder asociar y describir a un registro de lenguaje cotidiano, modelando una situación o fenómeno real, tomando en cuenta los reales negativos de la función.

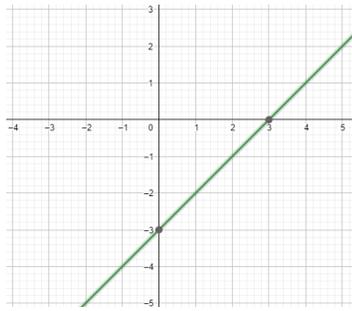
**Pregunta número 6:**

Elabore una gráfica de la función que, a cada número real disminuido en tres, se le asigne su cuadrado ¿Qué dificultades tuviste para graficar la función?

**Posibles respuestas:**

**Convertir en un gráfico directamente.**

Estas respuestas son donde el estudiante sea capaz de convertir del registro de lenguaje cotidiano directamente a un registro gráfico, el cual es representado de la siguiente manera.



**Convertir en un gráfico teniendo que articular otro registro.**

Estas respuestas son donde el estudiante ese capaz de convertir del registro de lenguaje cotidiano e a un registro gráfico teniendo que articular un registro algebraico y/o registro tabular.

**Registro algebraico**

$$f(x) = x - 3$$

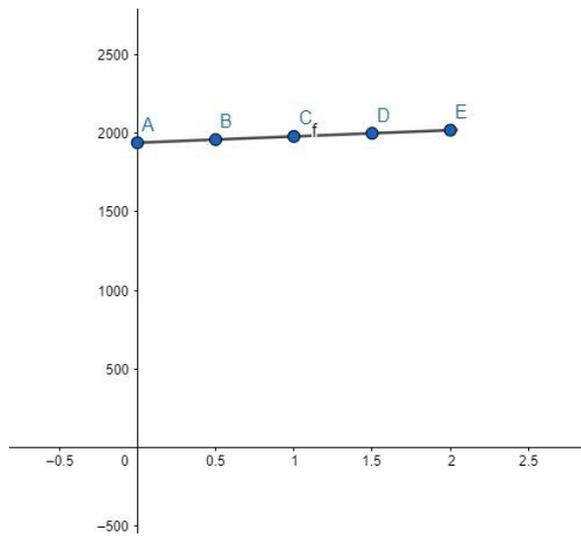
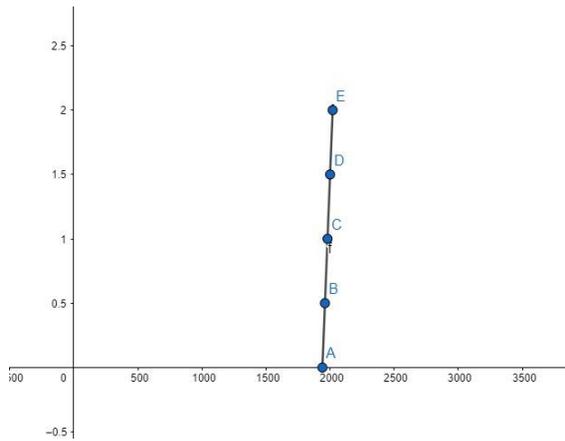
**Pregunta número 7**

Represente mediante un gráfico con proporciones simétricas la información entregada en la tabla adjuntada a continuación, considerando que el aumento de temperatura es constante:

Aumento de la temperatura en Celsius	Años
0	1940
0,5	1960
1	1980
1,5	2000
2	2020

Tabla n°1

**Posibles respuestas:**



**Pregunta número 8**

Un feriante de la vega central se percata que el precio de los plátanos que vende ha ido en aumento de manera constate teniendo los siguientes datos: al inicio del año el precio de los plátanos era de \$1000 por kilogramo, al pasar 90 días el precio de los plátanos era de \$2260 por kilogramo y hoy al paso de 120 días el precio de los plátanos es de \$2680 por kilogramo. Modele el costo de los plátanos en función del tiempo en al menos dos tipos de representaciones (algebraica, gráfica, tabular y/o lenguaje natural).

**Posibles respuestas:**

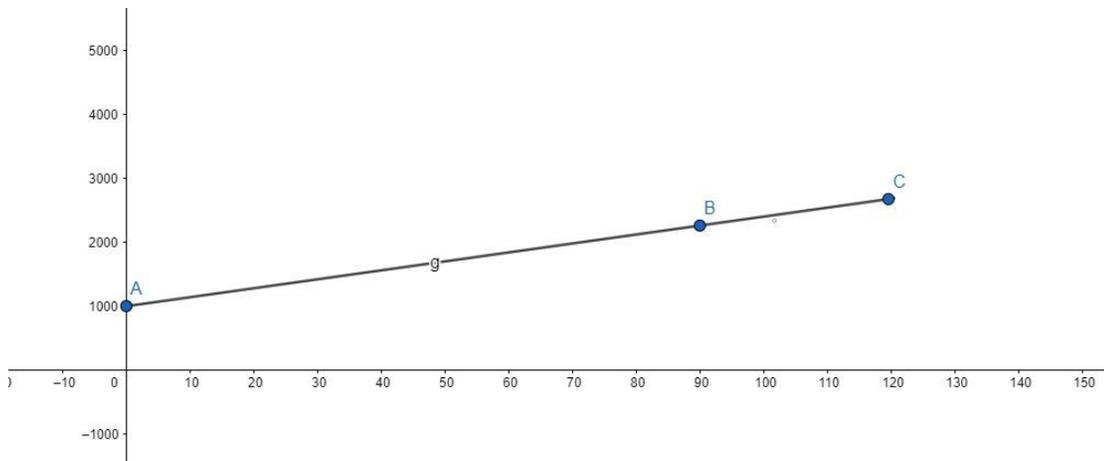
**Registro algebraico**

Este tipo de respuestas el estudiante puede convertir el registro en lenguaje cotidiano a un registro algebraico para esto el estudiante debe ser capaz de reconocer el objeto matemático detrás del problema (función de la recta o ecuación de la recta) y dado dos puntos entregados en el enunciado el encuestado debería llegar a la siguiente función:

$$f(x) = 14x + 1000$$

## Registro grafico

El encuestados dado los puntos entregados o si logro articular el registro algebraico puede ser capaz de graficar la función que modela el registro cotidiano encontrado.



## Registro tabular

El encuestado plasman en un registro tabular los puntos importantes que pueden modelar la situación planteada

$x$	$F(x)$
0	1000
120	2680

## Anexo 3

### Entrevista

**Nombre de investigación:** Registro de representación semiótica como estrategia de fortalecimiento de aprehensión de funciones lineales y cuadráticas en estudiantes de pedagogía en matemática e informática educativa

**Objetivo de la entrevista:** Relacionar las dificultades manifestadas por los estudiantes de pedagogía en matemáticas e informática educativa con los cambios entre registros de representaciones semióticas

**Importancia de la investigación:** Entre los años 2015 y 2018 la carrera de pedagogía en matemática e informática educativa ha presentado un bajo rendimiento en cátedras relacionadas estrictamente a funciones, de tal manera que esta investigación tenga como finalidad indagar en el modelo de representaciones semióticas para proponer una metodología que mejore los resultados en el aprendizaje de estos conceptos matemáticos.

Para llevar a cabo dicha investigación es necesario realizar una entrevista que nos proporcione la suficiente información. Esta entrevista es de carácter confidencial por lo cual pedimos su total sinceridad y compromiso.

**Características de los entrevistados:** Los estudiantes que serán entrevistados, son los mismos que realizaron el cuestionario presentado con anterioridad, que han sido seleccionado conforme a la condición de que:

- Los estudiantes seleccionados pertenecen entre los niveles 600 y 900 de la carrera de pedagogía en matemática e informática educativa.
- Los estudiantes escogidos han cursado desde álgebra I hasta cálculo III como mínimo.
- La reprobación de alguno de los ramos que se estudiará sea a lo más de una cátedra.
- La existencia de al menos un representante de cada nivel de la carrera de pedagogía en matemática e informática educativa, teniendo en cuenta el punto 1 y 2 sin excepciones.

## Preguntas

### Relacionado con la pregunta número 1 del cuestionario:

- Durante este ejercicio ¿qué dificultad representó transformar desde un registro algebraico al gráfico? ¿por qué?
- ¿Si la pregunta hubiese iniciado como un problema tradicional con contexto y con las mismas condiciones, se le hubiese dificultado el desarrollo?
- ¿Por qué usted le asignó esa gráfica a la función? ¿Qué características le permitió determinar esa gráfica?
- ¿Qué información visual puede inferir sobre la condición  $a < 0$ ;  $b \neq 0$  y  $c > 0$ ? ¿por qué?
- ¿Qué pasaría visualmente en el gráfico si  $b = 0$ ? ¿por qué?

### Relacionado con la pregunta número 2 del cuestionario:

- ¿Qué características le permitió asignar una función al enunciado? ¿por qué?
- ¿Explique por qué eligió esa representación para expresar la función?

### Relacionado con la pregunta número 3 del cuestionario:

- ¿A qué tipo de función corresponde el gráfico señalado? ¿qué características le permitió llegar a tal conclusión? Tomando en cuenta que por tipo de función nos referimos a las clasificaciones de las funciones. Ejemplo: Función lineal, cuadrática radical, etc.
- ¿Fue necesario para usted articular un registro algebraico para diseñar una situación cotidiana? ¿Explique por qué?

### Relacionado con la pregunta número 4 del cuestionario:

- ¿A qué tipo de función corresponde el gráfico señalado? ¿qué características le permitió llegar a tal conclusión? Tomando en cuenta que por tipo de función nos referimos a las clasificaciones de las funciones. Ejemplo: Función lineal, cuadrática radical, etc.
- ¿Cómo usted podría reformular el ejercicio comenzando desde una representación tabular? Explique
- ¿Qué características poseen los parámetros del gráfico? ¿Qué se debe aplicar a la función para que el gráfico se traslade dos unidades hacia la derecha?

### Relacionado con la pregunta número 5 del cuestionario:

- ¿La información proporcionada fue suficiente para formular un enunciado en lenguaje cotidiano? ¿Fue necesario para usted articular un registro gráfico o tabular para diseñar una situación en lenguaje cotidiano? Explique.

- ¿Cómo reformulamos este ejercicio comenzando desde una representación de lenguaje cotidiano a una expresión algebraica? Explique.

**Relacionado con la pregunta número 6 del cuestionario:**

- ¿A qué tipo de función corresponde el gráfico señalado? ¿qué características le permitió llegar a tal conclusión? Tomando en cuenta que por tipo de función nos referimos a las clasificaciones de las funciones. Ejemplo: Función lineal, cuadrática radical, etc.
- ¿Fue necesario para usted articular otro registro para diseñar el gráfico solicitado?

**Relacionado con la pregunta número 7 del cuestionario:**

- ¿A qué tipo de función corresponde la gráfica asignada? ¿qué características le permitió determinar aquella función? Tomando en cuenta que por tipo de función nos referimos a las clasificaciones de las funciones. Ejemplo: Función lineal, cuadrática radical, etc.
- ¿La información proporcionada fue suficiente para determinar la función? ¿por qué?
- ¿Fue necesario el registro algebraico para determinar el gráfico? Explique.

**Relacionado con la pregunta número 8 del cuestionario:**

- ¿A qué tipo de función corresponde la gráfica asignada? ¿qué características le permitió determinar aquella función? Tomando en cuenta que por tipo de función nos referimos a las clasificaciones de las funciones. Ejemplo: Función lineal, cuadrática radical, etc.
- ¿Por qué eligió esas dos representaciones? ¿Por qué no ocupó las otras dos representaciones?

**Pregunta numero 9**

- En contexto de universidad describa la forma en que los docentes de la universidad explicaron y abordaron el concepto de función.

## Observaciones

### **Pregunta 1: Se solicita graficar conforme a las condiciones**

E1 Mala

1. Error en la intersección con el eje y
2. Error al dar negatividad al parámetro a
3. No presenta dificultades

E2 Mala

1. Error calculo en la tabulación, punto  $x=2$
2. Error en la gráfica, dando 3 pre imágenes a una imagen (error de cálculo)
3. Dificultad, necesita transitar por los registros A explícito (por darle valor a los coeficientes)-T-G (señalar en marco teórico los significados)

E3 Mala

1. Error en parámetro a al otorgar un valor positivo teniendo la restricción de  $a < 0$  (error derivado de simbología y términos matemáticos)
2. Dificultad, necesita de un registro algebraico explícito (por darle valor a los coeficientes)

E4 NM: Buena

1. No presenta errores ni dificultades

E5 Buena

1. Dificultad, necesita dar valores a los coeficientes.
2. No presenta errores

E6 Buena

1. Dificultad, necesita una expresión algebraica explícita (por darle valor a los coeficientes) y de la realización de un tratamiento algebraico para obtener el vértice y las intersecciones con el eje x.
2. No presenta errores

E7 Buena

1. No presenta errores ni dificultades

E8 Buena

1. Dificultad, necesita de una expresión algebraica explícita (por darle valor a los coeficientes) y de la realización de un tratamiento algebraico para obtener el vértice y las intersecciones con el eje x.
2. No presenta errores

### **Pregunta 2: Se solicita expresar la función (diferentes registros)**

Observación, no se diferencia entre función afín y lineal

E1 Mala

1. Error, no entiende lo que es “disminuido”
2. Error, no logra representar la función de dos registros diferentes (realizando dos representaciones diferentes)

3. Dificultad, realiza un registro algebraico como primera opción

E2 Mala

1. Error, no reconoce lo que es un inverso multiplicativo (error derivado de simbología y términos matemáticos)
2. Error de transcripción porque no logra realizar la conversión del registro C – A, multiplicando una x de más en la expresión.
3. Error, no logra representar la función de dos registros diferentes (realizando dos representaciones diferentes)
4. Dificultad, realiza un registro algebraico como primera opción

E3 Buena

1. Dificultad, realiza un registro algebraico como primera opción
2. No presenta errores

E4 Buena

1. Dificultad, realiza un registro algebraico como primera opción
2. Omisión de conversión a 2 registros
3. No presenta errores

E5 Buena

1. Dificultad, realiza un registro algebraico como primera opción
2. No presenta errores

E6 Buena

1. Dificultad, realiza un registro algebraico como primera opción
2. Dificultad, para lograr el registro gráfico necesita de un registro tabular como intermediario.
3. No presenta errores

E7 Omitida

1. Omisión de la pregunta
2. No presenta errores

E8 Buena

1. Dificultad, realiza un registro algebraico como primera opción
2. Omisión de conversión a 2 registros
3. No presenta errores

**Pregunta 3: Asocie y describa lenguaje cotidiano**

E1 Mala

1. Error, asocia un contexto, pero no modela (no formula, resuelve, interpreta ni valida) la función representada en la gráfica.
2. No presenta dificultades

E2 Mala

1. Omite la conversión a registro cotidiano
2. Dificultad, realiza un registro algebraico como primera opción
3. No presenta errores

E3 Mala

1. Error, porque no asigna la función solicitada
2. Dificultad, realiza un registro algebraico como apoyo

E4 Omitida

1. Omite la conversión a registro cotidiano
2. Dificultad, necesita articular un registro tabular y un tratamiento algebraico obteniendo la pendiente, y un registro algebraico.

E5 Buena

1. Dificultad, no presenta una problemática
2. Dificultad, realiza un registro algebraico como primera opción
3. No presenta error

E6 Buena

1. Dificultad, no presenta una problemática
2. No presenta dificultades

E7 Omitida

1. Omite pregunta
2. No presenta errores ni dificultades

E8 Mala

1. Error, asocia un contexto, pero no modela (no formula, resuelve, interpreta ni valida) la función representada en la gráfica.
2. No presenta dificultades

**Pregunta 4: Determinar la expresión algebraica**

E1 Mala

1. Error en los coeficientes otorgados (no hay relación entre los puntos críticos y la expresión algebraica)
2. No presenta dificultades

E2 Omitida

1. Omisión de pregunta
2. No presenta errores ni dificultades

E3 Buena

1. No presenta errores ni dificultades

E4 Omitida

1. Omisión de pregunta
2. No presenta errores ni dificultades

E5 Buena

1. Dificultad, conforme al vértice realiza un tratamiento para lograr la expresión algebraica
2. No presenta errores

E6 Mala

1. Error al dar negatividad al parámetro b

2. Dificultad, no logra la conversión al registro algebraico

E7 Mala

1. Error en los coeficientes otorgados
2. No presenta dificultades

E8 Buena

1. No presenta errores
2. Dificultad, necesita de un registro tabular y un tratamiento algebraico para obtener la función

**Pregunta 5: Se solicita asociar y describir un lenguaje cotidiano**

E1 Mala

1. Error, asocia un contexto, pero no modela (no formula, resuelve, interpreta ni valida) la función representada en la gráfica.
2. Error de transcripción en el ejercicio
3. Dificultad, necesita de un bosquejo gráfico

E2 Omitida

1. Omisión de pregunta
2. No presenta errores ni dificultades

E3 Mala

1. Error, plantea mal las variables
2. No presenta dificultad

E4 Mala

1. Error, porque no asigna la función solicitada
2. No presenta dificultades

E5 Mala

1. Error, plantea mal las variables
2. No presenta dificultad

E6 Buena

1. Dificultad, no presenta problemática

E7 Omitida

1. Omisión de pregunta
2. No presenta error ni dificultad

E8 Mala

1. Error, asocia un contexto, pero no modela (no formula, resuelve, interpreta ni valida) la función representada en la gráfica.

**Pregunta 6: Se solicita realizar el gráfico**

E1 Mala

1. Error en la intersección con el eje y
2. Dificultad, necesita de un registro algebraico, y un tratamiento algebraico para determinar el vértice y las intersecciones con el eje x

E2 Buena

1. Dificultad, necesita de un registro algebraico y tabular para realizar el gráfico
2. No presenta errores

E3 Mala

1. Error, no realiza la conversión al registro gráfico porque asocia una ecuación en vez de una función
2. Dificultad, necesita de un registro algebraico

E4 Mala

1. Error, no realiza la conversión al registro gráfico y no asigna adecuadamente el cuadrado
2. No presenta dificultad

E5 Buena

1. Dificultad, necesita de un registro algebraico y su tratamiento para realizar la conversión
2. No presenta errores

E6 Buena

1. Dificultad, necesita de un registro algebraico y su tratamiento para realizar la conversión
2. Dificultad, necesita de un registro tabular
3. No presenta errores

E7 Mala

1. Error, no asigna correctamente los coeficientes
2. Dificultad, necesita de un registro algebraico

E8 Mala

1. Error, no realiza la conversión al registro gráfico y no identifica correctamente la función
2. Dificultad, necesita de un registro algebraico y su tratamiento

**Pregunta 7: Se solicita graficar considerando la información de la tabla**

E1 Mala

1. Error Considera más puntos de los solicitados
2. No presenta dificultad

E2 Mala

1. Omisión de pregunta
2. No presenta erro ni dificultad

E3 Mala

1. Error Considera más puntos de los solicitados
2. No presenta dificultad

E4 Buena

1. No presenta error ni dificultad

E5 Mala

1. Error Considera más puntos de los solicitados
2. No presenta dificultad

E6 Buena

1. Error Considera más puntos de los solicitados
2. No presenta dificultad

E7 Mala

1. Error Considera más puntos de los solicitados
2. No presenta dificultad

E8 Mala

1. Error Considera más puntos de los solicitados
2. No presenta dificultad

**Pregunta 8: Se solicita modelar en al menos 2 registros el costo de los plátanos**

E1 Mala

1. Error en el gráfico considera más puntos de los solicitados
2. No presenta dificultad

E2 Omitida

1. Omisión de pregunta
2. No presenta error ni dificultad

E3 Omitida

1. Omisión de pregunta
2. No presenta error ni dificultad

E4 Omitida

1. Omisión de pregunta
2. No presenta error ni dificultad

E5 Omitida

1. Omisión de pregunta
2. No presenta error ni dificultad

E6 Mala

1. Omisión de un registro
2. No presenta error ni dificultad

E7 Mala

1. Error en el gráfico considera más puntos de los solicitados
2. No presenta dificultad

E8 Mala

1. Error en el gráfico considera más puntos de los solicitados
2. No presenta dificultad