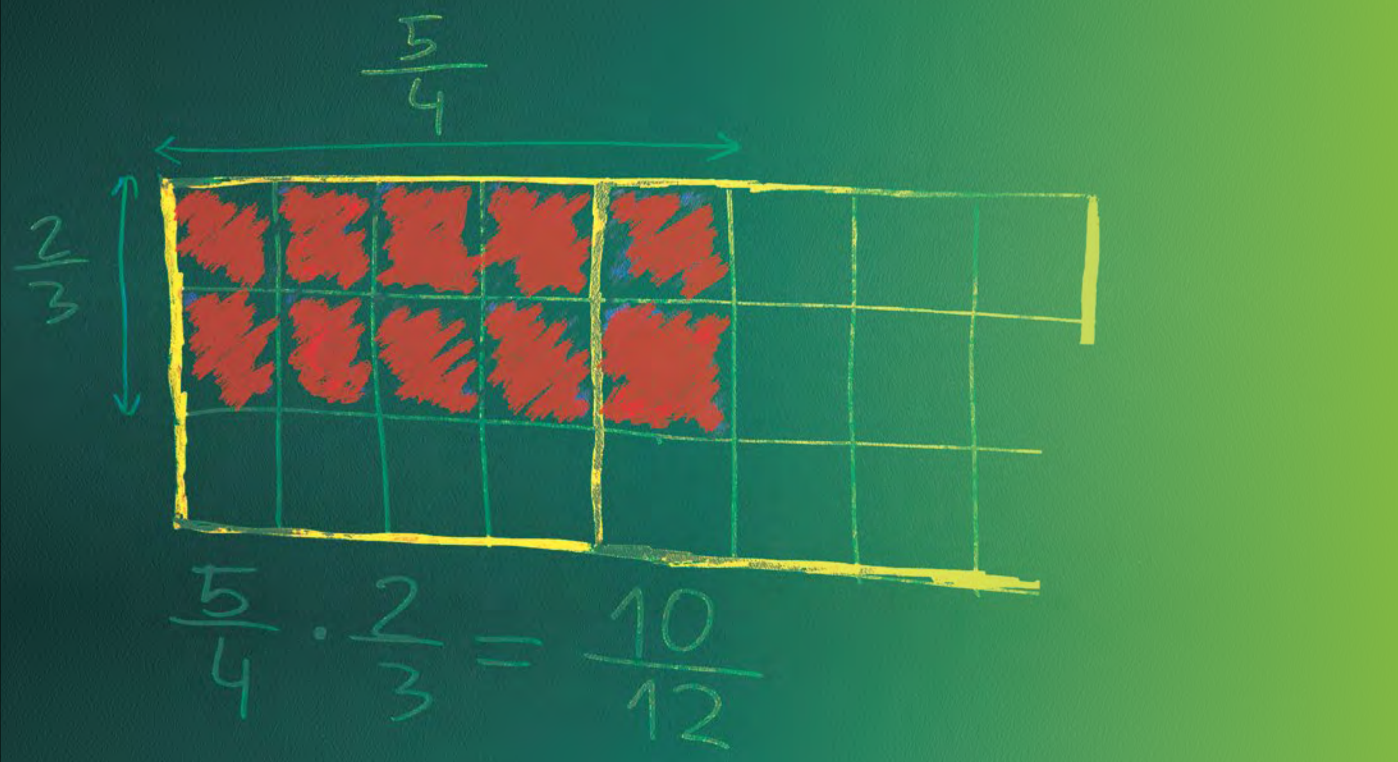
ReFIP Matemática

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

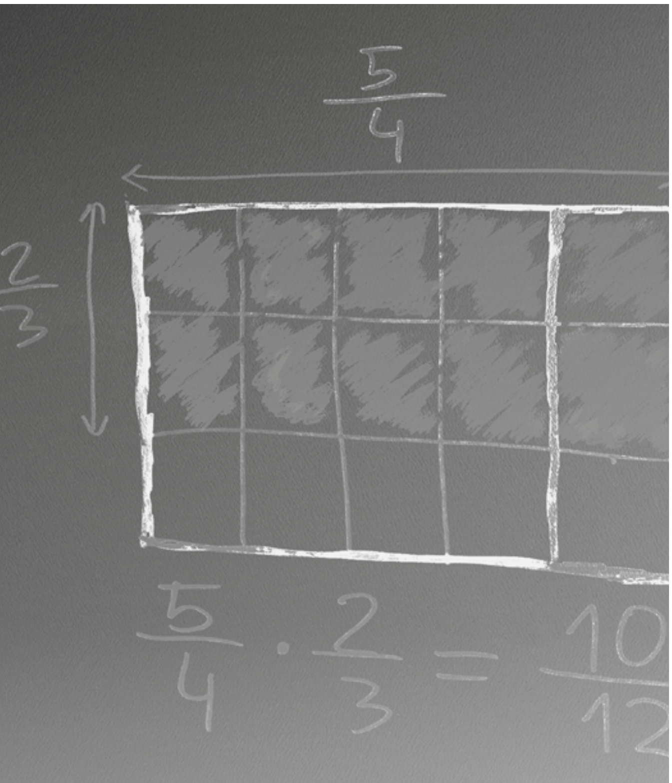


Números

PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

REFIP Matemática

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL
DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA



Números

PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

AUTORES:

Renato Lewin,
Pontificia Universidad Católica de Chile

Alejandro López,
Universidad Andrés Bello

Salomé Martínez,
Universidad de Chile

Daniela Rojas,
Universidad de Chile

Pierina Zanocco,
Universidad Santo Tomás

Proyecto FONDEF – CONICYT D09 I1023 (2011 – 2014)
Directora de Proyecto: Salomé Martínez
Autores: Renato Lewin
Alejandro López
Salomé Martínez
Daniela Rojas
Pierina Zanocco

Registro de propiedad intelectual:
ISBN: 978-956-349-623-9
Depósito legal: 238311

Dirección editorial: Arlette Sandoval Espinoza
Corrección de estilo: María Paz Contreras Aguirre
Dirección de arte: Carmen Gloria Robles Sepúlveda
Coordinación diseño: Vinka Guzmán Tacla
Diseño Portada: José Luis Jorquera Dölz
Diagramación: Karina Riquelme Riquelme
Ilustración: Carlos Valentino Romero Cáceres
Producción: Andrea Carrasco Zavala

Primera edición: diciembre 2013

Coyancura 2283, oficina 2013,
Providencia. Santiago de Chile.

www.ediciones-sm.cl
Atención al cliente: 600 381 13 12

Impreso en Chile/ Printed in Chile

ReFIP Matemática

Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica en Matemática

Proyecto FONDEF - CONICYT D09 I1023 (2011 - 2014)

Directora:	Salomé Martínez, Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Director alterno:	Héctor Ramírez, Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Institución beneficiaria principal:	Centro de Modelamiento Matemático, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
Institución beneficiaria asociada:	Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituciones asociadas:	Ediciones SM Chile Ministerio de Educación Fundación Luksic Academia Chilena de Ciencias

PRESENTACIÓN

Cuando se incuba un sueño y nace una idea, el mundo se ensancha, se ponen en juego los recursos y se inicia un camino donde los obstáculos se presentan uno a uno. Cuando la idea es buena y el sueño es grande, nada detiene el ímpetu desatado.

La colección de libros que tengo el honor de presentar es el fruto de un sueño grande y del trabajo persistente de un equipo formado por matemáticos y educadores matemáticos, quienes, liderados por su directora, se abocaron a la tarea de escribir cuatro libros de Matemática, sobre los temas centrales del currículo escolar: Números, Geometría, Álgebra y Datos y Azar.

Estos cuatro libros representan la culminación de un proceso de aprendizaje, reflexión y maduración que se inicia muy atrás, con las primeras iniciativas en educación en el Centro de Modelamiento Matemático, cuando se vislumbraba que era posible hacer un aporte a la educación desde la perspectiva de los matemáticos, pero no se sabía muy bien cómo. Fueron muchos los proyectos que se sucedieron y que fueron ayudando a comprender mejor el problema que se enfrentaba y ayudaron a apuntar con mayor precisión a una de nuestras principales debilidades en matemática escolar: las escasas oportunidades que nuestro sistema de formación de profesores brinda a los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica de conocer la matemática escolar. Esta colección de libros apunta, con una potente fuerza de saber, al corazón del sistema formativo, proveyendo matemática en sus contenidos y la manera de enseñarlos.

Si estos libros representan la culminación de un proceso, también son solo un hito en el camino que se abre hacia el futuro con inmensos desafíos, algunos de los cuales son desatados por estos mismos. La incorporación en las aulas universitarias de la matemática escolar, con toda la potencialidad y riqueza que estos libros proponen, requiere de grandes esfuerzos de parte de las propias unidades formadoras, de los formadores de profesores y ciertamente de los estudiantes de pedagogía que sueñan con un aula escolar viva y ávida de conocimiento. Estos libros ponen de manifiesto la necesidad de formación académica de los formadores de profesores y llaman a la creación de material de apoyo complementario en otros formatos. Con una mirada de largo plazo, estos libros también muestran la necesidad de contar con académicos de alto nivel, conocedores de la matemática escolar, de su enseñanza y de su aprendizaje, en todas las unidades de formación de profesores.

El proceso que da vida a esta colección de libros, desde su concepción hasta la impresión final de sus páginas, tiene numerosos rasgos originales que quisiera destacar. Este es un proyecto que convoca a matemáticos interesados por la educación, expresando una realidad creciente en todo el mundo y también en nuestro país, que mueve a científicos investigadores de sus propias disciplinas a abordar problemas de la educación, con espíritu abierto y con el respeto que merecen. Expresiones de esta tendencia van en la línea de un cambio de parte de los científicos, que han ido comprendiendo la complejidad de los problemas de la educación, de la formación de profesores, de la escuela y la sala de clases. Pero este proyecto también convoca a educadores matemáticos que, por la naturaleza de su disciplina científica, tienen a la educación en toda su complejidad en el centro de su quehacer, pero que en muchas ocasiones han caminado por una vía paralela a los científicos. El proyecto que da origen a los libros que aquí presento es una muestra más de la importancia de acercar estos mundos y de la tendencia nacional a comprender que en la educación hay espacio para todos, que la incorporación de actores enriquece la discusión y mejora la calidad de los resultados. Estos libros son el fruto del trabajo conjunto de matemáticos y educadores matemáticos.

Estos libros no nacen del trabajo aislado de los expertos convocados, sino que en todo momento se ha tenido presente la realidad, expresada a través de la opinión de los actores que intervienen en la formación de los profesores de educación básica. Las necesidades, el sentir y las opiniones de los académicos formadores y de los estudiantes de pedagogía fueron recogidos en consultas y aplicaciones piloto a lo largo de todo el país. Esta es una experiencia inédita en Chile, que incorpora a los lectores en la redacción de libros de texto universitarios, basando las decisiones editoriales en la evidencia encontrada, sobre lo que es relevante para el profesor, y dando fuerza a las ideas que se presentan en sus páginas. Es interesante que en la búsqueda de información para apoyar la escritura de los libros, los autores tuvieron la oportunidad de dar una mirada nacional a la formación de los profesores de educación básica en cuanto a la matemática, la que les permitió levantar evidencia de investigación que resulta de extremo interés, más allá de su propósito original.

Estos libros sobre la matemática escolar son una herramienta poderosa para apoyar la formación de profesores, ya que enfocan los contenidos matemáticos conectados con su enseñanza y teniendo en cuenta el currículo nacional. Así como sus cuatro tomos van tomando uno a uno los temas centrales del currículo, con una mirada puesta en los contenidos escolares, proyectados en la sala de clases. Dan cuenta de la matemática escolar en todas sus dimensiones, las que muchas veces son minimizadas equivocadamente ignorando su complejidad. Una lectura de sus páginas nos lleva a comprender rápidamente que la tarea de enseñar matemática escolar es intelectualmente demandante y que requiere de una cuidadosa preparación, que va mucho más allá de unos cursos aislados. Estos libros muestran la importancia de la comprensión de los contenidos, teniendo presentes las diversas formas de enseñanza y de aprendizaje y el currículo escolar, y sugieren un cambio importante en el eje de las carreras de pedagogía, moviéndolo desde una mirada generalista desprovista de contenido a una mirada integradora del contenidos y su enseñanza.

En la línea de esta última reflexión, con la publicación de esta obra se plantean en forma concreta lineamientos respecto de cómo deberíamos formar a los profesores en Chile. Debemos transformar una cultura universitaria que considera que la disciplina que se enseña es secundaria frente a un saber pedagógico general y teórico, desde el cual sería posible deducir qué hay que hacer en el caso de cada disciplina. Debemos transformar una cultura universitaria que considera que en la formación de profesores, la preparación disciplinaria y pedagógica van en paralelo, dejando que el estudiante de pedagogía haga la integración. Es necesario movernos a una cultura de la integración entre las disciplinas y lo pedagógico, generando un compromiso de los formadores que abordan estos aspectos en forma coordinada e integrada. Ciertamente la formación de un profesor va más allá de lo disciplinario y lo pedagógico, pero si estos aspectos no están presentes con fuerza y en forma integrada, no tendremos un profesor o profesora con la potencialidad de proyectar el saber formador en su integridad.

Estos libros nacen en un contexto marcado por una creciente preocupación nacional por la educación, empujada por las demandas del movimiento estudiantil en sus múltiples expresiones. Esta preocupación pone énfasis en el acceso y la calidad de la educación, y demanda importantes recursos para la introducción de los cambios estructurales necesarios, que garanticen el acceso de todos los niños y niñas a la educación de calidad. Sin embargo, es necesario hacer notar que con una inyección importante de recursos y con una juiciosa reorganización administrativa, la calidad de la educación no queda garantizada. En este contexto, es importante mencionar que la colección de libros que presentamos nace en el seno del programa INICIA, lanzado en 2008 y que tiene como propósito el fortalecimiento de la formación inicial de los profesores. Estos libros nacen y se nutren de las experiencias adquiridas en la formulación de los estándares de matemática, que definen lo que como país esperamos que los futuros egresados de las carreras de pedagogía sepan y sepan hacer, y que se miden en la prueba INICIA. Los estándares y la prueba INICIA definen un marco de demandas para los formadores de profesores y para los estudiantes de pedagogía difíciles de lograr sin tener el apoyo del Estado, de las instituciones y de académicos preocupados por el avance de la calidad de la educación. Esta colección ofrece apoyo en el área de matemática e interpreta los estándares desde una perspectiva de la realidad nacional. Bienvenidos serán materiales complementarios que ayuden a formar mejores profesores y profesoras.

Me sumo con alegría a todos los que ven en estos libros una poderosa herramienta para seguir construyendo una mejor educación para todos nuestros niños y niñas, y a todos quienes levantan su voz para felicitar a la directora y a todos los autores de estos libros, quienes con su trabajo, talento y perseverancia nos ponen un desafío más en esta tarea de hacer de Chile un país con una educación justa y de calidad, donde todos los niños y niñas tengan acceso a una educación que les permita conocer las matemáticas, las ciencias, las humanidades, las artes y todas las expresiones de la cultura humana, para construir así un país mejor, un país desarrollado.

Patricio Felmer

Premio Nacional de Ciencias Exactas 2011

Académico de la Universidad de Chile

AGRADECIMIENTOS

La colección de textos ReFIP fue desarrollada como parte del proyecto FONDEF D09I1023 "Recursos pedagógicos para la implementación de los Estándares de Formación Inicial de profesores de Educación Básica en matemática" (ReFIP). Agradecemos el apoyo de Conicyt a través del programa FONDEF, el cual fue clave para la realización de esta colección. En particular, reconocemos el apoyo del Comité de Área de Educación de FONDEF, y muy especialmente la dedicación de Daniela Fuentes, ejecutiva a cargo del proyecto.

Expresamos también nuestra gratitud a la institución que albergó a este proyecto, el Centro de Modelamiento Matemático de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, en particular, al director del CMM, Alejandro Jofré, y a Francisco Brieva, decano de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, por proveernos el soporte que este proyecto necesitó. Asimismo, agradecemos todo el apoyo de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, y muy especialmente a su decano, Martin Chuaqui.

Las instituciones asociadas al proyecto han sido esenciales para su desarrollo, en particular, ellas apoyaron con decisión su presentación. Agradecemos a Ediciones SM, en particular a su gerente general, Francisco Tepper, y a su directora editorial, Arlette Sandoval. También queremos agradecer el patrocinio de Fundación Luksic, en especial a Monserrat Baranda, su gerente general. Agradecemos también a la directora del Centro de Perfeccionamiento e Investigaciones Pedagógicas del Ministerio de Educación (CPEIP), Paula Pinedo, y a Regina Silva, Coordinadora del Área de Educación Continua (CPEIP). Todo nuestro reconocimiento va también a la Academia Chilena de Ciencias y a su presidente, Juan Asenjo, por la permanente colaboración.

Un hito importante en el desarrollo de los textos fue la utilización de sus versiones preliminares en cursos de matemáticas de carreras de Pedagogía en Educación Básica. Estos pilotos se desarrollaron en 16 universidades: Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad Alberto Hurtado, Universidad Arturo Prat, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Universidad Católica de Temuco, Universidad de Concepción, Universidad de las Américas, Universidad del Bío-Bío, Universidad del Desarrollo, Universidad de Los Andes, Universidad de Magallanes, Universidad de Playa Ancha, Universidad de Viña del Mar, Universidad Diego Portales, Universidad Santo Tomás, y Universidad San Sebastián. Estos pilotos no podrían haberse llevado a cabo sin el apoyo de las autoridades de estas universidades, quienes tuvieron una confianza enorme en nuestro equipo y nos apoyaron en todas las actividades de esta etapa. Agradecemos especialmente a sus académicos formadores y a los estudiantes de los cursos donde se probaron nuestros textos. Valoramos su generosidad y activa participación en las distintas actividades del proyecto.

Durante el desarrollo del proyecto contamos con la guía del Comité Asesor, conformado por Patricio Felmer, Miguel Díaz, Raimundo Olfos, María Aravena y Arturo Mena, quienes evaluaron versiones preliminares de los textos y orientaron nuestro trabajo. Valoramos sus aportes a lo largo del proyecto. En esta misma línea, agradecemos a Pablo Dartnell por sus valiosas contribuciones.

Agradecemos también a los estudiantes, académicos formadores y evaluadores nacionales e internacionales que nos entregaron sugerencias y comentarios, que ayudaron a enriquecer la colección de textos. También reconocemos el valioso trabajo del equipo editorial de Ediciones SM en la etapa final de producción de los textos.

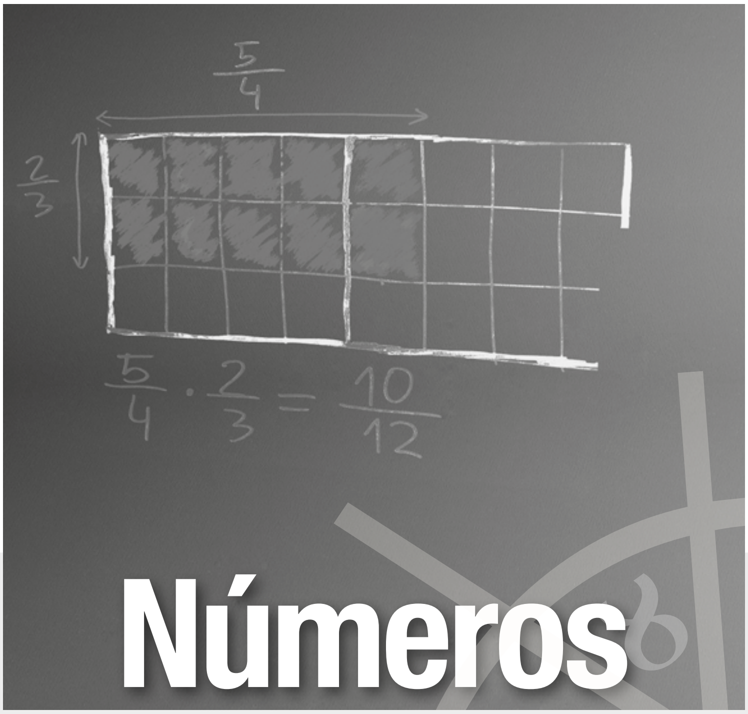
Queremos agradecer todo el apoyo en la gestión y administración del proyecto. Agradecemos a Erika Pino, Paulina Zavala y María Eugenia Heckmann de la Pontificia Universidad Católica de Chile, a Judith Figueroa, Eterin Jaña y Silvia Mariano de la Universidad de Chile, y muy especialmente a María Cecilia Cea de la Universidad de Chile. También agradecemos a Bárbara Salas por el apoyo en la difusión del proyecto.

Valoramos también la disposición de Carmen Montecinos y José Sánchez a ser parte del Comité Editorial de esta colección.

Finalmente, queremos expresar nuestra gratitud a dos connotados académicos que influyeron fuertemente en nuestro quehacer. A Sybilla Beckmann, académica de la Universidad de Georgia y autora de un reconocido libro de matemática para la formación de profesores en Estados Unidos, por sus valiosos consejos que fueron una guía durante todo el proyecto, y a Patricio Felmer, académico de la Universidad de Chile y referente nacional en temas relacionados con educación matemática, por su generosa ayuda.

Salomé Martínez
Directora del Proyecto
Fondef D09I1023

Héctor Ramírez
Director Alterno del Proyecto
Fondef D09I1023



Números

ÍNDICE

El eje de números es el corazón del currículo escolar. Su presencia en los niveles iniciales no tiene contrapeso. El primer encuentro con la matemática ocurre justamente con los números y ellos nos acompañan a lo largo de toda la vida. Usamos los números a diario y en múltiples contextos, relacionados con el dinero, las compras, las mediciones, las cantidades, las distancias, el transcurso del tiempo, los datos metereológicos, los indicadores económicos, los índices numéricos relativos a nuestra salud, como la temperatura, la presión arterial o el nivel de azúcar en nuestra sangre, entre otros. Nos resultaría difícil imaginar un mundo sin números.

Este texto *Números* es el más extenso de la colección ReFIP, acorde al desafío curricular que aborda. El enfoque compartido por los libros de esta serie se despliega con especial nitidez en este caso. Se trata de un libro de matemática, cuya integridad y rigor son centrales. Su cobertura temática está gobernada por las necesidades del currículo escolar. La forma en que se abordan estos contenidos responde a las necesidades de su enseñanza a niños y niñas de primero a sexto año de Educación Básica. De este modo, la matemática escolar aparece con la profundidad y riqueza de una matemática definitivamente no trivial, en la que se abordan los porqué, se argumenta, se justifica y se demuestran propiedades. La preocupación por las representaciones se manifiesta en todos los temas abordados y se relaciona tanto con su enseñanza como con la necesidad de desarrollar una comprensión profunda de los contenidos escolares. En todos los capítulos se incluyen secciones destinadas a discutir errores y dificultades asociadas al aprendizaje de estos temas.

Los tres primeros capítulos se dedican a los *números para contar y medir* y las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división. Se estudia el sistema de numeración decimal, sus principios y aspectos relacionados con su enseñanza. Aparece la recta numérica como una representación privilegiada de los números, que rendirá frutos a lo largo de los capítulos siguientes. Se presentan técnicas de cálculo mental y escrito basadas en las propiedades de los números y de las operaciones. También se estudian las situaciones aditivas y multiplicativas que permiten ejemplificar los distintos significados de las operaciones. Los diagramas se utilizan para plantear y resolver problemas en contexto. Se discute cómo usar el material concreto en la enseñanza de las operaciones y sus algoritmos. Además, se otorga especial atención a desarrollar y justificar la validez de los algoritmos usuales.

En el Capítulo IV se estudia la *estimación*. Se reconocen situaciones en las que se requiere realizar estimaciones, por ejemplo, al aplicar el algoritmo de la división. Otras veces, en el contexto de la resolución de problemas se necesita tener una idea aproximada de la solución antes de calcularla, para utilizar representaciones o diagramas adecuados y para discutir la pertinencia de los resultados obtenidos. En la vida cotidiana son frecuentes las ocasiones en que necesitamos saber, usualmente de manera rápida, un valor aproximado de una cantidad o de una operación aritmética. En este capítulo se presentan algunas estrategias para obtener dichas estimaciones.

Los siguientes capítulos se destinan al estudio de los conjuntos de números de acuerdo a su aparición en el currículo escolar: los números naturales en el Capítulo V, las fracciones en los Capítulo VI y Capítulo VII, los decimales en el Capítulo VIII, los enteros y los reales en el Capítulo X. El Capítulo IX trata razones, proporciones y porcentajes, usando los números decimales para expresarlos y calcularlos. Esta materia tiene gran presencia en la vida cotidiana y, por lo tanto, toda la población requiere haber adquirido destrezas y un dominio conceptual que rara vez se consigue a nivel escolar, donde son conocidas las dificultades asociadas a su enseñanza y su aprendizaje. En este capítulo se abordan estas dificultades y los errores que pueden aparecer.

En el Capítulo V, dedicado a los números naturales, aparecen algunos aspectos más complejos de la estructura de los números, principalmente aquellos relacionados con la división. Se estudian las consecuencias del algoritmo de la división, divisibilidad, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, su relación y cómo se pueden calcular, en particular el algoritmo de Euclides. Se introduce aquí el concepto de número primo y se muestra cómo estos números constituyen los bloques fundamentales en la estructura de los números a través del teorema fundamental de la aritmética, que permite expresar cualquier número de manera única como producto de números primos.

El desafío mayor que presenta la enseñanza de las fracciones justifica la dedicación de dos capítulos a su estudio. Hay suficiente evidencia internacional acerca de la existencia de una dificultad intrínseca al concepto de fracción, sus representaciones y sus significados. En este texto, se enfrenta esta dificultad recalcando que una fracción es un número que tiene una ubicación precisa en la recta numérica. El estudio de las operaciones con fracciones se aborda en el Capítulo VII a partir de los significados y formas de representación estudiadas en el capítulo anterior, ligándolas a la resolución de problemas de contexto. Los algoritmos de cálculo se desarrollan de manera intuitiva y luego se justifican desde una perspectiva más algebraica.

En el Capítulo VIII se presentan los números decimales como una extención del sistema de numeración decimal para representar los números de la recta numérica y su relación con las fracciones. Se estudian también las operaciones básicas con números decimales y sus algoritmos.

En todos estos capítulos dedicados a los conjuntos de números, se incluyen justificaciones y demostraciones de propiedades generales utilizando lenguaje algebraico, lo que permite reconocer la fundamentación de reglas particulares. Por ejemplo, las operaciones con fracciones son generalizaciones de las ideas que subyacen a las operaciones con números naturales, y la regla de los signos no es más que una consecuencia de la necesidad de que las operaciones con números negativos satisfagan las propiedades básicas de las operaciones con números naturales. Este enfoque permite estudiar las propiedades de las operaciones ganando comprensión sobre su significado y sus consecuencias.

Este libro, al igual que todos los de la colección ReFIP, no habría llegado a ser lo que es sin la enorme acumulación de experiencias y aportes generosos, que incluyen a cientos de estudiantes de Pedagogía en Educación Básica y a sus profesores, que probaron versiones de borrador y retroalimentaron su desarrollo. Esas versiones iniciales contaron con los valiosos aportes de Horacio Solar y Andrés Ortiz, y con las revisiones de María Aravena y Raimundo Olfos. A todos ellos, nuestros agradecimientos. También agradecemos a Pablo Dartnell, tanto por sus aportes al texto, como por sus revisiones y sugerencias. Agradecemos también las contribuciones de Patricio Felmer, Grecia Gálvez, Pedro Gómez, Ivette León y Francisco Rojas, a través de cuidadosas revisiones. También queremos reconocer el aporte de Héctor Ramírez quien, en la etapa final, revisó gran parte del texto. El extenso y comprometido trabajo del equipo de autores, con tan diversas experiencias, y el largo proceso de reformulaciones y ajustes para crear un texto íntegro y coherente a partir de la polifonía de visiones aportadas, deben haber dejado en sus páginas las huellas de la vitalidad y el compromiso que marcan la elaboración de este libro. Si ellas se transmitieran a los lectores, futuros profesores de Educación Básica, habremos entregado un texto que, además de ser una poderosa herramienta en su preparación matemática para enseñar, avive la llama de su vocación y sentido de ser parte de una gesta colectiva que busca mejorar la calidad de la educación que ofrecemos a todos los niños y las niñas de nuestro país.

Capítulo I

Números para contar y medir

Introducción

Uno, dos, tres, cuatro, muchos. Probablemente, nuestros antepasados primitivos dieron sus primeros pasos aritméticos contando de esa manera. De hecho, hay pueblos actuales en la Amazonia que todavía cuentan así: no tienen necesidad de contar más allá de tres o cuatro. A medida que los grupos humanos se hicieron más complejos, aumentaron las necesidades, se hizo imprescindible llevar la cuenta de rebaños y cosechas, del tiempo y de las estaciones; se debió medir los terrenos y la propiedad pública y privada, etc. Así surgieron los números y sus diversas formas de representación.

Los números se han usado desde tiempos inmemoriales en dos procesos distintos: por una parte, para contar (entonces se les suele llamar números cardinales) y por la otra, para ordenar (se les llama números ordinales). Así 1, 2, 3, ..., sirven para contar, asignamos 1 a un conjunto con un elemento, 2 a un conjunto con dos elementos, etc., y también sirven para ordenar, 1 es el primero, 2 es el segundo, 3 es el que sigue al segundo, etc. En este capítulo nos concentraremos principalmente en la primera de estas funciones. Cabe destacar que también los números se utilizan para designar algo, una persona, una casa, un bus, etc. Por ejemplo: los números de las cédulas de identidad, los números de teléfono o de un departamento; todos ellos no responden al cardinal de un conjunto, ni a la posición de un objeto en un ordenamiento determinado, sino que corresponden a una etiqueta que permite asignar una identificación.

A lo largo de este capítulo, estudiaremos cómo se construyen los números, poniendo énfasis en su funcionalidad como cardinales; las diversas formas de representación que han existido a lo largo de la historia, hasta llegar a la que actualmente usamos: el sistema de numeración decimal. De este último abordaremos sus principios y discutiremos aspectos relacionados con su enseñanza.

1. Las dos intuiciones básicas: piedras y segmentos

El principal uso de los números es contar. Sin embargo, esta idea tiene algo de circular: los números se inventaron para contar, esto es, asociamos un número a la cantidad de objetos que estamos contando, pero ¿qué es primero, contar o los números?

Para pensar

Un pastor de ovejas, al salir en la mañana con su rebaño, deposita en un canasto una piedra por cada oveja que sale del corral, al regresar en la tarde, saca las piedras del canasto una a una, a medida que las ovejas entran al corral.

- ¿Cuál es el significado de una piedra en el sistema de conteo usado por el pastor?
- ¿Cómo se expresa el total de ovejas que tiene el pastor en su rebaño?, ¿cómo se diría oralmente esta cantidad?
- ¿Qué significaría que sobren piedras en el canasto al llegar la tarde?, ¿y qué significaría que falten?

Contar usando piedras está íntimamente relacionado con los inicios de la aritmética, de hecho, la palabra *calcular* viene de *calculus*, que significa piedra en latín. Los *calculi* (bolitas de arcilla, guijarros) se usaban ya en Mesopotamia hace 11 mil años, mucho antes de la aparición de la escritura. Vemos que el procedimiento del pastor sirve perfectamente para llevar una cuenta y no precisa la idea de número, todo lo que necesita saber es que hay la misma cantidad de ovejas en el corral que de piedras en el canasto. Este proceso, de hacer coincidir los elementos de un conjunto con los de otro, está en la raíz de la idea de número.

El proceso de hacer coresponder colecciones que contienen la misma cantidad de objetos -los ojos de una cara, las orejas de un burro, las manos de un niño, etc.- nos lleva a la noción de *contener dos objetos* o *binaridad*, y de ahí a la idea abstracta del número *dos*, palabra o símbolo que representa esa noción. El número dos representa aquella propiedad que comparten todas las colecciones que contienen exactamente dos elementos. Lo mismo ocurre con todos los números.

De esta manera, surge para nosotros la primera visualización de los números: piedritas, cuentas o palitos, cada uno de los cuales representa una unidad. Nos podemos olvidar de las ovejas, de los choclos o los días. Para llevar un registro, nos basta con pensar en la canasta con piedritas. Así vemos que las piedras, palos u otros objetos son una primera abstracción: representamos la cantidad de objetos, arbitrariamente diversos, con una cantidad igual de piedras. Una alternativa a las piedras es usar marcas: rayas en el suelo o sobre un trozo de madera. Esto naturalmente es otro paso más en el camino de la abstracción y nos acerca a la idea de notación simbólica de los números.

Por ejemplo, el pastor de ovejas podría haber marcado en una tabla una raya por cada oveja de su rebaño que sale del corral, obteniendo una representación como la siguiente:

| | | | | | | | | | | | | | | |

Figura I.1.

La unidad es | y para representar los objetos de una colección se deben dibujar tantos de estos símbolos como objetos tiene la colección.

Pensemos ahora que al pastor le regalan algunas ovejas para su rebaño. Para determinar la cantidad que tiene ahora, puede agregar marcas al registro inicial, tantas como las ovejas le regalaron. El registro sería:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Figura I.2.

El resultado se obtiene al unir las representaciones de ambas cantidades, lo que más adelante llamaremos suma. ¿Cómo cree que se podría calcular una resta usando este tipo de representaciones?

La mayoría de nuestras operaciones y procedimientos puede efectuarse manipulando piedras u otro material concreto, o usando un sistema de representación como el descrito anteriormente, donde se utiliza un único símbolo para la unidad y a partir de él, se puede escribir cualquier cantidad.

Se han encontrado palos y huesos de animales con marcas de hasta **35.000** años de antigüedad. Formas más sofisticadas de palos marcados se usaron hasta el siglo XX en regiones campesinas de Europa para llevar cuentas de préstamos y deudas.

La segunda representación o visualización de los números es geométrica: los números representan la longitud de segmentos. Esta noción es algo más sutil que la anterior, ya que requiere de la elección de un patrón de medida. Las primeras unidades de medida fueron tomadas de lo más cercano, el cuerpo humano. Palmos, codos, pies, pulgadas (de pulgar) han sido usados como unidades de medida; de hecho, las dos últimas aún se usan en el sistema métrico anglosajón.

Entender los números como longitudes de segmentos respondió a la necesidad de medir distancias y superficies, y probablemente surgió mucho después que la necesidad de contar.

Con el desarrollo de la matemática griega, la concepción geométrica de los números se hizo más relevante. Para los griegos los números eran magnitudes geométricas. Todavía nuestro lenguaje conserva trazas de eso, por ejemplo, si multiplicamos un número por sí mismo, hablamos del cuadrado de ese número, en referencia al área de un cuadrado cuyo lado tiene la magnitud dada. Algo similar ocurre con el cubo. Sin embargo, no hay una palabra especial para designar la cuarta potencia de un número, ya que esta carece de un sentido geométrico evidente.

Esta concepción de los números se puede relacionar con la *recta numérica*, la cual consiste en una recta infinita en la que se ha marcado un punto arbitrario, el *origen*, que luego identificaremos con el **0**, y otro a su derecha, que identificamos con **1**. Estos puntos definen un segmento que constituye el *patrón de medida*, el cual nos permite graduar la recta. El número **2** se identifica con aquel punto a la derecha del **1**, tal que el segmento que estos determinan es congruente (de igual medida) con el patrón. Para representar el número **3**, se repite el procedimiento a partir del **2**, y así sucesivamente, como se muestra en la **Figura I.3**.

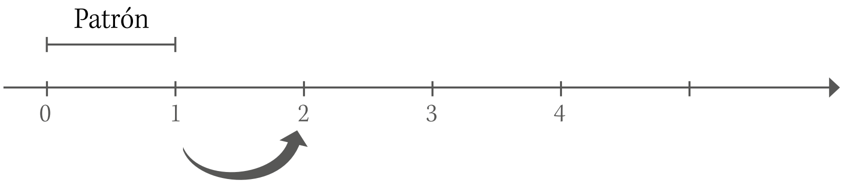


Figura I.3.

La recta numérica es una de las ideas más fecundas para visualizar y comprender las intuiciones sobre los números, en particular, a medida que vamos incorporando otros números distintos de los que nos sirven para contar, como los números racionales y los irracionales.

Esta forma de ver los números tuvo también influencias negativas en Occidente. Dada la importancia de la Filosofía griega, influida fuertemente por la Matemática, esta visión dificultó durante siglos el desarrollo del concepto de número, por ejemplo, el cero no puede ser un número, ya que no tiene magnitud; los números negativos tampoco tienen sentido, porque las magnitudes son positivas; los números racionales tenían un desarrollo muy complicado y los números irracionales tuvieron un difícil proceso de aceptación.

Ejercicios de la sección

1. La idea de número se desarrolló en un período de muchos miles de años. Trate de imaginar las etapas por las que tuvo que pasar el hombre primitivo para llegar desde los cinco dedos de su mano, hasta el número cinco y un símbolo para denotarlo. Escríbalas.

2. Considerando un sistema de representación en que se utiliza | para representar la unidad, muestre con un ejemplo:

   a. ¿Cómo se calcularía la resta entre dos cantidades?
   b. ¿Cómo se calcularía una multiplicación?, es decir, ¿cómo calcularíamos el resultado de una cantidad que se repite un cierto número de veces?

2. Contar y medir

Hemos escogido dos visualizaciones o intuiciones básicas para ilustrar el concepto de número. Cualquiera que sea la visualización que empleemos, ella tiene su origen en experiencias físicas sensoriales – contar objetos, medir distancias o pasos, entre otros – lo mismo sucederá con las operaciones elementales con números.

Para pensar

Un padre señala con orgullo "mi hija de 4 años sabe contar hasta 40", y para mostrar esto solicita a la niña que cuente de 1 hasta 40. La niña comienza a decir en voz alta la secuencia de números: uno, dos, tres, cuatro..., treinta y nueve, cuarenta. ¿Se puede afirmar que la niña sabe contar? ¿qué otra evidencia necesitaría para verificar esta afirmación?

2.1 Contar

Estudios conducidos con bebés indican que hay una primera noción de cantidad desde el nacimiento: al poco tiempo de nacidos, niños y niñas pueden distinguir entre cantidades pequeñas de objetos. Este proceso, que comparten con los adultos y con algunos animales, ha sido llamado *subitización*, y es la percepción instantánea de la cantidad de objetos de un conjunto, la que en humanos adultos se limitaría a conjuntos de hasta cuatro objetos. Aparentemente, para más de tres o cuatro objetos se efectúa el proceso de contar. Naturalmente, el proceso de subitización es solo percepción de cantidad, no produce un número, concepto elaborado a partir de muchos conjuntos o colecciones con el mismo número de elementos.

Contar los objetos de una colección puede resultar una tarea tan difícil como queramos, y depende de las condiciones en que se presentan los objetos. Por ejemplo, no es lo mismo contar a los niños que están al interior de una sala de clases si ellos se están moviendo de un lado a otro o si están sentados en una hilera. Claramente, si los niños y las niñas se están moviendo al interior de la sala, el proceso que se necesita para saber cuántos niños hay requiere un esfuerzo mayor que en el segundo caso, pues, por ejemplo, se necesitará marcar a los niños que se van considerando en el conteo o ubicarlos en otro lugar de la sala; es decir, distinguir de alguna forma a aquellos niños que ya consideramos en el conteo de aquellos que no.

Contar consiste en establecer una correspondencia uno a uno entre los objetos de una colección y la secuencia numérica, de tal forma que a cada uno de los objetos se le asigna solo un número de la secuencia. El último número nombrado corresponde a lo que se denomina *cardinal* de la colección. Observemos que esta es precisamente la misma idea que usaba nuestro pastor para establecer una correspondencia entre sus ovejas y las piedritas del canasto a la entrada del corral; solamente hemos reemplazado las piedras por un objeto abstracto, un número.

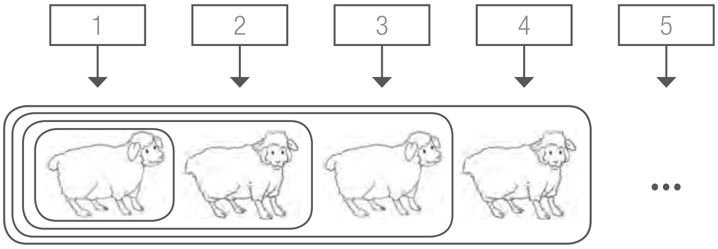


Figura I.4.

La cardinalidad o cantidad de elementos de un conjunto también nos permite establecer una *relación de orden* entre los números. Consideremos un rebaño con 5 ovejas y otro con 7 ovejas. Si quisiéramos igualar la cantidad de ovejas en ambos rebaños, necesitaríamos agregar 2 ovejas al primero. Diremos que 5 es menor que 7, ya que a cualquier conjunto con 5 elementos necesitamos agregar 2 elementos para igualarlo con un conjunto de 7 elementos. En general, diremos que un número n es menor que otro m, si a un conjunto con n elementos se lo puede completar con más elementos para obtener un conjunto de m elementos, y escribiremos $n < m$. En este caso, también diremos que m es mayor que n, y escribiremos $m > n$. En la recta numérica, el orden está explícito en su propia construcción: tendremos que un número es mayor que otro si está a su derecha.

La relación "$<$" es *transitiva*, es decir, si $n < m$ y $m < p$, entonces $n < p$. Esta propiedad se puede interpretar de la siguiente manera: "Si Juan tiene menos ovejas que Pedro, y Pedro tiene menos que Diego, entonces Juan tiene menos ovejas que Diego". También se tiene la propiedad de *tricotomía*: dados dos números m y n, se tiene una y solo una de las siguientes situaciones: $n < m$, $m < n$ o $n = m$. Si Juan y Pedro son dos pastores de ovejas, entonces Juan tiene menos ovejas que Pedro, o bien Pedro tiene menos ovejas que Juan, o bien ambos tienen la misma cantidad de ovejas.

El estudio de la relación de orden "$<$" y sus propiedades se abordará en el **Capítulo X** de este libro y en el **Capítulo II** del libro *Álgebra* de esta colección.

Ejercicios

1. Juan tiene 3 cajas con fichas: las cajas **A**, **B** y **C**. Él sabe que en la caja **A** hay más fichas que en la caja **B**. Además, sabe que en la caja **B** hay más fichas que en la caja **C**. ¿Qué caja tiene más fichas **A** o **C**?, ¿qué propiedad le permite justificar su respuesta?

2. Se sabe que una caja de lápices tiene más de 20 lápices y menos que 22. ¿Cuántos lápices tiene?, ¿qué propiedad está usando para justificar su respuesta?

Antes de contar, niños y niñas se limitan a repetir la serie de números naturales uno, dos, tres, etc., avanzando tanto como lo permiten sus memorias. Sin embargo, este "conteo" no está todavía relacionado con contar, propiamente dicho. Incluso es frecuente que ellos repitan la serie mostrando los objetos uno a uno, pero que no relacionen el último número con el cardinal de la colección que están contando. Contar se produce cuando se establece esa relación. Otros errores cometidos por niños y niñas en el proceso de contar y que han sido reportados por los especialistas son:

- Omitir alguno de los objetos.
- Señalar algún elemento dos veces.
- Enunciar un número sin señalar ninguno de los objetos.

Observemos las siguientes láminas con fichas. Ambas tienen nueve objetos, pero ¿se debe realizar el mismo procedimiento para contar en ambos casos?, ¿presentan ambas el mismo nivel de dificultad? Es común que, al presentar estas situaciones a niños y niñas al comienzo de su escolaridad, ellos realicen correctamente el conteo de la segunda situación, pero se equivoquen en la primera.

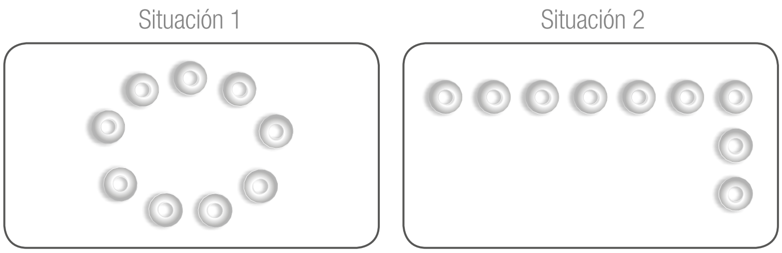


Figura I.5.

Los objetos de la primera situación se presentan en forma circular, mientras que los de la segunda se presentan en forma lineal.

Un aspecto que influye en la tarea de contar es la forma en que se presentan los objetos, que puede ser lineal, circular, desordenada, mezclada con otros objetos, etc. Esta característica puede hacer más fácil o más difícil la tarea. Por ejemplo, en la Situación 1, para efectuar correctamente el conteo, se debe determinar un primer elemento por donde comenzar y tenerlo en cuenta para no pasar dos veces por él; mientras que en la Situación 2, la presentación de los objetos sugiere un inicio y un final para realizar el conteo. Este aspecto puede parecer trivial, pero es fundamental para desarrollar en los estudiantes habilidades que les permitan contar colecciones bajo distintas condiciones. Algunos aspectos relacionados con contar son:

- El número de objetos de la colección.
- El tipo de objetos: concretos y manipulables, concretos y no manipulables, representaciones pictóricas.
- La ubicación de los objetos: accesibles o no accesibles.
- La configuración espacial de los objetos de la colección: lineal, circular, desordenada, etc.
- La familiaridad de los niños y niñas con los objetos de la colección.

Considerando estos aspectos, la tarea de contar puede requerir:

- Distinguir los objetos que son parte de la colección que se va a contar.
- Elegir un primer objeto por donde comenzar a contar.
- Decir los términos de la secuencia numérica en orden.
- Asignar cada término de la secuencia solo a un objeto de la colección que se está contando.
- Asociar cada objeto de la colección a un término de la secuencia.
- Identificar el último término de la secuencia que se dice como aquel que se asignó al último objeto y como la cantidad de elementos que tiene la colección.

Ejemplos

1) ¿Cuántas E hay en la siguiente sopa de letras?

P	A	P	A	N	O	E	L	R	P
T	B	A	I	G	K	L	M	Ñ	Q
R	E	Y	E	S	T	N	S	E	F
C	T	D	C	H	B	U	R	J	M
A	O	R	F	G	P	O	Q	U	E
M	E	B	E	L	E	N	S	Ñ	L
E	P	U	S	G	P	Q	R	I	O
L	i	c	w	b	a	o	z	L	E
L	N	K	R	X	O	L	Y	M	H
O	O	F	I	N	A	Ñ	O	J	G

Una posible estrategia es distinguir la letra que estamos contando, por ejemplo, encerrando cada una en un círculo. Luego, elegimos un punto de partida para empezar a contar, por ejemplo, comenzando por la letra que se encuentra en la esquina superior izquierda, y seguimos en orden recorriendo la sopa de letras, ya sea por filas o por columnas.

2) Se tienen las letras A, S, E y M. ¿Cuántas palabras de cuatro letras, con y sin sentido, se pueden formar usando estas letras?

Una posible estrategia es hacer una lista con todas las combinaciones siguiendo algún orden que permita listarlas todas:

ASEM, ASME, AESM, AEMS, AMES, AMSE,

SAEM, SAME, SMEA, SMAE, SEAM, SEMA,

MASE, MAES, MESA, MEAS, MSAE, MSEA,

EASM, EAMS, EMSA, EMAS, ESMA, ESAM.

Otro procedimiento, que se basa en la multiplicación, para determinar el número de combinaciones es notar que para la primera letra de la palabra hay cuatro posibilidades, luego de fijada esta letra, hay tres posibilidades para la segunda letra. De la misma forma, al fijar la segunda letra hay dos posibilidades para la tercera, y finalmente una sola posibilidad para la cuarta letra. Por lo tanto, el total de palabras es igual a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

El proceso de contar responde a la necesidad de saber cuántos elementos hay en un conjunto dado. Existen otros tipos de tareas que se abordan en los primeros niveles de la Educación Básica que también requieren de este proceso, tales como:

Producir una colección: en este tipo de tarea se espera que niños y niñas generen una colección de objetos a partir de cierta información. Esta información puede ser: la cantidad de elementos de la colección a producir, otro conjunto con la misma cantidad de elementos de la colección que se quiere producir, una relación de orden entre una colección conocida y la que se quiere producir, etc.

Ejemplo

En el ejemplo, se señala en forma simbólica la cantidad de pelotas a dibujar en la caja. La acción de dibujar las pelotas requiere que niños y niñas produzcan una colección de objetos a partir del número dado.

En el siguiente ejemplo, se da una colección con un cierto número de elementos y se pide producir otra colección con la misma cantidad de elementos. Esta situación puede presentar un nivel de complejidad mayor, dependiendo de la forma en que se plantee la actividad.

Ejemplo

Una profesora pone en un lugar de la sala varias botellas y en otro lugar, tapas para estas botellas. Solicita a niños y niñas que traigan la cantidad de tapas necesarias para poner una a cada botella, sin que sobre ni falten tapas.

El conteo es el procedimiento que permite resolver la tarea, pues los estudiantes deben cuantificar las botellas y considerar este número al seleccionar las tapas. Sin embargo, para que la actividad realmente propicie que los niños y las niñas cuenten la colección inicial y luego los objetos de la segunda colección, se debe resguardar que hagan un solo viaje, pues, sino podrían ir trayendo las tapas de una en una, de dos en dos, etc., realizando la tarea sin la necesidad de contar.

Comparar cantidades: dados dos conjuntos de objetos que no están disponibles simultáneamente, por ejemplo, un grupo de niños que está dentro de la sala de clases y un grupo de niñas que esta fuera de ella, se pregunta ¿hay más niños o niñas? Como no se encuentran disponibles en el mismo lugar, para responder es posible contar la cantidad de niños y luego la de niñas, y después comparar los números. Sin embargo, si hubiesen estado presentes ambos grupos al mismo tiempo, bastaría haber hecho una correspondencia uno a uno y luego observar si sobran niñas o niños para determinar qué hay más.

A nivel pictórico, dependiendo de lo que se quiera lograr, las colecciones deben presentarse en la misma hoja, si se desea que los alumnos realicen una correspondencia uno a uno, y en hojas diferentes, si lo que se quiere es que los niños cuenten.

Una variación de este tipo de actividades es en la que se presenta una colección de objetos y un número, y se solicita determinar si la cantidad de objetos es mayor, menor o igual que el número. Para responder a la tarea, podemos contar la colección de objetos disponibles y luego comparar los números.

Determinar el resultado de una operación: el conteo también aparece como la base para la comprensión inicial de las operaciones aritméticas, asociado a las acciones que permiten caracterizarlas. Por ejemplo, dadas dos colecciones A y B, cuyos cardinales son a y b, respectivamente, la adición o suma es la operación matemática que se asocia a la acción de juntar los elementos de ambas colecciones, obteniendo una nueva colección cuyo cardinal es $a + b$. El conteo es el procedimiento que permite obtener el resultado de $a + b$.

Para pensar

Utilizando fichas, un profesor plantea a sus alumnos una actividad relacionada con contar. Toma un montón de fichas y las pone desordenadas sobre su mesa. Pide a uno de los niños que pase y cuente las fichas, y anota el número en la pizarra. Luego mueve las fichas haciendo que cambien de posición y pregunta a sus alumnos si piensan que el resultado será el mismo o cambiará. Como observa que hay niños y niñas que no están muy convencidos de su respuesta, solicita a otro estudiante que pase y cuente nuevamente. Vuelve a anotar la cantidad en la pizarra.

- ¿Cuál cree usted que es el propósito del profesor al plantear esta actividad a sus estudiantes?
- ¿Qué propiedades y conocimientos de los números y de contar se estudian a través de la realización de la actividad?

Un aspecto importante en el estudio de los números en los primeros niveles de enseñanza es la noción de *conservación de la cantidad*. Piaget, quien realizó una serie de experimentos para caracterizar las etapas del desarrollo del razonamiento lógico de los niños, se refiere a la conservación de una cantidad como la capacidad de comprender que el cardinal de una colección de objetos, el volumen de un líquido o la longitud de una cuerda no varían si los objetos que la componen cambian de posición, el recipiente cambia de forma o la cuerda se enrolla de distinta manera. Existen numerosas actividades que permiten abordar con niños y niñas esta propiedad de manera intuitiva. Por ejemplo, poner una cantidad de líquido en un recipiente y luego verter dicho líquido en un recipiente con una forma distinta al inicial. Los niños que asimilaron la propiedad de conservación de la cantidad dicen que en el segundo recipiente hay la misma cantidad de líquido que había en el primero.

2.2 Medir

El significado básico de medir una magnitud, como podría ser longitud, masa, volumen, etc., en un objeto es determinar las veces que está contenida una unidad de medida de dicha magnitud, seleccionada como patrón de medición, en el objeto a medir. Por ejemplo, el proceso de medición de la longitud de un objeto requiere de la elección de una unidad de medida, sea esta estandarizada (metros, centímetros, pulgadas) o bien no estandarizada (cuartas, palitos de helado u otra). Luego se debe comparar esta unidad con el objeto que queremos medir. Por ejemplo, la longitud de la cinta que aparece en la **Figura I.6** es "un poco más que **5** unidades".

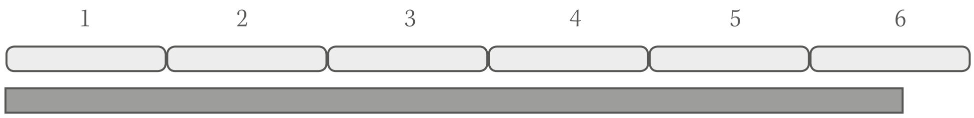
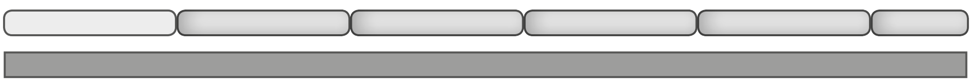


Figura I.6.

De esta manera, el número de veces que cabe la unidad de medida en el objeto a medir se puede expresar usando los números naturales y generando un proceso similar al conteo.

Para pensar

Una persona midió la cinta anterior usando además otra unidad más pequeña. Observe la medición realizada.



¿Cómo se expresa la longitud de la cinta?

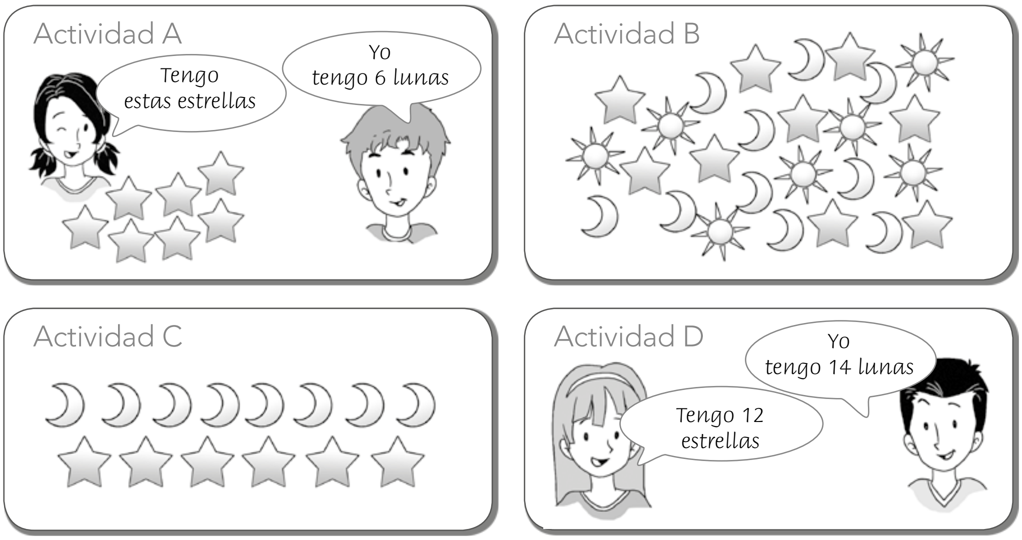
Vemos que el proceso de medir en este ámbito es discreto, es decir, se usa contar para medir, por ejemplo: la mesa mide una, dos, tres…, ocho cuartas. Contamos las unidades de medida necesarias para medir la mesa. La diferencia con el conteo de piedras es que los objetos a contar son más abstractos: no se cuentan objetos, sino acciones, las veces que se debe poner la unidad de medida una después de la otra para completar la medición.

Cuando medimos una magnitud, por ejemplo una longitud, usando una unidad de medida como el centímetro, esta medición puede ser exacta o puede sobrar un trozo que es menor a un centímetro. En el segundo caso, para expresar la medida de longitud contamos las veces que está contenido el centímetro y luego podemos usar una unidad más pequeña, como los milímetros, para medir el trozo que sobró.

En los capítulos siguientes, cuando estudiemos las operaciones con números, veremos que contar y medir tienen particularidades que las diferencian. Analizaremos, por ejemplo, que el concepto de número como medida, al estar estrechamente asociado a la imagen de la recta numérica, se generaliza con mayor facilidad.

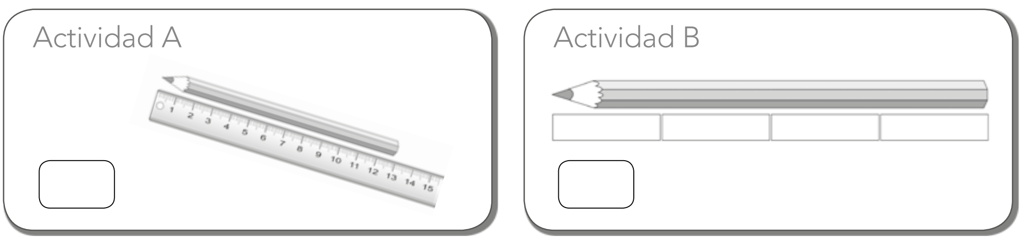
Ejercicios de la sección

1. Las siguientes actividades tienen como objetivo que los estudiantes comparen la cantidad de estrellas con la cantidad de lunas. Observe las actividades y conteste las preguntas:



   a. Describa los procedimientos que podrían usar los niños y niñas para efectuar la comparación de lunas y estrellas.
   b. ¿En cuál de las actividades anteriores es necesario realizar un conteo para resolver la tarea? Explique su respuesta.
   c. ¿Qué dificultades podrían tener los niños y niñas para realizar cada una de estas actividades?

2. Observe las siguientes actividades, en las que se pide medir un lápiz con el objeto dado y anotar el resultado en el recuadro:



   a. Describa el procedimiento que puede usar un niño de 2º Básico para responder en ambos casos.
   b. ¿En cuál de las actividades anteriores la medición de la longitud del lápiz corresponde a un proceso de contar? Explique su respuesta.

3. Una profesora, en los niveles iniciales de enseñanza, plantea la siguiente actividad a sus estudiantes: "Poner un solo botón al interior de cada vaso, no debe quedar ningún vaso sin botón".

A cada niño le entrega los botones suficientes para desarrollar la tarea. Observe que los vasos están invertidos y solo tienen una ranura para depositar los botones. Además, los vasos son opacos, es decir los niños y las niñas no pueden mirar en su interior.

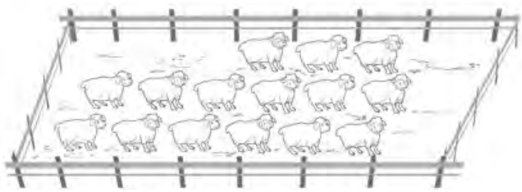
a. ¿Es necesario que los niños y las niñas cuenten para resolver la tarea? Explique su respuesta.
b. Describa paso a paso el procedimiento que pueden usar los niños para resolver la tarea y las posibles dificultades que se les podrían presentar.
c. ¿En qué curso plantearía esta actividad? Explique su respuesta.

3. Representaciones de los números

A lo largo de la historia, existieron diversas formas de representar una cantidad, hasta llegar al sistema de numeración que hoy en día utilizamos. A pesar de la familiaridad que tenemos hoy con las representaciones de los números, la humanidad se demoró milenios en desarrollarlas. Los pueblos han producido formas muy diversas para lograr este objetivo. Estas representaciones difieren drásticamente no solo en su forma material, sino que también en el trasfondo conceptual con el que organizan los símbolos.

Para pensar

Imaginemos nuevamente un pastor de ovejas como al inicio del capítulo. Él quiere registrar la cantidad de ovejas que hay en una sección de su corral.



Dependiendo del momento histórico y de la civilización a la que pertenece este pastor, al registrar de manera correcta la cantidad de ovejas que hay en el corral, puede escribir:

Pastor antiguo	Pastor romano	Pastor egipcio	Pastor maya	Pastor actual
∣∣∣∣∣∣∣∣∣∣∣∣∣∣∣	XV	∩ ∣∣∣∣∣	≡	15

- Los registros de los diferentes pastores, ¿corresponden al mismo número?
- El significado de ∣, ___ , y **1** en los registros, ¿es el mismo?
- ¿Importa el orden en que se ubican los distintos símbolos en las representaciones anteriores? Explique su respuesta.

Estamos tan acostumbrados a los números y sus representaciones que rara vez nos detenemos a pensar en ellos. De hecho, en un sentido técnico, a veces es útil hacer una distinción entre un número y el símbolo empleado para denotarlo, al que se suele llamar numeral. Por ejemplo, **15** es el numeral que representa a las *quince* ovejas de la imagen en la actualidad, pero no es el número quince. Resulta evidente que no solo en Matemática, sino que en todo ámbito, el nombre no es lo mismo que aquello que representa; Cervantes es el autor de *Don Quijote de La Mancha*, pero Cervantes, la persona, no tenía nueve letras, es su nombre el que tiene nueve letras. Esta distinción entre nombre y objeto, útil en un contexto lógico riguroso, puede causar confusión y no debería ser traspasada a los niños y las niñas.

Para representar los números se usa, en general, un conjunto de símbolos y de reglas que permiten representar cualquier cantidad, constituyendo lo que se denomina un *sistema de numeración*. Los sistemas de numeración han ido evolucionando con el tiempo e, incluso, en un mismo período histórico ha existido más de un sistema, dependiendo del lugar geográfico donde se encontraba la civilización que lo utilizaba.

La forma de representar los números puede ser figurada, oral o escrita. Las primeras corresponden a aquellos sistemas que utilizan marcas físicas sobre soportes u objetos, por ejemplo, el sistema usado por los incas que hacían nudos sobre cuerdas. Los sistemas orales son aquellos que atribuyen un nombre, con palabras de su lengua natural, a cada número, de tal forma que al transcribirlos se escriben las palabras correspondientes, un ejemplo es el sistema usado por los mapuche que abordaremos más adelante. Los sistemas escritos son aquellos que usan símbolos ya existentes o nuevos para representar los números, por ejemplo, los mayas que usaron puntos y guiones para representar los primeros 19 dígitos y luego representaban cualquier número usando un sistema posicional.

Volvamos a nuestro primitivo antepasado que comenzó a llevar registros de sus ovejas o de los días haciendo marcas en un palo o hueso, una rayita, 1 oveja; cinco rayitas; 5 ovejas; pero ¿qué pasa si tiene, digamos, 78 ovejas? Obviamente, necesita demasiadas rayitas; más aún, se hace muy difícil saber con una simple mirada cuántas ovejas tiene registradas. También es difícil comparar: se necesita un ojo bastante agudo para distinguir entre setenta y cinco y setenta y ocho rayitas.

Probablemente, lo más fácil es agrupar cierto número de rayitas con un símbolo especial. Un ejemplo de esto es el sistema que usamos comúnmente para llevar cuentas rápidas, por ejemplo, cuántos puntos hemos anotado en un juego o los votos en un club, como se muestra en la Figura I.7.

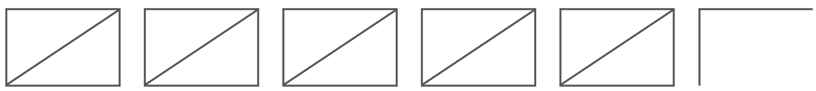


Figura I.7.

Podemos imaginarnos que nuestro antepasado usaba un método similar contando con los dedos de una mano (con la otra anotaba), y cada vez que contaba 5 objetos, hacía una marca distinta, por ejemplo, una mano.

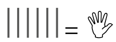


Figura I.8.

De esta manera 3 manos y 4 dedos representaban 19 ovejas.

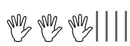


Figura I.9.

Podemos llevarlo un paso más allá y pensar que usaba un símbolo adicional para denotar un grupo de 5 manos y, luego, un nuevo símbolo para representar 5 de estos últimos. De esta forma, se tiene un sistema como el siguiente:

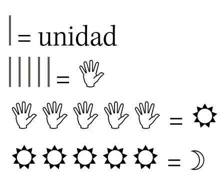


Figura I.10.

Para pensar

Considerando el sistema de numeración descrito anteriormente, que utiliza los símbolos: |, ✋, ☼.

- ¿A cuántos | equivale ☼?
- ¿Qué cantidad representa el número || ✋ ☼ ☼ ☼?, ¿y el número ☼ ☼ ☼ || ✋?
- ¿Importa el orden en que se escriben los símbolos de este sistema?
- ¿Cuál es la mayor cantidad que se puede escribir con este sistema?

Existieron muchas civilizaciones que utilizaron este tipo de sistemas de numeración, denominados *aditivos* o *agregativos*. En ellos solo se utiliza la adición para formar los números, yuxtaponiendo tantos símbolos como sea necesario para escribir una cantidad. Un nuevo símbolo se introduce a partir de la agrupación de varios símbolos de un nivel inferior. Así, por ejemplo, en el sistema descrito anteriormente, cada 5 unidades o agrupaciones de unidades se introducía un nuevo símbolo. Un ejemplo de este tipo de sistemas es el de los egipcios, quienes usaban ciertos jeroglíficos para los números 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 y 1.000.000 (ver Figura I.11).

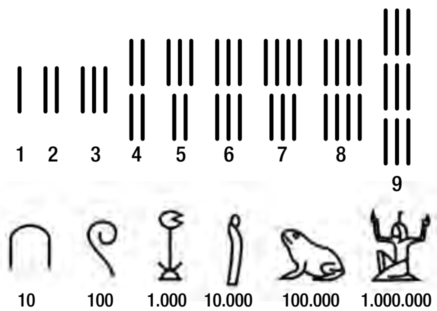


Figura I.11.

Para pensar

Una dificultad de estos sistemas es que se debe inventar un nuevo símbolo para cada grupo de objetos. Una ventaja de los números arábigos es que con solo 10 símbolos; los dígitos[1] 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; se pueden escribir todos los números, por grandes que estos sean, ¿En qué se fundamenta esto?

Otro ejemplo de sistema de numeración agregativo es el de los romanos, que además incluyeron otras reglas para representar cantidades. Usaban ciertas letras de su alfabeto:

I, V, X, L, C, D y M,

Esto para denotar los números 1, 5, 10, 50, 100, 500 y 1.000, respectivamente. Para escribir números más complejos, procedían a juntar estas letras en un orden determinado y los valores debían sumarse, por ejemplo:

MMLVII

[1] Dígito deriva del latín *digitus* o dedo.

Esto debe interpretarse como 1.000 más 1.000 más 50 más 5 más 1 más 1, o sea, 2.057 en nuestra notación. Los símbolos que denotan números más grandes anteceden a los que representan números menores. Con el propósito de ahorrar símbolos, esta regla se complementa con otra: si se invierte el orden, entonces el menor se resta del mayor; por ejemplo, en lugar de escribir IIII para denotar al número 4, se escribe IV.

No todas las combinaciones son aceptables, solo las letras I, X y C pueden ser antepuestas y tampoco en cualquier combinación. Así, I puede anteceder solo a V y a X, para forman respectivamente IV, 4, y IX, 9. De la misma manera, X puede anteceder a L y C, pero no puede ir antes de D ni de M. Cien, o C, puede anteceder a D y a M para formar CD, 400 y CM, 900.

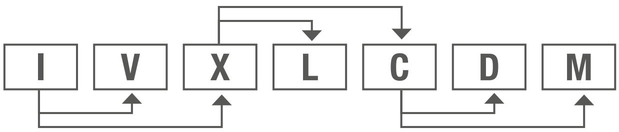


Figura I.12.

En resumen, solo son posibles las siguientes combinaciones:

Número decimal	Número romano	Interpretación
4	IV	Uno menos que cinco
9	IX	Uno menos que diez
40	XL	Diez menos que cincuenta
90	XC	Diez menos que cien
400	CD	Cien menos que quinientos
900	CM	Cien menos que mil

Tabla I.1.

De modo que LD no es una forma lícita de denotar al número 450, para ello debemos escribir CDL, literalmente, 100 menos que 500, más 50. De la misma manera, el 8 no puede escribirse como IIX, debe escribirse VIII. Probablemente, el error más frecuente en periódicos y crucigramas es escribir 49 como IL y 99 como IC, en lugar de los correctos XLIX y XCIX, respectivamente.

Para denotar números más grandes se usaban otros mecanismos, por ejemplo $\overline{\text{X}}$; denotaba al 10.000. La raya superior multiplicaba por 1.000 al símbolo inferior.

Para pensar

Es interesante detenerse a pensar cómo hacían las operaciones en la Antigüedad. Por ejemplo, trate de sumar 1.532 + 4.844 usando números romanos. Hágalo ahora con números arábigos. Trate ahora de multiplicar esos números. ¿Se le ocurre cómo hacerlo?, ¿qué conclusión saca de esta reflexión?

Vemos que este tipo de representación aditiva de los números es muy engorrosa, particularmente para números grandes. Sin embargo, como veremos más adelante, su principal defecto es que no favorece el cálculo ni el desarrollo de algoritmos para efectuar las operaciones. Durante la Edad Media, por ejemplo, en Europa se usaban números romanos, pero para las operaciones aritméticas, al igual que en la Antigüedad clásica, se seguían usando ábacos. Los resultados eran registrados con números romanos.

El sistema de notación decimal que usamos actualmente, en cambio, facilita enormemente los cálculos. Fue desarrollado en la India y lo trajeron a Occidente los comerciantes árabes. No se impuso en Europa sino hacia el siglo XVI.

La manera de nombrar a los números también es interesante y suele citársela entre un factor que incide en el aprendizaje temprano de la aritmética[2]. Por ejemplo, en nuestra nomenclatura castellana los números once, doce, trece, catorce y quince son algo rebuscados, si se los compara con dieciséis, diecisiete, dieciocho y diecinueve, que dicen explícitamente lo que valen. Algo similar ocurre con las decenas: veinte, treinta, etc. Algunas centenas, en cambio, son más transparentes, doscientos y trescientos dicen: dos veces cien, tres veces cien. Sin embargo, quinientos ya no lo es tanto, hay que conocer la raíz latina *quinque*, del número cinco.

El origen de estos nombres, por así decirlo, irregulares, es histórico. Once proviene del latín *undecim*, o "uno y diez"; doce, de *duodecim*, o "dos y diez"; etc. Por algún motivo, al llegar a dieciséis, *sedecim*, que en francés, por ejemplo, sobrevivió como *seize*, se pasó al uso más analítico, lo mismo que diecisiete, dieciocho y diecinueve. Se puede averiguar más sobre este tema en el *Manual de gramática histórica española* de Ramón Menéndez Pidal.

Esta no es una particularidad del castellano, otros idiomas, como el inglés, el alemán, el francés, etc., tienen el mismo problema, no así, por ejemplo, el mapudungun, en el que los nombres de los números se construyen en forma regular, como se muestra a continuación:

Número	Nombre
1	kiñe
2	epu
3	küla
4	meli
5	kechu
6	kayu
7	regle
8	pura
9	ailla
10	mari
100	pataka
1.000	warangka

Número	Nombre
11	mari kiñe
12	mari epu
21	epu mari kiñe
22	epu mari epu
30	küla mari
40	meli mari
54	kechu mari meli
87	pura mari regle
200	epupataka
375	külapataka regle mari kechu
1.069	warangkakayumariailla
3.562	külawarangkakechupatakakayu mari epu

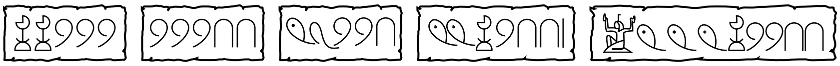
Tabla I.2.

[2] Aritmética viene del griego *arithmos*, que viene de "número" y *techné*, que significa "habilidad".

Ejercicios de la sección

1. Utilizando el sistema de numeración egipcio, responda:

   a. ¿A qué números en nuestro sistema corresponden las siguientes representaciones?

   b. Represente en el sistema de numeración egipcio los siguientes números:

   321 423 6.346 8.941

2. Utilizando el sistema de numeración romano, responda:

   a. ¿A qué números de nuestro sistema corresponden los siguientes?

   XXIV CCXCI DCCXXII

   b. ¿Cómo se escribe el 3.322 en este sistema?

   c. Calcule CXXIV + DCCXCII.

3. En una civilización antigua, representaban cantidades usando I para indicar la unidad. Al tener IIII escribían Ψ, para Ψ Ψ Ψ Ψ usaban Φ, y cuando tenían ΦΦΦΦ escribían Θ.

   a. ¿Qué cantidad representa el número IIIΨΨΘ?

   b. ¿Cuál es el número que viene inmediatamente después de IIIΨ en la secuencia numérica?

   c. Escriba “cuarenta y dos” usando esta forma de representación.

   d. ¿Cuál de las siguientes cantidades es mayor, IIIΨΦΦ o IIIΘ? Justifique su respuesta.

   e. ¿Cuál es la mayor cantidad que se puede representar usando esta forma de representación de números?

4. Los sistemas de numeración posicional

Recordemos el sistema de numeración que usaba el pastor de ovejas en los ejemplos de las secciones anteriores, donde | indica la unidad, ✋ representa un grupo de cinco unidades, ☼ representa un grupo con cinco ✋, y ☽ representa un grupo con cinco ☼. El pastor y sus coterráneos utilizaban este sistema principalmente para registrar cantidades, por ejemplo, la cantidad de frutas que recogen en un día de cosecha, el número de animales que tienen, etc. Imaginemos que el dueño de un predio solicitó a varias personas que le ayudaran con la cosecha de manzanas. Él anotaba la cantidad que recogía cada uno y premiaba a quien obtuviera el número mayor. Así, el dueño del predio llegó a tener una lista como la siguiente:

☽☼☼✋
☽☼✋|||
☽☽☼☼✋|||
☽☽☽☼☼☼||
☽☼✋✋✋|
☽☽☼☼☼✋✋

Figura I.13.

Dibujar tantos símbolos no era una tarea fácil, por ello ideó un sistema que le permitía registrar más rápidamente los números sin necesidad de dibujar una y otra vez los símbolos. Para ello, usaba una tabla donde ubicaba los símbolos que representaban las agrupaciones y usaba marcas para indicar la cantidad de símbolos que tenía de cada tipo en ambos números. Así, por ejemplo, al representar las dos primeras cantidades de la lista en la **Tabla I.3** se tiene:

☽	☼	✋	|
⊙	⊙⊙	⊙	
⊙	⊙	⊙	⊙⊙⊙

Tabla I.3.

De tanto usar este sistema, los habitantes de esta comunidad un día se dieron cuenta de que para representar un número no era necesario repetir tantas veces los símbolos, y comenzaron a usar solo las marcas: ⊙ para indicar un símbolo, ⊙⊙ para indicar 2 símbolos, ⊙⊙⊙ para indicar 3 símbolos y ⊙⊙⊙⊙ para indicar 4 símbolos, y siempre en el orden establecido. Así, el siguiente número lo representaban:

☽☽☼☼☼✋✋||| ⟶ ⊙⊙ ⊙⊙⊙ ⊙⊙ ⊙⊙⊙

Figura I.14.

Para pensar

Un habitante de esta antigua comunidad cosechó ☽✿✿✋✋✋|| manzanas en la mañana y ☽☽☽✋✋✋|| durante la tarde. Representó ambas cantidades usando el nuevo sistema de representación:

Mañana: ⊙ ⊙⊙ ⊙⊙⊙ ⊙⊙ Tarde: ⊙⊙⊙ ⊙⊙⊙ ⊙⊙

Al mirar ambas representaciones exclamó: ¡Coseché más manzanas en la mañana que en la tarde!

¿Está de acuerdo con la afirmación del habitante de esta comunidad?

El sistema de numeración que ocupa esta comunidad pasó de ser agregativo a ser posicional, esto quiere decir que la posición en que se ubica un símbolo influye en su valor; por ejemplo, ⊙⊙ en la posición de la derecha corresponde a 2 unidades, mientras que en la segunda posición de derecha a izquierda corresponde a dos grupos de 5 unidades. Recordemos que los habitantes definieron símbolos para la unidad y los números comprendidos entre la unidad y la base, esto es: ⊙, ⊙⊙, ⊙⊙⊙ y ⊙⊙⊙⊙; y le dieron un valor a la posición que ocupan. Sin embargo, este tipo de notación puede traer confusión, ya que, por ejemplo, ⊙⊙⊙ ⊙⊙ puede corresponder a 17 o 85 u otras cantidades, dependiendo de la posición a la que se refiere. De esta forma, es necesario acordar que siempre la posición de la derecha es la unidad, la que sigue son los grupos de 5 unidades, y así sucesivamente. Pero, ¿qué pasa si la cantidad que se quiere representar no tiene unidades? Se hace necesario introducir un nuevo símbolo que indique ausencia de unidades o agrupaciones.

El cero

El cero hizo su aparición tardíamente en el desarrollo de la Matemática. Son pocas las culturas antiguas que tuvieron un concepto del cero: la India clásica y la civilización maya.

Desde el punto de vista griego, el cero no puede ser un número, porque ¿puede haber una magnitud geométrica que no tiene magnitud?, ¿cuál es el área de un cuadrado de lado cero?, ¿en qué proporción está un segmento de magnitud 5 con otro de magnitud cero? Ninguna de estas preguntas tiene una respuesta razonable. Desde el enfoque de las piedras, también hay dificultades. Si los números sirven para contar, ¿qué cuenta el cero? La respuesta a esto es más razonable: el cero es el número que usamos para contar las piedras de un canasto vacío. Debemos observar que esta última afirmación significa un enorme salto en el grado de abstracción. El cero permitió el desarrollo de nuestro sistema decimal.

En resumen

A lo largo de la historia se han utilizado distintos tipos de sistemas para representar los números:

- **Sistemas agregativos:** utilizan un conjunto de símbolos y un principio aditivo para representar cualquier cantidad. No importa el orden en que se escriben los símbolos, ya que cada uno de ellos tiene un valor determinado que aporta a la formación del número independiente de la posición en que se encuentre.
- **Sistemas de numeración posicional:** utilizan un principio aditivo y multiplicativo para la formación de los números, un grupo de símbolos que permite representar cualquier cantidad, y otorgan un valor a la posición en que se ubican dichos símbolos. De esta forma, para representar una cantidad se ubican los símbolos en las distintas posiciones, de manera que el valor que aporta a la formación del número es el producto entre su valor específico y el de la posición en que se encuentra. El número representado corresponde a la suma de los aportes parciales de cada símbolo.
- **Sistemas de numeración mixtos:** utilizan principios de los sistemas de numeración agregativos y posicionales.

4.1 El sistema de numeración decimal

Probablemente porque tenemos 10 dedos en las manos el proceso de agrupar unidades se hace de 10 en 10; de esta manera, si juntamos 10 unidades, decimos que tenemos una decena. Estas decenas se pueden considerar como nuevas unidades de segundo orden. Contamos ahora de 10 en 10 y cuando juntamos 10 decenas decimos que tenemos una centena, y así sucesivamente: 10 centenas son una unidad de 1.000, 10 de estas son una unidad de 10.000, etc.

Para pensar

En una clase de Matemática de 2° Básico, una profesora observa la siguiente respuesta para completar una secuencia ascendente, en uno de los cuadernos de sus alumnos.

115	116	*117*	*118*	*119*	*1.110*

¿A qué atribuye usted el error del estudiante?

El sistema de numeración que usamos actualmente demoró varios siglos en ser construido, es posicional y utiliza una base 10 para la formación de los números. De esta forma, con los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se puede representar cualquier cantidad. Estas ideas son bien conocidas por cualquier adulto y muchas veces esto es un obstáculo para entender el proceso de aprendizaje que viven los niños y niñas cuando se encuentran por primera vez con este sistema. Una de las dificultades que se observan frecuentemente en el aprendizaje de su estructura es la noción de canje, es decir, que cuando se tienen 10 unidades de un orden determinado, estas corresponden a una agrupación del nivel inmediatamente superior. De esta forma, al representar un número en una posición solo se puede escribir un dígito, por tanto, al agregar una unidad, por ejemplo al **319**, se forma una decena con el **9** que aparece en la posición de las unidades, y se agrega **1** a la posición de las decenas, escribiendo **0** en la posición de las unidades. Lo anterior nos lleva a reflexionar sobre las diferentes alternativas que se pueden utilizar para la enseñanza del sistema de numeración, sus ventajas y desventajas. Es importante, entonces, analizar otros obstáculos con los que nos encontraremos al abordar la enseñanza de este sistema de numeración.

Ejercicios

1. ¿Cuál de las siguientes secuencias cree usted que puede presentar mayores dificultades a los niños?, ¿por qué?
   a. **11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.**
   b. **32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40.**
2. ¿Cuáles cree que son las dificultades de los estudiantes al pasar del **99** al **100**?
3. Considerando cómo se anotan y nombran los números hasta el millón:
   a. ¿Puede identificar regularidades o patrones?
   b. ¿Qué excepción a los patrones o irregularidades encuentra?
   c. Señale los efectos positivos o negativos que pueden tener estas reglas y sus posibles excepciones en la facilidad con que los niños se familiarizan con los números.

Seguramente, la respuesta al ejercicio 3. dio cuenta de varios aspectos. A partir del **20** y hasta el **99**, cada nueva decena se nombra como la decena y las unidades (cuarenta y cinco, por ejemplo), con modificaciones muy menores cuando se pega todo eso en una sola palabra (como en el veintitrés). Sin embargo, para la decena entre el **10** y el **19** no es así; del **11** al **15**, los números tienen su propio nombre (no se dice "diez y dos", sino que "doce"). A partir del **16,** se comienza con la regularidad descrita.

También respecto de la denominación de las "unidades de orden superior", que es el tema que estábamos tratando, es posible intuir algún tipo de regularidad, pero nuevamente las excepciones abundan. Luego de las unidades de mil, por ejemplo, tenemos las decenas de mil, las centenas de mil y para evitarnos la repetición de decir "mil unidades de mil", aparece la nueva denominación de millón. Después de los millones tenemos las decenas de millones, las centenas de millones, los miles de millones, las decenas de miles de millones, las centenas de miles de millones y nuevamente, para evitarnos los "millones de millones", aparecen los billones. Esperaríamos que la nueva denominación para las unidades de orden superior hiciera su aparición a la altura de los "billones de billones".

Ejercicios

1. Intente dar una descripción precisa del patrón que pareciera haberse formado en el párrafo anterior, y explique por qué, de mantenerse dicho patrón, no se necesitaría una palabra nueva hasta las unidades de orden superior correspondientes a los billones de billones. Describa, además, cómo deberían irse llamando las unidades de orden superior, hasta llegar al billón de billones.

2. Suponga, por un momento, que la nomenclatura de los números efectivamente siguiera ese patrón a la perfección (cosa que veremos que no ocurre, nos estamos poniendo en un caso hipotético para efectos del ejercicio), y le diésemos un nombre nuevo al billón de billones, digamos un "fantastillón". ¿Cuándo necesitaríamos una nueva palabra (digamos, el "gigantillón"), si continuara nuevamente ese patrón? Describa como se llamarían las unidades de orden superior entre el "fantastillón" y el "gigantillón", ¿a cuántos millones correspondería un "gigantillón"?

Desgraciadamente, el patrón que intuíamos no continúa. Aparece un nuevo nombre mucho antes, el millón de billones recibe el nombre de trillón y esta irregularidad se convierte en la nueva regularidad: el millón de trillones es el cuatrillón, el millón de cuatrillones el quintillón, etc. Y esta sí es una regularidad que no se interrumpe en adelante.

Observemos que realmente la primera irregularidad, para las denominaciones de las unidades de orden superior, había aparecido mucho antes. Luego de la centena, tal vez quisiéramos haber visto aparecer las decenas de centenas, en lugar de la unidades de mil, ya que el nombre siguiente debiera haber aparecido recién para denominar las centenas de centenas. Es importante reflexionar sobre estas fuentes de confusión a nivel de nomenclatura que experimentan los niños y niñas que están en proceso de familiarización con el sistema numérico.

Y si deseamos hacer aún más complicada nuestra convivencia con estos nombres, podemos mencionar que en nuestro país usamos la llamada "escala numérica larga", que corresponde a lo que ya hemos mencionado respecto a cómo se denominan los números sobre el millón. En países como Estados Unidos han adoptado la "escala numérica corta", que se traduce en que no esperan a llegar al millón de millones para usar la terminología billón. El billón de los norteamericanos es solo mil millones, y siguen avanzando de a miles, es decir, mil billones es para ellos un trillón, mil trillones es un cuatrillón y así sucesivamente. Así, si se escucha hablar de billones, trillones y otras cantidades gigantescas, primero hay que averiguar si provienen de nuestra escala (la escala larga) o de la escala corta.

Ejercicio

¿Cómo se dice en escala corta un billón de nuestra escala? ¿Cómo se dice con nuestra escala un cuatrillón estadounidense?

Para finalizar la sección, lo invitamos a reflexionar sobre la construcción del sistema numérico y la importancia de darle una mirada apropiada a cada pequeño detalle, por ejemplo, sabemos muy bien que una decena corresponde a 10 unidades, y que una centena a 100 unidades (después de todo, incluso el nombre centena nos recuerda esto). Sin embargo, la característica importante de la centena, que la hace corresponder a la unidad de orden superior siguiente a la decena, es que corresponde a 10 decenas. Este es el hecho clave que se relaciona con la construcción del sistema decimal y, por lo tanto, es lo que debiésemos recalcar más con nuestros estudiantes. Sin duda, es cierto que la centena corresponde a 100 unidades, pero eso no nos ayuda a entender mejor el sistema posicional.

Aquí lo que es importante es la notación. Pensemos en un conjunto con, digamos, dos mil quinientos treinta y dos objetos. Agrupando este número en grupos de diez, cien y mil, corresponde a dos unidades, más tres decenas, cinco centenas y dos unidades de mil, o:

$$2.532 = 2 \cdot 1.000 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2$$

Observamos que lo que hace nuestra notación es resumir toda esta información conservando solo el número de unidades, decenas, centenas, etc.

UM	C	D	U
2	5	3	2

Tabla I.4.

De esta manera, cada dígito 2, 5, 3, 2 tiene asociada una posición, la que indica el tipo de unidad a la que corresponde, por ejemplo, 3 está en la posición de las decenas, por lo tanto, representa 3 decenas.

Los dígitos que aparecen en un número tienen dos dimensiones, una es la cantidad que representa ese dígito y la otra es la posición. El mismo dígito en dos posiciones diferentes significa cosas distintas, por ejemplo, el dígito 2 que aparece en el número 201 representa una cantidad muy distinta que el que aparece en el número 12. Es por esto que el cero juega un papel crucial. Si tenemos dos centenas y tres unidades, debemos representar este número indicando que no hay decenas, solo unidades y centenas. ¿Cómo decimos que no hay decenas? Acordamos antes que el cero es el número que usamos para contar el vacío, la ausencia de algo. De esta manera, la representación de esta cantidad debe ser 203, lo que nos indica que hay dos centenas, ninguna decena y tres unidades.

Sin ir más lejos, ya habíamos escrito más arriba los números 1.000, 100 y 10. Vemos que estos símbolos representan exactamente lo que queremos decir; por ejemplo, el primero de ellos representa una unidad de mil y ninguna centena, ni decena, ni unidad. El cero entonces nos indica la falta de unidades de la magnitud dada y sirve para guardar el lugar. Si no contáramos con el cero, ¿cómo distinguiríamos entre el 203 y el 23? Algunas civilizaciones, por ejemplo, los babilonios, debían confiar en el contexto[3] para determinar si un símbolo representaba una unidad o un factor de 60, o un factor de 3.600, etc., ya que ellos usaban un sistema en base 60.

[3] Muy tardíamente, en tiempos de Alejandro Magno, en el siglo IV a. C., los babilonios introdujeron un símbolo adicional para representar las cifras posicionalmente, sin depender del contexto.

A la representación de un número usando el sistema decimal, por ejemplo 2.532, se le llama *representación decimal* o *expresión decimal* del número. A cada dígito que aparece en esta representación se le llama cifra. Por ejemplo, 5 es la cifra de las centenas del número 2.532. Vemos que hemos usado un punto entre las centenas y las unidades de mil. Es usual colocar un punto cada tres cifras, para facilitar la lectura de números con muchas cifras. También es usual dejar un pequeño espacio en lugar del punto. En países anglosajones, se usa una coma en lugar de este punto (y un punto en lugar de la coma que usaremos con números decimales). Todo esto no es más que una convención, y podemos perfectamente expresar números sin ninguno de estos agregados.

Comparación

La estructura posicional y la base 10 del sistema de numeración permiten construir un procedimiento para comparar dos números. Consideremos, por ejemplo, el 64 y el 123, y representémoslos en una tabla de valor posicional.

C	D	U
	6	4
1	2	3

Tabla I.5.

Como el segundo número está compuesto al menos por 1 centena, podemos establecer que es mayor que el primer número, que solo llega al orden de las decenas. Así, al comparar dos números con distinta cantidad de cifras, es mayor aquel que tiene más cifras. En general, una unidad de un orden determinado es mayor que cualquier número formado por unidades de orden inferior. Por ejemplo, 100 es mayor que cualquier número de dos cifras, 1.000 es mayor que cualquier número de tres cifras, etc.

Comparemos ahora dos números de tres cifras, 537 y 573. Ubiquemos ambos números en una tabla de valor posicional:

C	D	U
5	3	7
5	7	3

Tabla I.6.

Ambos números tienen 5 centenas, por tanto para establecer cuál es mayor se debe seguir comparando la posición de las decenas. Como el primer número tiene 3 decenas y el segundo tiene 7 decenas, este último es mayor.

De esta forma, el valor de las posiciones que forman un número nos permite establecer una manera de compararlos. Se comienza comparando los dígitos de las posiciones de mayor orden y solo en el caso que sean iguales, será necesario continuar comparando los dígitos que están en las siguientes posiciones.

4.2 Sistemas posicionales en otras bases

Como dijimos, probablemente debido a que tenemos 10 dedos en las manos, usamos la base 10 para contar. Sin embargo, se pueden usar otras bases, es decir, podemos agrupar los objetos de 5 en 5, de 3 en 3, o cualquier número mayor que 1 que pensemos.

El sistema posicional en base 2

En el sistema en base dos o *binario* se procede igual que en el sistema en base diez o base 5, solo que se agrupa los objetos en pares, pares de pares, pares de pares de pares, etc. El sistema binario es usado en los computadores.

Así como en el sistema decimal los grupos son de unidades, decenas, centenas, etc., es decir, agrupamos los objetos de 10 en 10, en el sistema binario agrupamos de 2 en 2. Por lo tanto, 2 unidades forman una unidad de orden superior, 2 pares son una unidad de tercer orden, 2 pares de pares son una unidad de cuarto orden, etc. Será conveniente usar notación de potencias[4] para abreviar la escritura. Denotamos: $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 2 \cdot 2$, $2^3 = 2 \cdot 2^2$, y así sucesivamente.

Usando la notación posicional, en la que cada dígito representa cuántas unidades del orden correspondiente hay, el 10 representa una unidad de segundo orden, es decir, 2. De la misma manera, 101 representa una unidad del tercer orden, ninguna unidad de segundo orden más una unidad, o sea 4 más 1, es decir, 5.

Para no confundirse con las notaciones, se suele usar un subíndice que nos indica la base, así, 111_2 es un número escrito en base 2, por lo tanto, denota al número decimal:

$$111_2 = 2^2 + 2^1 + 1 = 7$$

El subíndice no se emplea cuando estamos usando la base 10.

Una representación pictórica del número 111_2 se muestra en la **Figura I.15**:

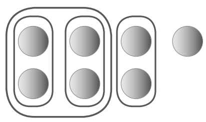


Figura I.15.

En el siguiente cuadro, vemos las primeras 6 unidades de distintos órdenes:

Orden	Expresión binaria	Expresión decimal
Primer	1_2	1
Segundo	10_2	2
Tercer	100_2	4
Cuarto	1000_2	8
Quinto	10000_2	16
Sexto	100000_2	32

Tabla I.7.

Para expresar un número escrito en base 10 a base 2, debemos descomponerlo en múltiplos de potencias de 2. Por ejemplo:

[4] Las potencias son tratadas en detalle en el Capítulo I del libro *Álgebra* de esta colección.

$$26 = 16 + 8 + 2 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 11010_2$$

Veamos un ejemplo más complicado. Expresemos en base 2 el número 441. Partimos determinando la potencia de 2 más alta que es menor que 441. Como:

$$2^8 = 256 < 441 < 512 = 2^9$$

Obtenemos que, $441 = 2^8 + 185$. Un cálculo similar nos dice que:

$$2^7 = 128 < 185 < 256 = 2^8$$

Y así, $441 = 2^8 + 2^7 + 57$. Procedemos nuevamente como antes, obteniendo que:

$$2^5 = 32 < 57 < 64 = 2^6$$

Por lo tanto, $441 = 2^8 + 2^7 + 2^5 + 25$. Por último, vemos que:

$$25 = 16 + 8 + 1$$

De donde concluimos que:

$$441 = 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 1$$

El número 441 contiene una unidad de primer, cuarto, quinto, sexto, octavo y noveno órdenes, pero no contiene unidades de segundo, tercer ni séptimo orden. La notación posicional entonces sería:

$$441 = 110111001_2$$

Podemos ver que este procedimiento es totalmente general, es decir, cualquier número se puede escribir como suma de potencias de 2.

Observemos que necesitamos solo 2 dígitos, 0 y 1, para representar cualquier número. El precio a pagar por este ahorro es que la representación digital es más larga.

Para pensar

¿Por qué será conveniente esta notación para las computadoras?

Otras bases

Invitamos al lector o lectora a desarrollar sistemas en bases distintas de 10 y de 2. Por ejemplo, otra base a considerar puede ser 20, ya que si andamos descalzos, podemos contar con los dedos de las manos y de los pies. De hecho, los mayas tenían un sistema en base 20. Por su parte, el francés actual conserva vestigios de tal base, en efecto, 80 se dice *quatrevingt*, es decir, "cuatro veintes". En ciencias de la computación las bases 8 y 16 son de gran aplicación.

Por supuesto, en cada caso se necesita un número adecuado de dígitos. Para cada base se precisa igual número de dígitos para representar las unidades. Por ejemplo, en base 10 necesitamos 10 dígitos, en cambio, en base 2, basta con 2 dígitos. Si la base es 16, necesitamos 16 dígitos 0,1,..., 9, A, B, C, D, E, F, donde las letras A, B, C, D, E, F representan respectivamente a los números 10, 11, 12, 13, 14 y 15. Cada vez que contamos 16 unidades de un orden dado, podemos reemplazarlas por una unidad del orden superior.

De esta manera, 20_{10} es igual a 14_{16}, ya que $14_{16} = 16 + 4$. Otro ejemplo más complejo es representar 441:

$$441 = 256 + 185 = 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 9 = 1B9_{16}$$

O sea, 9 unidades, 11 unidades de segundo orden y 1 unidad de tercer orden. Por su parte:

$$ABC_{16} = A \cdot (16)^2 + B \cdot 16 + C,$$

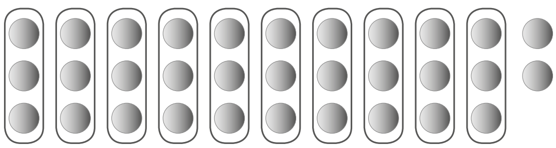
Lo que en notación decimal equivale a:

$$ABC_{16} = 10 \cdot (16)^2 + 11 \cdot 16 + 12 = 2.748$$

Ejemplo

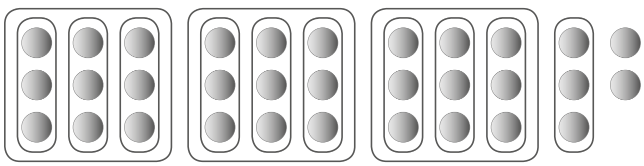
Representemos en base 3 el número 32.

Para visualizar el procedimiento, dibujamos 32 fichas y agrupamos sucesivamente de a 3.



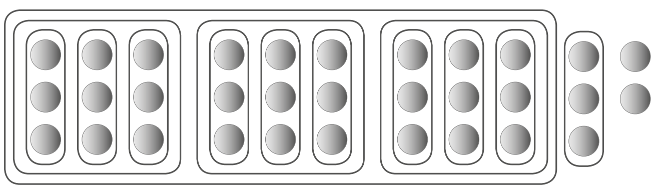
3^3	3^2	3^1	3^0
			2

Al agrupar la primera vez, obtenemos 10 grupos y sobran 2 fichas. El 2 corresponde a las unidades que quedarán desagrupadas, por tanto, escribimos 2 en la posición de las unidades (3^0). Luego, volvemos a reagrupar, obteniendo 3 grupos con 9 fichas, y sobra 1 grupo de 3. Este último se escribe en la posición de segundo orden (3^1) y el resto se vuelve a reagrupar.



3^3	3^2	3^1	3^0
		1	2

Finalmente, con esta última reagrupación se obtiene 1 grupo con 27 fichas. Y no sobran grupos con 9 fichas. Así, en la posición de tercer orden (3^2) se escribe un 0 y en la posición de cuarto orden (3^3) se escribe un 1.



3^3	3^2	3^1	3^0
1	0	1	2

De esta forma, el numeral, es decir la expresión del número, que representa la cantidad de fichas en base 3 es:

Grupos de 3^3	Grupos de 3^2	Grupos de 3^1	Unidades (3^0)
1	0	1	2

Así, $32_{10} = 1012_3$

Lo que acabamos de ver corresponde a efectuar divisiones sucesivas, y registrar los restos de dichas divisiones:

$32 : 3 = 10$ $\quad$ $10 : 3 = 3$ $\quad$ $3 : 3 = 1$

$\underline{2}$ $\quad$ $\underline{1}$ $\quad$ $\underline{0}$

Para escribir el numeral, se parte escribiendo el primer cociente menor que 3 en la posición de mayor orden y el resto de esa división en la posición de orden inmediatamente inferior. Luego, se escriben los restos de las demás divisiones realizadas en orden inverso al que se fueron efectuando, tal como se muestra anteriormente.

Para pensar

Analice cómo funciona el sistema que usamos habitualmente para medir tiempo.

En resumen

En un sistema de numeración posicional, se tiene un número $b > 1$ que corresponde a la base del sistema e indica el número de unidades que formará una agrupación de nivel superior. También hay b símbolos, entre ellos el cero, a partir de los cuales se puede representar cualquier cantidad de la siguiente forma:

- La primera posición de derecha a izquierda corresponde a las unidades, de ahí en adelante el valor de las posiciones corresponde a las potencias de la base.
- Un símbolo k en una de estas posiciones aporta a la formación del número tantas unidades como indica el producto del símbolo por la potencia de la base que corresponde a dicha posición. Así, k en las unidades corresponde a $k \cdot b^0$, en la segunda posición corresponde a $k \cdot b$, en la tercera posición corresponde a $k \cdot b^2$, etc.

Ejercicios

1. Escriba en base 10 el número 534_6.
2. Representar en base 5 el número 353_{10}.
3. Representar $5A4_{12}$ en base 5.
4. Calcule:
   a. El doble del número 10111011_2.
   b. El triple del número 101210021_3.
   c. El quíntuple del número 201342221_5.
   d. ¿Qué puede deducir de los cálculos anteriores?
5. Una antigua comunidad utilizaba los siguientes símbolos para representar los números: I, ∧, △, ○, donde ○ correspondía al cero y I a la unidad. Además, ∧ es mayor que △. Considerando que el sistema que usaban era posicional, responda:
   a. ¿Cuál es la base del sistema?
   b. Escriba la secuencia de los 20 primeros números en este sistema.
   c. ¿A qué número corresponde △○∧ en nuestro sistema?
   d. Escriba el número 525 y el número 133 en este sistema de numeración.
6. En los siguientes ejercicios, suponga que todos los sistemas son posicionales. Lo único que puede variar es la base.
   a. Determine el valor de n para que el número 17_{17} se convierta en 21_n.
   b. ¿En qué base se cumple que $55 + 43 = 131$?
   c. ¿En qué base se verifica que $54 \cdot 3 = 250$?

4.3 Dificultades y posibles errores en el trabajo con el sistema de numeración decimal

El sistema de notación posicional que usamos para representar los números está en la base del trabajo posterior que realizamos con ellos. Errores o confusiones con respecto al significado de valor posicional se ponen de manifiesto al estudiar las operaciones y en la extensión del sistema para incluir los números decimales. Es sumamente importante lograr una comprensión a cabalidad de este tema y debe ser reforzado a medida que se avanza en el estudio de las operaciones.

El desarrollo del sistema posicional en base 10 constituye un avance importante en la historia de la humanidad y necesitó de un alto grado de abstracción. Sin embargo, pedimos a niños y niñas que logren esta abstracción en un corto período de tiempo. Una forma de entender las dificultades a las que se enfrentan, es que el futuro profesor o profesora practique la escritura de números y las operaciones en un sistema posicional de otra base.

Por ejemplo, en el número 121, el 1 en la posición de las centenas y el 1 en las unidades se ven iguales, pero representan cantidades distintas. Si bien el uso de material concreto puede ayudar a comprender los conceptos de agrupamiento y canje, algunos de estos materiales, como los bloques base 10, o los palitos de helado, son de carácter más bien aditivo. Al representar el número 121 con estos materiales, la centena y la unidad se ven muy distintos.

Existen dificultades asociadas a la escritura de números expresados verbalmente que ponen de manifiesto una comprensión incompleta del concepto de valor posicional. La verbalización de los números es de carácter aditivo y no posicional. Por ejemplo, si se le pide a un niño que escriba el número "ciento veintitrés", él podría escribir 100203 o 10023, transcribiendo de forma segmentada cada parte de la verbalización y expresando el número de manera aditiva y no con valor posicional; o que al dictarle el número "once" escriba 101. Otro problema al escribir números expresados de forma verbal tiene que ver con la ausencia de unidades de algún orden, es decir, problemas asociados al 0. Por ejemplo, si se dicta el número "un millón quinientos", se puede obtener como repuesta 1.500.000.

Los niños y niñas que se ven enfrentados por primera vez al sistema posicional y sus reglas pueden creer que si dos números están formados por los mismos dígitos, es posible establecer una relación de igualdad entre ellos. Por ejemplo, podrían afirmar que "25 es igual al 52", ya que ambos números están formados por el 2 y el 5.

Otros errores están asociados a la composición y descomposición de un número en unidades, decenas, centenas, etc. Por ejemplo:

- Cuando se solicita escribir un número con 3 unidades, 2 decenas y 3 centenas, escriben 321.
- Cuando se solicita escribir un número con 3 centenas y 1 unidad, escriben 31, omitiendo el 0 en la posición de las decenas.

Estos errores se producen tanto por descuido, como por falta de comprensión de valor posicional. En estos casos, es conveniente practicar con descomposiciones que no están en orden o que entregan una descomposición no canónica. Por ejemplo, se puede solicitar escribir un número con 1 centena, 3 unidades y 2 decenas; o con 12 decenas y 3 unidades.

Al comparar números también se manifiestan dificultades asociadas a la comprensión del valor posicional. Por ejemplo, un posible error es escribir 537 > 573, ya sea porque se aplica incorrectamente una regla para comparar números, sin prestar mayor atención a su significado, o porque hay confusión con los símbolos de mayor y menor.

Ejercicios

1. Una profesora le pide a sus estudiantes que cuantifiquen la cantidad de dinero que aparece en la imagen. Observe la respuesta dada por un niño.

Hay: *60050* pesos.

Escribe la cantidad en palabras:

Seiscientos cincuenta.

¿Por qué se produce el error?

2. Describa las dificultades que podrían tener niños y niñas de 4° Básico al completar la siguiente tabla:

Descomposición del número	Número
	3.527
4 · 10.000 + 5 · 100 + 3 · 10 + 5	
4 · 1.000 + 6 · 10 + 7	
	3.487

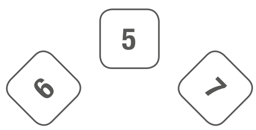
3. Ordene de mayor a menor los siguientes números:

645, 456, 654, 546 y 564.

a. Explique el procedimiento que usó para comparar estos números.
b. ¿Qué características tienen los números que ordenó? ¿cree que esta característica pueda influir en el nivel de dificultad de la actividad?

4. Se presenta la siguiente actividad a niños y niñas de 2° Básico:

Con los dígitos de las tarjetas representa un número mayor que 567.



a. ¿Qué errores se podrían presentar?
b. ¿Por qué cree que se producen dichos errores?
c. ¿Cómo abordaría estos errores?

4.4 El sistema de numeración decimal y el material concreto

La comprensión del sistema de numeración decimal se apoya, básicamente, en las relaciones establecidas entre los dígitos y las cantidades, y en las relaciones entre unidades de diferente orden. Asociar las agrupaciones de cada nuevo orden a un material concreto permite que niños y niñas identifiquen los números como cantidades concretas, comparándolos y ordenándolos físicamente, adquiriendo una idea de su tamaño relativo.

Los niños usan y comprenden el sistema de numeración decimal cuando son capaces de: leer y escribir números, manejar las reglas de canje entre unidades de distinto orden, reconocer expresiones equivalentes para una misma cantidad y aplicar estos conocimientos en situaciones diversas. Entre los materiales concretos adecuados para estos propósitos, podemos identificar los que se mencionan a continuación:

Palitos de helado y elásticos

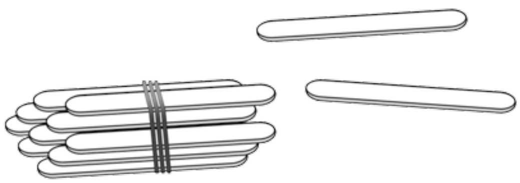


Figura I.16.

Cuando los niños agrupan 10 palitos con un elástico y luego juntan 10 paquetes en un nuevo atado de 10, inician la comprensión de las agrupaciones de unidades en decenas y de decenas en centenas

También se pueden utilizar otros materiales en lugar de los palitos de helado, por ejemplo clips o botones, y en general elementos pequeños que se puedan agrupar físicamente.

Bloques base 10

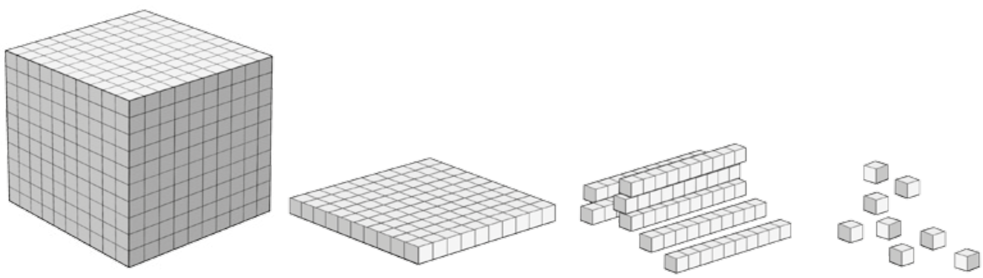


Figura I.17.

Las piezas representan las cantidades que se indican en la **Tabla I.7**:

Cubo formado por **10** placas, o sea **100** barras o por **1.000** cubitos.	Placa formada por **10** barras, o sea **100** cubitos.	Barra formada por **10** cubitos.	Cubito .
Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades

Tabla I.7.

En la **Figura I.17**, el número representado es **1.178**. Es importante mencionar que la representación de los números usando bloques base **10** no es posicional, sino que es de carácter aditivo. Como cada objeto (cubito, barra, placa y cubo grande) representa un valor determinado, no importa en qué lugar ubicamos dichos objetos para representar una cantidad. Este material es útil para desarrollar el sentido de número y para comprender la noción de canje, sin embargo, se debe tener cuidado, ya que puede generar errores en el pasaje a un sistema posicional.

Tarjetas Montessori

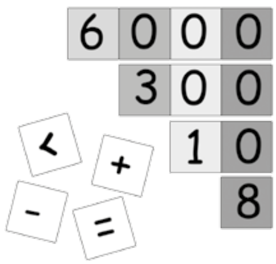


Figura I.18.

Este material está conformado por: diez tarjetas del **0** al **9** para las unidades, nueve tarjetas del **10** al **90** para las decenas, nueve tarjetas del **100** al **900** para las centenas y nueve tarjetas del **1.000** al **9.000** para las unidades de mil. Por ejemplo:

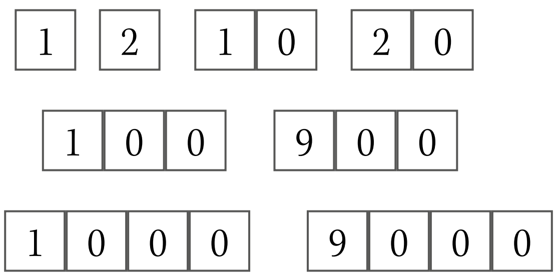


Figura I.19.

Al superponer las tarjetas, podemos componer y descomponer números. Por ejemplo, podemos descomponer el número **1.203**, como se muestra a continuación:

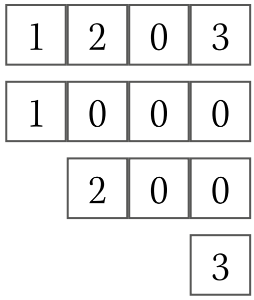


Figura I.20.

Las tarjetas Montessori son un recurso de aprendizaje que facilita la comprensión de la numeración escrita. Como ya hemos visto en secciones anteriores, la forma de decir los números en nuestro sistema utiliza un principio aditivo, que no es posicional. Por ejemplo, al señalar el número **635** en forma oral decimos: "seiscientos treinta y cinco". Al hacer el proceso inverso, es decir pasar de lo oral a lo escrito, debemos considerar que seiscientos significa que escribimos un **6** en la posición de las centenas. Estas tarjetas permiten abordar este aspecto de la escritura de los números, pues para formarlos se superponen las tarjetas, quedan los ceros ocultos y se facilita la comprensión del procedimiento. De esta forma, este material permite corregir errores como la escritura de números, donde el niño escribe **10002003**, cuando se le dicta mil doscientos tres.

Ábacos

En Europa, hasta fines de la Edad Media, los números se registraban en notación romana, pero las operaciones se efectuaban usando ábacos. En Rusia, los ábacos se usaron hasta comienzos del siglo XX. En Oriente estuvieron en uso hasta muy recientemente, siendo superados masivamente solo por las calculadoras electrónicas.

Hay muchas variantes de ábacos. Dado que ahora no son utilizados comúnmente para hacer cálculos, los ábacos más útiles para uso pedagógico son los más sencillos. Estos consisten en varillas verticales montadas sobre una plataforma, en las que se pueden introducir cuentas. Cada cuenta representa una unidad y cada varilla representa un orden de magnitud, de derecha a izquierda: unidades, decenas, centenas, etc. De esta manera, **10** cuentas en una varilla se pueden sustituir por una cuenta en la varilla que sigue hacia la izquierda. Es importante notar que la representación de los números en el ábaco corresponde a un sistema posicional.

El ábaco es una material concreto adecuado para:

- Representar números, por ejemplo, el número 128 que aparece en la **Figura I.21.**

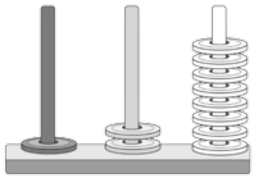


Figura I.21.

- Realizar canjes. Por ejemplo, al representar en la posición de las unidades 14 fichas, podemos canjear 10 de estas por 1 decena.
- Efectuar sumas y restas. Este uso será abordado en el próximo capítulo.

Ejercicios de la sección

1. Escriba los números 368, 444 y 1.023 usando números romanos. Practique con otros números, ¿cuáles cree usted que son más difíciles de escribir?, ¿por qué?

2. Escriba los números romanos CMLXI, MCMLVI y DCXXIII usando el sistema decimal. ¿Qué dificultades hay en estas conversiones? Practique con otros números romanos.

3. Ordene los números 321, 132 y 213 de menor a mayor. Explique el proceso que ha utilizado. Indique cómo guiaría a los niños para que ordenaran correctamente estos números.

4. Descomponga cada uno de los siguientes números de tres maneras diferentes, como se muestra en el ejemplo.

$$526 \longrightarrow 500 + 20 + 6$$

$$5\text{ C} + 2\text{ D} + 6\text{ U}$$

$$5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

a. 783
b. 490
c. 305
d. 1.278
e. 4.003
f. 27.805

5. Se afirma que el numero 594 tiene 59 decenas. Sin embargo, otros opinan que solo tiene 9. Reflexione sobre estas dos afirmaciones. ¿Cómo se podrían enunciar las afirmaciones anteriores para que ambas sean formalmente correctas?

Siguiendo este razonamiento, responda:

a. ¿Cuántas decenas hay en total en cada uno de los siguientes números?

405 3.245

b. ¿Cuántas centenas y cuantas unidades de mil hay en total en cada uno de los siguientes números?

987 3.989 30.100

6. En la siguiente lista, el mismo número natural está expresado en sistemas de numeración posicional con distintas bases.

10000, 121, 100, ? , 24, 22, 20

Determine el número que falta.

7. Dos pueblos antiguos que convivieron hace aproximadamente 7.312 años, los incalculatos y los innumeratos, usaban sistemas numéricos posicionales: los primeros en base 5, en que los símbolos que representan los dígitos estaban dados por:

□ = 0 △ = 1 ◇ = 2 @ = 3 ♥ = 4

Y los segundos en base 3, usando los símbolos:

★ = 0 ▽ = 1 # = 2

Para poder comerciar entre ambos pueblos, una habilidad importantísima era cambiar números de una representación a otra.

¿Cómo representaban los innumeratos el número que los incalculatos escribían como @◇□△♥?

8. Un platillo volador ha caído en el Desierto de Atacama. Un grupo de investigadores que revisó los restos encontró un libro de Matemática que muestra (luego de traducir los símbolos a nuestros numerales) la siguiente operación:

$$323 + 42 = 415$$

Los científicos han llegado a la conclusión de que este cálculo es correcto. ¿Cuántas manos y cuántos dedos en cada una de ellas es razonable esperar que tengan los extraterrestres?

9. Descubra un número de tres cifras en el que la cifra de las decenas es el triple de la de las unidades y la de la centena es el triple de la cifra de las decenas. ¿Es este número el único con esta propiedad? Si cambia los triples por dobles, ¿cuáles son los posibles números?

Ejercicios del capítulo

1. Considere las cantidades de dinero A y B que se muestran a continuación.

Proponga una actividad que permita usar las representaciones anteriores para estudiar la comparación de cantidades.

2. Considere los números $625k53$ y $625p53$, donde k y p son dígitos.

   a. Si $k = 3$, ¿qué valores puede tomar p para que $625k53 < 625p53$?

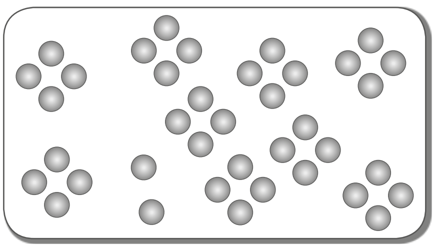
   b. Si $p < 4$, ¿qué valores puede tomar k para que $625k53 > 625p53$?

   c. Si p y k son dos números consecutivos, ¿es posible encontrar un número entre $625k53$ y $625p53$? Explique su respuesta.

3. Con los dígitos 6, 7, 2, y 9 escriba de menor a mayor todos los números de tres cifras posibles. ¿Cuántos son mayores que 600 y menores que 900?

4. Considere un sistema de numeración posicional que usa I para representar la unidad, A para representar II, y B para representar III. Además, usa O para indicar el cero.

   a. Escriba la cantidad total de pelotas que hay en la lámina usando este sistema. Explique el procedimiento que usó para escribir esta cantidad.



   b. ¿Qué cantidades representan ABOI y BOII?

   c. Ordene de menor a mayor los siguientes números: BOII, BAII, BBOI, BAOO, BBII, BABA. Explique el procedimiento que usó.

   d. ¿Cuál es el número que viene inmediatamente después de BBBB?

5. Para cada una de las siguientes situaciones, indique en qué base, b, se verifica:

   a. 13_{10} es igual a 11_b.

   b. Al agregar una unidad a 77_b se obtiene 100_b.

   c. 100_b es sucesor de 55_b.

   d. Se utilizan los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5 para representar cualquier número.

6. Los siguientes números están escritos un sistema posicional en base 2. ¿Cómo se representan en el sistema de numeración decimal?

a. 10011 b. 100111 c. 111011 d. 111

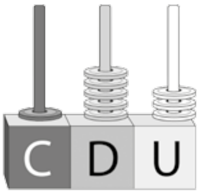
7. El número 34 se ha representado en una base n y corresponde a la misma cantidad que 31 en base $n + 1$.

a. ¿Cuáles son las bases de ambos sistemas?

b. ¿Cómo se representa esta cantidad en el sistema de numeración decimal?

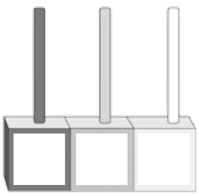
8. Con los dígitos 3, 4, 7 y k, donde k es distinto de 3, 4 y 7, escriba todos los números de 3 cifras posible. ¿Qué valores debe tomar k para que los números producidos sean mayores que 300 y menores que 700?

9. Usando un ábaco se representa el 153 de la siguiente forma:

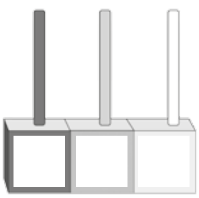


En los siguientes ábacos, represente los números que se indican y complete los recuadros en blanco con el valor de la agrupación correspondiente, según el sistema de numeración señalado.

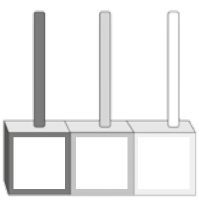
a. En un sistema de numeración posicional en base 5, represente 342_5.



b. En un sistema de numeración posicional en base 3, represente 112_3.



c. En un sistema de numeración posicional en base 12, represente $3A7_{12}$ (considere que este sistema usa los símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A y B).



10. Observe la siguiente secuencia que completó un niño de Educación Básica.

27	28	29	210	211	112

a. Describa el error del niño al completar la secuencia.

b. ¿Por qué cree que se produce este error?

11. Una profesora de Educación Básica incluyó el siguiente ítem en una prueba:

Escribe en cifras el número que aparece escrito con palabras.

	Cuatrocientos tres

Señale al menos dos posibles errores que podrían cometer los niños al responder este ítem.

FECHA:_____/_______/_____

Capítulo II

La suma y la resta

Introducción

En el capítulo anterior, vimos que los números permiten expresar la cantidad de objetos que tiene una colección. *Juntar dos o más colecciones, agregar objetos a una colección, quitar objetos y separar de una colección una parte de ella* son acciones que permiten caracterizar dos operaciones aritméticas básicas, la suma y la resta. Estas operaciones matemáticas posibilitan anticipar el resultado de realizar las acciones antes señaladas y para ello se han construido a través de la historia técnicas de cálculo que van de la mano con el sistema de numeración utilizado para expresar dichas cantidades.

El estudio de la suma y la resta será abordado articulando sus distintos significados con la resolución de problemas de contexto. En particular, estudiaremos las llamadas situaciones aditivas, que son problemas simples que nos permiten ejemplificar los distintos significados de las operaciones. Paralelamente, trataremos el uso de diagramas, tanto para plantear como para resolver dichos problemas.

Una herramienta fundamental en el estudio de los números y sus operaciones es la recta numérica. En este capítulo, haremos uso de ella para visualizar las propiedades de la suma y de la resta. A partir de estas propiedades y de aquellas del sistema de numeración decimal, justificaremos diversas técnicas de cálculo mental y escrito. También trataremos en detalle los algoritmos usuales para estas operaciones, justificando su validez.

A lo largo del capítulo, se discutirán aspectos relacionados con la enseñanza. Por ejemplo, veremos cómo usar material concreto para el estudio de la suma y la resta, y sus algoritmos, y se analizarán dificultades y errores en el trabajo con estas operaciones.

1. La suma

Si tenemos dos colecciones de objetos, una con n objetos y la otra con m objetos, ¿cuántos objetos tenemos en total? La respuesta es la suma de los dos números, que escribiremos como $n + m$. Por ejemplo, al juntar una colección con 3 pelotas y otra con 5, la suma se puede representar como en la **Figura II.1**:

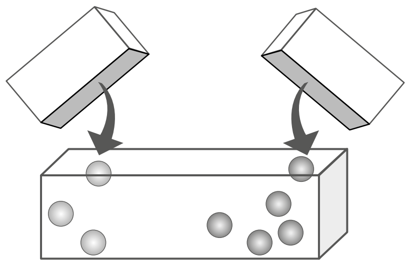


Figura II.1.

La adición se puede describir como la operación que da cuenta del resultado de contar los objetos que pertenecen a la unión de dos conjuntos disjuntos. Se suele distinguir entre la adición, como operación entre los números, y la suma, como el resultado de efectuar esa operación. Si bien esta distinción puede ser adecuada para un análisis teórico, en este texto usaremos la palabra suma en ambos casos.

Si interpretamos los números como medidas de segmentos, la suma de dos números corresponde al largo del segmento que resulta de añadir un segmento a continuación del otro, como se muestra en la **Figura II.2**.

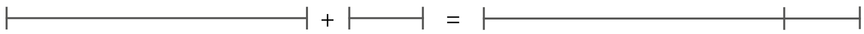


Figura II.2.

Como vimos en el capítulo anterior, con esta interpretación un número n se pueden identificar con un punto en la recta numérica, correspondiente al extremo derecho de un segmento de longitud n cuyo extremo izquierdo es el 0. Así, en la recta numérica podemos representar la suma de dos números de la siguiente forma:

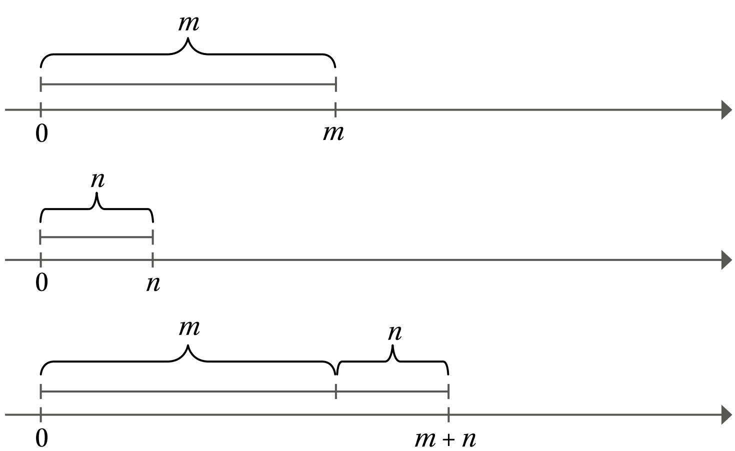


Figura II.3.

Si preguntamos a un niño o niña en edad preescolar cuánto es cuatro más tres, probablemente levantará cuatro dedos de una mano y tres de la otra, luego contará uno, dos, hasta siete. Esa es la esencia de sumar: reunir dos colecciones que contienen las cantidades adecuadas de objetos y luego contar.

Un niño algo mayor podría decir "cuatro" y después contar con el pulgar izquierdo, que es **5**, el índice izquierdo, **6**, y el dedo mayor izquierdo, **7**. Este segundo proceso es algo más sofisticado que el anterior, porque implica la idea de contar a partir de un número distinto de **0**. A este proceso se le llama *sobreconteo*.

Para pensar

¿Cuáles cree usted que pueden ser las limitaciones de sumar usando conteo y sobreconteo?

Los procedimientos mencionados, conteo y sobreconteo, dejan de ser eficaces con números un poco más grandes, es por eso que todos los pueblos desarrollaron métodos eficientes de cálculo. Es lo que hoy llamamos un algoritmo, es decir, un procedimiento mecánico que en un tiempo razonablemente pequeño nos dará un resultado.

Estamos tan acostumbrados al algoritmo habitual para sumar que aprendimos en la escuela, que a menudo confundimos el algoritmo con la operación, sin embargo, son muy distintos. Por una parte está la operación suma, es decir, encontrar la cantidad de elementos que resulta de juntar dos colecciones, y por otra está el procedimiento de cálculo con el que encontramos el resultado. Una buena manera de comprender la diferencia es imaginar que si fueran lo mismo, no habría distintas maneras de calcular, por ejemplo con ábacos o bloques base 10. Un romano de la Antigüedad no podría entender nuestro algoritmo, ya que este depende de la notación posicional decimal; sin embargo, ellos podían sumar en su propio sistema para responder a diversas situaciones.

1.1 Del conteo a la suma

Generalmente, en los niveles iniciales se plantean actividades en las que niños y niñas deben juntar los objetos de dos colecciones o agregar objetos a una colección ya establecida. Estas actividades son un primer acercamiento a la noción de suma y en ambos casos las acciones corresponden a aquellas que permiten caracterizar esta operación. En esta etapa, es recomendable que estas acciones se realicen con material concreto, como juntar las fichas que hay en dos cajas o agregar fichas a una caja que ya tiene algunas en su interior. Un segundo tipo de actividades son aquellas que usan representaciones pictóricas y donde la tarea principal corresponde a escribir la frase numérica que permite representar la situación. En dichos casos, se combinan dos tipos de registro, el pictórico y el simbólico, tal como ocurre en la actividad que se muestra en la **Figura II.4**:

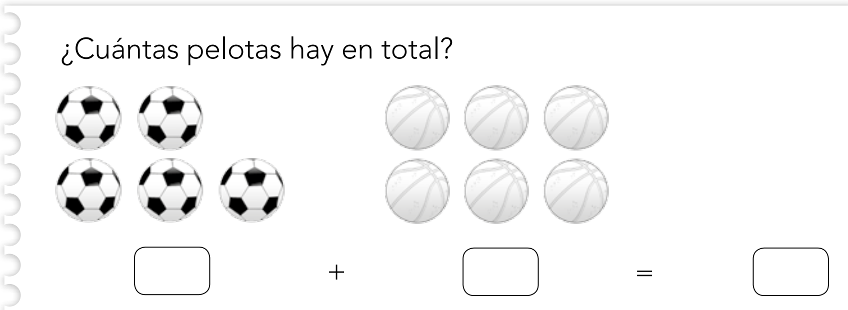


Figura II.4.

Para desarrollar la tarea, los estudiantes no deben usar un algoritmo o efectuar un procedimiento muy elaborado, se espera que asocien la acción de juntar las pelotas a la suma, escribiendo en los recuadros en blanco los números que corresponden a la situación gráfica. En situaciones como la anterior, la técnica que permite responder cuántas pelotas hay en total es el conteo de todas las pelotas dibujadas. Pero, ¿qué sucede si solo se muestra una de las colecciones de pelotas y para la otra solo se indica el cardinal? Por ejemplo, en la situación que aparece en la **Figura II.5**, se sabe que hay 8 pelotas de fútbol guardadas en una caja y además se presenta un grupo de pelotas de básquetbol dibujadas fuera de la caja.

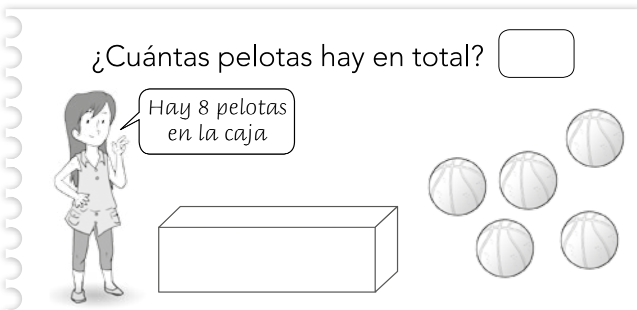


Figura II.5.

Como una de las colecciones no está disponible, una técnica natural para resolver la tarea es el sobreconteo, que, como mencionamos anteriormente, corresponde a contar a partir de un número distinto del 0. En este caso, se espera que los niños cuenten a partir del cardinal dado, 8, el resto de las pelotas que se muestran en la imagen.

Una forma de representar este procedimiento es mediante la recta numérica: a partir de 8, que corresponde a la cantidad de pelotas que hay en la caja, se avanza 5 lugares, que corresponde a la cantidad de pelotas fuera de la caja.

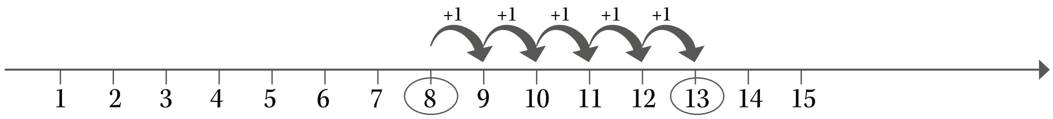


Figura II.6.

Cabe destacar que esta técnica es eficiente cuando uno de los sumandos es un dígito, por ejemplo, 18 + 4. Pero frente a adiciones como 18 + 14, la técnica no resulta tan eficaz, pues contar 14 a partir de 18, generalmente trae complicaciones. Por otra parte, qué pasa cuando se pide calcular 4 + 18. Claramente contar 18 a partir de 4 puede resultar engorroso. En este caso, es conveniente partir contando del sumando mayor, utilizando implícitamente la propiedad conmutativa de la suma, que nos dice que 4 + 18 es lo mismo que 18 + 4.

La cinta numerada es un recurso que se usa para representar en forma ordenada los números. Es usual también que se use la cinta numerada para sumar. En la figura a continuación, se muestra la suma 8 + 5.

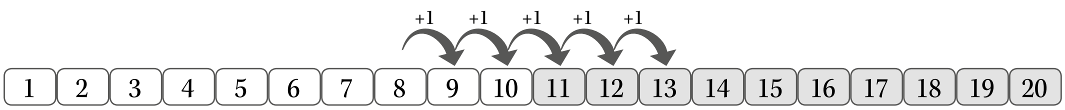


Figura II.7.

El uso de la cinta numerada puede traer dificultades, sobre todo si se asocia la idea de suma con avanzar en la cinta. Por ejemplo, la suma 5 + 2 se interpreta como avanzar 2 unidades a partir del 5. Si marcamos sobre la cinta el 5 y avanzamos 2 unidades completas, podríamos interpretar que llegamos al 8, pues hay dos recuadros entre el 5 y el 8.

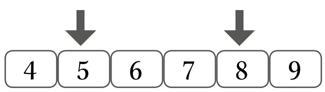
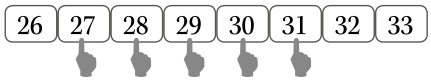


Figura II.8.

El problema anterior no se presenta al usar la recta numérica, pues como los números se ubican sobre un punto, es claro que entre el 5 y el 8 hay 3 unidades de distancia. Otra ventaja de usar la recta numérica es que se puede representar en ella el 0, lo que no se puede hacer de manera razonable en la cinta.

Ejercicios

1. Un estudiante calcula 27 + 5 utilizando la técnica de sobreconteo. Para realizar el cálculo, dice: "Parto contando del número mayor..." y apoyado en una cinta numerada va señalando los siguientes números:



Luego responde: "27 más 5 es 31".

a. ¿A qué atribuye usted el error del estudiante? Explique su respuesta.
b. ¿Cómo apoyaría al estudiante para que corrigiera su error?

2. Represente las siguientes sumas en la recta numérica y con colecciones de objetos.

a. 3 + 8   b. 5 + 2   c. 1 + 8

3. Explique cómo calcular las siguientes sumas usando la técnica de sobreconteo.

a. 239 + 5   b. 8 + 97   c. 12 + 16

1.2 La igualdad

En el trabajo con operaciones se usa necesariamente el concepto de igualdad. Es necesario establecer claramente qué entendemos cuando usamos el símbolo (=) para indicar que dos expresiones numéricas son iguales. Por ejemplo, cuando escribimos 3 + 5 = 4 + 4, estamos afirmando que el número que resulta al realizar la operación del lado izquierdo del símbolo = es el mismo que resulta al realizar la operación del lado derecho. Es claro que las expresiones 3 + 5 y 4 + 4 no lucen iguales, sin embargo, ellas hacen alusión al mismo número.

Muchas veces, en Educación Básica no se trata la igualdad con la relevancia y el cuidado que requiere, y su significado queda reducido a una suerte de comando que indica que se debe operar. Por ejemplo, al presentarse la suma 3 + 5 = , los niños responderán correctamente 8, pero al presentarse un problema como 3 + 5 = ___ + 4, los niños podrían dar respuestas equivocadas, como 8 o 12, interpretando que se solicita calcular un resultado, por ejemplo 3 + 5 o 3 + 5 + 4. Quedan de manifiesto, entonces, los problemas que puede causar esta percepción errónea de la idea de igualdad al trabajar con ecuaciones.

Este error también se puede componer, produciendo desarrollos como el siguiente, al tratar de calcular 4 + 8 + 7 + 5:

$$4 + 8 = 12 + 7 + 5 = 19 + 5 = 24$$

Si bien el resultado es correcto, los pasos realizados indican confusión con el concepto de igualdad. Vemos que se ha usado 3 veces el signo =, de modo que hay 3 afirmaciones: $4 + 8 = 12 + 7$, $12 + 7 = 19 + 5$ y $19 + 5 = 24$. De estas, solo la última es correcta. Este error puede parecer un descuido o desprolijidad sin mayores consecuencias, sin embargo, a medida que se avanza en el estudio de la aritmética y el álgebra, genera una distorsión del sentido de la igualdad que atenta contra la comprensión de propiedades y desarrollos numéricos y algebraicos.

El tema de la igualdad, sus propiedades y las dificultades y errores asociadas a su uso se tratan con mayor detalle en el **Capítulo II** del texto *Álgebra* de esta colección.

Para pensar

¿Cómo se relaciona el error anterior con el uso de la calculadora?

Ejercicio

¿Qué respuestas incorrectas se pueden generar para los siguientes problemas?

a. $7 + 3 = \_\_\_\_ + 2$
b. $7 \cdot 9 = \_\_\_\_ \cdot 3$
c. $6 + 5 = \_\_\_\_ - 4$

1.3 Propiedades de la suma

En general, al realizar sumas usamos intuitivamente ciertas propiedades. Por ejemplo, calcular $18 + 4$ es lo mismo que calcular $4 + 18$, ya que con nuestra interpretación de juntar no hay distinción entre estas dos sumas. Lo mismo ocurre cuando sumamos más de una cantidad, no hay ambigüedad al escribir $5 + 7 + 9$, ya que juntar colecciones con 5 y 7 elementos y luego a la colección resultante agregarle 9, es lo mismo que juntar primero colecciones con 7 y 9 elementos y luego a la colección resultante agregarle 5.

Enunciamos, a continuación, las propiedades básicas de la suma, a las cuales haremos referencia o las usaremos implícitamente a lo largo del capítulo y del texto. Explicaremos la validez de estas propiedades en términos de la interpretación de la suma como juntar colecciones y también las ilustraremos en la recta numérica.

Conmutatividad de la suma

Si juntamos dos colecciones y contamos los objetos de ambas, es indiferente cuál conjunto consideramos primero y cuál después, en cualquier caso nos debe dar la misma cantidad. Esto se conoce como la *conmutatividad de la suma*, es decir, si m y n son dos números, entonces:

$$m + n = n + m$$

En la recta numérica, la propiedad conmutativa puede ser visualizada como se muestra a continuación:

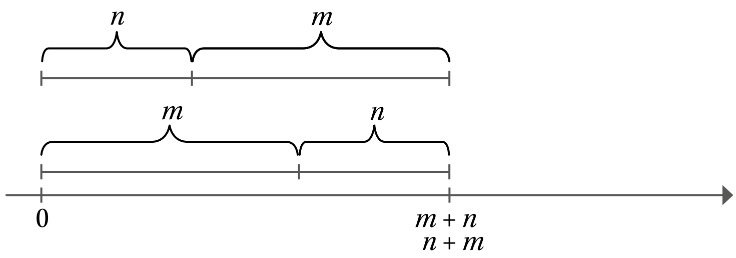


Figura II.9.

Asociatividad de la suma

Si tenemos ahora tres colecciones y queremos contar cuántos objetos hay en total, resulta también intuitivo que podemos juntarlas de distinta manera. Por ejemplo, juntar las dos primeras y a esta nueva colección agregarle la tercera, o agregar a la primera colección la colección que resulta de juntar la segunda y la tercera. Esto se conoce como la asociatividad de la suma, es decir, si m, n y p son tres números, entonces:

$$(m + n) + p = m + (n + p)$$

También podemos visualizar esta propiedad en la recta numérica:

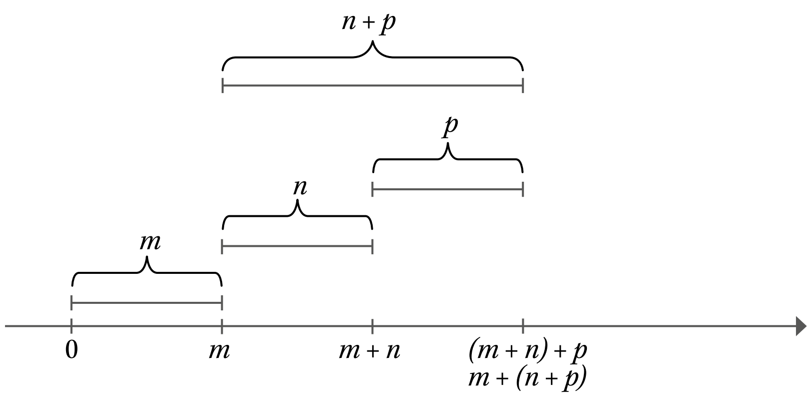


Figura II.10

El 0 es el número neutro para la suma

Imaginemos que tenemos dos cajas en las que se guardan fichas de colores, una con 24 fichas y la otra vacía. Si reunimos el contenido de ambas en otra caja, ¿cuántas fichas tendremos? La cantidad de objetos que hay en total es la misma que hay en la primera colección. Así, para cualquier número n, se tiene que:

$$n + 0 = n$$

Decimos que el 0 es el *neutro respecto de la suma* o el neutro *aditivo*.

Ejercicios

1. ¿Cómo se puede ilustrar la propiedad conmutativa para sumas con números pequeños usando los dedos de las manos?

2. Indique qué propiedades se usan en los siguientes desarrollos:

   a. $56 + 90 + 14 = 70 + 90$

   b. $45 + 95 = 50 + 90$

1.4 Descomposición aditiva

Hasta el momento, hemos usado conteo y sobreconteo para calcular sumas. Rápidamente estas técnicas se vuelven ineficientes. Las propiedades de la suma y el sistema posicional nos permiten desarrollar otras estrategias.

Por ejemplo, $4 + 7$ puede calcularse como sigue:

$$4 + 7 = (1 + 3) + 7 = 1 + (3 + 7) = 1 + 10 = 11$$

Donde hemos puesto por escrito los detalles que se hacen en forma mental. Nuestro sistema posicional en base 10 hace conveniente agrupar en múltiplos de potencias de 10. Esta estrategia puede adaptarse a un sistema posicional en cualquier base.

Ejemplo

Consideremos la suma $3_5 + 4_5$. Para resolverla, descomponemos 4_5 como $2_5 + 2_5$, ya que al sumar $3_5 + 2_5$ nos dará 10_5, y podremos calcular directamente el resultado. De esta forma, se tiene:

$$\begin{aligned} 3_5 + 4_5 &= 3_5 + (2_5 + 2_5) \\ &= (3_5 + 2_5) + 2_5 \\ &= 10_5 + 2_5 \\ &= 12_5 \end{aligned}$$

La esencia misma del sistema de notación posicional se basa en la descomposición de los números en potencias de 10 (u otra base). Por ejemplo, el número 2.345 se descompone en unidades, decenas, centenas y unidades de mil:

$$2.345 = 2.000 + 300 + 40 + 5$$

Esta descomposición suele llamarse la *descomposición canónica* del número 2.345 y, como veremos en la próxima sección, es el sustento del algoritmo de la suma. Es conveniente practicar con ella antes de introducir el algoritmo. Por ejemplo, si queremos sumar $123 + 45$, escribimos (o simplemente pensamos):

$$123 + 45 = (100 + 20 + 3) + (40 + 5)$$

Y sumamos separadamente decenas y unidades:

$$123 + 45 = 100 + (20 + 40) + (3 + 5) = 100 + 60 + 8 = 168$$

Observamos que siempre estamos haciendo sumas con números entre 0 y 9. Cuando sumamos 20 +40, estamos sumando 2 decenas con 4 decenas.

La descomposición 7 = 5 + 2 es un ejemplo de una *descomposición no canónica*. Pueden ser usadas para sumar sin utilizar un algoritmo. Por ejemplo, consideremos la suma 35 + 17. La misma descomposición anterior nos lleva a escribir o, más bien, a pensar:

$$35 + 17 = 35 + (5 + 12) = (35 + 5) + 12 = 40 + 12 = 52$$

Por supuesto, podemos idear ejemplos mucho más complejos que los anteriores, en los que una descomposición sea útil. Resulta necesario, entonces, practicar estas descomposiciones elementales antes de estudiar el algoritmo de la suma. Esta práctica tiene al menos cuatro beneficios:

- Familiarizar al estudiante con el concepto de suma de números en casos en los que se puede visualizar la operación, usando las intuiciones del capítulo anterior (piedras y segmentos) e, incluso, comprobar su corrección.
- Dar fluidez al proceso de cálculo con el algoritmo, ya que este las usa en cada paso. De hecho, lo recomendable es que se practique con sumas por conteo y sobreconteo, y luego con descomposiciones canónicas y no canónicas, antes de enfrentar el algoritmo.
- Como veremos en la sección siguiente, es requisito para comprender la resta.
- Proporciona herramientas para el cálculo mental.

En resumen

La suma se puede asociar a las acciones de juntar, agregar y avanzar, entre otras. Esta operación matemática es conmutativa, asociativa y tiene al 0 como elemento neutro. Estas propiedades, y otras que se pueden demostrar, permiten utilizar estrategias de cálculo basadas en la descomposición aditiva de los sumandos y en las características del sistema de numeración decimal.

Ejercicio

En cada caso, señale una descomposición aditiva conveniente para calcular las sumas. Explique paso a paso el procedimiento.

a. 34 + 26 b. 62 + 73 c. 47 + 15 d. 285 + 287

1.5 Combinaciones aditivas básicas

Como mencionamos anteriormente, para sumar dos números cualesquiera, en el sistema de numeración decimal, es suficiente con saber sumar números de un dígito. A estas sumas las llamaremos *combinaciones aditivas básicas*.

Inicialmente, estas sumas se resuelven usando estrategias de conteo y sobreconteo, para luego ser memorizadas en forma paulatina por los estudiantes. Estas combinaciones también se pueden representar en la tabla aditiva. Algunas estrategias que nos pueden ayudar a construir y memorizar estas combinaciones son: *los dobles, el doble más 1 y las que suman 10*.

- *Los dobles*: corresponden a la suma de un dígito con sí mismo, es decir, son de la forma $a + a$. Investigaciones señalan que son las primeras que aprenden los niños, es por ello que se utilizan para construir otras combinaciones. En la tabla aditiva, las combinaciones aditivas básicas correspondientes a los dobles están ubicadas en la diagonal principal.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla II.1.

- *El doble más 1*: corresponde a las sumas del tipo $a + (a + 1)$, donde a es un dígito. Para calcular el resultado de este tipo de sumas es posible basarse en los dobles. Por ejemplo, para calcular 4 + 5, como se sabe que 4 + 4 es 8, se puede proceder de la siguiente forma:

$$4 + 5 = 4 + (4 + 1) = (4 + 4) + 1 = 8 + 1 = 9$$

Estas combinaciones se muestran sombreadas en la siguiente tabla:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla II.2.

- *Las que suman 10*: corresponden a sumas cuyo resultado es 10. Para construirlas, inicialmente se puede usar el sobreconteo. En la tabla, estas combinaciones se representan gráficamente por la diagonal del 10.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla II.3.

Notamos que la tabla aditiva tiene varias regularidades. Si observamos una fila o una columna y nos detenemos en uno de los recuadros, nos daremos cuenta de que el número que sigue es 1 más que este; por ejemplo, la suma 4 + 6 es igual a 4 + (5 + 1) = (4 + 5) + 1, es decir, el número anterior más 1. Por otra parte, también notamos que basta con completar el triángulo superior o inferior que se forma respecto la diagonal principal, pues la suma es conmutativa y, por lo tanto, la tabla es simétrica respecto de la diagonal principal.

Las sumas cuyo resultado es un número menor que 10 se pueden encontrar a partir de las estrategias antes mencionadas. En la tabla, estas combinaciones están representadas como se muestra a continuación.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla II.4.

El estudio de las combinaciones aditivas básicas se inicia en la Educación Parvularia y continúa en 1° Básico. En niveles como 2°, 3° o 4° Básico, se extienden a las decenas y centenas, es decir, para calcular sumas del tipo 50 + 40, 500 + 400 o 5.000 + 4.000, donde se espera que los niños reflexionen que, sabiendo que 5 + 4 es 9, se puede deducir directamente que 50 + 40 = 90 y 500 + 400 = 900. Es importante dar relevancia a estas combinaciones, tanto en niveles iniciales como en niveles posteriores, pues es posible encontrar estudiantes que para calcular, por ejemplo, 800 + 600 utilizan el algoritmo usual.

Ejercicios

1. Ubique en la tabla los números cuya suma es mayor que 10.

2. Usando la tabla aditiva, encuentre todos los pares de números cuya suma es: 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

1.6 Estrategias de cálculo mental para sumar

En esta sección, abordaremos distintas estrategias que, basándose en las propiedades del sistema de numeración decimal y de las operaciones, permiten calcular una suma sin necesariamente hacer cálculos escritos. Cabe señalar que en algunas de estas estrategias se utiliza la resta, tema que profundizaremos más adelante en este capítulo, pero cuyo uso no dificulta el tratamiento del tema de esta sección.

Sobreconteo

Como vimos anteriormente, para sumar dos números, uno de ellos de un dígito, podemos usar la técnica del sobreconteo. Por ejemplo, para calcular 38 + 3 se cuenta 3 a partir de 38. Esta técnica puede extenderse y ser utilizada en un ámbito numérico mayor, sobrecontando de 10 en 10, de 100 en 100, etc. Así, por ejemplo, para calcular 265 + 40 se puede sobrecontar a partir de 265, 40 más, diciendo la secuencia de 10 en 10, como se muestra en la Figura II.11.

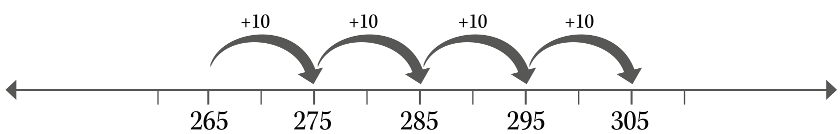


Figura II.11.

Las secuencias de 10 en 10 y de 100 en 100 se estudian en los primeros niveles de Educación Básica, junto a las propiedades del sistema de numeración y las técnicas de conteo.

Composición canónica

Ciertos tipos de suma se pueden obtener directamente a partir de la estructura del sistema de numeración que usamos, haciendo una *composición canónica*. Algunas de ellas son las siguientes:

- Un múltiplo de 10 más un dígito, por ejemplo: 40 + 7 o 340 + 7.
- Un múltiplo de 100 más un múltiplo de 10 o un número de dos cifras, por ejemplo: 300 + 40 o 300 + 47.
- Un múltiplo de 100 más un dígito, por ejemplo: 300 + 7.
- Un número de tres cifras con un 0 en la posición de las decenas, más un múltiplo de 10, por ejemplo: 307 + 40.
- Un múltiplo de 100 más un múltiplo de 10, más un dígito, por ejemplo: 300 + 40 + 7.

De la misma forma, se pueden extender estas relaciones a números de más cifras. Como se mencionó en el capítulo anterior, el carácter aditivo del sistema de numeración oral hace que al nombrar los sumandos se pueda establecer directamente su resultado, por ejemplo, "cuatrocientos, más cincuenta, más dos". Esta propiedad de los números, que facilita el cálculo de este tipo de sumas, puede llevar a errores a los estudiantes, cuando se yuxtaponen los números que están nombrando. En el caso anterior, un posible error es componer el número como 40052.

Completar la decena: trasvasije y compensación

Otra técnica que se puede utilizar para calcular sumas mentalmente es modificar los sumandos, ya sea sumando o restando, para transformar la suma en otra que tenga el mismo resultado, pero sea más simple de calcular.

Una estrategia habitual es *completar una decena*. Esto consiste en agregar o restar a uno de los sumandos una cantidad conveniente y así completar una decena o, en general, un múltiplo de una potencia de 10.

Por ejemplo, para calcular 37 + 25, se puede agregar 3 al primer sumando y escribirlo como 40. Luego, para no alterar el resultado, se debe restar la misma cantidad al otro sumando, obteniendo así 37 + 25 = 40 + 22 = 62.

Analicemos el funcionamiento de la técnica en forma pictórica, considerando 37 y 25 cuadrados respectivamente, agrupados como se muestra en la figura:

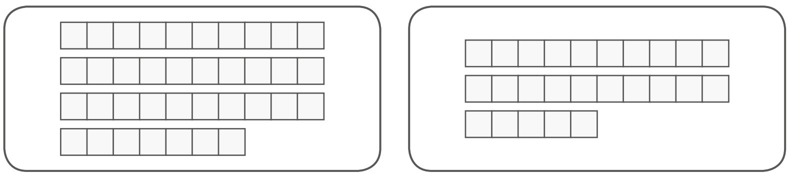


Figura II.12.

Para saber la cantidad total de cuadrados que se obtienen al juntar ambos grupos, debemos calcular 37 + 25. Al observar las colecciones, vemos que se puede formar una barra de 10 sacando 3 cuadrados de la segunda colección y agregándoselos a la primera:

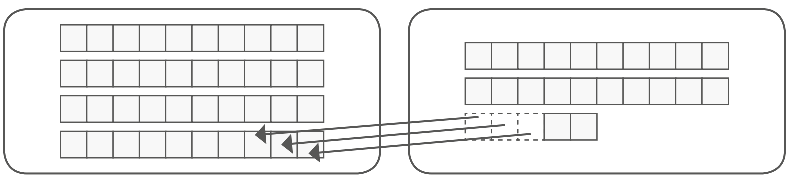


Figura II.13.

Así, un grupo queda con 40 cuadrados, mientras que el otro queda con 22. Hemos transformado la suma 37 + 25, en la suma 40 + 22, que dará el mismo resultado, pero es más fácil de calcular, pues uno de los términos corresponde a un múltiplo de 10. A esta técnica, en que sumamos (o restamos) a un sumando lo mismo que restamos (o sumamos) al otro, se le llama usualmente *trasvasije*.

Otra estrategia consiste en hacer una *compensación*, es decir, completar una decena y una vez calculada la suma, restar (o sumar) la cantidad agregada (o quitada). Por ejemplo, para calcular 39 + 25, se agrega 1 al 39 para obtener 40, y se calcula 40 + 25 = 65. Como agregamos 1 al primer sumando, el resultado obtenido es 1 *más* que el resultado de la suma original, por tanto, compensamos restando 1 al resultado. Así, 39 + 25 = 64.

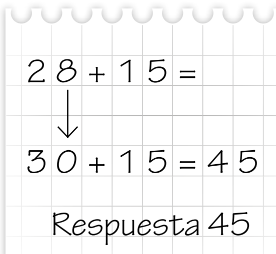
Tanto la compensación como el trasvasije se pueden usar en cualquier ámbito numérico, es decir, frente a números de dos o más cifras. Estas técnicas serán justificadas cuando estudiemos las propiedades de la resta (apartado 2.1).

Ejercicios

1. Calcule mentalmente y explique la estrategia usada.

a. 500 + 200	c. 9 + 5	e. 4.325 + 800
b. 1.798 + 266	d. 2.443 + 7	f. 997 + 98

2. Un niño resuelve la suma 28 + 15 de la siguiente forma:



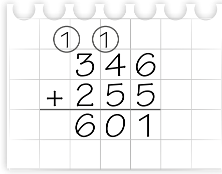
¿En qué se equivoca el niño? Argumente su respuesta.

1.7 El algoritmo usual de la suma

Cuando sumamos dos números de tres o más cifras en forma escrita, generalmente usamos un algoritmo que aprendimos en los primeros niveles de Educación Básica. Este algoritmo para sumar es simple y resumido, y su funcionamiento, en general, se estudia de manera mecánica, muchas veces sin darle un sentido matemático a las acciones que realizamos. Pero, ¿qué conocimientos matemáticos justifican su funcionamiento?, ¿por qué empezamos desde la derecha y no desde la izquierda, como en la división? Habitualmente, estas y otras preguntas no son planteadas cuando se estudia el algoritmo. En esta sección, estudiaremos el funcionamiento de dicho algoritmo, lo cual permitirá dar respuesta a estas preguntas.

Para pensar

Observe el procedimiento utilizado por un estudiante de Educación Básica para calcular 346 + 255:



a. ¿Qué significado tienen los 1 encerrados en los círculos?
b. Explique el procedimiento usado por el estudiante.

Recordemos cómo funciona el algoritmo de la suma. Sumemos 1.234 y 2.385. Escribimos los números uno bajo el otro, de manera que queden en la misma columna las unidades, las decenas, las centenas y las unidades de mil. Procedemos luego a sumar los dígitos de cada columna, comenzando por la de la derecha, que corresponde a las unidades.

Paso 1		Paso 2		Paso 3		Paso 4
		1		1		1
1.234	→	1.234	→	1.234	→	1.234
+ 2.385		+ 2.385		+ 2.385		+ 2.385
9		19		619		3.619

Figura II.14.

Observamos que en la columna de las decenas se supera el 10, eso implica que se ha formado una centena adicional; debemos, por lo tanto, agregar una unidad a esa columna. Habitualmente, se pone un uno encima de la columna de las centenas. Esta marca es solo una manera de recordar, no es esencial para el procedimiento.

Sabemos que este procedimiento nos dará siempre la suma de dos números, pero ¿por qué?

Escribamos cada número involucrado en la suma usando una tabla de valor posicional:

	UM	C	D	U
1.234	1	2	3	4
2.385	2	3	8	5
1.234 + 2.385	3	5	11	9

Tabla II.5.

Por lo tanto, la suma es 3 unidades de mil, 5 centenas, 11 decenas y 9 unidades.

Para poder escribir este número en notación posicional, necesitamos que cada posición no pase de 9. En nuestro caso, tenemos 11 decenas, que convertimos en 1 centena más 1 decena. Ahora nuestra suma se representa como:

	UM	C	D	U
1.234 + 2.385	3	5 + 1	1	9

Tabla II.6.

Así, la suma corresponde a 3 unidades de mil, 6 centenas, 1 decena y 9 unidades, que en nuestro sistema de notación posicional se expresa como 3.619.

El algoritmo de la suma es simplemente una síntesis de este procedimiento.

Una alternativa para de ver el funcionamiento del algoritmo es mediante la descomposición canónica de ambos números:

$$\begin{array}{rl} 1.234 & = 1.000 + 200 + 30 + 4 \\ 2.385 & = 2.000 + 300 + 80 + 5 \\ \hline 1.234 + 2.385 & = 3.000 + 500 + 110 + 9 \\ & = 3.000 + 500 + 100 + 10 + 9 \\ & = 3.000 + 600 + 10 + 9 \\ & = 3.619 \end{array}$$

Notamos que, aunque no se mencionan, en estos procedimientos hemos usado repetidamente las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

El algoritmo funciona debido a que al alinear los números uno bajo el otro, se suman las unidades, decenas, centenas, etc. de un número con las correspondientes del otro. Cuando se juntan 10 unidades de un orden, se debe agregar una unidad del orden superior, de ahí la "reserva", representada por el numerito 1 que agregamos en la columna apropiada.

Apreciamos también que, en realidad, para aplicar el algoritmo solo debemos saber dos cosas: cómo sumar dos números entre 0 y 9, y que cada vez que una suma supera 10, debo descomponerla y aumentar una unidad del orden inmediatamente superior.

Cuando las sumas de cada columna no exceden 10, no se producen mayores dificultades. Estas surgen cuando alguna de estas sumas supera las 10 unidades. A estas sumas se les suele llamar *sumas con reserva*, aunque un mejor nombre es *suma por descomposición*. En nuestro ejemplo, las 11 decenas se descompusieron en una centena y una decena.

Observamos que este algoritmo se adapta a cualquier base, por ejemplo, a base 2:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\quad\;\; 1\,1} \\ 1\,1\,0\,1\,1_2 \\ +\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1_2 \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0_2 \end{array}$$

En el ejemplo anterior, se alinean los sumandos 11011_2 y 1110011_2 respetando el valor posicional. Luego se suman los dígitos correspondientes, considerando que $1_2 + 1_2 = 10_2$. De esta forma, al sumar las unidades el resultado es 10_2, por tanto, escribimos 0_2 en la posición de las unidades del resultado y canjeamos 1 grupo de 2, que lo escribimos sobre la columna de las unidades del siguiente orden. Así se continúa sumando el resto de las posiciones.

Una pregunta natural es por qué comenzamos a sumar por la columna de las unidades. En realidad, el motivo es hacer que el procedimiento sea más eficiente. Pero no hay mayores inconvenientes en comenzar a sumar por otra columna. Por ejemplo, podríamos comenzar por la posición correspondiente al mayor orden, es decir, sumar de izquierda a derecha, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

Paso 1		Paso 2		Paso 3		Paso 4
1.234 + 2.385 3	→	1.234 + 2.385 3 5	→	1.234 + 2.385 3 61	→	1.234 + 2.385 3.619

Figura II.15.

Vemos que en el tercer paso debimos corregir la cifra de las centenas, porque se juntaron más de **10** decenas. Este procedimiento es tan correcto como el habitual, si bien puede ser algo menos eficiente, ya que puede ocurrir que en cada paso debamos corregir la cifra anterior.

Más aún, podríamos sumar unidades, decenas, centenas, etc. en cualquier orden, siempre y cuando respetemos los valores posicionales de cada una de ellas. Esto se ve muy claro si descomponemos los números, como en la tabla de valor posicional (**Tabla II.5**).

Notamos que en la **Tabla II.5** no hay ninguna razón para restringirnos a la suma de solo dos números. El algoritmo usual puede extenderse naturalmente para sumar tantos números como se desee. Por ejemplo, a continuación se usa este algoritmo para calcular **1.294 + 644 + 43.675 + 8.462 + 78:**

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 12\,32} \\
1.294 \\
644 \\
+\quad 43.675 \\
8.462 \\
78 \\
\hline
54.153
\end{array}
$$

Veremos, en el **Capítulo III**, que estas sumas con más de un sumando aparecen al calcular multiplicaciones entre números de tres o más cifras. Es necesario que los niños y las niñas se familiaricen con estas sumas antes de enfrentar este tipo de multiplicación.

En esta sección, hemos visto que para sumar dos números podemos usar estrategias distintas al algoritmo usual de la suma. Hay muchos motivos para que un profesor o profesora conozca diversas estrategias para ejecutar las distintas operaciones. Destacamos algunos:

- Distinguir el concepto de operación de la forma en que se calcula.
- Estar atento a desarrollos originales que puedan hacer los niños y niñas, y no descartarlos porque no son "como se hace".
- Conocer varias formas de calcular refuerza visiones e intuiciones complementarias sobre las operaciones. Esto permite enseñar de distintas maneras a niños y niñas con diferentes necesidades e intuiciones.

Con todo, es importante hacer notar que el desarrollo de la comprensión y la destreza en el uso del algoritmo debe ser un propósito relevante del proceso de enseñanza. Este algoritmo comienza a estudiarse a partir de 2º Básico y su uso se profundiza en 3º y 4º Básico.

En resumen

Existen variadas estrategias que permiten encontrar el resultado de una suma. Estas se basan en las propiedades de la suma y aprovechan las características del sistema de numeración decimal para facilitar los cálculos.
El trabajo con estas estrategias es importante para comprender el funcionamiento del algoritmo usual de la suma. Este algoritmo funciona a partir de la noción de valor posicional, al alinear los sumandos para efectuar los cálculos, y de la noción de base, al efectuar los canjes.

1.8 Dificultades y posibles errores en el uso del algoritmo usual de la suma

El desarrollo del algoritmo de la suma requiere comprender las características del sistema de numeración decimal, pues su funcionamiento se basa en estas. Sin embargo, al usar este algoritmo, varios aspectos de su funcionamiento quedan ocultos. Esto hace que el algoritmo sea fácil de usar, pero que, al mismo tiempo, se presenten dificultades o errores al perder de vista el significado de la operación.

Las sumas que presentan reservas, es decir, que en alguna de las posiciones los dígitos de los sumandos suman más que 10, tienen un mayor grado de dificultad. Esta dificultad genera errores de cálculo, como los que presentamos a continuación:

- No se realiza correctamente el canje al sumar los dígitos de una posición.

Veamos el siguiente procedimiento realizado por un niño para sumar 346 y 627:

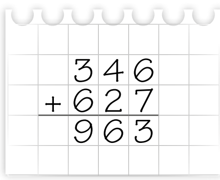


Figura II.16.

Al sumar los dígitos de la posición de las unidades, la suma da como resultado 13. Es por ello que, al aplicar correctamente el algoritmo, se debería hacer un canje de 10 unidades a 1 decena. Como los sumandos están alineados según el valor posicional de sus cifras, agregamos 1 a la columna de las decenas y escribimos 3 en la posición de las unidades. Sin embargo, en el trabajo que se muestra se escribió el dígito correcto en la posición de las unidades, pero no se agregó 1 en la columna de las decenas, lo que genera que la suma resultante no sea la correcta. Este error también se puede observar cuando la reserva aparece en otras posiciones.

- Se escriben dos dígitos en una de las posiciones del sistema de numeración.

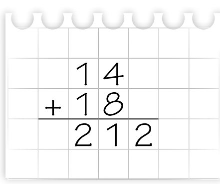


Figura II.17.

Como se observa en el ejemplo, el canje no se realiza y se escribe **12** en la posición de las unidades de la suma.

- Se suman cifras que corresponden a distintas posiciones en el sistema de numeración.

Un ejemplo de este tipo de error es el siguiente:

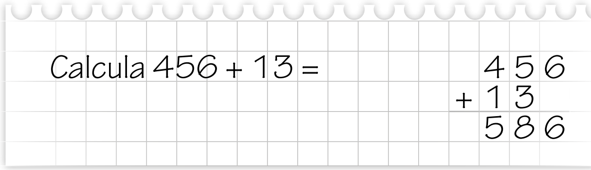
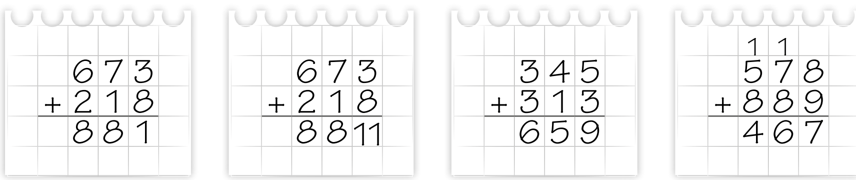


Figura II.18

Observamos que al escribir de forma vertical los sumandos, se ordenan de izquierda a derecha, sin considerar su valor posicional.

Ejercicio

Observe los procedimientos utilizados por niños y niñas para calcular las siguientes adiciones:



a. Para cada caso, describa los errores que se observan.

b. ¿Cuál cree usted que fue el razonamiento utilizado en cada uno de los cálculos anteriores?

1.9 La suma y el material concreto

Antes de adentrarse en el manejo del algoritmo de la suma, debemos asegurarnos de que los alumnos y alumnas comprendan el significado de esta operación e, idealmente, que desarrollen sus propias estrategias para resolver problemas relacionados con sumas de números pequeños. El uso de material concreto puede ser de gran ayuda en este proceso.

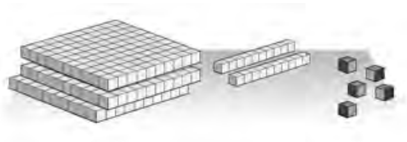
Como hemos visto, la suma corresponde a la acción de juntar dos colecciones. Naturalmente, los niños y las niñas pueden usar diversos objetos para familiarizarse con la suma. Por ejemplo, lápices, láminas, fichas, etc. A medida que se trabaja con números más altos, aparece la necesidad de agrupar para contar. Para apoyar este tipo de procedimiento, podemos utilizar materiales tales como palitos de helado con elásticos y los bloques base **10**.

Veamos un ejemplo de suma usando composición canónica y apoyándose en el uso de bloques base 10.

Ejemplo

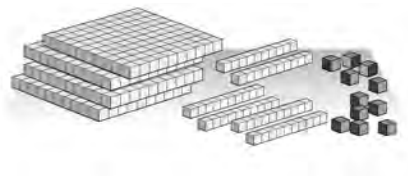
Calculemos 325 + 146 usando bloques base 10.

Paso 1:



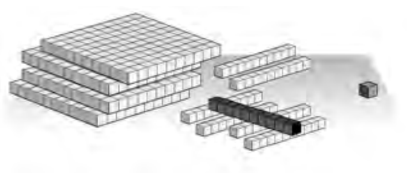
Representamos el primer sumando 325.

Paso 2:



Representamos el segundo sumando, 146, y lo agregamos al primer sumando.

Paso 3:



Cambiamos 10 de los cubos unitarios para formar una barra de 10.

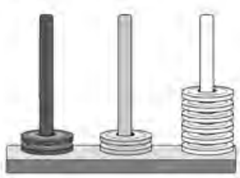
Finalmente, representamos el resultado de la adición en forma simbólica: las 4 placas corresponden a 400, las 7 barras corresponden a 70 y el cubo corresponde a 1. El resultado es 471.

Un material apropiado para introducir el algoritmo de la suma es el ábaco. Este recurso permite representar los números siguiendo los mismos principios del sistema posicional de base 10 u otra, y posibilita visualizar la realización de canjes. Veamos un ejemplo.

Ejemplo

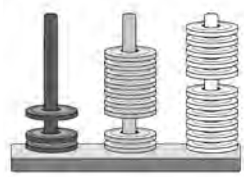
Calculemos 226 + 175 usando el ábaco.

Paso 1:



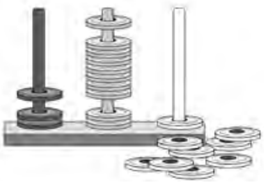
Representamos el primer sumando.

Paso 2:



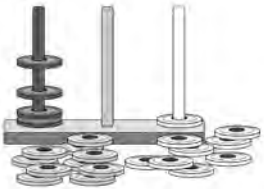
Representamos el segundo sumando sobre el primero.

Paso 3:



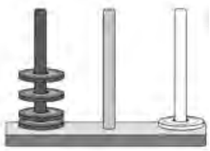
Contamos las unidades y hacemos un canje de 10 unidades por una decena.

Paso 4:



Contamos las decenas y realizamos otro canje, esta vez de 10 decenas por una centena.

Paso 5:



Contamos las fichas en cada posición y encontramos que el resultado es 401.

Para pensar

Materiales como los bloques base 10 también son usados frecuentemente para introducir el algoritmo. Al representar un número con este material, cada cifra decimal luce de manera muy diferente a la otra. En este sentido, ¿qué ventajas ofrece el ábaco por sobre los bloques base 10?

Ejercicio

Explique cómo usar palitos de helado y elásticos para calcular sumas agrupando. Ejemplifique el procedimiento con la suma 34 + 27.

Ejercicios de la sección

1. Un niño calcula 3 + 28 señalando: “3 más 28 es…29, 30, 31… el resultado es 31”. Indique la técnica de cálculo que utiliza el niño y la(s) propiedad(es) de la suma que sustentan el procedimiento.

2. Complete los espacios en blanco e indique la(s) propiedad(es) de la suma que utiliza para hacerlo.

   a. 35 + ______ = 35

   b. 24 + 15 = ______ + 24

   c. (28 + 37) + 12 = (______ + 28) + 12 = 37 + 40 = ______

   d. 50 + 7 + ______ = 57

3. Calcule las siguientes sumas usando una técnica de cálculo mental. Explique la técnica utilizada.

   a. 34 + 300
   b. 1.988 + 2562
   c. 1.787 + 3
   d. 400 + 7.582
   e. 500 + 600
   f. 997 + 1.566

4. Observe los procedimientos de cálculo usados para resolver las sumas. Complete la tabla indicando las propiedades de la suma que sustentan estos procedimientos.

Procedimiento	Propiedades
45 + 23 = 20 + 3 Se calcula: 45 + 20 = 65, y luego 65 + 3 = 68.	
63 + 71 60 + 3 + 70 + 1 130 + 4 134	

5. Indique en cada paso la propiedad que sustenta el procedimiento.

575 + 897 =

= 575 + 897 + 0 ______________________

= 575 + 897 + (3 – 3) ______________________

= 575 + (897 + 3) – 3 ______________________

= 575 – 3 + (897 + 3) ______________________

= 572 + 900 = 1.472

6. Observe el siguiente procedimiento para el cálculo de una suma.

$$\begin{array}{r} 4\ 5\ 7 \\ +\ 5\ 8\ 6 \\ \hline 1\ 3 \\ 1\ 3\ \\ +\ 9\ \ \\ \hline 1\ 0\ 4\ 3 \end{array}$$

a. Explique cómo funciona.

b. ¿Qué relación existe entre este procedimiento y el algoritmo usual de la suma?

7. En cada caso, determine el valor de k para que la suma tenga reserva.

$$\begin{array}{r} 7\ k\ 7 \\ +\ 1\ 8\ 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\ 8\ 5 \\ +\ k\ 0\ 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 3\ 6 \\ +\ 1\ k\ 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\ k\ 9 \\ +\ 1\ 3\ 0 \\ \hline \end{array}$$

8. Observe la respuesta de una niña al resolver la siguiente suma:

$$645 + 32 = \underline{965}$$

a. Explique el error al desarrollar el cálculo.

b. Indique al menos un material concreto o representación pictórica que podría remediar el error.

2. La resta

La primera intuición sobre la resta es la de quitar una cantidad a otra. Si tenemos 8 manzanas y regalamos 2 nos quedan 6 manzanas. Asociar la resta a la acción de quitar permite calcularla contando hacia atrás, es decir, descontando. De esta forma, al quitar 1 manzana de las 8, nos quedan 7; lo que se corresponde con descontar 1 a 8.

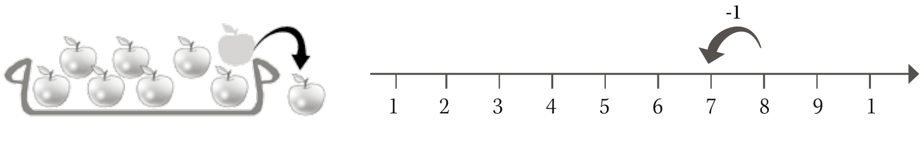


Figura II.19.

Luego, al quitar una segunda manzana del canasto, nos quedan 6; lo que se corresponde con descontar 1 a 7.

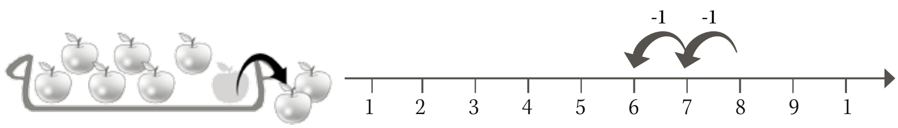


Figura II.20.

Este procedimiento consiste en retroceder dos lugares en la secuencia numérica, es decir, a 8 descontarle 2.

Una segunda intuición sobre la resta es la de comparar dos cantidades.

Supongamos que tenemos dos canastos con manzanas, uno con 8 y el otro con 2 manzanas. Para saber cuántas manzanas más hay en un canasto que en el otro, podemos agregar manzanas al canasto que tiene menos hasta igualarlos.

Figura II.21.

Al agregar una manzana al canasto con 2, tendremos 3 manzanas; luego, al agregar otra, tendremos 4, etc. En total, necesitamos avanzar 6 unidades para ir del 2 al 8.

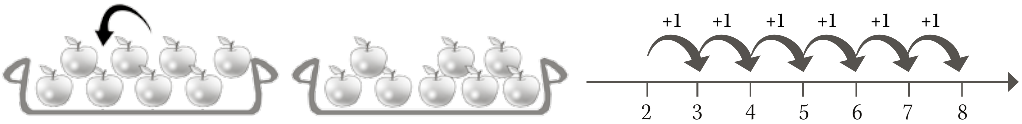


Figura II.22

Si a y b son dos números naturales, con $a \geq b$, su resta se escribe $a - b$, y corresponde a quitar la cantidad b de la cantidad a. Por lo tanto, si a $(a - b)$ le agregamos b obtenemos a, es decir, $a = (a - b) + b$. Podemos decir, entonces, que $(a - b)$ es lo que le falta a b para llegar a a. La cantidad restada, b, se conoce como *sustraendo*, o aquello que se sustrae, y la cantidad a, aquella de la que se resta o sustrae, se conoce como *minuendo*, o aquello que se disminuye. La relación entre estas tres cantidades se ve más claramente con segmentos:

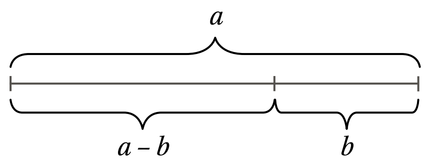


Figura II.23.

Podemos ubicar el resultado de la operación $a - b$ en la recta numérica usando la interpretación de quitarle b a a:

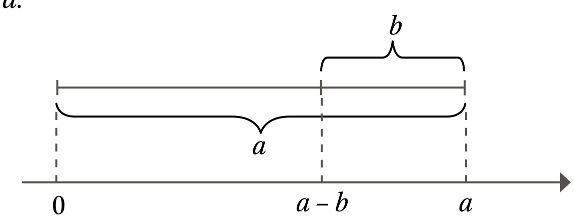


Figura II.24.

Si llamamos c al resultado de la resta $a - b$, la relación $a - b = c$ se puede interpretar de las siguientes maneras:

- c es lo que se obtiene si a a le quitamos b, es decir $c = a - b$. Debemos resolver $a - b = \square$.

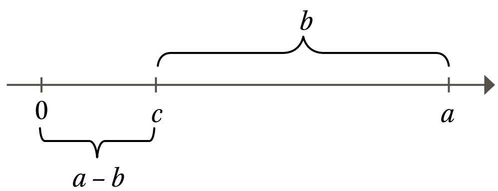


Figura II.25

Ejemplo: si tenemos \$1.000 y gastamos \$900, ¿cuánto nos queda?

- c es lo que le falta a b para llegar a a, es decir, $b + c = a$. Debemos resolver $b + \square = a$.

Figura II.26.

Ejemplo: si queremos comprar un artículo que vale \$1.000 y solo tenemos \$900, ¿cuánto nos falta?

- b es lo que se obtiene si a a le quitamos c, es decir, $b = a - c$. Debemos resolver $a - \square = c$.

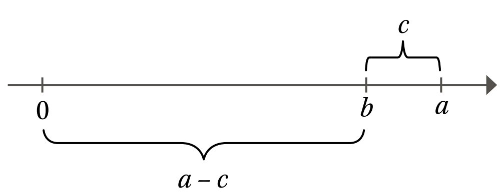


Figura II.27.

Ejemplo: si tenía $1.000 y luego de pagar por un refresco me quedan $100, ¿cuánto costó el refresco?

- a es lo que se obtiene si a b le sumamos c, es decir $a = b + c$. Debemos resolver $\square = b + c$.

Figura II.28.

Ejemplo: Si luego de pagar $900 por un refresco me quedan $100, ¿cuánto tenía?

Se suele distinguir entre la sustracción, como operación entre números, y la resta, como el resultado de efectuar esa operación. Si bien esta distinción puede ser adecuada para un análisis teórico, no adoptaremos este uso; en este texto resta y sustracción serán sinónimos. Observaciones similares se realizaron en la sección de este capítulo que aborda la adición.

Para pensar

En el ámbito de los números enteros, el que aún no cubrimos en este texto, pero que esperamos reconozca al menos en forma intuitiva de su formación escolar, existen los números negativos y es posible restar un número mayor de uno menor. Con la representación de piedritas no es posible comprender tal resta. Analice lo que sucede con la visualización de segmentos.

Formalmente, la resta de dos números se define a partir de la suma. Concretamente, si a y b son números naturales con $a \geq b$, decimos que a menos b es igual a c y escribimos:

$$a - b = c, \text{ si y solo si } a = b + c$$

Vemos que el número c, es decir, la resta o diferencia entre a y b, corresponde exactamente a aquel número que debemos sumar a b para obtener a. Suma y resta son operaciones inversas.

2.1 Propiedades de la resta

Al igual que con la suma, al realizar restas usamos intuitivamente ciertas propiedades. Por ejemplo, para calcular $73 - 12$ podemos restar primero 10 y luego 2, es decir, proceder de la siguiente forma $(73 - 10) - 2 = 63 - 2 = 61$. Esta propiedad la podemos enunciar como: $a - (b + c) = (a - b) - c$, es decir, si el sustraendo es una suma de dos números, se puede restar primero uno y al resultado restarle el otro. A continuación, listaremos algunas propiedades de la resta. Es importante mencionar que estas propiedades se deducen directamente de las propiedades de la suma, como la conmutatividad, asociatividad y que el 0 es elemento neutro, es decir, son consecuencia de estas.

Estas propiedades se pueden demostrar usando un razonamiento algebraico, sin embargo, este no necesariamente nos da luces respecto de por qué son ciertas. Vamos a justificar la validez de estas propiedades usando la interpretación de los números como medidas de segmentos o con la recta numérica.

Enunciamos, a continuación, algunas propiedades de la resta, a las cuales haremos referencia o las usaremos implícitamente a lo largo del capítulo y del texto.

Partimos notando que la propia definición de resta nos entrega directamente las siguientes identidades. Para todo $a \geq b$, se tiene:

Propiedad 1 $b + (a - b) = a$

Propiedad 2 $a - (a - b) = b$

Propiedad 3 $a - 0 = a$

Propiedad 4 $a - a = 0$

Veremos ahora propiedades un poco más complejas y que requieren justificación:

Propiedad 5 Si $n \geq p$, entonces $m + (n - p) = (m + n) - p$.

Podemos observar esta igualdad en la recta numérica:

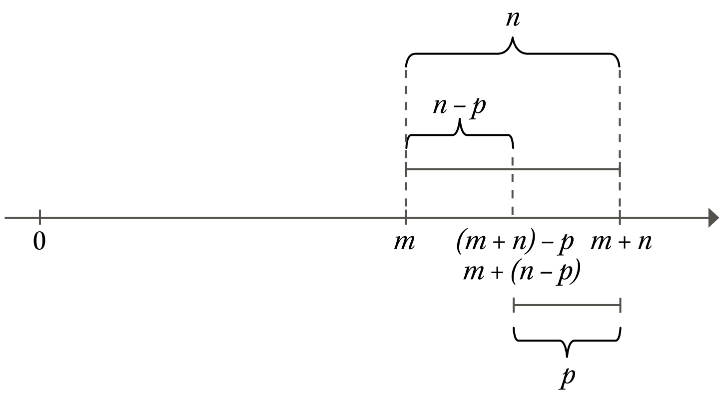


Figura II.29.

Por la conmutatividad de la suma y si $m \geq p$, también tenemos:

$$m + (n - p) = (m + n) - p = (n + m) - p = n + (m - p) = (n + m) - p$$

Escribiremos simplemente $m + n - p$ y no nos preocuparemos de los paréntesis.

Ejemplo

> Considere el siguiente problema: "Juan y María tienen \$800 cada uno. María gasta \$250. ¿Cuánto dinero tienen entre los dos?". Describa las dos posibles soluciones del problema y relaciónelas con la propiedad vista.

Propiedad 6 Si $m \geq n + p$, entonces $m - (n + p) = (m - n) - p$

Ilustramos esta igualdad en la recta numérica.

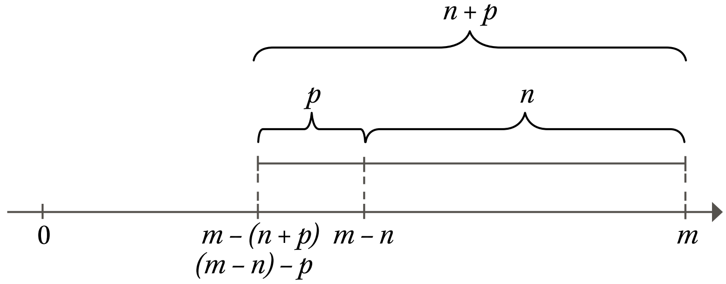


Figura II.30.

Usando que $n + p = p + n$, tenemos también que:

$$m - (n + p) = m - (p + n) = (m - p) - n$$

Escribiremos simplemente $m - n - p$ para referirnos a cualquiera de estas expresiones.

Ejercicio

Considere el siguiente problema: "Se tiene un saco de **5 kg** de harina y se utilizan **2 kg** para hacer sopaipillas y **1 kg**, para hacer un queque. ¿Cuánta harina queda?". Describa las dos posibles soluciones del problema y relaciónelas con la propiedad anterior.

Propiedad 7 Si $n \geq p$ y $m \geq n$, entonces $m - (n - p) = (m - n) + p$.

Podemos visualizar esta propiedad en la recta numérica:

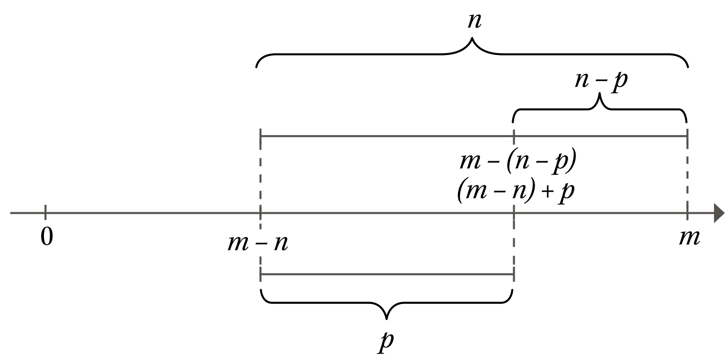


Figura II.31

Esta es la regla que aprendemos en Educación Media para tratar con expresiones con paréntesis: "Si el paréntesis tiene un signo – delante, al eliminarlo, se cambian – por + y + por –, y si tiene signo +, no se cambia nada".

Ejercicio

Justifique el procedimiento realizado indicando la propiedad usada:

a. $(128 - 75) + 15 = 128 - 60 = 68$
b. $137 - (37 - 14) = 100 + 14 = 114$

Observamos que las propiedades anteriores, junto con la conmutatividad y asociatividad de la suma, nos permiten usar expresiones tales como $10 - 3 + 4 - 5 + 8$. No importa el orden en que realicemos las sumas y restas, siempre que las restas se puedan efectuar, el resultado será el mismo:

$$((((10 - 3) + 4) - 5) + 8) = (10 - 3) + (4 - 5) + 8 = (10 + 4 + 8) - (3 + 5)$$

De hecho, esto nos da dos estrategias para realizar las operaciones que involucran sumas y restas de varios números. Una de ellas es agrupar en sumas o restas fáciles de calcular, y la segunda consiste en sumar todos los números que tiene un signo + y al resultado restarle la suma de todos los números que tienen signo –. Estas estrategias son usadas en el cálculo mental y en el desarrollo del algoritmo usual de la resta.

Ejercicio

En la mañana, un niño recibe $10.000 de regalo de cumpleaños por parte de su abuela. Compra un álbum que cuesta $2.000 y un paquete de galletas que cuesta $500. En la tarde, su tío le regala $5.000 y su madrina le regala $8.000. Al otro día, compra una caja de lápices de colores por $2.500 y una polera por $3.500. ¿Cuánto dinero le queda?

De las anteriores, se pueden obtener otras propiedades que nos resultarán útiles en el cálculo mental. Las enunciamos a continuación y se discutirán en detalle.

Propiedad 8 Si $m \geq n \geq p$, tenemos $m - n = (m - p) - (n - p)$.

Veremos una justificación algebraica y más abajo la ilustramos en la recta numérica. Tenemos que:

$$\begin{aligned}(m - p) - (n - p) &= m - (p + (n - p)) && \text{por la **Propiedad 6.**}\\ &= m - n && \text{por la **Propiedad 1.**}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(m - n) - (n - p) = m - n$.

En la siguiente figura, se ilustra la **Propiedad 8** en la recta numérica.

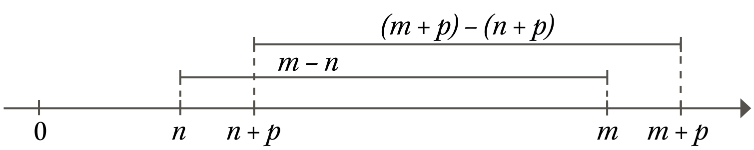


Figura II.32.

Propiedad 9 Si $m \geq n$, tenemos $m - n = (m + p) - (n + p)$

Veamos su justificación algebraica:

$$
\begin{aligned}
(m + p) - (n + p) &= ((m + p) - n) - p && \text{por la **Propiedad 6.**}\\
&= ((p + m) - n) - p && \text{por laconmutatividad de la suma.}\\
&= (p + (m - n)) - p && \text{por la **Propiedad 5.**}\\
&= ((m - n) + p) - p && \text{por la conmutatividad de la suma.}\\
&= (m - n) + (p - p) && \text{por la **Propiedad 5.**}\\
&= (m - n) + 0 && \text{por la **Propiedad 4.**}\\
&= m - n && \text{porque 0 es neutro de la suma.}
\end{aligned}
$$

La visualización de esta propiedad en la recta numérica se muestra a continuación:

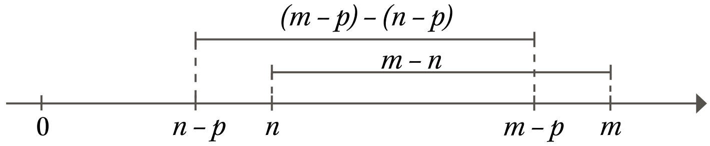


Figura II.33.

Ejercicio

Considere el siguiente problema: "Pedro tiene **\$10.000** más que Diego, ambos reciben **\$3.500** por parte de sus padres. ¿Cuánto más tiene ahora Pedro que Diego?". Justifique su solución usando la propiedad anterior.

Propiedad 10 Si $m \geq n + p$, tenemos $m - n = ((m - p) - n) + p$.

La justificación algebraica y la representación en la recta numérica quedan como ejercicio para el lector.

Propiedad 11 Si $m \geq p$, tenemos $m + n = (m - p) + (n + p)$.

Dejamos la demostración algebraica como ejercicio para el lector. A continuación, presentamos la representación en la recta numérica:

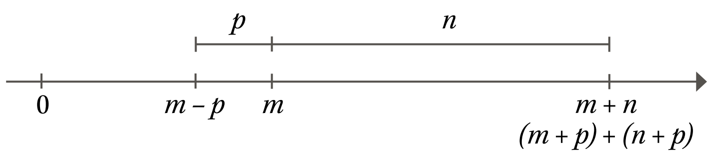


Figura II.34.

Propiedad 12 Si $n \geq p$, tenemos $m + n = (m + p) + (n - p)$

Podemos visualizar esta propiedad como se muestra a continuación:

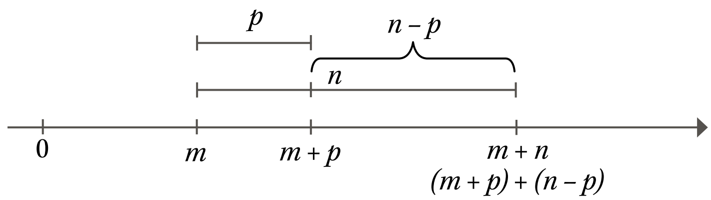


Figura II.35.

Ejercicios

1. Justifique algebraicamente las propiedades 10, 11 y 12.
2. Interprete las propiedades de 1 a la 12 usando colecciones de elementos.

Hemos listado numerosas propiedades de la resta, las cuales se basan en las propiedades de la suma. Esto se ha hecho para mostrar de manera explícita qué es lo que sustenta los diferentes procedimientos para restar que siempre hemos usado. Al adquirir confianza respecto de la validez de cada uno de los pasos seguidos para hacer una resta, no es necesario justificar cada uno de ellos.

Observación:

Notamos que, en las propiedades de la resta, en todo momento hemos tenido cuidado de no caer en restar un número mayor de uno menor. En el **Capítulo X** se levantarán estas restricciones al introducir los números enteros.

2.2 Descomposición aditiva

Como vimos al comienzo de la sección, las técnicas elementales para calcular restas son el conteo y el desconteo. Es decir, para calcular la resta $a - b$, podemos contar desde b hasta a, o descontar desde a hasta b. Si en cada paso contamos o descontamos una unidad, estas técnicas ya no son prácticas para restar números cuya diferencia es mayor a 10. Las propiedades de la suma y de la resta, junto con la estructura del sistema de numeración decimal, nos permiten desarrollar estrategias más potentes para calcular restas.

Por ejemplo, la operación 35 −13 puede efectuarse descomponiendo el minuendo y el sustraendo de forma canónica, como se muestra a continuación:

$$35 - 13 = (30 + 5) - (10 + 3) = 30 + 5 - 10 - 3 = (30 - 10) + (5 - 3) = 20 + 2 = 22$$

Aquí hemos usado que las sumas y restas pueden efectuarse en cualquier orden, siempre que a un número no se les reste otro mayor. Queda como ejercicio justificar el procedimiento realizado.

Como mencionamos en la sección de suma, el sistema posicional en base 10 que usamos habitualmente hace conveniente este tipo de agrupación en unidades, decenas, etc. Esta estrategia puede hacerse en cualquier base, descomponiendo y componiendo para formar múltiplos de potencias de la base.

También podemos hacer descomposiciones no canónicas. Por ejemplo, si queremos efectuar 44 – 18, podemos escribir:

$$44 - 18 = (24 + 20) - 18 = 24 + (20 - 18) = 24 + 2 = 26$$

Ya que las sumas 44 = 24 + 20 y 20 = 18 + 2 están en nuestro repertorio de descomposiciones no canónicas.

2.3 Estrategias de cálculo mental para restar

Al igual que en el caso de la suma, para la resta existen una serie de estrategias que, basadas en la estructura del sistema de numeración decimal y las propiedades de la resta, permiten realizar cálculos de manera directa.

Para pensar

Observe las siguientes restas:

356 – 50　　556 – 199　　4.367 – 5

Para cada una de las restas anteriores, proponga una estrategia que le permita calcularla mentalmente. Señale las propiedades que sustentan cada estrategia descrita.

Desconteo

Como vimos anteriormente, esta técnica consiste en contar a partir del minuendo, en forma decreciente, la cantidad que indica el sustraendo. Por ejemplo, para calcular 41 – 3 se descuentan 3 de 41, como se muestra a continuación.

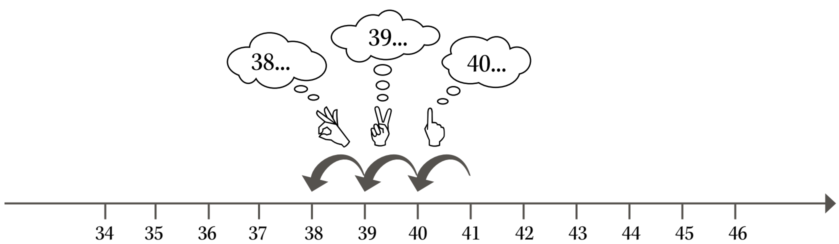


Figura II.36.

Para utilizar esta técnica, se requiere saber muy bien la secuencia de números en forma descendente, aspecto que puede traer algunas dificultades.

La técnica del desconteo, al igual que la del sobreconteo, puede extenderse y ser utilizada en un ámbito numérico mayor, descontando de 10 en 10, de 100 en 100, etc. Por ejemplo, para calcular 678 - 500, se puede descontar 500, de 100 en 100, a partir de 678, como muestra la figura:

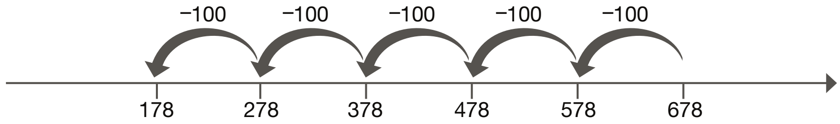


Figura II.37.

Veamos otro ejemplo, calculemos ahora 678 – 321. A partir de 678, retrocedemos de 100 en 100, luego de 10 en 10 y finalmente de 1 en 1, tal como se muestra en la figura.

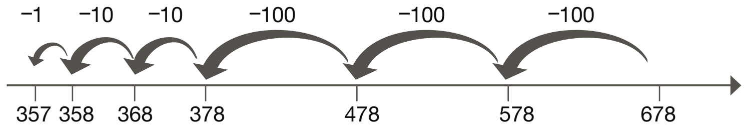


Figura II.38.

Notamos que hemos usado una recta que no está escala, para poder representar saltos de distinto orden.

Sumar para restar

Esta estrategia se basa en la relación inversa que existe entre la suma y la resta. Consiste en sobrecontar a partir del sustraendo hasta llegar al minuendo, registrando la cantidad que se requiere avanzar y que corresponde a la diferencia. Por ejemplo, para calcular 82 – 78, se puede contar de 1 en 1 a partir de 78, hasta llegar a 82, como muestra la Figura II.39:

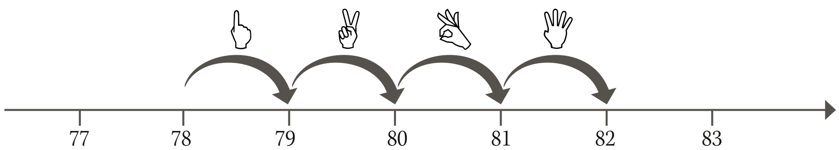


Figura II.39.

Esta técnica también puede utilizarse, aunque la diferencia no sea tan pequeña, realizando el sobreconteo de 100 en 100, de 10 en 10, etc., o combinando más de una estrategia de conteo. Por ejemplo, al calcular 67 – 45, se puede sobrecontar a partir de 45, de 10 en 10, llegando a 65, para luego contar de 1 en 1 hasta llegar a 67. De esta forma, se puede establecer que la diferencia es 22.

La estrategia sumar para restar es usada en forma habitual por comerciantes para entregar el vuelto de una compra. Por ejemplo, si pagamos con un billete de $1.000 un refresco que cuesta $799, el comerciante nos entrega primero $1 y dice “800”, luego $100 y dice “900” y finalmente $100 y dice “1.000”.

Tríos aditivos

El uso de las combinaciones aditivas básicas en el ámbito de la resta se basa en las relaciones que existen entre la suma y la resta, y requieren que al abordar el estudio de una combinación aditiva básica, por ejemplo $6 + 3 = 9$, se estudien también las restas asociadas a dicha igualdad: $9 - 6 = 3$ y $9 - 3 = 6$. Estos tríos de números relacionados de esta forma se denominan ***tríos aditivos***.

Para el estudio de estos tríos aditivos, es conveniente usar algún tipo de diagrama, tales como los que aparecen a continuación:

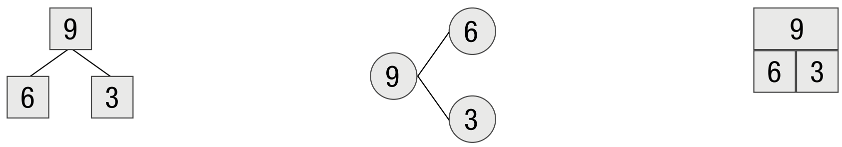


Figura II.40.

El estudio de los tríos aditivos se puede extender a las decenas, centenas, unidades de mil, etc., a partir de las relaciones $9 - 3 = 6$ y $9 - 6 = 3$, se puede calcular directamente $90 - 60$, $90 - 30$, $900 - 600$, $900 - 300$, etc.

Descomposición canónica

Al igual que con la suma, algunas restas pueden obtenerse directamente a partir de la estructura del sistema posicional. Por ejemplo, $47 - 7 = 40$; $437 - 30 = 407$ y $554 - 504 = 50$.

Algunas de las restas que se pueden plantear para utilizar esta técnica pueden ser resueltas fácilmente considerando las características orales del sistema de numeración. Por ejemplo, $432 - 32$ se dice oralmente "cuatrocientos treinta y dos, menos treinta y dos", y se puede establecer directamente que el resultado es cuatrocientos. Sin embargo, esta característica se puede transformar en un obstáculo y es frecuente observar en los estudiantes errores como $432 - 32 = 4$.

Completar la decena: traslado de la diferencia y compensación

Al igual que en la suma, esta técnica se puede utilizar para transformar una resta en otra más fácil de calcular y con el mismo resultado. Una forma de hacer esto es agregar al sustraendo una cantidad conveniente y así completar un múltiplo de una potencia de 10, evitando canjes en la resta. Por ejemplo, frente al cálculo $65 - 29$, se puede agregar 1 al sustraendo y escribirlo como 30. Luego, para que se mantenga la igualdad, se debe agregar la misma cantidad al minuendo, obteniéndose la resta: $66 - 30$. Esta técnica de cálculo se conoce como *traslado de la diferencia*, ya que al agregar la misma cantidad al minuendo y al sustraendo se puede decir que la "diferencia se traslada". Consideremos la resta anterior marcando en una recta numérica el minuendo y el sustraendo, como se muestra a continuación:

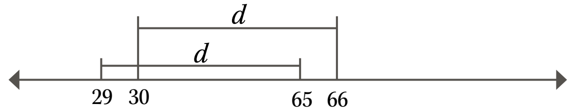


Figura II.41.

De la misma forma, si restamos la misma cantidad al minuendo y al sustraendo, la diferencia no cambia. Esto corresponde a las **Propiedades** 8 y 9 de la **Sección 2.1**: dados m, n y p, números naturales, se tiene que:

$$m - n = (m + p) - (n + p) \text{ y } m - n = (m - p) - (n - p)$$

Ejemplo

Consideremos $m = 45$, $n = 18$, $p = 2$. Para calcular la resta $45 - 18$ podemos agregar 2 al minuendo y al sustraendo de la siguiente forma:

$$45 - 18 = (45 + 2) - (18 + 2) = 47 - 20 = 27$$

Otra forma de facilitar el cálculo de la resta consiste en sumar o restar un número conveniente, en general al sustraendo, para lograr una decena o múltiplo de potencia de 10. Luego de efectuar la operación con este nuevo sustraendo, compensamos el resultado.

Dado que podemos sumar o restar un número al minuendo o al sustraendo, tenemos cuatro casos posibles. Consideremos la resta $m - n$ y veamos qué sucede si alteramos el sustraendo:

- Si le sumamos p al sustraendo, tenemos que $m - n = m - n - p + p = (m - (n + p)) + p$. Es decir, debemos compensar sumando p a la resta.
- Si le restamos p al sustraendo, tenemos que $m - n = m - n + p - p = (m -(n - p)) - p$. Es decir, debemos compensar restando p a la resta.

Ejercicio

Deduzca cómo se produce la composición cuando sumamos o restamos p al minuendo.

Ejemplo

Resolvamos la resta $57 - 35$ haciendo una compensación. Tenemos las siguientes alternativas:

$57 - 34 = (57 - (34 + 6)) + 6 = (57 - 40) + 6 = 17 + 6 = 23$

$57 - 34 = (57 - (34 - 4)) - 4 = (57 - 30) - 4 = 27 - 4 = 23$

$57 - 34 = ((57 + 3) - 34) - 3 = (60 - 34) - 3 = 26 - 3 = 23$

$57 - 34 = ((57 - 7) - 34) + 7 = (50 - 34) + 7 = 16 + 7 = 23$

Es subjetivo determinar cuál de estas variaciones es más fácil. Depende de la experiencia previa del que realiza la operación. Sin embargo, parece más fácil compensar con el sustraendo.

Notamos que, si bien usamos nombres particulares para las técnicas de cálculo mental de sumas y restas, el principio básico es el mismo. Cambiamos uno de los números involucrados de forma de facilitar el cálculo y, si es necesario, compensamos ya sea el otro número o el resultado.

Por último, observamos que las técnicas vistas están orientadas a completar la decena. Sin embargo, las propiedades son generales y podemos usarlas de la manera que creamos más conveniente, según el caso. Por ejemplo, la resta 57 – 34 también podemos resolverla de las siguientes maneras:

$57 - 34 = (57 - (34 + 3)) + 3 = (57 - 37) + 3 = 20 + 3 = 23$

$57 - 34 = (57 - 2) - (34 + 1) + 2 + 1 = 55 - 35 + 2 + 1 = 20 + 2 + 1 = 23$

Ejercicios

1. Indique, según los números involucrados en cada ejercicio, qué técnica propondría usar a estudiantes de 3° Básico para resolverlos. Realice los cálculos utilizando y explicando la técnica mencionada.

   a. **6.478 – 6** b. **635 – 30** c. **6.783 – 4998** d. **3.004 – 2.997**

2. Describa una forma de explicar el uso de la técnica completar la decena usando cubos y barras, como las que se muestran a continuación:

Barra *Cubo*

2.4 El algoritmo usual de la resta

Comencemos con un ejemplo. Supongamos que queremos calcular 4.567 – 2.435. Tenemos:

4.567 – 2.435

= (4.000 + 500 + 60 + 7) – (2.000 + 400 + 30 + 5)

= 4.000 + 500 + 60 + 7 – 2.000 – 400 – 30 – 5 Por la **Propiedad 6** de la **Sección 2.1.**

= (4.000 – 2.000) + (500 – 400) + (60 – 30) + (7 – 5) No importa el orden en que efectuamos las restas.

= 2.000 + 100 + 30 + 2

= 2.132

En una tabla de valor posicional, tenemos:

	UM	C	D	U
4.567	4	5	6	7
2.435	2	4	3	5
4.567 – 2.435	2	1	3	2

Tabla II.7.

Lo cual se sintetiza en el diagrama usual de la resta:

$$\begin{array}{r} 4.567 \\ +\ 2.435 \\ \hline 2.132 \end{array}$$

Figura II.42.

La situación se complica cuando en alguna de las posiciones el sustraendo tiene una cifra mayor que el minuendo. Calculemos la resta 4.365 – 1.538 usando una tabla de valor posicional.

	UM	C	D	U
4.365	4	3	6	5
1.538	1	5	3	8
4.365 – 1.538				

Tabla II.8.

Comenzando por las unidades, vemos que no podemos restar 8 unidades del sustraendo a 5 unidades del minuendo. Esto se arregla descomponiendo 1 decena de las 6 del minuendo en 10 unidades del mismo. Nos quedan entonces 5 decenas y 15 unidades:

	UM	C	D	U
4.365	4	3	5	15
1.538	1	5	3	8
4.365 – 1.538			2	7

Tabla II.9.

En las unidades tenemos 15 – 8 = 7 y en las decenas, 5 – 3 = 2. En las centenas llegamos nuevamente al caso del sustraendo mayor que el minuendo. Hacemos una descomposición de 1 centena de las 4 del minuendo en 10 decenas del mismo.

	UM	C	D	U
4.365	3	13	5	15
1.538	1	5	3	8
4.365 – 1.538	2	8	2	7

Tabla II.10.

En las centenas tenemos 13 – 5 = 8 y en las unidades de mil tenemos 3 – 1 = 2.

Por lo tanto, hemos calculado 4.365 – 1.538 = 2.827. Este tipo de resta suele llamarse *resta con reserva* o *por descomposición.*

Podemos resumir el proceso de la siguiente manera: comenzamos por las unidades preguntándonos ¿si a 5 le quito 8, cuánto queda? Como esto no es posible en este contexto, descomponemos las 6 decenas en 5 decenas más 10 unidades. Tenemos ahora 15 unidades a las que sí les podemos quitar 8. Generalmente, esto se anota poniendo pequeños unos para recordar que ahora hay 15 unidades, y tarjando el 6 y anotando 5 en el lugar de las decenas del minuendo. Algo similar se hace con las centenas y las unidades de mil.

Podemos sintetizar el procedimiento en los siguientes esquemas:

$$\begin{array}{ccccccc}
\textbf{Paso 1} & & \textbf{Paso 2} & & \textbf{Paso 3} & & \textbf{Paso 4} \\
\begin{array}{r} 5 \\ 4.3\cancel{6}{}^{1}5 \\ +\ 1.538 \\ \hline 7 \end{array} & \longrightarrow &
\begin{array}{r} 5 \\ 4.3\cancel{6}{}^{1}5 \\ +\ 1.538 \\ \hline 27 \end{array} & \longrightarrow &
\begin{array}{r} 3\ 5 \\ \cancel{4}.{}^{1}3\cancel{6}{}^{1}5 \\ +\ 1.538 \\ \hline 827 \end{array} & \longrightarrow &
\begin{array}{r} 3\ 5 \\ \cancel{4}.{}^{1}3\cancel{6}{}^{1}5 \\ +\ 1.538 \\ \hline 2.827 \end{array}
\end{array}$$

Figura II.43.

Notamos que en la verbalización del procedimiento que hicimos usamos la interpretación de la resta como: ¿cuánto queda del minuendo, si le quito el sustraendo? En nuestro ejemplo decimos: ¿si a 15 le quito 8 cuánto queda? En su lugar, podemos usar la interpretación de la resta como ¿cuánto le falta al sustraendo para llega al minuendo? En nuestro ejemplo preguntaríamos: ¿cuánto le falta a 8 para llegar a 15? Claramente el algoritmo es el mismo, depende del usuario la forma en que lo verbaliza, pudiendo usar cualquiera de las dos interpretaciones de resta mencionadas o ambas, según los números involucrados.

2.5 Otro algoritmo para la resta

El siguiente algoritmo para restar tal vez nos resulta menos familiar o incluso desconocido. Sin embargo, es usado por muchas personas. Veamos un ejemplo: para calcular 46 – 27, se puede proceder como sigue:

$$\begin{array}{ccccc}
\textbf{Paso 1} & & \textbf{Paso 2} & & \textbf{Paso 3} \\
\begin{array}{r} 46 \\ +\ 27 \\ \hline \end{array} & \longrightarrow &
\begin{array}{r} 4{}^{1}6 \\ +\ {}^{3}\cancel{2}7 \\ \hline \end{array} & \longrightarrow &
\begin{array}{r} 4{}^{1}6 \\ +\ {}^{3}\cancel{2}7 \\ \hline 19 \end{array}
\end{array}$$

Observamos que lo que se hizo fue sumar 10 unidades al minuendo y sumar una decena al sustraendo, en otras palabras, trasladamos la diferencia.

46 – 27 = (40 + 6) – (20 + 7) = (40 + 6 + 10) – (20 + 7 + 10) = (40 + 16) – (30 + 7) = (40 – 30) + (16 – 7) = 10 + 9 = 19

2.6 Dificultades y posibles errores en el uso del algoritmo usual de la resta

Probablemente, la mayor dificultad que se presenta durante el aprendizaje de la resta, cualquiera sea el algoritmo usado, es no saber descomponer correctamente las unidades de orden mayor, cuando la cifra correspondiente al minuendo es menor que la del sustraendo. Por ejemplo:

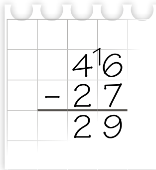


Figura II.44.

La dificultad aumenta cuando hay uno o más ceros en el minuendo, como en los dos ejemplos siguientes.

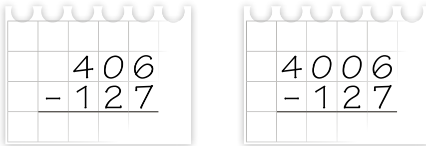


Figura II.45.

El problema aquí es que la descomposición tiene dos pasos, el cero de las decenas no se puede descomponer, por lo tanto, debemos descomponer primero las centenas. El segundo ejemplo agudiza esta dificultad.

En el caso del algoritmo alternativo presentado antes, esta dificultad desaparece, ya que no es necesario descomponer el cero:

Paso 1 **Paso 2** **Paso 3**

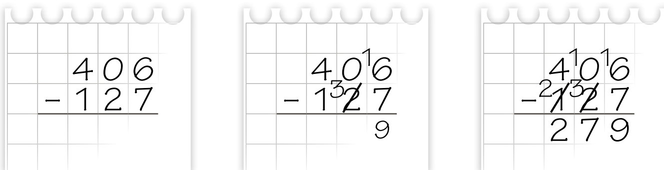


Figura II.46.

Vemos que la dificultad disminuye, ya que es más fácil sumar uno al dos o al uno que restar uno del cero.

Otro error que suele presentarse queda ilustrado en el siguiente ejemplo:

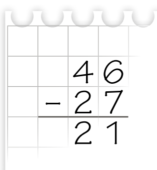
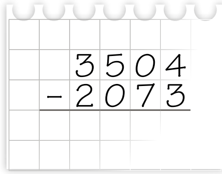


Figura II.47.

¿A qué cree usted que se debe este error?

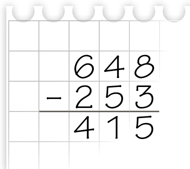
Ejercicios

1. Observe la resta que aparece a continuación, la cual será incluida en una prueba de selección múltiple:



Proponga tres distractores para esta resta. Justifique su elección.

2. Describa el error del estudiante al resolver la sustracción:



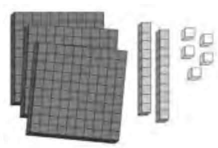
2.7 La resta y el material concreto

Al igual que con la suma, el uso de material concreto es un apoyo importante para comprender el significado de la resta y el funcionamiento de los algoritmos asociados a esta operación. Antes de adentrarse en el manejo del algoritmo, es importante lograr que los niños y las niñas comprendan el concepto de la resta y desarrollen sus propias estrategias para resolver problemas relacionados a ella. Al comienzo, el uso de colecciones de objetos, por ejemplo, fichas, lápices y láminas, permiten efectuar de manera concreta las acciones de sacar, separar y comparar, las cuales conviene tratar simultáneamente con las acciones de agregar y juntar, que definen la suma. Luego podemos pasar a la representación pictórica de estas colecciones. Para aumentar el ámbito numérico y realizar restas componiendo y descomponiendo, al igual que con la suma, podemos usar palitos de helado y banditas elásticas, o los bloques base 10. Veamos un ejemplo usando bloques base 10.

Ejemplo

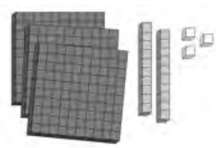
Resolvamos 325 – 142 mediante el uso de bloques base 10. El procedimiento consiste en representar el minuendo e ir separando bloques para formar el sustraendo. Esto se puede hacer en cualquier orden que resulte conveniente. En este ejemplo, comenzamos a separar por las unidades. Al final del proceso, tendremos un grupo de bloques que representa al sustraendo y otro grupo que representa la resta.

Paso 1:



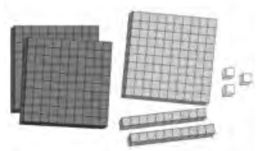
Representemos el minuendo 325.

Paso 2:



Separamos dos unidades que corresponden al sustraendo.

Paso 3:



Para separar 4 decenas para formar el sustraendo, debemos primero canjear una placa del minuendo por 10 barras.

Paso 4:

Separamos las decenas que corresponden al sustraendo.

Paso 5:

Separamos las centenas que corresponden al sustraendo.

Paso 6:

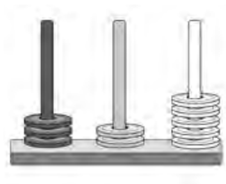
El resultado de la resta es lo que queda del minuendo, es decir, 183.

Para comprender el funcionamiento del algoritmo usual de la resta, es posible usar el ábaco.

Ejemplo

Calculemos 325 – 142 mediante el uso de un ábaco. Este instrumento requiere de un nivel de abstracción mayor que los bloques base 10, y puede ser un apoyo importante para introducir el algoritmo de la resta.

Paso 1:

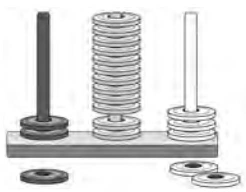


Representamos el minuendo usando el ábaco. Ponemos 3 fichas en las centenas, 2 fichas en las decenas y 5 en las unidades.

Paso 2:

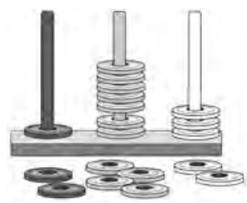
Quitamos las unidades del sustraendo a las unidades del minuendo.

Paso 3:



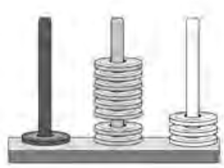
Para quitar las 4 decenas al minuendo, necesitamos canjear 1 centena por 10 decenas.

Paso 4:



Ahora podemos quitar las 4 decenas y la centena correspondientes al sustraendo.

Paso 5:



Contamos las centenas y hacemos canjes, en caso de ser necesario.

Ejercicios de la sección

1. Un niño calcula 52 – 48 señalando: “52 menos 48… cuento: 49, 50, 51, 52 el resultado es 4”. Indique la técnica de cálculo que utiliza el niño y las propiedades que la sustentan.

2. Calcule las siguientes restas usando una técnica de cálculo mental. Explique la técnica utilizada.

   a. 354 – 54
   b. 4.003 – 3.987
   c. 758 – 6
   d. 271 – 198
   e. 700 – 400
   f. 6.736 – 600

3. Observe los procedimientos de cálculo usados para resolver las restas. Complete la tabla indicando las propiedades que sustentan estos procedimientos.

Procedimiento	Propiedades
53 – 32 30 + 2 Se calcula 53 – 30 = 23, y luego 23 – 2 = 21.	
83 – 37 30 + 7 3 + 4 Se calcula 83 – 30 = 53, luego 53 – 3 = 50. Finalmente 50 – 4 = 46.	

4. Indique en cada paso la propiedad que sustenta el siguiente procedimiento.

   645 – 297

   = 645 – (297 + 0) ________________
   = 645 – (297 + 3 – 3) ________________
   = 645 – (300 – 3) ________________
   = 645 – 300 + 3 ________________

5. En la recta numérica se representó la forma en que se calculó la resta 65 – 23.

   a. Explique la forma en que se descompuso el sustraendo al hacer la resta.
   b. Calcule 56 – 17 haciendo una descomposición aditiva del sustraendo y represente el procedimiento que utiliza en una recta numérica.

6. Observe el siguiente procedimiento para el cálculo de una resta.

$$\begin{array}{rl} 747 = 700 + 40 + 7 & \\ - \quad 536 = 500 + 30 + 6 & \\ \hline & 200 + 10 + 1 = 211 \end{array}$$

a. Explique cómo funciona el procedimiento.

b. ¿Qué relación existe entre este procedimiento y el algoritmo usual de la resta? Justifique su respuesta.

c. Considere una modificación del procedimiento anterior:

$$\begin{array}{r} 747 \\ -\ 536 \\ \hline 1 \\ 10 \\ +\ 200 \\ \hline 211 \end{array}$$

Explique paso a paso este último procedimiento e indique la relación con el algoritmo usual de la resta.

7. En cada caso, determine el valor de k para que la resta tenga reserva.

$$\begin{array}{r} 4k6 \\ -\ 192 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43k \\ -\ 302 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 746 \\ -\ 40k \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5k8 \\ -\ 230 \\ \hline \end{array}$$

8. Observe la respuesta de un niño al resolver la siguiente resta:

$$604 - 332 = \underline{332}$$

a. Explique el error al desarrollar el cálculo.

b. Indique al menos un material concreto o representación pictórica que podría remediar el error.

9. Considere la operación 835 − 251 − 327. ¿Cómo se puede adaptar el algoritmo de la resta para calcular directamente?

$$\begin{array}{r} 835 \\ -\ 251 \\ -\ 327 \\ \hline \end{array}$$

3. Las situaciones aditivas

El trabajo con las operaciones está íntimamente ligado a la resolución de problemas con contexto. Como vimos anteriormente, las propias operaciones se pueden interpretar como abstracciones de acciones concretas. Resolver problemas con contexto involucra reconocer datos e incógnitas y modelar sus relaciones matemáticamente, por ejemplo, a través de operaciones aritméticas. Una vez que se abstrae el problema, este se resuelve en el plano matemático, para luego interpretar los resultados obtenidos en el contexto original. Para hacer la transición del problema con contexto a su formulación matemática, es de gran utilidad usar diagramas, los cuales nos permiten representar el problema de manera abstracta y plantear las operaciones que se requieren para resolverlo.

Estudiar las operaciones ligándolas a la resolución de problemas ayuda a darles sentido, a desarrollar el pensamiento abstracto y favorece que los niños y las niñas aprecien la utilidad de la Matemática. Así, saber confeccionar y elegir buenos problemas es una tarea esencial en el quehacer de un profesor.

En esta sección, estudiaremos las llamadas situaciones aditivas, que son tipos de problemas simples cuya resolución involucra sumas y restas, y que permiten contextualizar sus distintas interpretaciones. También veremos cómo modelar estas situaciones mediante diagramas de barra, en los cuales los números se identifican con el largo de una barra de ancho fijo. Estos diagramas provienen de la interpretación de los números como longitudes de segmentos, ya que resulta más conveniente usar barras en lugar de segmentos para visualizar las relaciones entre los números involucrados en un problema.

Existen varias formas de clasificar las situaciones aditivas, a continuación presentaremos una de ellas:

- Juntar y separar.
- Agregar y quitar.
- Comparar.

Juntar y separar

Son aquellos problemas que se refieren a una cantidad total, la que consiste en dos partes que deben estar bien definidas. Los problemas relacionados con juntar estas partes se pueden resolver mediante una suma, y los problemas de separarlas, mediante una resta.

Un diagrama de barras que nos permite representar y resolver problemas de unir y separar es el siguiente:

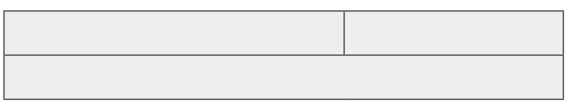


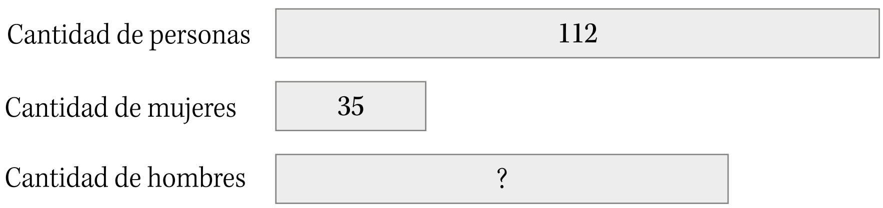
Figura II.48.

En el diagrama se usan barras para representar la información del enunciado en este tipo de situaciones. La cantidad total se representa con la barra más larga y las partes por dos barras más pequeñas. La longitud que resulta de la unión de las barras pequeñas es igual a la longitud de la barra que representa el total, pues en este tipo de situaciones el total está formado por dos partes distinguibles por algún atributo. Veamos un ejemplo de cómo resolver un problema de juntar y separar usando diagramas:

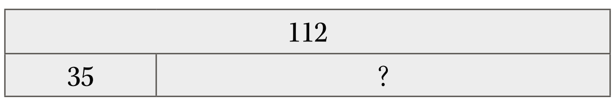
Ejemplo

A un concierto de rock asistieron 112 personas entre hombres y mujeres. Si al concierto llegaron 35 mujeres, ¿cuántos hombres asistieron?

Para construir el diagrama, es importante identificar la información que se entrega en el enunciado. En este problema el total son las 112 personas que asistieron al concierto. De ellas, una parte son las 35 mujeres y la otra son los hombres, siendo el número de estos la cantidad desconocida del problema. Dibujaremos una barra para representar cada dato:

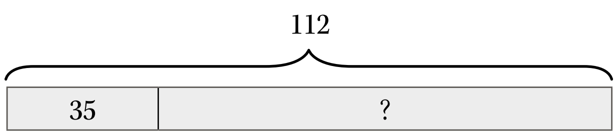


Como el total es igual a la suma de las dos partes, al elaborar el diagrama se muestra esta relación con las barras, yuxtaponiendo la barra del total con las barras que representan las subcolecciones. Así, un diagrama que representa el problema planteado es:



A partir del diagrama, se puede establecer directamente que para encontrar el número de hombres basta calcular 112 – 35.

Otra forma de presentar este diagrama es reemplazando la barra que representa al total por una llave que indique el total, como se muestra a continuación. Un diagrama de este tipo para el problema anterior sería:



La cantidad desconocida en un problema de juntar y separar puede ser el total o una de las partes. Este aspecto determina la pregunta del problema y permite plantear dos tipos de situaciones distintas, las cuales ejemplificaremos a continuación.

Problema 1

En una caja hay 10 chocolates rellenos con fruta y 15 chocolates rellenos con crema. ¿Cuántos chocolates hay en la caja?

En este tipo de situaciones, se conoce cada una de las partes y se pregunta por el total.

15	10
?	

Figura II.49.

Problema 2

En una caja hay 25 chocolates, de ellos 10 están rellenos con fruta y el resto con crema. ¿Cuántos chocolates rellenos con crema hay en la caja?

En esta situación se conoce la cantidad de elementos del total y se pregunta por la cantidad de una de las partes.

10	?
25	

Figura II.50.

Algunos ejemplos de contextos que permiten plantear problemas de juntar y separar son:

- Los alumnos de un curso, en el que hay niños y niñas.
- Un corral de animales, donde hay pavos y gallinas.
- Un cordel con ropa tendida, donde hay camisas y pantalones.
- Una cuenta que incluye el precio de sándwiches y bebidas.
- Un ramo de flores, en el que hay rosas y crisantemos.
- Una bandeja con sándwiches, donde hay de jamón y de queso.
- Un estante con libros, donde hay libros de Historia y Matemática.
- Se mezclan dos colores de pintura.

Ejercicio

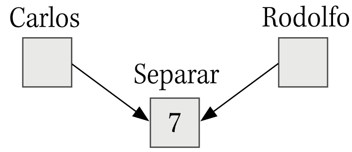
Del listado anterior, elija tres situaciones:

a. Formule los tres problemas de juntar y separar con cada situación.
b. Dibuje un diagrama de barra para cada problema.

Existen variaciones de estos problemas de juntar y separar. Por ejemplo, se puede conocer solo una de las cantidades. En este caso, las respuestas posibles son varias.

Ejemplo

Rodolfo y Carlos se reparten 4 galletas, ¿cómo pueden hacer esta distribución?



Hay 5 maneras de hacer el reparto, lo que mostramos en la siguiente tabla:

Rodolfo	Carlos
0	4
1	3
2	2
3	1
4	0

Agregar y quitar

En este tipo de problemas se tiene una cantidad inicial, a la cual se le agrega o quita una parte, y con ello se obtiene una cantidad final. Dependiendo de la formulación del problema, la incógnita podría ser la cantidad inicial, la cantidad agregada o quitada, o la cantidad final. Tenemos entonces 6 tipos de problemas.

Un posible esquema que permite distinguir las distintas situaciones de agregar y quitar representando el momento inicial, la cantidad agregada o quitada, y el momento final es el siguiente:

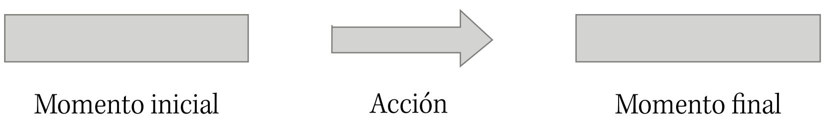


Figura II.51.

El esquema anterior es una buena herramienta para el profesor, pues le permite elegir el problema adecuado al nivel y momento del aprendizaje de los niños y las niñas. A través del esquema, se pueden visualizar los datos y la pregunta del problema.

Los diagramas de barra también pueden ser utilizados para representar y resolver este tipo de problemas.

Tenemos dos tipos de diagramas de barra:

En los problemas de agregar

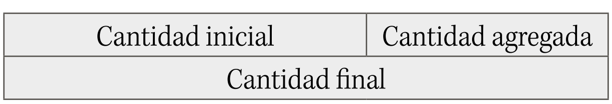


Figura II.52.

En los problemas de quitar

Cantidad inicial	
Cantidad quitada	Cantidad final

Figura II.53.

Veamos un ejemplo para cada uno de los 6 tipos de problemas y sus correspondientes diagramas.

Problema 1

En un bus había 12 pasajeros y subieron 3 más. ¿Cuántos pasajeros hay ahora en el bus?

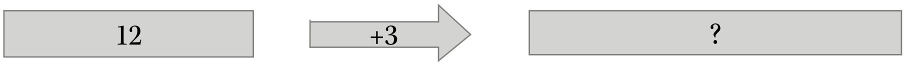


Figura II.54.

Este problema es de agregar y se desconoce la cantidad final. Veamos el diagrama de barras correspondiente:

12	3
?	

Figura II.55.

Problema 2

En un bus había 12 pasajeros, subieron algunos en la parada anterior y ahora hay 15 pasajeros ¿Cuántos pasajeros subieron al bus?

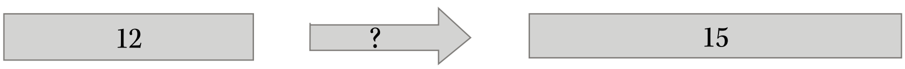


Figura II.56.

Al igual que la anterior, esta situación también es de agregar, pero en este caso la cantidad desconocida es la que se agrega. El diagrama de barras que permite representar las relaciones entre los datos y la pregunta del problema es:

12	?
15	

Figura II.57.

Problema 3

En un bus venían algunos pasajeros y subieron 3 más. Ahora hay 15 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros había inicialmente en el bus?

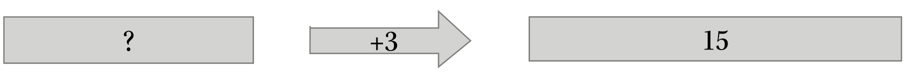


Figura II.58.

Este problema es de agregar y se desconoce la cantidad inicial. Un diagrama de barras que permite relacionar los datos con la pregunta del problema es el siguiente:

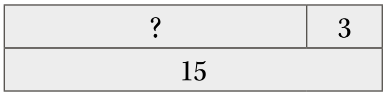


Figura II.59.

Problema 4

En un bus había 12 pasajeros y bajaron 3 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros quedan en el bus?

Figura II.60.

En este problema, la acción que se describe en el enunciado es la de quitar una cantidad a otra que había inicialmente, y se desconoce la cantidad final. Podemos representarlo con el siguiente diagrama de barras:

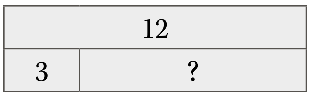


Figura II.61.

Problema 5

Bajaron 3 pasajeros de un bus y quedaron 9 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros había inicialmente en el bus?

Figura II.62.

En este problema, la cantidad desconocida está en el momento inicial y se conoce la cantidad que se quita y la cantidad final. Un diagrama de barras que permite representarlo es:

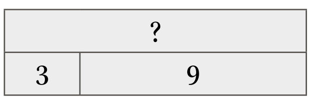


Figura II.63.

Problema 6

En un bus había 12 pasajeros, bajaron algunos y ahora quedan 9. ¿Cuántos pasajeros bajaron del bus?

Figura II.64.

En este caso, conocemos las cantidades inicial y final, pero desconocemos la que se quita. El diagrama de barras asociado a esta situación es el siguiente:

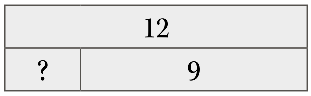


Figura II.65.

Ejemplos de situaciones que permiten plantear problemas de agregar y quitar:

Escenario	Agregar	Quitar
Un gallinero	Nacen pollitos	Se venden pollitos
Un restaurante	Llegan clientes	Se van clientes
Empanadas	Se hacen más empanadas	Se venden empanadas
Un comerciante	Compra mercadería	Vende mercadería
Un vehículo	Se le pone bencina	Gasta bencina
Una competencia	Gana puntos	Pierde puntos
Un conjunto de niños	Llegan niños al colegio	Salen niños del colegio
Un tren	Se le agregan vagones	Se le sacan vagones

Tabla II.11.

Ejercicios

1. Formule los tres problemas de agregar y quitar para dos de las situaciones anteriores.

2. Dibuje un diagrama de barras para cada problema y resuélvalo.

Comparar

Son aquellos problemas donde se comparan dos cantidades para encontrar la diferencia entre ambas. La pregunta puede referirse a la diferencia (cuántos más o cuántos menos) o a una de las cantidades que se están comparando.

En este tipo de problemas, los diagramas de barra son también una herramienta eficaz para relacionar los datos con la cantidad desconocida. Inicialmente, una comparación por diferencia se puede representar con objetos concretos, como cubos, para pasar paulatinamente a representaciones pictóricas usando barras. Por ejemplo, si se tienen dos torres con cubos, una con 11 y la otra con 8 cubos, ¿cuántos cubos más hay en la primera torre que en la segunda?

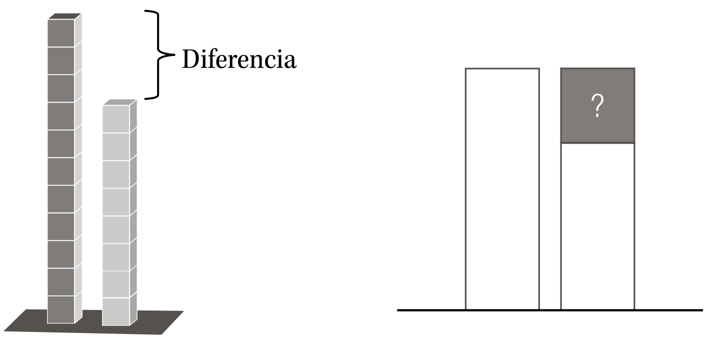


Figura II.66.

Dibujar este tipo de diagramas con las barras dispuestas en forma vertical permite conectar el uso de este recurso con experiencias previas, como apilar y comparar. Sin embargo, estos diagramas se suelen hacer con las barras dispuestas en forma horizontal, como vimos en las otras situaciones.

Es posible variar la formulación de los problemas de comparar preguntando por una de las cantidades que se está comparando o preguntando por la diferencia. Considerando además la forma en que se plantea la pregunta de comparación (cuánto más, cuánto menos), tenemos 6 tipos de problemas, los cuales se ejemplifican a continuación.

Problema 1

Un pudú pesa 10 kilos y un perro siberiano, 18 kilos. ¿Cuánto menos pesa el pudú?

18	
10	?

Figura II.67.

En este tipo de situaciones, se pregunta por la diferencia entre dos cantidades, a partir de la relación "menos que".

Problema 2

Un pudú pesa 10 kilos y un perro siberiano, 18 kilos. ¿Cuánto más pesa el perro siberiano?

18	
10	?

Figura II.68.

Al igual que en la situación anterior, la pregunta del problema corresponde a la diferencia entre dos cantidades, pero esta vez a partir de la relación "más que".

Problema 3

Un pudú pesa 10 kilos y un perro siberiano pesa 8 kilos más. ¿Cuánto pesa el perro siberiano?

?	
10	8

Figura II.69.

En este problema, la cantidad desconocida es una de las que se está comparando, y la relación es "más que".

Problema 4

Un perro siberiano pesa 18 kilos y un pudú pesa 8 kilos menos ¿Cuánto pesa el pudú?

18	
?	8

Figura II.70.

La incógnita es una de las cantidades que se está comparando y la relación es "menos que".

Problema 5

Un perro siberiano pesa 18 kilos, 8 kilos más que un pudú. ¿Cuánto pesa el pudú?

18	
?	8

Figura II.71.

Esta situación varía con respecto a las anteriores. En el enunciado, para entregar la relación entre las cantidades que se están comparando, se utiliza un solo referente (el peso del perro siberiano). La relación es "más que".

Problema 6

Un pudú pesa 10 kilos, 8 kilos menos que un perro siberiano. ¿Cuánto pesa el perro siberiano?

?	
10	8

Figura II.72.

En el enunciado de este problema, la relación entre las cantidades que se están comparando se describe usando un solo referente, el peso del pudú. La relación es "menos que".

Algunos ejemplos de situaciones que permiten plantear problemas de comparar:

- Estaturas de dos niños.
- Edades de dos personas.
- Precios de dos mercaderías.
- Distancias entre ciudades.

En resumen

Las situaciones aditivas son problemas simples que se resuelven con suma o resta. Una forma de clasificarlas es: juntar y separar, agregar y quitar, y comparar.
Los diagramas son una poderosa herramienta para plantear y resolver problemas. Nos permiten abstraer el problema, para luego poder resolverlo e interpretar el resultado obtenido en el contexto del problema.

Ejercicios de la sección

1. Resuelva los siguientes problemas dibujando un diagrama de barras. Indique si los problemas son de agregar y quitar, juntar y separar o comparar.

    a. Un 4° Básico reunió $13.900 para realizar una convivencia. El centro de padres del curso colaboró con algo de dinero para esta iniciativa y así lograron reunir $30.000 en total. ¿Cuánto dinero aportó el centro de padres para la convivencia?

    b. Un agricultor cosechó varios melones el día miércoles. El día jueves puso a la venta los melones cosechados y vendió 140. Si al final del día le quedaban 38 melones, ¿cuántos cosechó el día miércoles?

    c. A un recipiente que ya contenía 43 litros de agua, Luis agregó el agua que contenía un bidón. En total, Luis reunió 57 litros de agua. ¿Cuánta agua contenía el bidón?

    d. Se unen dos cuerdas por sus extremos y se obtienen 25 metros de longitud. Si una de ellas mide 12 metros, ¿cuál es la longitud de la otra cuerda?

    e. Marta juntó la harina que tenía guardada en dos frascos. Un frasco contenía 320 gramos de harina, mientras que el otro contenía 560 gramos. ¿Cuántos gramos de harina juntó Marta?

    f. Lucía mide 158 centímetros y su hermano César mide 23 centímetros más que ella. ¿Cuál es la estatura de César?

    g. El precio de una camisa en la tienda Modas es $7.890, mientras que en la tienda Actual el mismo tipo de camisa cuesta $6.790. ¿Cuánto menos cuestan las camisas en la tienda Actual que en la tienda Modas?

    h. Mateo pesa 55 kilogramos, 12 kilogramos menos que su hermana Andrea. ¿Cuánto pesa Andrea?

2. Observe la siguiente imagen:

$9.870

$2.190

    a. Invente un problema de juntar y un problema de separar con la información de la imagen. Si no es posible formular un problema de este tipo, justifique su respuesta.

    b. Invente un problema de agregar y un problema de quitar con la información de la imagen. Si no es posible formular un problema de este tipo, justifique su respuesta.

    c. Invente un problema de comparar con la información de la imagen. Si no es posible formular un problema de este tipo, justifique su respuesta.

3. Señale, en cada caso, si el problema corresponde al diagrama dibujado. En caso de que no corresponda, dibuje el diagrama correcto.

Problema	Diagrama
Rosa compró 5 kilos de naranjas y algunos kilos de manzanas en la feria. En total, la compra de Rosa pesó 9 kilos. ¿Cuántos kilos de manzanas compró Rosa?	5 9 ?
Marco ahorró $560 durante una semana. El ahorró $120 menos que su hermana Carla. ¿Cuánto dinero ahorró Carla durante esa semana?	120 ? 560
Durante el verano, Martín logró coleccionar un gran número de láminas de un álbum de fútbol. En marzo, al llegar al colegio, perdió 25 láminas y ahora tiene 112. ¿Cuántas láminas juntó Martín durante el verano?	25 112 ?
Laura leyó 32 páginas de un libro el lunes. El martes leyó 5 páginas menos que el día anterior. ¿Cuántas páginas leyó Laura el martes?	5 32 ?

Ejercicios del capítulo

1. Se desea distribuir los 9 dígitos entre el 1 y el 9 en los casilleros de la figura siguiente, para armar una suma de tres números de tres dígitos cada uno:

a. ¿Cuál es el número más grande que puede obtenerse como resultado de esta suma? ¿Qué condición debe cumplirse para ello?

b. Una forma de ordenar los dígitos y obtener el número 1.782 es:

3	7	4
8	1	2
5	9	6

¿Es esta la única solución?

2. Explique cómo calcular mentalmente 122 + 198, 31 + 468, 332 −13, 435 + 44 + 115.

¿Qué propiedades de la suma y la resta está usando?

3. Amanda y Bruno están colaborando en la cocina de su escuela. La cocinera les encarga preparar leche y les da una bolsa de leche en polvo y dos recipientes, uno de 8 litros y otro de 3 litros. En las instrucciones que están en la bolsa dice que el contenido total debe mezclarse con 7 litros de agua. La cocinera les dice a los niños que necesita buscar otros ingredientes y que volverá en 10 minutos. Al decir esto, a los niños les parece ver una sonrisa en la cara de la cocinera. Pasados los 10 minutos, la cocinera regresa y se sorprende al descubrir que la leche está lista y, al parecer, de manera correcta. ¿Qué pueden haber hecho los niños para lograrlo?

a. Resuelva el problema.

b. Entregue una descripción escrita de su solución.

c. Dibuje la serie de pasos necesarios para resolver el problema.

Una descripción de la solución con palabras puede ser algo complicado de entender. Usar dibujos puede ser una manera de visualizar, resolver y expresar la solución del problema.

4. Considere el siguiente tablero:

2	9	5	6
15	7	16	3
12	14	10	11
8	4	1	13

Trace una recta sobre el tablero, tal que la suma de los números de las casillas que son cortadas por la recta sea lo más alta posible.

5. Esteban tiene un truco que aprendió a hacer con números:

$$\begin{array}{r} 531 \\ -\ 135 \\ \hline 396 \\ +\ 693 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Y afirma que cada vez que sigue este procedimiento, obtiene como resultado 1.089.

a. ¿Funciona este truco para todos los números de tres cifras? ¿Qué restricciones hay? Clasifique los números entre aquellos con los que el truco funciona y aquellos con los que no.

b. Con el número 554 no funciona, pero se puede hacer que funcione considerando un cero en las centenas.

$$\begin{array}{r} 554 \\ -\ 455 \\ \hline 099 \\ +\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$

¿Para que números se da esta situación?

c. Si permitimos números negativos, podemos extender la regla a números como 768:

$$\begin{array}{r} 368 \\ -\ 863 \\ \hline -\ 495 \\ -\ 594 \\ \hline -\ 1089 \end{array}$$

Llamemos número intermedio al que se obtiene luego de la resta. Verifique que los números intermedios que se obtienen son solamente 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, y 891.

Es conveniente ordenar los número iniciales de acuerdo al número intermedio que se obtiene.

Justifique por qué el truco funciona.

6. Intercalando uno o más signos + entre las cifras del número 123.456.789 se pueden obtener nuevos números, por ejemplo, 123 + 456 + 789 = 1.369. ¿Se puede obtener el número 99? ¿Qué otros números se pueden formar de esta manera?

a. Repita el ejercicio anterior a partir de cualquier número, por ejemplo, 3.176.

b. ¿Puede descomponerse el número 125 como la suma de dos números consecutivos? Repita la pregunta con otros números.

c. ¿Qué otros números se pueden descomponer de esa manera? ¿Habrá números con los que no se puede hacer? Establezca una conjetura y argumente para demostrarla.

d. Repita el ejercicio anterior descomponiendo números como la suma de tres números consecutivos.

e. Generalice los dos ejercicios anteriores a sumas de 4, 5, etc., números consecutivos.

7. En una prueba de selección múltiple, se pregunta por el resultado de la operación 2.605 – 1.097.

   Proponga dos distractores y explique a qué errores comunes de los estudiantes están asociados.

8. Un feriante recibe un billete de $20.000 para pagar por un total de $3.275. Describa cuál es la estrategia que probablemente use el comerciante para dar el vuelto. Proponga una actividad que permita lograr, con sus alumnos, la comprensión de la estrategia utilizada.

9. Escriba cinco sumas de números de tres cifras en orden creciente de dificultad. Justifique.

10. Para cada uno de los siguientes problemas, indique a qué tipo de situación aditiva corresponde y resuelva utilizando un diagrama de barra.

    a. Había 12 jugadores ya inscritos en la escuela de verano de fútbol. Hoy se inscribieron 6 nuevos jugadores. ¿Cuántos jugadores hay inscritos ahora?
    b. ¿Cuántas sillas más pusieron en la sala de Martín, si había 25 y ahora hay 42?
    c. Marta vive en el paradero 30. Tomó un bus y llegó donde su amiga Cristina, que vive en el paradero 12. ¿Cuántos paraderos recorrió el bus?
    d. Tomás recibió una bandeja con 30 berlines, 12 de ellos están rellenos con manjar y los demás, con mermelada. ¿Cuántos berlines están rellenos con mermelada?
    e. A don Manuel le llegaron 24 cuadernos con tapa dura y el resto tiene tapa normal. ¿Cuántos cuadernos con tapa normal le llegaron?
    f. Había 100 atletas para la competencia interescolar, 17 de ellos tuvieron que retirarse por enfermedad. ¿Cuántos atletas quedan en la competencia?

11. Observe los siguientes diagramas de barra y considere la información que se muestra en ellos para formular un problema que se represente con cada diagrama.

a.

<table><tr><td colspan="2">Total de fichas</td></tr><tr><td>¿Fichas azules?</td><td>15 fichas rojas</td></tr></table>

b.

<table><tr><td colspan="2">Cuerda A</td></tr><tr><td>¿Cuerda B?</td><td>8 m</td></tr></table>

c.

<table><tr><td>Había 90 estudiantes</td><td>¿Estudiantes que llegan?</td></tr><tr><td colspan="2">En total hay 120 estudiantes</td></tr></table>

d.

<table><tr><td>¿Libros que había?</td><td>Se vendieron 34 libros</td></tr><tr><td colspan="2">En total hay 112 libros</td></tr></table>

e.

<table><tr><td colspan="2">86 hombres</td></tr><tr><td>74 mujeres</td><td>?</td></tr></table>

FECHA:_____/_______/_____

Capítulo
III

La multiplicación y la división

Introducción

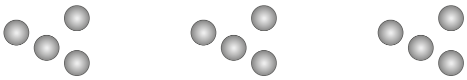
La multiplicación y la división son operaciones que se estudian desde los primeros niveles de Educación Básica. Estas surgen a partir de la caracterización de acciones concretas, tales como: repetir una cantidad de elementos, repartir equitativamente, agrupar elementos considerando una cantidad establecida y combinar. Al igual que la suma y la resta, la multiplicación y la división están estrechamente relacionadas por ser una la inversa de la otra.

En este capítulo, conectaremos el estudio de las operaciones con los problemas que estas resuelven. Estudiaremos procedimientos de cálculo mental y escrito basados en las características del sistema de numeración decimal y las propiedades de estas operaciones. Además, trataremos en detalle los algoritmos usuales para el cálculo de productos y cocientes.

A lo largo del capítulo se conectará el estudio de la multiplicación y la división con aspectos relacionados con su enseñanza. Abordaremos el estudio de las situaciones multiplicativas y el uso de diagramas para su planteamiento y resolución. También, se mostrará el uso de material concreto para explicar el significado de estas operaciones y sus algoritmos. Además, se analizarán errores y dificultades asociados al trabajo con estas operaciones.

1. La multiplicación

La primera idea sobre la multiplicación surge cuando queremos contar la cantidad total de elementos de varios grupos, cada uno con la misma cantidad de elementos. La idea de juntar está asociada con la suma, ya que la multiplicación corresponde a sumar reiteradamente una misma cantidad. Concretamente, si tenemos 3 grupos con 4 objetos en cada uno, tenemos $4 + 4 + 4 = 12$ objetos, como se muestra en la **Figura III.1**



$4 + 4 + 4 = 3$ veces 4

Figura III.1.

La representación anterior corresponde a 3 grupos con 4 objetos, es decir, consideramos 3 veces 4. Para conocer el total de objetos, sumamos $4 + 4 + 4$ y obtenemos 12 como resultado. Decimos, en este caso, que 3 multiplicado por 4 es igual a 12 y lo escribimos[1] como $3 \cdot 4$. A este resultado se le denomina *producto* y la operación que permite encontrarlo es la *multiplicación*.

El significado de $m \cdot n$ es contar los elementos que están agrupados en m grupos que contienen n elementos cada uno. El primer factor se interpreta como el número de grupos que hay y el segundo, como los elementos que hay en cada grupo. Si quisiéramos representar ahora 4 veces 3, debemos formar 4 grupos con 3 elementos en cada uno, como se muestra en la **Figura III.2**:

$3 + 3 + 3 + 3 = 4$ veces 3

Figura III.2.

Es claro que esta es una convención, bien podríamos decir que n representa el número de grupos y m la cantidad de elementos en cada grupo. Vemos que, a diferencia de la suma, en la que ambos números tienen el mismo rol, en la multiplicación no es así. Conceptualmente, la multiplicación es una operación más compleja que la suma.

Para pensar

¿Qué dificultades pueden causar los roles de m y n en $m \cdot n$, al justificar la propiedad conmutativa de la multiplicación?

[1] La multiplicación entre dos números se expresa habitualmente usando un punto o una cruz como símbolo operador, por ejemplo: $3 \cdot 4$ denota lo mismo que 3×4. En el estudio del álgebra, cuando se expresa el producto de dos variables x e y se puede simplemente escribir xy.

Una imagen habitual de la multiplicación es la que ordena los elementos en filas y columnas, tal que cada fila corresponde a un grupo y el número de columnas, a los elementos de cada grupo. Si nuevamente representamos 3 veces 4, los elementos pueden ser presentados en 3 filas y 4 columnas, como lo muestra la **Figura III.3**.

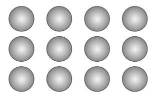


Figura III.3.

Hay 3 filas y cada una de ellas contiene 4 fichas, lo que hace un total de 12 fichas. Este tipo de representación también se denomina *arreglo bidimensional* y se usa para introducir el significado de la multiplicación en los primeros niveles de Educación Básica.

Consideremos ahora la segunda intuición sobre los números que abordamos en el **Capítulo I**, la de los segmentos. El producto de los números 3 y 4 se puede interpretar como el área de un rectángulo cuyos lados miden 3 y 4 unidades.

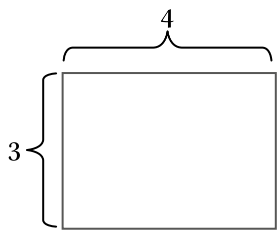


Figura III.4.

De este modo, $3 \cdot 4$ representa el área del rectángulo anterior. Esta representación es particularmente útil, pues nos permite visualizar algunas propiedades de la multiplicación con mucha facilidad y puede ser extendida a la multiplicación de fracciones. Es importante mencionar que las propiedades de la multiplicación no son consecuencia de las propiedades del área. La definición misma de área requiere de las propiedades de la multiplicación.

En los números naturales, esta representación usando el área de un rectángulo no difiere tanto de la anterior. Pensemos nuevamente en el ejemplo y consideremos los dos segmentos, de 3 y de 4 unidades de largo. El área del rectángulo que ellos determinan es de 12 unidades de área. Estas unidades de área son cuadrados cuyo lado mide una unidad de longitud. Si ahora dibujamos el rectángulo marcando las divisiones, obtendremos una figura como la que se muestra a continuación:

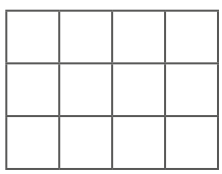


Figura III.5.

Vemos que la representación para la multiplicación por medio del área de un rectángulo corresponde a un arreglo en filas y columnas.

Existe un tercer significado para la multiplicación, el cual está relacionado con combinaciones de objetos. Supongamos que en el guardarropa de Susana hay tres pantalones: uno azul, uno negro y otro beige. Tiene además cuatro blusas: una blanca, una azul, una verde y otra lila, ¿cuántas tenidas diferentes tiene Susana a su disposición? (¡No considere el buen o mal gusto de ciertas combinaciones!)

Tenemos tres colores de pantalón y por cada uno de ellos, podemos elegir entre cuatro blusas diferentes. Esto nos da $3 \cdot 4 = 12$ posibilidades. Podemos representar lo anterior en la siguiente tabla:

(A,b)	(A,a)	(A,v)	(A,l)
(N,b)	(N,a)	(N,v)	(N,l)
(B,b)	(B,a)	(B,v)	(B,l)

Tabla III.1.

Cada par ordenado representa una elección de pantalón para el primer componente, y una elección de blusa para el segundo. Notamos que, nuevamente, obtenemos un arreglo de 3 filas y 4 columnas.

A menudo estas situaciones se representan con diagramas llamados “de árbol”. Para nuestro ejemplo, tenemos el siguiente diagrama:

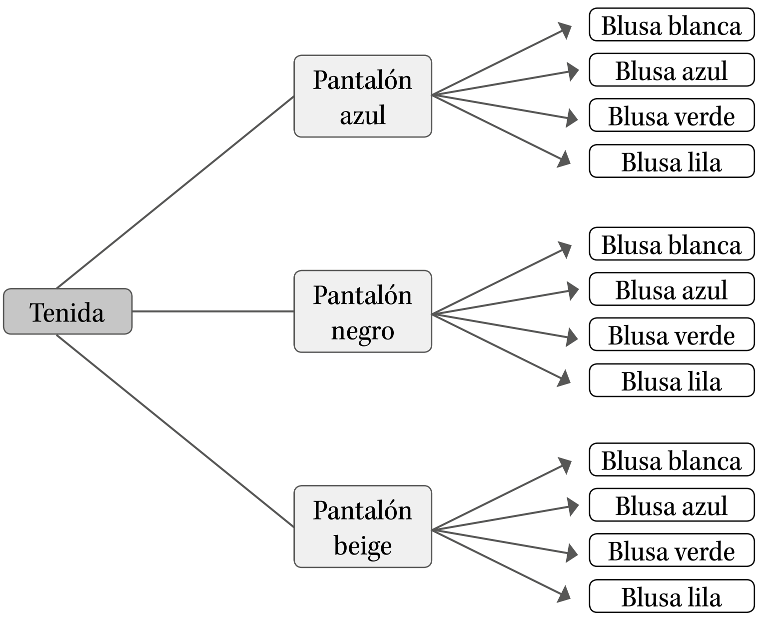


Figura III.6.

Ejercicios

1. Observe los siguientes problemas y describa el significado de la multiplicación en cada caso.

Problema A	Problema B	Problema C
Un agricultor plantó 6 hileras con lechugas y en cada hilera plantó 32 lechugas. ¿Cuántas lechugas plantó en total?	¿Cuántas palabras distintas con y sin sentido se pueden formar usando todas las letras D, N, I y O?	Martín tiene 3 cajas con lápices de colores. Cada caja contiene 12 lápices. ¿Cuántos lápices de colores tiene en total?

2. Andrés, Bernardo, Camila, Diego, Ester y Francisco se quieren sentar en una fila con 6 sillas. ¿De cúantas formas distintas se pueden sentar?

3. Un candado tiene una combinación de 3 dígitos, cada uno del 0 al 9. ¿Cuántas posibles combinaciones hay?

1.1 Propiedades de la multiplicación

A continuación, veremos las propiedades de la multiplicación y las ilustraremos para los distintos significados de esta.

Conmutatividad de la multiplicación

Como acabamos de ver, los productos $3 \cdot 4$ y $4 \cdot 3$ tienen dos significados distintos. Por un lado $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$ y $4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$. Si calculamos ambas sumas, obtenemos 12 en cada caso, sin embargo, esto no nos explica por qué obtenemos el mismo resultado. Representemos ambos productos usando un arreglo bidimensional:

3 veces 4 = $3 \cdot 4$ 4 veces 3 = $4 \cdot 3$

Figura III.7.

Como podemos ver, basta con ladear la cabeza y mirar las columnas como filas y las filas como columnas, para ver que ambos dibujos, que corresponden a $3 \cdot 4$ y $4 \cdot 3$, respectivamente, tienen el mismo número de elementos. Esto nos explica por qué $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$.

Este mismo argumento se puede aplicar para cualquier multiplicación. Así, para cualquier par de números n y m, tenemos que:

$$m \cdot n = n \cdot m$$

Propiedad que llamamos *conmutatividad de la multiplicación*.

Si usamos la interpretación de los números como medidas de segmentos, la propiedad conmutativa también corresponde a un hecho intuitivo: el área de un rectángulo es el producto de sus lados y, por lo tanto, no importa el orden en que efectuamos la multiplicación.

Para pensar

¿Será conveniente usar la representación de la multiplicación a través de un diagrama de árbol para visualizar la conmutatividad de esta operación?

Consideremos ahora el siguiente problema de multiplicación:

En el restaurante Casa Grande, para el menú del día tienen la opción de elegir entre 2 entradas y 3 platos de fondo. ¿Cuántos almuerzos distintos se pueden armar con las opciones que ofrece el restaurante?

Tal como hemos visto en páginas anteriores, este problema se resuelve con la multiplicación $2 \cdot 3$, si partimos eligiendo entre los 2 tipos de entrada y luego entre los 3 tipos de platos de fondo. No obstante, también podríamos elegir primero el plato de fondo y luego seleccionar la entrada. En ese caso, la multiplicación que permite llegar a la respuesta es $3 \cdot 2$. En la siguiente figura se muestran los dos diagramas:

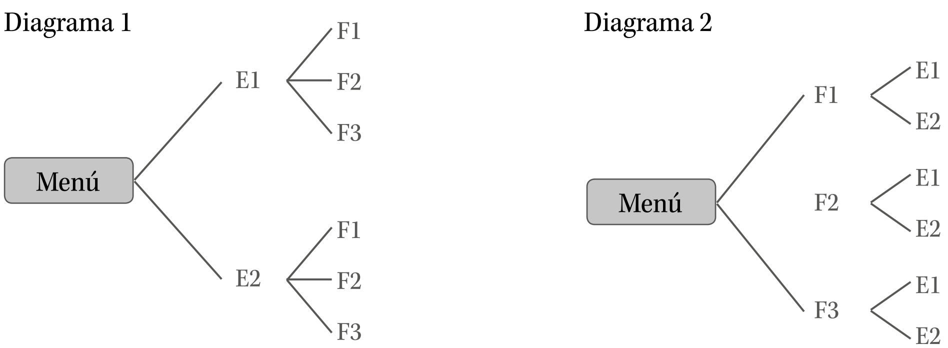


Figura III.8.

A partir de ambos diagramas se deduce que hay 6 opciones de almuerzo, pero no es evidente como visualizar la propiedad conmutativa sin contar. Para relacionar ambos diagramas, podemos apoyarnos en el esquema que muestra la **Figura III.9**:

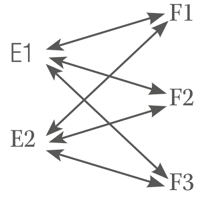


Figura III.9.

La cantidad de combinaciones que se pueden hacer corresponde a la cantidad de conexiones que hemos realizado entre los dos tipos de platos, sin importar donde comenzamos a trazar la línea para hacer la conexión. Este último diagrama también ilustra la propiedad conmutativa.

Asociatividad de la multiplicación

Consideremos un paralelepípedo formado con pequeños cubos de volumen unitario, de dimensiones 2, 3 y 5 unidades, que se puede representar como muestra la **Figura III.10**:

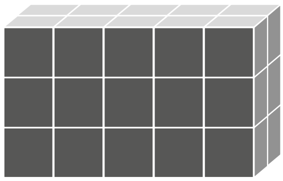


Figura III.10.

Para determinar el volumen del paralelepípedo, debemos calcular la cantidad de cubos pequeños que lo forman. Vemos que $3 \cdot 5 = 15$ corresponde a la cantidad de cubos que hay en la primera placa mirando de frente. Ese producto lo multiplicamos por 2, que corresponde a la cantidad de placas que forman el paralelepípedo. Así, el volumen es $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 30$.

Imaginemos ahora que volcamos este cuerpo hacia atrás, la visión que tendríamos de él es la que muestra la **Figura III.11**:

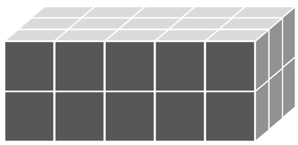


Figura III.11.

Si utilizamos un procedimiento similar al anterior para determinar el volumen del paralelepípedo, debemos calcular $5 \cdot 2 = 10$, que corresponde a la cantidad de cubos que hay en la primera placa mirando de frente. Luego, ese producto lo multiplicamos por 3, que corresponde a la cantidad de placas que forman el paralelepípedo.

Esta vez el producto realizado para determinar el volumen del paralelepípedo es: $(5 \cdot 2) \cdot 3 = 3 \cdot (5 \cdot 2)$ usando la propiedad conmutativa. De esta forma, como el paralelepípedo en ambos casos es el mismo, podemos concluir que $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2)$. Esta propiedad de la multiplicación se denomina *asociatividad* y es válida para cualquier trío de números naturales.

En términos generales, si tenemos tres números m, n y p, se tiene que:

$$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$$

Otra forma de mostrar la propiedad asociativa de la multiplicación, a partir de una situación concreta, es usando el significado de esta operación como repetición de una cantidad. Veamos el siguiente ejemplo.

Se tienen 3 cajas, cada una con 5 bolsas. En cada bolsa se han puesto 2 fichas, como lo muestra la **Figura III.12**.

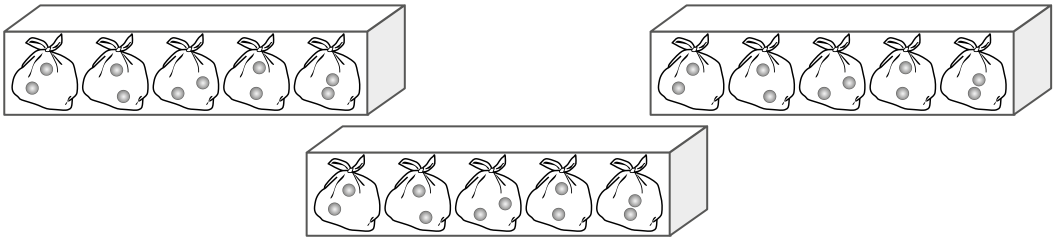


Figura III.12.

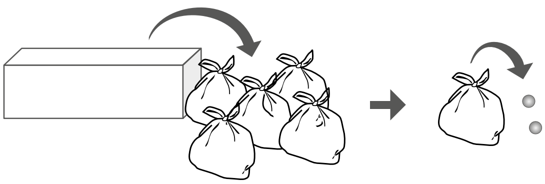


Figura III.13.

Una forma de calcular el total de fichas es, primero, obtener el número total de bolsas, con el producto $3 \cdot 5$, y luego calcular $(3 \cdot 5) \cdot 2$ para obtener el total de fichas.

Figura III.14.

Otra forma de calcular la cantidad de fichas es obtener, primero, la cantidad que hay en cada caja, con el producto $5 \cdot 2$, y luego calcular $3 \cdot (5 \cdot 2)$ para obtener el total de fichas.

Para pensar

¿Cómo usaría la siguiente situación para mostrar la propiedad asociativa de la multiplicación?

Una persona tiene 3 pantalones, 5 poleras y 2 sombreros. ¿Cuántas tenidas distintas puede usar con estas prendas?

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación

¿Qué significa conceptualmente multiplicar por 1? Por ejemplo, $1 \cdot 5$ corresponde a contar los elementos que hay en 1 conjunto que contiene 5 elementos. Por otra parte, $5 \cdot 1$ corresponde a contar los elementos que hay en 5 conjuntos, cada uno con solo 1 elemento. En ambos casos hay 5 elementos. Observemos que si cambiamos el 5 por cualquier otro número, la situación es similar.

Así, para cualquier número *n*:

$$n \cdot 1 = n$$

El 1 tiene el mismo rol con respecto a la multiplicación que el 0 con respecto a la suma. Se puede demostrar formalmente que el 1 y el 0 son los únicos elementos con la propiedad descrita para la multiplicación y la suma, respectivamente.

Decimos que el 1 es el *neutro multiplicativo* o el *elemento neutro para la multiplicación*.

Distributividad de la multiplicación sobre la suma y la resta

La propiedad que nos permite relacionar la suma y la multiplicación es la *distributividad*. Dado que la multiplicación corresponde a una suma iterada, no debería extrañarnos que exista una relación entre ambas operaciones.

Observemos la **Figura III.15**, que se armó usando cuadrados de dos colores distintos.

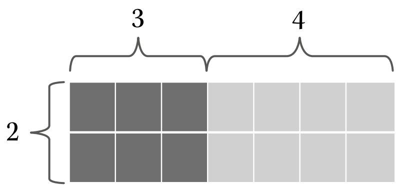


Figura III.15.

Para calcular la cantidad total de cuadrados, podemos usar al menos dos estrategias. Una de ellas es calcular el producto entre la cantidad de filas y la cantidad de columnas que hay en la figura. Para ello, multiplicamos $2 \cdot (3 + 4)$, ya que hay 3 columnas con cuadrados de un color y 4, con cuadrados de otro color.

Otra estrategia consiste en calcular primero la cantidad de cuadrados de un color y luego la cantidad de cuadrados del otro color. Luego, se suman ambos productos para obtener el resultado final y se llega a:

$$(2 \cdot 3) + (2 \cdot 4)$$

Por lo tanto, $2 \cdot (3 + 4) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4)$. En general, dados tres números m, n y p, se tiene que :

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$$

Y aplicando la propiedad conmutativa, se tiene también que:

$$(n + p) \cdot m = n \cdot m + p \cdot m$$

> *Para pensar*
>
> ¿Cómo usaría la interpretación de la multiplicación como repetición de una cantidad para ilustrar la propiedad distributiva?, ¿y como diagrama de árbol?

Para probar la distributividad de la multiplicación sobre la resta, podemos usar el mismo diagrama anterior o proceder algebraicamente de la siguiente manera: en la ecuación anterior, supongamos que $n = q - p$. Tenemos $m \cdot (q - p + p) = m \cdot (q - p) + m \cdot p$. Simplificando obtenemos $m \cdot q = m \cdot (q - p) + m \cdot p$, y por definición de resta tenemos $m \cdot q - m \cdot p = m \cdot (q - p)$. En general, dados tres números m, p y q, con $p \geq q$, se tiene que $m \cdot (q - p) = m \cdot q - m \cdot p$, y por conmutatividad también se tiene que $(q - p) \cdot m = q \cdot m - p \cdot m$.

La explicación de la propiedad distributiva usando material concreto o representaciones pictóricas requiere tener un grupo de elementos de una misma categoría, por ejemplo: fichas, lápices, cubos y manzanas, entre otros; que se puedan subdividir en dos subcategorías distinguibles por un atributo, que puede ser color, tamaño, entre otros. Lo anterior se basa en la necesidad de representar tanto la acción de repetir grupos con la misma cantidad de elementos (multiplicación), como la acción de juntar objetos (suma). Por ejemplo, podríamos pensar en 2 bolsas, cada bolsa con 3 fichas negras y 5 blancas, y preguntarnos por el total de fichas. La respuesta a esta situación se puede calcular sumando la cantidad de fichas que hay en cada bolsa, $(3 + 5)$, y luego multiplicando ese resultado por la cantidad de bolsas, $2 \cdot (3 + 5)$, o podríamos calcular la cantidad de fichas blancas que hay en las bolsas, $2 \cdot 3$, y luego agregar la cantidad de fichas negras que hay, $2 \cdot 5$. Así, podemos obtener que $2 \cdot (3 + 5)= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$.

Elemento absorbente de la multiplicación

¿Qué significa multiplicar por 0? Si consideramos $5 \cdot 0$, podemos pensar en 5 veces 0, de esta forma se tiene:

$$5 \cdot 0 = 5 \text{ veces } 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Podemos pensar en 5 grupos, todos con 0 elementos. Como el 0 es el elemento neutro de la suma, el resultado será 0. Esta idea se puede generalizar para cualquier número, ya que no importa las veces que sumemos 0, el resultado siempre será 0. Así, para cualquier número n, tenemos que:

$$n \cdot 0 = 0$$

No es claro cómo interpretar $0 \cdot n$. Podríamos pensar en 0 grupos de n elementos, pero esto tampoco tiene un significado prestablecido. Sin embargo, podemos definir $0 \cdot n = 0$, para que sea consistente con la propiedad conmutativa. Observamos que cuando discutimos esta última propiedad, los argumentos utilizados sirven para números distintos de 0. Por eso es necesario hacer esta definición.

Ejercicios

1. Utilice el siguiente problema para ilustrar la propiedad asociativa de la multiplicación:

   Se tienen 5 cajas, cada una con 4 bolsas. En cada bolsa hay 6 pañuelos. ¿Cuántos pañuelos hay?

2. Usando el mismo contexto del problema anterior, plantee un problema que ilustre la propiedad conmutativa de la multiplicación y otro que ilustre la propiedad distributiva.

3. Resuelva los siguientes productos aplicando las propiedades pertinentes. Señale qué propiedades utiliza.

   a. $11 \cdot 8 + 11 \cdot 2$
   b. $9 \cdot 27 + 33 \cdot 9$
   c. $(13.429 \cdot 5\ ) \cdot 2$
   d. $35.448 \cdot 85 - 35.447 \cdot 85$
   e. $32 \cdot 7 - 31 \cdot 6 - 31$
   f. $23 \cdot 8 - 23 \cdot 5 - 23 \cdot 3$

En resumen

La multiplicación corresponde a una suma iterada. Esta operación satisface las propiedades conmutativa y asociativa, tiene el 1 como elemento neutro y el 0 como elemento absorbente, además cumple con la distributividad con respecto a la suma.

1.2 Las tablas de multiplicar

Para dominar el algoritmo de la suma debemos saber cómo se suman los dígitos. Para el algoritmo de la multiplicación ocurre algo parecido, solo que ahora debemos saber cómo se multiplican los dígitos, es decir, las llamadas "tablas de multiplicar".

Si dejamos de lado, por obvias, las tablas del 1 y del 0, nos quedan ocho dígitos. Vemos que las tablas consisten de 64 datos y en estricto rigor, son menos los que hay que memorizar. Si conocemos los 8 productos de un dígito por sí mismo, quedan otros 56 datos más para memorizar.

Sin embargo, debido a la conmutatividad de la multiplicación, basta con recordar la mitad de ellos, es decir, 28. En resumen, los datos a memorizar se reducen a 36. Sabemos que los niños y las niñas de todo el mundo tienen dificultades para memorizar las tablas de multiplicar. A esa edad, ellos manejan una gigantesca cantidad de información sobre, por ejemplo, nombres de jugadores y clubes de fútbol, artistas y cantantes, y reglas de los juegos de video. Algo de mucha mayor envergadura que los 36 datos mencionados. Podemos, entonces, descartar la posibilidad de que muchas personas no aprenden las tablas de multiplicar por no ser capaces de memorizar tantas cosas.

Desde luego, está el asunto de la motivación y el interés; sin embargo, es tan pequeña la cantidad de información requerida que nos preguntamos si no habrá algo más profundo. Algunos estudios recientes en neurociencias parecen indicar que sí hay ciertas dificultades intrínsecas en la memorización de las tablas. Sucede que la información numérica se guarda en la memoria y se accede a ella mediante palabras. Esas palabras están interrelacionadas y tienen significados diversos. Una característica de nuestra memoria es que es altamente asociativa; es decir, la información acumulada en nuestro cerebro no está en compartimentos aislados, sino que se almacena junto con otra información y una red de interconexiones entre ellas. Al traer a la conciencia un recuerdo, este viene acompañado de muchas asociaciones, la mayoría de las cuales no son conscientes. La información numérica codificada por las tablas de multiplicar parece entrar en un conflicto interno, ya que los distintos datos no son independientes unos de otros. Veamos un ejemplo[1].

Consideremos las siguientes afirmaciones:

Fernández y González trabajan en la empresa García – Cifuentes.

Fernández y Paredes trabajan en la empresa Cifuentes – García.

Paredes y Pérez trabajan en la empresa Fernández – Pérez.

[1] Adaptado de Dehaene, S. *The number sense.*

Resulta evidente que la lectura de la información anterior tiene algo de trabalenguas y se hace difícil de entender. Consideremos ahora la siguiente información tomada de las tablas de multiplicar:

$$3 \cdot 4 = 12$$

$$3 \cdot 7 = 21$$

$$7 \cdot 5 = 35$$

Vemos que reemplazando nombres por números y "trabaja en la empresa" por el signo igual, ambos textos tienen la misma estructura. El cerebro, que es un gran buscador de patrones, aparentemente entra en conflicto cuando estos patrones interfieren unos con otros.

Estudios hechos en los años **90** del siglo pasado indicaban que, mientras aprendían las tablas de multiplicar, niños y niñas de 3º Básico demoraban más al hacer sumas y además aumentaron los errores en sumas, tales como **2 + 3 = 6**. Aparentemente, estaríamos ante otro conflicto de patrones.

Lo cierto es que, para poder manejar el algoritmo de la multiplicación, es necesario conocer las tablas de multiplicar. Un problema con el aprendizaje habitual de esas tablas de multiplicar por memorización automática es que se convierte en información sin significado y, como tal, no se establecen relaciones con otros conocimientos almacenados en la mente. Los estudios en neurociencia parecen sugerir que podrían mejorarse los aprendizajes, si los elementos de la tabla se memorizan asociados con otras ideas y no como mera información vacía de significado.

El aprendizaje de las combinaciones multiplicativas básicas requiere de numerosas actividades que aseguren la *conceptualización* y la *asimilación* de ellas. La conceptualización se refiere a la construcción de las tablas de multiplicar, por ejemplo, a través del uso de materiales concretos.

La asimilación consiste en la memorización comprensiva de los productos básicos, apoyada por el establecimiento de relaciones que facilitan el cálculo de los productos, una práctica sistemática y la incorporación de estrategias de estimación de resultados.

La conceptualización y asimilación de una tabla de multiplicar se trabajan en forma paralela. A continuación, presentamos algunas estrategias que permiten la enseñanza y aprendizaje de las tablas de multiplicar.

Estrategias para construir las tablas de multiplicar

En la Educación Básica existen varias formas de presentar a los estudiantes tareas que les permitan ir conceptualizando y asimilando las tablas de multiplicar. Estas se basan en sus conocimientos previos relacionados con la suma y en el uso de registros concretos, pictóricos y simbólicos. Algunas de estas estrategias aparecen con frecuencia en los libros de 1º a 4º Básico o en documentos curriculares, por lo que es importante comprenderlas y manejarlas al momento de enseñar Matemática en los primeros niveles. A continuación, veremos algunas de ellas.

- **Construcción de las tablas de multiplicar a partir de sumas iteradas**

Podemos usar material concreto y la noción de multiplicación como suma iterada para construir las tablas de multiplicar. Por ejemplo, con vasos y palitos de helado, podemos tomar 3 vasos y en cada uno ponemos 2 palitos de helado. Para calcular la cantidad total de palitos que están en los vasos, inicialmente, los niños y las niñas pueden contar de 1 en 1 o de 2 en 2.

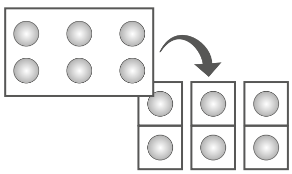
$$2 + 2 + 2 = 3 \text{ veces } 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

Figura III.16.

De esta forma, a partir del uso de material concreto, establecemos que $3 \cdot 2 = 6$. Este procedimiento se puede aplicar en general, aunque es más apropiado para números pequeños.

Otro tipo de material concreto que es útil para construir las tablas de multiplicar son las tarjetas Par-Impar. Estas tarjetas también permiten representar una multiplicación como la repetición de grupos con la misma cantidad de elementos y encontrar su resultado, ya sea contándolos o colocando una tarjeta que represente su resultado.

Por ejemplo, para construir el resultado de 3 por 2, se representa con tres tarjeta "dos" y se busca una nueva tarjeta que cubra la representación para descubrir el resultado.



$$2 + 2 + 2 = 3 \text{ veces } 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

Figura III.17.

También podemos usar la suma iterada para la construcción de las tablas, sin pasar por el material concreto. Así, se puede continuar construyendo la tabla del 3 de la siguiente manera:

3 veces 3 = $3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 = 9$

4 veces 3 = $4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$

5 veces 3 = $5 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$

6 veces 3 = $6 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$

7 veces 3 = $7 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$

8 veces 3 = $8 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24$

9 veces 3 = $9 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27$

10 veces 3 = $10 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30$

Al usar esta estrategia, rápidamente nos damos cuenta de que si agregamos un grupo más, no es necesario volver a calcular toda la suma, sino que basta con sumar al resultado anterior. En el ejemplo de la tabla del 3, si conocemos el resultado de $3 \cdot 4 = 12$, podemos usar esta información para determinar $3 \cdot 5$ agregando 3 al resultado anterior. Así, se tiene que:

$3 \cdot 4 = 3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12$

$3 \cdot 5 = 3 \cdot 4 + 3 = 12 + 3 = 15$

$3 \cdot 6 = 3 \cdot 5 + 3 = 15 + 3 = 18$

$3 \cdot 7 = 3 \cdot 6 + 3 = 18 + 3 = 21$

$3 \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 7 + 3 = 21 + 3 = 24$

$3 \cdot 9 = 3 \cdot 8 + 3 = 24 + 3 = 27$

$3 \cdot 10 = 3 \cdot 9 + 3 = 27 + 3 = 30$

- **Construcción de las tablas de multiplicar a partir de la secuencia de *n* en *n***

Las secuencias de números, en particular las de 2 en 2, de 5 en 5 y de 10 en 10, ocupan un lugar importante en la enseñanza de la Matemática de los primeros niveles, ya que se abordan como herramientas para el conteo. Hacer la relación entre estas secuencias y las tablas de multiplicar puede ser de gran utilidad para usarlas y memorizarlas. Para ello, se pueden usar apoyos gráficos que permitan llevar la cuenta y responder correctamente a la tabla requerida. Por ejemplo, si se quiere calcular $5 \cdot 7$, se puede decir la secuencia del 5 partiendo de 5, siete veces, esto es: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 el resultado es 35. Este proceso puede resultar algo engorroso si se utiliza solo la memoria para realizarlo. Un apoyo efectivo puede ser el uso de los dedos de las manos de la siguiente forma:

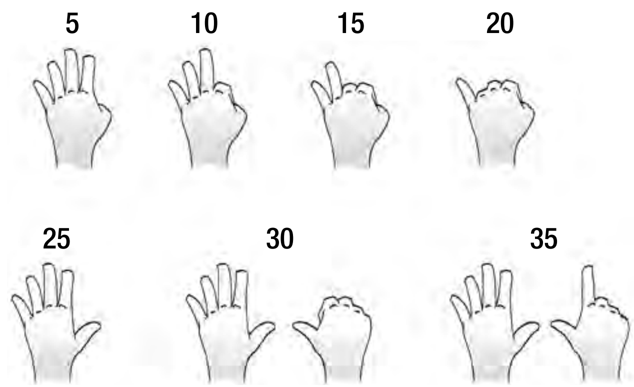


Figura III.18.

Una forma de ilustrar esta estrategia es usando una recta numérica. Por ejemplo, para calcular $5 \cdot 7$ nos posicionamos sobre el 0 en la recta y avanzamos 7 veces de 5 en 5. Esto es:

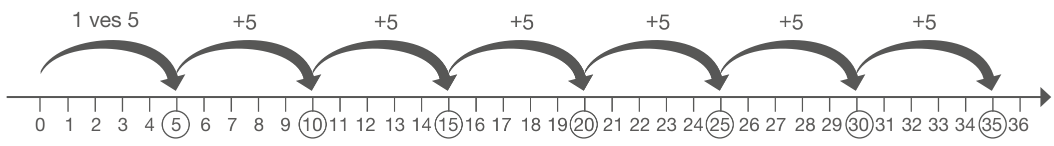


Figura III.19.

• Construcción de las tablas de multiplicar a partir del uso de dobles

Los niños y las niñas memorizan en forma temprana los dobles de los números. Por ejemplo, si se tienen 2 cajas con 5 estrellas en cada una, ellos pueden decir, sin necesidad de contar, que hay 10 estrellas en total.

Así, la primera tabla de multiplicar que se aprende, en forma implícita, es la del 2. A partir de ella y con la misma idea de los dobles, se pueden construir las tablas del 4 y la del 8. Por ejemplo, como 4 es el doble de 2, a partir de $2 \cdot 3 = 6$ se puede establecer directamente que $4 \cdot 3 = 2 \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 6 = 12$. De la misma forma, como 8 es el doble de 4, se puede construir la tabla del 8 a partir de la tabla del 4. La **Figura III.20** permite visualizar estas relaciones.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
El doble	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
El doble	8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

Figura III.20.

De manera similar, se puede construir la tabla del 6 a partir de la del 3. Este proceso se puede articular con el uso de diversos materiales y registros pictóricos.

Ejercicios

1. Proponga un juego para la asimilación de las tablas de multiplicar, en base al juego Memorice. Indique los materiales necesarios y las reglas del juego.

2. Construya la tabla de multiplicar del 6 a partir de la del 3, usando dobles.

Una secuencia para aprender las tablas de multiplicar

La memorización de combinaciones multiplicativas básicas presenta distintos grados de dificultad. Por tanto, es conveniente aprender paulatinamente dichos productos. En este apartado presentamos una propuesta de tres etapas para memorizar las tablas de multiplicar.

Antes de presentar estas etapas, es conveniente detenernos en un recurso que permite visualizar las combinaciones multiplicativas hasta $10 \cdot 10$. Este recurso es la *tabla multiplicativa,* también conocida como tabla pitagórica. En esta tabla, la primera fila y la primera columna corresponden a los dígitos del 1 al 10. Las siguientes filas y columnas corresponden a los productos entre estos dígitos, como se muestra en la **Figura III.21**:

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	48	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Tabla III.2.

El ejemplo muestra cómo determinar, usando la tabla, el producto $6 \cdot 7$. Para ello se ubica la fila de la tabla del 6 y luego se intersecta con la columna del 7. De esta forma obtenemos que $6 \cdot 7$ es 42.

Como vimos anteriormente, la multiplicación es conmutativa. Si consideramos la diagonal principal de la tabla, que corresponde a los cuadrados de los números del 1 al 10, esta se divide en dos triángulos, cada uno con 45 productos. Las casillas simétricas con respeto a la diagonal tienen el mismo número. De esta forma, para determinar en la tabla los productos menores que $10 \cdot 10$, podemos marcar la diagonal principal y solo considerar uno de los triángulos que forman la tabla.

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	48	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Tabla III.3.

En una *primera etapa* los niños y las niñas memorizan la tabla del 2 a partir del cálculo de los dobles de los dígitos o a partir de la secuencia de 2 en 2. Las tablas del 5 y del 10 las memorizan a partir de la secuencia de 5 en 5 y de 10 en 10 que aprendieron como estrategia de conteo o identificando las regularidades de dichas secuencias.

Si marcamos en la tabla multiplicativa, considerando solo el triángulo superior (como en la **Figura III.23**), las combinaciones del 1, 2, 5 y 10, podemos graficar una primera etapa de aprendizaje de las tablas como sigue:

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	48	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Tabla III.4.

De las 100 combinaciones multiplicativas básicas que hay que memorizar de la tabla, al considerar las del 1, 2, 5 y 10 y la propiedad conmutativa en la multiplicación, quedan 18 combinaciones por aprender.

En la *segunda etapa*, consideraremos los cuadrados de los números del 1 al 10. Al igual que con los dobles, las investigaciones señalan que se observan menores dificultades para memorizar los cuadrados. Incluimos también en esta etapa las tablas del 3 y del 4, que se pueden estudiar a partir de las estrategias ya descritas. De esta forma, al representar estas combinaciones en la tabla multiplicativa, en una segunda etapa se tiene:

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	48	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Tabla III.5.

De las 18 combinaciones multiplicativas básicas que restaban por memorizar, hemos incorporado en otro color las que corresponden a la tabla del 3 y del 4, y las que corresponden al cuadrado de los números hasta el 10.

En la *tercera etapa* se trabajan el resto de las combinaciones. Como tres de ellas corresponden a la tabla del 9, veamos una forma de construir esta tabla. Observemos que podemos calcular $9 \cdot a$ restando a al resultado de $10 \cdot a$. En términos algebraicos, se tiene:

$$9 \cdot a = (10 - 1) \cdot a = (10 \cdot a) - a$$

Así, para multiplicar un número por 9, podemos multiplicar por 10 y restarle dicho número al resultado. Por ejemplo, $6 \cdot 9 = 60 - 6 = 54$.

Fijémonos ahora en los productos resultantes de la tabla del 9,

Aumenta de 1 en 1

09 – **1**8 – **2**7 – **3**6 – **4**5 – **5**4 – **6**3 – **7**2 – **8**1 – **9**0

Disminuye de 1 en 1

Figura III.21.

Observemos que los dígitos que forman estos números cumplen cierta regularidad. El dígito en la posición de las decenas parte en 0 y va aumentando de 1 en 1 hasta 9, mientras que el dígito en la posición de las unidades parte en 9 y va disminuyendo de 1 en 1, hasta 0. Por otra parte, la suma de los dígitos que forman estos números siempre es 9. Recordar estas ideas puede ser una buena estrategia para escribir la tabla del 9 rápidamente.

Otra forma de deducir esta y otras tablas es a partir de las propiedades de la multiplicación, en particular, de la propiedad distributiva. Por ejemplo, la tabla del 7 puede ser difícil de recordar. Sin embargo, como $7 = 5 + 2$, cualquier producto por 7 se puede deducir a partir de la tabla del 5 y del 2, que son unas de las que primero se aprenden. En términos generales, se tiene que:

$$a \cdot 7 = a \cdot (5 + 2) = (a \cdot 5) + (a \cdot 2)$$

Así, si se quiere calcular $8 \cdot 7$, se puede calcular: $8 \cdot 7 = 8 \cdot (5 + 2) = (8 \cdot 5) + (8 \cdot 2) = 40 + 16 = 56$.

Hemos visto tres etapas para memorizar las tablas de multiplicar, que dependen de la familiaridad de los niños y las niñas con algunas secuencias de n en n. Sin embargo, podríamos proceder de otra forma para memorizar dichas tablas, por ejemplo, basados en el ámbito numérico de los productos que se están memorizando. Así, en una primera etapa se memorizan aquellas menores a $5 \cdot 5$. En una segunda etapa se incluyen las que están entre el producto $5 \cdot 5$ y el producto $8 \cdot 8$. Y, finalmente, en una tercera etapa se incluyen el resto de los productos.

Etapa 1

Etapa 2

Etapa 3

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	48	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Tabla III.6.

En resumen

Para asegurar que los niños y las niñas tengan éxito en el cálculo de productos y cocientes, es necesario que aprendan las tablas de multiplicar.
Este aprendizaje se puede lograr realizando actividades con material concreto y representaciones gráficas destinadas a su conceptualización y asimilación, procesos que se deben trabajar en forma paralela.
El cálculo de multiplicaciones en cada una de estas etapas puede realizarse mediante sumas iteradas, secuencias de *n* en *n* y uso de dobles, entre otras estrategias.

Ejercicios

1. Construya la tabla de multiplicar del 13, a partir de la del 10 y la del 3, usando la propiedad distributiva.

2. Escriba la secuencia de la tabla del 11 y del 12 e identifique las regularidades en estos números.

1.3 Estrategias de cálculo mental para multiplicar

El desarrollo de técnicas de cálculo mental ayuda a dar sentido a la operación y sus propiedades. A continuación, describiremos algunas estrategias que se basan en las combinaciones multiplicativas, las propiedades de la multiplicación y las características del sistema de numeración decimal.

Para pensar

Un alumno para calcular **202 · 100** hace el siguiente desarrollo:

$$\begin{array}{r} \underline{202} \cdot 100 \\ 000 \\ 000 \\ \underline{202} \\ 20200 \end{array}$$

¿Qué piensa del desarrollo realizado?

Multiplicación por potencias de 10

La base de nuestro sistema posicional es el **10** y esta característica nos ha proporcionado estrategias de conteo, estrategias para el cálculo mental de sumas y restas, y, como veremos a continuación, también nos facilita el cálculo de multiplicaciones. Como vimos en el **Capítulo I**, las potencias de **10** corresponden a $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1.000$, etc.

La propia construcción del sistema decimal indica que al agrupar **10** decenas obtenemos una centena, es decir, **10 · 10 = 100.** Al agrupar **10** centenas obtenemos una unidad de mil, es decir, **10 · 100 = 1.000.** Lo mismo sucede para cualquier orden.

Para multiplicar un número cualquiera por **10**, observamos que el resultado serán tantas decenas como indique el número. Por ejemplo:

13 · 10 corresponde a **13** decenas, es decir, **130.**

De manera análoga:

155 · 100 corresponde a **155** centenas, es decir, **15.500.**

200 · 1.000 corresponde a **200** unidades de mil, es decir, **200.000.**

Para efectos prácticos, multiplicar por una potencia de **10** corresponde a agregar a la derecha del número tantos **0** como tenga la potencia.

Ejemplos

112 · 100 = 11.200

230 · 1.000 = 230.000

304.500 · 100.000 = 30.450.000.000

Ejercicios

1. Calcule mentalmente los siguientes productos y explique el procedimiento utilizado.
   a. $536 \cdot 100$
   b. $6.377 \cdot 10$
   c. $521 \cdot 10^5$

2. Martín calcula $4.842 \cdot 5$ mentalmente y señala: "Digo 48.420 y luego calculo la mitad que es 24.210… el resultado es 24.210". Explique el procedimiento usado por Martín.

Extensión de las combinaciones multiplicativas básicas

Usando las propiedades de la multiplicación y lo visto anteriormente sobre productos de potencias de 10, podemos extender las combinaciones multiplicativas básicas a productos entre múltiplos de potencias de 10. Por ejemplo, como $7 \cdot 5 = 35$, tenemos también que:

$7 \cdot 50 = 7 \cdot 5 \cdot 10 = 35 \cdot 10 = 350.$

$7 \cdot 500 = 7 \cdot 5 \cdot 100 = 35 \cdot 100 = 3.500.$

$70 \cdot 5 = 7 \cdot 5 \cdot 10 = 35 \cdot 10 = 350.$

$70 \cdot 50 = 7 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 = 35 \cdot 100 = 3.500.$

$7.000 \cdot 500 = 7 \cdot 5 \cdot 1.000 \cdot 100 = 35 \cdot 100.000 = 3.500.000.$

Ejemplo

Calculemos $80 \cdot 50$ señalando las propiedades involucradas en el proceso.

$80 \cdot 50 = (8 \cdot 10) \cdot (5 \cdot 10)$	Descomposición canónica
$= 8 \cdot (10 \cdot 5) \cdot 10$	Por la propiedad asociativa de la multiplicación.
$= 8 \cdot (5 \cdot 10) \cdot 10$	Por la propiedad conmutativa de la multiplicación.
$= (8 \cdot 5) \cdot (10 \cdot 10)$	Por la propiedad asociativa de la multiplicación.
$= 40 \cdot 100$	Usamos $8 \cdot 5$ y el producto entre potencias de 10.
$= 4.000$	Producto de un número por una potencia de 10.

Compensación

Otra técnica de cálculo mental para multiplicar es la compensación. La idea es similar a las compensaciones realizadas en el caso de la suma. Se modifica uno de los factores para que la multiplicación sea más sencilla y luego se compensa el resultado para dar respuesta a la multiplicación deseada. La justificación de esta técnica es la propiedad distributiva. Veamos dos ejemplos:

$34 \cdot 9 = 34 \cdot (10 - 1) = 34 \cdot 10 - 34 = 340 - 34 = 306$: multiplicar por 9 corresponde a multiplicar por 10 y luego restar el número original.

$42 \cdot 11 = 42 \cdot (10 + 1) = 42 \cdot 10 + 42 = 420 + 42 = 462$; multiplicar por 11 corresponde a multiplicar por 10 y luego sumar el número original.

Otras estrategias

Mostramos a continuación, mediante ejemplos, otras estrategias usadas habitualmente en el cálculo mental de multiplicaciones:

$35 \cdot 4 = 35 \cdot 2 \cdot 2 = 70 \cdot 2 = 140$: multiplicar por 4 corresponde a multiplicar dos veces por 2.

$28 \cdot 8 = 28 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 56 \cdot 2 \cdot 2 = 112 \cdot 2 = 224$: multiplicar por 8 corresponde a multiplicar tres veces por 2.

$72 \cdot 20 = 72 \cdot 2 \cdot 10 = 144 \cdot 10 = 1.440$: multiplicar por 20 corresponde a multiplicar por 2 y luego por 10.

$320 \cdot 3 = (300 + 20) \cdot 3 = 300 \cdot 3 + 20 \cdot 3 = 900 + 60 = 960$

$12 \cdot 15 = 12 \cdot 10 + 12 \cdot 5 = 120 + 60 = 180$

En resumen

Existen variadas estrategias de cálculo mental que permiten encontrar el resultado de una multiplicación. Estas estrategias se basan en el manejo de las combinaciones multiplicativas básicas, las características del sistema de numeración decimal y las propiedades de la multiplicación.

Ejercicios

1. Calcule mentalmente los siguientes productos y luego describa paso a paso la justificación de su respuesta señalando las propiedades utilizadas.
   - a. $60 \cdot 30$
   - b. $40 \cdot 500$
   - c. $14 \cdot 15$
   - d. $501 \cdot 5$
   - e. $202 \cdot 3$
   - f. $121 \cdot 4$
   - g. $47 \cdot 200$
   - h. $85 \cdot 9$
   - i. $71 \cdot 11$
   - j. $300 \cdot 99$
   - k. $576 \cdot 1.001$

2. Lea el siguiente problema: *Un comerciante compra 9 resmas de papel para fotocopia. Cada resma tiene 500 hojas. El comerciante piensa cobrar $20 por cada fotocopia. ¿Cuánto dinero recaudará si utiliza todas las hojas en fotocopias?*
   - a. Indique qué estrategias de cálculo mental podría usar un niño o niña de Educación Básica para resolver el problema.
   - b. Proponga dos problemas similares al anterior utilizando distintos contextos, donde la multiplicación se pueda calcular usando extensiones de las combinaciones multiplicativas básicas.

1.4 El algoritmo usual de la multiplicación

El algoritmo para multiplicar que aprendemos en la escuela nos permite calcular el producto entre dos números de manera eficiente. Este algoritmo utiliza propiedades de la multiplicación y del sistema de numeración decimal, pero estas características no se hacen explícitas. Esto puede hacer que pierda sentido matemático y parezca arbitrario. Conocer las propiedades que sustentan su funcionamiento permite tener una comprensión más acabada de la multiplicación y poder responder preguntas como: ¿por qué empezamos a multiplicar por la derecha?, ¿por qué se multiplican todas las cifras de un factor por todas las cifras del otro factor?, ¿por qué nos corremos un espacio hacia la izquierda? En esta sección, desarrollaremos el algoritmo usual para la multiplicación respondiendo, de paso, las interrogantes planteadas.

Multiplicación por una cifra

Antes de conocer y justificar el funcionamiento del algoritmo de la multiplicación, nos detendremos a analizar una estrategia previa, que habitualmente se enseña en los primeros niveles de enseñanza y que se basa principalmente en la propiedad distributiva.

Para calcular el producto $321 \cdot 3$, descomponemos el primer factor como $300 + 20 + 1$. De esta forma, 3 veces 321 es igual a: 3 veces 300, más 3 veces 20, más 3 veces 1. Se tiene entonces:

$$321 \cdot 3 = (300 + 20 + 1) \cdot 3 = 300 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 900 + 60 + 3 = 963$$

Una forma de acercarnos al algoritmo usual de la multiplicación es escribir los productos parciales en forma vertical, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rr} 1 \cdot 3 = & 3 \\ 20 \cdot 3 = & 60 \\ 300 \cdot 3 = & \underline{900} \\ & 963 \end{array}$$

Lo que puede ser expresado en forma sistemática como:

$$\begin{array}{rl} \underline{321} & \cdot\, 3 \\ 3 & \\ 60 & \\ \underline{+\ 900} & \\ 963 & \end{array}$$

El rol de la distributividad en el proceso de multiplicación queda muy claro en la estrategia anterior, sin embargo, no es evidente en el algoritmo usual. Veamos un ejemplo en el que aparece una reserva en la suma:

$$\begin{array}{rll} \underline{246} & \cdot\, 7 & \\ 42 & \longleftarrow & \text{7 veces las 6 unidades de 246.} \\ 280 & \longleftarrow & \text{7 veces las 4 decenas de 246.} \\ \underline{+\ \ 1.400} & \longleftarrow & \text{7 veces las 2 centenas de 246.} \\ 1.722 & \longleftarrow & \text{Suma de las anteriores.} \end{array}$$

Por las características de los sumandos, el producto final se puede ir obteniendo directamente a medida que vamos multiplicando las cifras por el dígito. Veamos el mismo ejemplo, 246 · 7, usando esta estrategia:

$$\begin{array}{r}\underline{246} \cdot 7\\ \end{array} \rightarrow \begin{array}{r}\underline{246} \cdot 7\\ 2\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}\underline{246} \cdot 7\\ 22\end{array} \rightarrow \begin{array}{r}\underline{246} \cdot 7\\ 1.722\end{array}$$

7 por 6 es 42, escribo 2 y reservo 4 decenas.

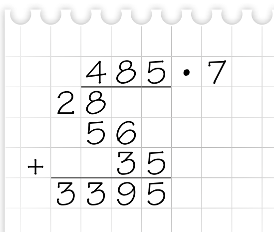
7 por 4 es 28, más 4 de reserva es 32. Escribo 2 y reservo 3 centenas.

7 por 2 es 14, más 3 de reserva es 17. Escribo 17 y termino el proceso obteniendo el producto 1.722.

El algoritmo usual de la multiplicación es justamente este procedimiento. Notamos que en el desarrollo anterior comenzamos a multiplicar por las unidades, es decir, por la derecha. Es posible comenzar por la izquierda o en cualquier orden, sin embargo, no será tan inmediato calcular la suma.

Ejercicios

1. Calcule las siguientes multiplicaciones escribiendo los productos parciales en forma explícita.
   a. 5.462 · 7
   b. 4.021 · 9
2. Calcule $342_5 \cdot 2_5$.
3. Un alumno de 4º Básico calculó el producto 485 · 7 usando el algoritmo de la siguiente forma:



¿Es correcto el procedimiento?

Multiplicación por dos o más cifras

Para multiplicar números de más cifras, por ejemplo **246 · 27**, el procedimiento es similar. Descomponemos **27** en decenas y unidades, y luego usando la distributividad, tenemos:

$$246 \cdot 27 = 246 \cdot (20 + 7) = (246 \cdot 20) + (246 \cdot 7)$$

Para calcular el producto de **246 · 7** usamos el algoritmo ya visto. Para calcular **246 · 20** recordemos que es equivalente a multiplicar por **2** y luego por **10**. Se tiene entonces:

$$\begin{array}{r} \underline{246} \cdot 7 \\ 1.722 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \underline{246} \cdot 20 \\ 4.920 \end{array}$$

Por último, sumamos estos resultados intermedios:

$$\begin{array}{rl} \underline{246} \cdot 27 & \\ 1.722 & \longleftarrow 246 \cdot 7 \\ \underline{+\,4.920} & \longleftarrow 246 \cdot 20 \\ 6.642 & \end{array}$$

En general, en el uso de este algoritmo no se escriben el o los **0** provenientes del producto por las potencias de **10**. Escribimos los productos por cada cifra, a partir de las decenas, corriéndonos por cada producto un espacio hacia la izquierda.

$$\begin{array}{r} \underline{246} \cdot 27 \\ 1.722 \\ \underline{+ \quad 492\_} \\ 6.642 \end{array}$$

Al dejar un espacio sin dígito en la suma de los productos parciales, es habitual la pregunta ¿por qué tenemos que corrernos un espacio cada vez que multiplicamos por un número de mayor orden? La respuesta está en nuestro sistema posicional. En el ejemplo, el **2** de **27** está en la segunda posición, es decir, representa dos decenas. Por lo tanto, el resultado es **492** decenas, o sea **4.920** unidades, de modo que en el último paso, para sumar los dos resultados parciales, debemos escribirlos de tal manera que las unidades de los mismos órdenes queden alineadas. El **0** de la segunda línea no se escribe por convención, pero siempre está presente.

Una manera más transparente de presentar la multiplicación es hacer explícitos todos los pasos que se ocultan en el algoritmo. Para multiplicar **246 · 27**, en la primera línea se escribe el resultado de multiplicar **246 · 7**, y en la segunda línea se escribe el resultado de multiplicar **246 · 20**. Como vimos antes, cada uno de estos pasos se puede descomponer en productos por las unidades, decenas y centenas de **246**, esto es:

$$\begin{array}{rl} \underline{246} \cdot 27 & \\ 42 & \longleftarrow \text{7 veces las 6 unidades de 246.} \\ 280 & \longleftarrow \text{7 veces las 4 decenas de 246.} \\ 1.400 & \longleftarrow \text{7 veces las 2 centenas de 246.} \\ 120 & \longleftarrow \text{20 veces las 6 unidades de 246.} \\ 800 & \longleftarrow \text{20 veces las 4 decenas de 246.} \\ \underline{+\,4.000} & \longleftarrow \text{20 veces las 2 centenas de 246.} \\ 6.642 & \longleftarrow \text{Suma de las anteriores.} \end{array}$$

Este último cálculo puede entenderse como otro algoritmo para multiplicar dos números, a menudo se le llama "algoritmo de los productos parciales". El algoritmo usual es más eficiente, sin embargo, el algoritmo de los productos parciales aquí presentado muestra qué se está haciendo realmente.

Para pensar

Considere el siguiente procedimiento usado para multiplicar $145 \cdot 36$:

$$\begin{array}{rr}
 & 145 \cdot 36 \\ \hline
 & 435 \\
+ & 870 \\ \hline
 & 5220
\end{array}$$

¿Es correcto este procedimiento?

Ejercicios

1. Calcule las siguientes multiplicaciones escribiendo los productos parciales en forma explícita y luego con el algoritmo usual.

   a. $536 \cdot 53$

   b. $9.273 \cdot 435$

   c. $103.434 \cdot 10.002$

2. Observe el siguiente desarrollo y explique el procedimiento realizado:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 2 & 3 & 4 \cdot 83 \\ \cline{4-6}
 & & & & 1 & 2 \\
 & & & & 9 & \\
 & & & 6 & & \\ \cline{2-6}
 & & & 3 & 2 & \\
 & & 2 & 4 & & \\
+ & 1 & 6 & & & \\ \cline{2-6}
 & 1 & 9 & 4 & 2 & 2
\end{array}$$

1.5 Otros algoritmos

Los algoritmos que presentaremos aquí no pretenden reemplazar al algoritmo usual porque, de hecho, para números con muchas cifras son poco eficientes. Sin embargo, entender por qué funcionan nos ayuda a ganar comprensión acerca de la multiplicación y a reconocer desarrollos alternativos.

El algoritmo chino

Introducimos este algoritmo por medio de un ejemplo: para multiplicar $12 \cdot 52$, primero colocamos los números uno a continuación del otro. Luego, a partir del 12 trazamos una línea oblicua partiendo del 1 y dos líneas partiendo del 2. Hacemos lo mismo con el 52, pero con líneas que se cortan con las anteriores. Ahora contamos las intersecciones, hay 4 intersecciones en las unidades, $10 + 2$ intersecciones en las decenas y 5 intersecciones en las centenas. Como se debe efectuar un canje a partir de las 12 intersecciones en las decenas, el resultado de la multiplicación es 624, como se muestra a continuación:

$$1 \quad 2 \quad \cdot \quad 5 \quad 2 \quad = \quad 6 \quad 2 \quad 4$$

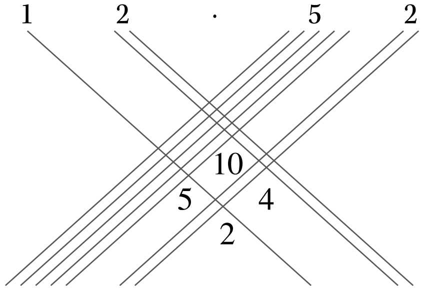


Figura III.22.

El algoritmo funciona porque las líneas representan las distintas potencias de 10 y los cruces que se suman corresponden a las distintas maneras de obtener estas potencias como productos de potencias menores. Así, para las centenas habrá, a lo más, tres grupos de cruces posibles: unidades por centena, decenas por decenas y centenas por unidades.

Este algoritmo refuerza las ideas de descomposición posicional, de productos de potencias de 10 y del papel que estos productos juegan en la multiplicación de números cualesquiera. Está claro que con cifras muy grandes se hace difícil contar los cruces y se producen demasiadas combinaciones de potencias de 10, por lo que se hace impracticable.

El algoritmo ruso

El algoritmo ruso opera multiplicando uno de los factores por 2 y, simultáneamente, dividiendo el otro por 2. Por ejemplo, para multiplicar $23 \cdot 8$, escribimos los dos número 23 y 8 lado a lado y multiplicamos el $23 \cdot 2$, al tiempo que dividimos el 8 por 2.

$$\begin{array}{r@{\;\text{——}\;}l} 23 & 8 \\ 46 & 4 \\ 92 & 2 \\ 184 & 1 \end{array}$$

Vemos que en cada línea el producto de los números resultantes se mantiene igual, ya que hemos multiplicado por 2 uno de los factores y dividimos por 2 el otro factor, luego el resultado tiene que ser el mismo. De esta manera, $23 \cdot 8 = 184$.

Pero ¿qué pasa si el segundo factor no es un múltiplo de 2? Veamos un ejemplo, calculemos $23 \cdot 19$.

$$\begin{array}{rcr} 23 & \text{——} & 19 \\ 46 & \text{——} & 9 \\ 92 & \text{——} & 4 \\ 184 & \text{——} & 2 \\ 368 & \text{——} & 1 \end{array}$$

En la primera columna, procedemos como en el caso anterior, pero si el factor de la derecha es impar, al dividirlo por 2 tendremos un cociente q y el resto será 1. Entonces, ponemos el número q y nos olvidamos del 1. Ahora tachamos aquellas filas que corresponden a números pares de la columna de la derecha y, por último, sumamos los números que quedaron sin tachar de la columna izquierda. El resultado de la multiplicación es igual a esta suma:

$$\begin{array}{rrcr} & 23 & \text{——} & 19 \\ & 46 & \text{——} & 9 \\ & \cancel{92} & \cancel{\text{——}} & \cancel{4} \\ & \cancel{184} & \cancel{\text{——}} & \cancel{2} \\ + & 368 & \text{——} & 1 \\ \hline & 437 & & \end{array}$$

En el primer ejemplo, tendríamos que haber tachado todas las líneas, excepto la última.

Notamos que si multiplicamos los números que aparecen en cada fila, estos productos no son iguales entre sí, como sucedió en el primer ejemplo. En la segunda línea, por ejemplo, $46 \cdot 9 \neq 23 \cdot 19$. Por lo tanto, el argumento anterior no puede ser usado para explicar que el resultado final es el correcto. Cabe preguntarse si este algoritmo funciona para cualquier par de números.

Para responder esta pregunta, analicemos en detalle el ejemplo anterior.

Si un número de la segunda columna es impar, lo expresamos como suma de un número par más 1. Tenemos que $19 = 18 + 1$ y $9 = 8 + 1$, entonces:

$\mathbf{23 \cdot 19} = 23 \cdot (18 + 1) = \mathbf{23 \cdot 18} + \underline{23}$

$23 \cdot 18 + 23 = 46 \cdot 9 + \underline{23}$

$\mathbf{46 \cdot 9} + 23 = 46 \cdot (8 + 1) + 23$

$46 \cdot (8 + 1) + 23 = 46 \cdot 8 + (\underline{46 + 23})$

$4\,6 \cdot 8 + (\underline{46 + 23}) = 92 \cdot 4 + (\underline{46 + 23})$

$\mathbf{92 \cdot 4} + (\underline{46 + 23}) = 184 \cdot \mathbf{2} + (\underline{46 + 23})$

$\mathbf{184 \cdot 2} + (\underline{46 + 23}) = 368 \cdot \mathbf{1} + (\underline{46 + 23})$

$\mathbf{368 \cdot 1} + (\underline{46 + 23}) = 437$

Se destacaron los términos que aparecen en cada fila del algoritmo descrito más arriba y hemos subrayado el resto que se pierde en cada paso impar del proceso. Vemos también que, en cambio, en los pasos pares nada se pierde.

El procedimiento de tachar los pasos pares indica que nada se perdió en ese paso, por su parte, los que no se tacharon deben ser sumados, porque esa fue la pérdida en esa etapa del procedimiento.

El desarrollo anterior ilustra por qué este procedimiento es correcto para cualquier par de números que usemos.

> *Para pensar*
>
> ¿Cómo se puede adaptar el algoritmo ruso usando triples y tercios?

Algoritmo árabe

Este algoritmo funciona sobre una rejilla, en la cual se escriben los dos factores y se van registrando los productos. Calculemos $754 \cdot 32$ usando este algoritmo. Para ello, se dibuja una rejilla de 3 por 4 y se ubica en la primera fila el primer factor y en la ultima columna, el segundo factor, como se muestra a continuación. En cada casilla que queda en blanco trazamos una diagonal.

7	5	4	·
/	/	/	3
/	/	/	2

Figura III.23.

Luego se calculan los productos entre los dígitos de ambos factores y el resultado se escribe en la casilla que intersecta la fila y la columna de los dígitos correspondientes. Los productos se registran escribiendo la decena en el triángulo superior de la casilla y la unidad, en el triángulo inferior. Para encontrar el resultado final se suman los dígitos que quedaron en las diagonales, como se muestra en la figura. Si la suma de una diagonal es mayor que 10, la reserva se suma a la diagonal siguiente (de derecha a izquierda).

		7	5	4	·
	/	2 / 1	1 / 5	1 / 2	3
	/	1 / 4	1 / 0	0 / 8	2
2	4	1	2	8	

Figura III.24.

Las diagonales en el cuadriculado permiten sumar los productos parciales considerando el valor posicional, esto porque la primera diagonal corresponde a las unidades de los productos parciales; la segunda, a las decenas; la tercera, a las centenas; y así sucesivamente. De esta forma, su uso solo requiere calcular los productos entre los dígitos que forman los factores y la suma de las diagonales para encontrar el producto final. Si hacemos explícitos los valores posicionales de los dígitos en el ejemplo anterior, podremos ver claramente por qué funciona este algoritmo. Así, se tiene:

	7C	5D	4U	·
	2DM / 1M	1M / 5C	1C / 2D	3D
	1M / 4C	1C / 0D	0D / 8U	2U

2 4 1 2 8

Figura III.25.

En resumen

El funcionamiento del algoritmo usual de la multiplicación se basa en las propiedades de esta operación y las características del sistema de numeración. La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición permite ir efectuando productos parciales de los valores posicionales de los dígitos que forman a ambos factores. La suma de estos productos parciales corresponde al producto final.
Estas mismas propiedades y características justifican el funcionamiento de otros algoritmos, como el árabe y el chino. El algoritmo ruso, en cambio, se basa principalmente en la relación inversa entre la multiplicación y la división.

Ejercicios

1. Calcule el producto 631 · 34 usando:
   a. El algoritmo chino.
   b. El algoritmo ruso.
   c. El algoritmo árabe.
2. Adapte el algoritmo árabe colocando el primer factor en la primera columna de la izquierda y el segundo, en la primera fila. Utilícelo para calcular 324 · 32.
3. Suponga que usted sabe de memoria las tablas del 11 y del 12, ¿cómo puede aprovechar este conocimiento para calcular 345 · 1.211? Considere que solo debe calcular dos productos parciales.

1.6 Dificultades y posibles errores en el uso del algoritmo de la multiplicación

Para el uso eficiente del algoritmo de la multiplicación, es necesario dominar las tablas de multiplicar. Es por ello que, a medida que se estudia el funcionamiento y la justificación del algoritmo, puede ser necesario reactivar este conocimiento en los niños y las niñas.

El uso del algoritmo de la multiplicación requiere mantener en la memoria los productos entre los dígitos que se van multiplicando, las reservas con las que nos vamos encontrando al calcular dichos productos, y el orden en que se van efectuando y registrando. Estos requerimientos, agregados a las dificultades de comprensión del algoritmo, pueden generar errores como los siguientes:

- No considerar las reservas al calcular los productos parciales.

Cuando calculamos el producto entre dos dígitos y el resultado que se obtiene es mayor que **10**, se debe realizar un canje. Un error que se puede observar es el de no consideran este canje:

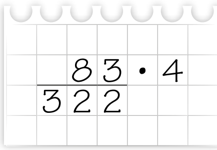


Figura III.26.

También es posible encontrar desarrollos donde se considera la reserva, pero esta se suma al dígito de la posición siguiente sin calcular el producto correspondiente, por ejemplo:

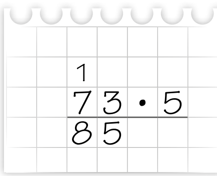


Figura III.27.

O, simplemente, se escribe el producto de los dígitos sin considerar el valor posicional:

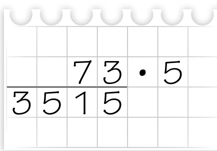


Figura III.28.

- No considerar el valor posicional al alinear los productos parciales.

Un error que se comete al inicio del trabajo con el algoritmo es no desplazarse un espacio cuando se multiplica por decenas o centenas, como se ve en la siguiente multiplicación:

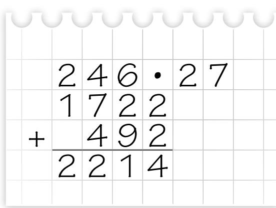


Figura III.29.

Como ya vimos, el error se debe a no considerar que el dígito **2** del número **27** representa dos decenas, **246** por **20** es **4.920** y no, **492**. Una revisión del algoritmo de productos parciales, puede ser una herramienta para abordar este error.

Una dificultad relacionada con este aspecto se produce cuando hay ceros en el segundo factor, y se pueden cometer errores como el siguiente:

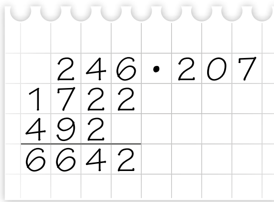


Figura III.30.

Vemos que no se han escrito los ceros que corresponden al producto de las decenas del segundo factor por el primer factor, como sí se ha hecho en el desarrollo de la **Figura III.36.** O su versión abreviada, como se muestra en la **Figura III.37**.

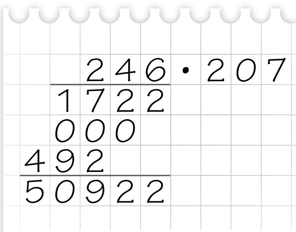


Figura III.31.

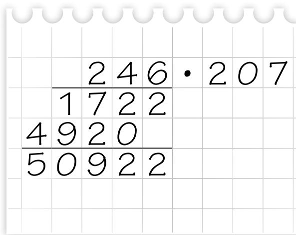


Figura III.32.

Para superar esta dificultad, se puede notar que el dígito **2** de **207** representa dos centenas.

En esta misma categoría, otro posible error que se puede observar cuando se inicia el estudio de este algoritmo es partir multiplicando por las decenas del segundo factor y desplazarse hacia la izquierda, como habitualmente se usa el algoritmo.

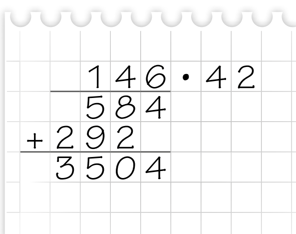


Figura III.33.

Si bien el procedimiento anterior ilustra un error, este no es la posición por donde se comienza a efectuar la multiplicación. Podríamos partir multiplicando por las posiciones de mayor orden, pero considerando que el desplazamiento, en dicho caso, se realiza hacia la derecha. Entonces, debería haberse calculado de la siguiente forma:

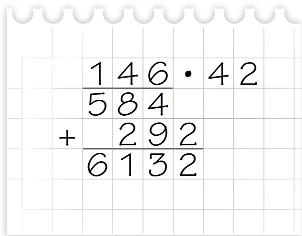


Figura III.34.

Finalmente, es importante mencionar que hay errores que se producen en el uso del algoritmo de la multiplicación, pero que tienen relación con las dificultades para usar el algoritmo de la suma. Estos errores aparecen cuando se suman los productos parciales para obtener el resultado final.

1.7 La multiplicación y el material concreto

Como hemos visto en secciones anteriores, la construcción del significado de la multiplicación se apoya en el uso de material concreto y representaciones pictóricas, las que además permiten obtener estrategias de cálculo a partir de la contextualización con problemas. Entre los materiales que pueden apoyar esta construcción están: el ábaco, los bloques base 10 y vasitos con fichas o con palitos de helado. El ábaco también puede usarse para comprender el algoritmo de la multiplicación, ya que explicita la característica posicional del sistema de numeración. Los bloques base 10 corresponden a un sistema agregativo y deben usarse con los reparos correspondientes. Veamos algunos ejemplos usando estos materiales.

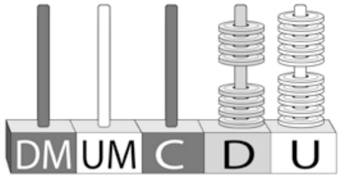
El ábaco

Este material es adecuado para introducir el concepto de multiplicación y deducir el algoritmo de la multiplicación por un dígito. Puede ser usado también para multiplicaciones por más de una cifra, aunque en este caso el procedimiento puede ser más complicado que el propio algoritmo. En cualquier caso, se deben elegir los números para que esto sea práctico. A continuación, se muestra un ejemplo.

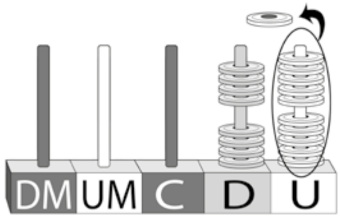
Ejemplo

Calculemos 45 · 2

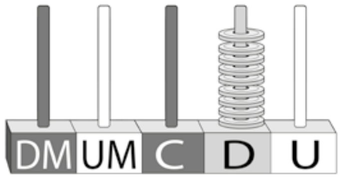
Para encontrar el resultado, representamos el primer factor tantas veces como indica el segundo factor.



Luego efectuamos los canjes, en este caso, 10 unidades por una decena.



Obtenemos que 45 · 2 = 90.



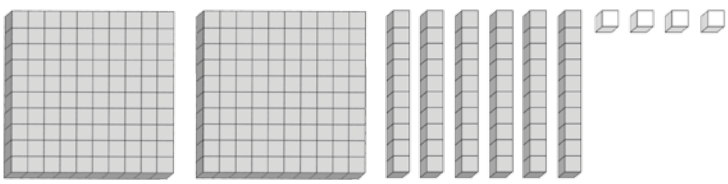
Bloques base 10

Los bloques base 10 son adecuados para desarrollar el concepto de multiplicación, pero no para construir el algoritmo. Veamos un ejemplo:

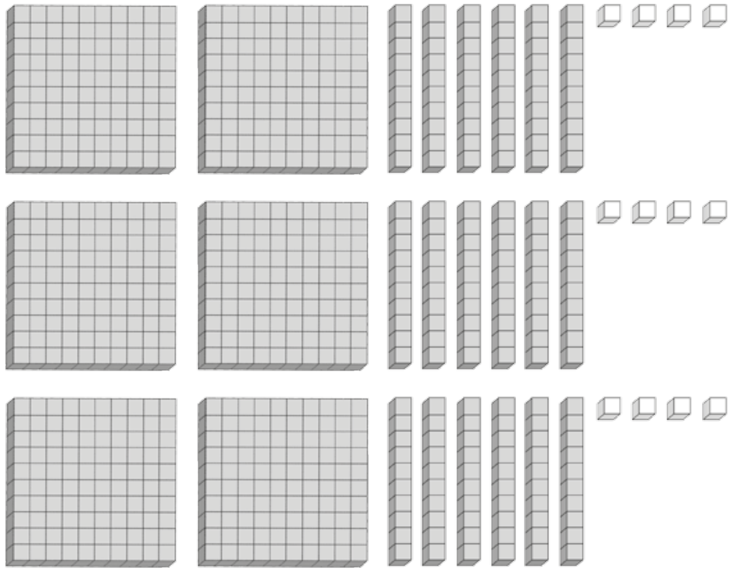
Ejemplo

Calculemos 264 ·3

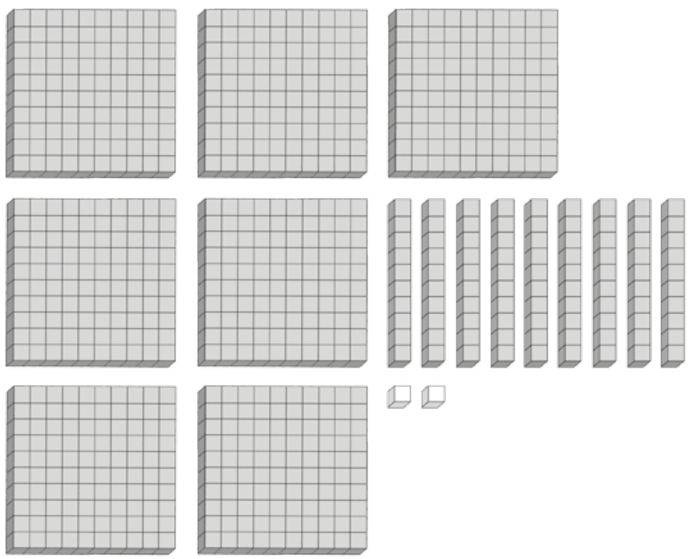
Representamos el número 264 mediante 2 placas de 100, 6 barras de 10 y 4 cubitos de 1.



Ahora repetimos la representación que tenemos para que 264 aparezca 3 veces.



A continuación, se efectúan los canjes necesarios y se obtiene 792 como resultado.



Ejercicios de la sección

1. Plantee un problema de multiplicación con cada uno de los siguientes contextos:
   a. 3 plazas de peaje, 15 vehículos por minuto.
   b. 30 rifas, 30 números por rifa.
   c. 10 pizzas, 8 porciones por pizza.
   d. 22 buses, 30 personas por bus.
   e. 25 cursos, 35 niños por curso.
   f. 100 empanadas, 3 aceitunas por empanada.

2. Formule un problema que se pueda representar con los diagramas que se muestran.

   a.

¿Total de cuadernos?		
12 cuadernos	12 cuadernos	12 cuadernos

   b.

¿Total de bebidas?			
4 bebidas	4 bebidas	…	4 bebidas

22 packs

   c.

Negro — Blanco
Negro — Blanco
Negro — Blanco

Negro — Blanco
Negro — Blanco
Negro — Blanco

3. Resuelva mentalmente cada multiplicación, luego escriba el procedimiento que aplicó.
   a. $680 \cdot 50$
   b. $120 \cdot 525$
   c. $550 \cdot 9$
   d. $675 \cdot 99$
   e. $738 \cdot 11$
   f. $87.783 \cdot 100$

4. Observe el procedimiento usado para calcular el producto $705 \cdot 12$.

$$705 \cdot 12$$

$$7.050 + 1.410 = 8.460 \rightarrow 705 \cdot 12 = 8.460$$

   a. Explique cómo se calculó el producto.
   b. Indique las propiedades matemáticas presentes en el procedimiento anterior.

5. Observe el siguiente procedimiento.

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & & \multicolumn{4}{r}{6.234 \cdot 73} \\
 & & & & & 1 & 2 \\
 & & & & & 9 & \\
 & & & & 6 & & \\
 & & 1 & 8 & & & \\
 & & & & 2 & 8 & \\
 & & & 2 & 1 & & \\
 & & 1 & 4 & & & \\
+ & 4 & 2 & & & & \\
\hline
 & 4 & 5 & 5. & 0 & 8 & 2
\end{array}
$$

a. Explíquelo.

b. ¿Qué relación hay entre el procedimiento anterior y el algoritmo usual de la multiplicación?

c. Calcule 5.362 · 65 usando el procedimiento anterior.

6. Encuentre el valor de k en cada producto, para que la multiplicación realizada sea correcta.

$$
\begin{array}{rr}
\underline{\quad 8673} & \cdot\, 42 \\
17k46 & \\
+\ k4692 & \\
\hline
k64266 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
\underline{\quad 79164} & \cdot\, 52 \\
1k8328 & \\
+39k820 & \\
\hline
4116528 &
\end{array}
$$

7. Calcule los siguientes productos usando el algoritmo árabe.

a. 5.362 · 42

b. 74.639 · 423

c. 54.362.003 · 21

8. Al calcular el producto 6.453 · 23 con el algoritmo usual de la multiplicación, un alumno escribió:

$$
\begin{array}{rr}
\underline{\quad 6.453} & \cdot\, 23 \\
19359 & \\
+\quad 12906 & \\
\hline
32265 &
\end{array}
$$

a. Describa el error del alumno.

b. Proponga al menos una estrategia que le permitiría al alumno comprobar que su resultado no es correcto.

9. Observe los siguientes procedimientos usados para calcular el producto 483 · 7.

$$
\begin{array}{r}
\underline{483} \cdot 7 \\
21 \\
560 \\
\underline{+\,2800} \\
3381
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcr}
\multicolumn{3}{l}{\underline{483 \cdot 7\quad}} \\
400 \cdot 7 & = & 2800 \\
80 \cdot 7 & = & 560 \\
+ \quad 3 \cdot 7 & = & \underline{+\,21} \\
 & & 3381
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\underline{\quad\quad 483} \cdot 7 \\
21 \\
56 \\
\underline{+ \quad 28 \quad\quad} \\
3381
\end{array}
$$

a. Señale dos similitudes y dos diferencias entre los procedimientos anteriores.

b. ¿Qué relación tienen estos procedimientos con el algoritmo usual de la multiplicación?

10. Un profesor explica a sus alumnos un procedimiento para memorizar las combinaciones multiplicativas básicas entre 6, 7, 8 y 9. Para ello utiliza ambas manos. Los meñiques representan el 6, los anulares el 7, los mayores el 8, los índices el 9 y los pulgares el 10. Para multiplicar 7 · 9, enfrenta el 7 de la mano izquierda con el 9 de la derecha. Quedan así tres dedos de la mano izquierda sobre el 7 y un dedo sobre la mano derecha sobre el 9. Al multiplicarlos obtenemos 3 · 1 = 3. Ahora, los dedos que falta contar son dos de la mano izquierda y cuatro de la derecha, es decir seis dedos, que hacemos corresponder a 60. Sumamos ahora 60 más 3 y obtenemos 63, que es justo 7 · 9.

a. Realice varias multiplicaciones básicas para ver cómo funciona el procedimiento.

b. Justifique por qué funciona.

2. La división

La división surge de, al menos, dos ideas básicas. Por una parte, está la idea de repartir equitativamente una cantidad de objetos entre varias personas o recipientes: si tenemos 18 manzanas y las queremos repartir entre 6 personas, ¿cuántas recibe cada una? Por otra parte, está la idea de calcular cuántos recipientes se necesitan para repartir una cantidad: si tenemos 18 manzanas y queremos repartir 3 a cada persona, ¿para cuántas personas alcanza? Esta última concepción de la división está asociada a la idea de restar una cantidad de otra reiteradamente, en nuestro ejemplo, ¿cuántas veces podemos restar 3 de 18? Como vimos en la sección anterior, en el producto $m \cdot n$, el primer factor dice cuántos grupos hay y el segundo dice cuántos objetos hay en cada grupo. Esto corresponde a los dos significados de la división que hemos mencionado. Podemos decir que si k elementos se reparten entre m recipientes, a cada uno le corresponden n elementos, lo que escribiremos como[1] $k : m = n$ y leemos "k dividido por m es igual a n". También podemos decir que al agrupar los k elementos en grupos con n elementos cada uno, podemos formar m grupos. Lo que escribiremos como $k : n = m$. Por la propiedad conmutativa de la multiplicación, $m \cdot n = n \cdot m$, y podemos interpretar también $k : m$ como agrupar k elementos en grupos con m elementos y $k : n$ como repartir k elementos entre n recipientes.

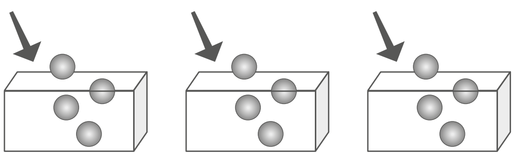
La notación que se usa al trabajar con la división es la siguiente: si $a : b = c$, diremos que a es el dividendo, b es el divisor y c es el cociente o resultado de la división. Veremos más adelante qué sucede cuando nos sobran objetos al agrupar o repartir.

La división por reparto

Desde los niveles iniciales de Educación Básica, los niños y las niñas se ven enfrentados a situaciones en que deben repartir equitativamente objetos en recipientes. Este tipo de acción se desarrolla antes de introducir la división de manera formal. Analicemos un problema concreto de repartir objetos:

Se tienen 12 fichas y 3 cajas, y se quieren repartir equitativamente las fichas en las cajas. ¿Cuántas fichas se deben poner en cada una?

Un procedimiento que se podría usar es *repartir* de 1 en 1 todas fichas en la cajas, y luego contar la cantidad que quedó en cada una. También el reparto se puede hacer de 2 en 2, o directamente buscando un número tal que tres veces ese número dé como resultado el total de las fichas.



12 fichas : 3 cajas = ? fichas en cada caja

Figura III.35.

Observamos que 3 cajas con 4 fichas cada una es equivalente a 12 fichas repartidas equitativamente en 3 cajas. Es decir:

$$3 \cdot 4 = 12, \text{ es lo mismo que } 12 : 3 = 4$$

[1] Para denotar la división también se utiliza el símbolo ÷.

La división como agrupación de elementos

La acción de agrupar objetos considerando la misma cantidad en cada grupo también se trabaja en niveles iniciales de Educación Básica. Veamos un ejemplo:

Se tienen 12 fichas para colocar en cajas que deben contener 4 fichas cada una. ¿Cuántas cajas se necesitan?

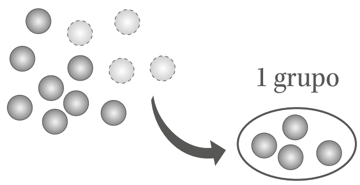


Figura III.36.

Resolvamos este problema formando sucesivamente grupos de 4 fichas:

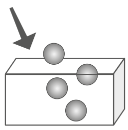
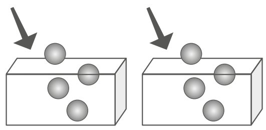
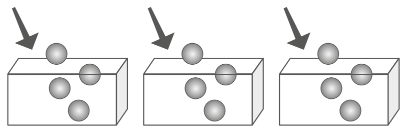
1º grupo	2º grupo	3º grupo
 Colocamos 4 fichas en una caja. De esta forma, las fichas que quedan por guardar son: $12 - 4 = 8$ Quedan 8 fichas por guardar.	 Colocamos 4 fichas más en una caja. De esta forma, las fichas que quedan por guardar son: $8 - 4 = 4$ Quedan 4 fichas por guardar.	 Colocamos 4 fichas más en una caja. De esta forma, las fichas que quedan por guardar son: $4 - 4 = 0$ Ya no quedan fichas por guardar.

Figura III.37.

Realizar restas sucesivas para efectuar el cálculo del cociente implica restar al total la cantidad de elementos que forman un grupo. Luego, a los que quedan se les vuelve a restar los elementos que corresponden a un grupo y así sucesivamente, hasta que no podamos formar más grupos. Notamos que el dividendo de la división corresponde al minuendo de la primera resta y el divisor corresponde al sustraendo. La cantidad de veces que se efectúan las restas sucesivas es el cociente de la división.

La división como resta sucesiva corresponde al proceso inverso de la multiplicación como suma iterada y responde a la pregunta ¿cuántas veces cabe el divisor en el dividendo? De esta forma, restamos sucesivamente el divisor al dividendo, hasta que el resultado sea 0 o un número menor que el divisor, el cual se denomina *resto* de la división. También podemos pensar en sumar reiteradamente el divisor hasta acercarse lo más posible al dividendo sin pasarse.

Ejemplo

Calculemos la división **15 : 3** con una resta sucesiva y con una suma sucesiva.

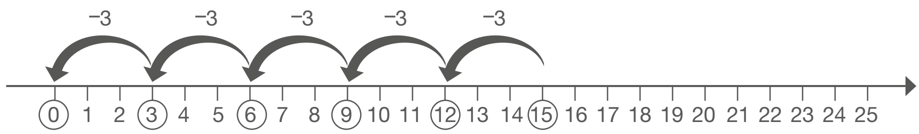
Comencemos calculando la división **15 : 3** a través de restas sucesivas. Para ello restamos reiteradamente al dividendo el divisor, esto es:

$$\left.\begin{aligned} 15 - 3 &= 12 \\ 12 - 3 &= 9 \\ 9 - 3 &= 6 \\ 6 - 3 &= 3 \\ 3 - 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Como la resta se efectuó 5 veces hasta llegar a 0, se tiene que:

$$15 : 3 = 5$$

Este procedimiento se puede ilustrar en la recta numérica como sigue:



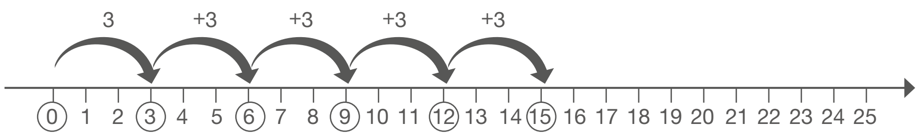
Para calcular **15 : 3** usando una suma iterada, sumamos reiteradamente el divisor:

$$\left.\begin{aligned} 3 + 3 &= 6 \\ 6 + 3 &= 9 \\ 9 + 3 &= 12 \\ 12 + 3 &= 15 \end{aligned}\right\}$$

Como 3 se sumó reiteradamente 5 veces para obtener 15, se tiene que:

$$15 : 3 = 5$$

En la recta numérica, esta técnica se representa como:



Para pensar

Claramente, 17 objetos no se pueden repartir en 3 grupos con la misma cantidad de objetos cada uno o, con la otra interpretación para la división, no se pueden agrupar en grupos con 3 objetos cada uno.
¿Cómo se puede interpretar la división en esta situación?

Significado del resto en la división

En todos los problemas de división que hemos revisado hasta el momento, la cantidad total de elementos a repartir o agrupar equitativamente es tal que al repartirlos o agruparlos no sobra ningún elemento. Sin embargo, hay situaciones en que, al efectuar el reparto o agrupar los elementos, sobran algunos que no podemos repartir o agrupar, pues quedarían grupos con más elementos que otros. Veamos un ejemplo:

Una profesora reparte equitativamente 22 lápices entre 5 niños.

Al efectuar el reparto, a cada niño le corresponden 4 lápices y sobran 2 lápices. Estos no se pueden repartir, pues si lo hiciéramos, algunos niños recibirían más lápices que otros, y no se cumpliría con la instrucción de que el reparto sea equitativo. Esta cantidad que sobra es el *resto* de la división. Observemos que la cantidad de lápices que sobró debe ser menor a la cantidad de participantes del reparto, pues si no, podríamos seguir repartiendo. Tenemos que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resto, es decir, $22 = 5 \cdot 4 + 2$.

En términos generales, si el resultado de dividir un número a por un número b entrega un cociente q y un resto r menor que q, tendremos $a = b \cdot q + r$. Esta relación será estudiada en profundidad en el **Capítulo V**. Cuando escribamos $a : b = q$, a menos que indiquemos lo contrario, entendemos que $b \cdot q = a$, es decir, que el resto de la división es 0.

En situaciones de agrupación de elementos, el resto corresponde a los objetos que no se pueden agrupar, pues no alcanzan para formar un nuevo grupo. Por ejemplo, si se tienen 32 lápices para formar cajas con 6 lápices cada una, podremos formar 5 cajas y sobrarán 2 lápices. Estos últimos corresponden al resto de la división.

Al trabajar con problemas que involucren división, se debe interpretar tanto el cociente como el resto.

Ejemplo

a) En una distribuidora de botellas de agua mineral se arman paquetes con 6 botellas. Si el día lunes por la mañana contaban con 57 botellas de agua mineral, ¿cuántas botellas quedarán sin empaquetar?

b) Andrea tiene 43 fotos para pegar en un álbum. Si en cada página puede pegar 4 fotos, ¿cuántas páginas ocupará del álbum si pega todas las fotos?

En este último problema, si bien no se pregunta directamente por el resto, es importante considerarlo al momento de responder.

2.1 Propiedades de la división

Dados tres números a, b y q, con $b \neq 0$, diremos que:

$$a : b = q, \text{ si y solo si } b \cdot q = a$$

Observamos que esta definición incluye el caso $a = 0$. Podemos interpretar que si tenemos 0 elementos para repartir entre b grupos, a cada grupo le corresponden 0 elementos. Sin embargo, hemos excluido el caso $b = 0$, ya que si $a \neq 0$, $0 \cdot q \neq a$ para cualquier q.

Para pensar

¿Qué sucede con el caso $0 : 0$?

La definición anterior de la división permite obtener propiedades de esta operación a partir de las de la multiplicación. A continuación, enunciaremos algunas de estas propiedades y demostraremos tres.

Consideremos los números a, b y c. Supondremos que todos los divisores son distintos de 0 y que las divisiones planteadas son exactas.

Directamente de la definición obtenemos:

Propiedad 1 $(a : b) \cdot b = a$

Propiedad 2 $(a \cdot b) : b = a$

También es directo verificar que:

Propiedad 3 $a : 1 = a$

Propiedad 4 $a : a = 1$

Propiedad 5 $0 : a = 0$

Las siguientes propiedades dicen que la división es distributiva a la derecha con respecto a la suma y a la resta.

Propiedad 6 $(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$

Propiedad 7 $(a - b) : c = (a : c) - (b : c)$

Antes de demostrar la **Propiedad 6** de manera general, consideremos un ejemplo. Visualicemos mediante un arreglo que $(14 + 21) : 7 = 14 : 7 + 21 : 7$. Para ello, observemos la **Figura III.43**:

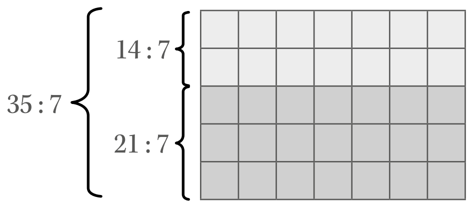


Figura III.38.

La cantidad total de filas que forman el rectángulo grande es la suma del número de filas del primer rectángulo con el número de filas del segundo rectángulo. Así, se tiene que:

$$35 : 7 = (14 + 21) : 7 = 14 : 7 + 21 : 7$$

Para el caso general, observemos que si $a : c = k$ y $b : c = k'$, por definición de división llegamos a:

$$a = k \cdot c \text{ y } b = k' \cdot c$$

Luego, si sumamos a y b, por la distributividad de la multiplicación con respecto a la suma, se tiene que:

$$a + b = k \cdot c + k' \cdot c = (k + k') \cdot c$$

Nuevamente, por la definición de división, llegamos a:

$$(a + b) : c = k + k' = (a : c) + (b : c)$$

La demostración de la **Propiedad** 7 se puede realizar de manera similar, usando en este caso la distributividad de la multiplicación con respecto a la resta.

Para pensar

¿Qué sucede con la distributividad por la izquierda de la división con respecto a la suma o a la resta?

Otras propiedades que resultan de utilidad son las siguientes:

Propiedad 8 $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$

Propiedad 9 $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$

Propiedad 10 $a : (b : c) = (a : b) \cdot c$

Propiedad 11 $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$

Demostremos la **Propiedad 8**. Si $b : c = k$, tenemos que $b = c \cdot k$. Por las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación, se obtiene:

$$(a \cdot b) : c = (a \cdot c \cdot k) : c = ((a \cdot k) \cdot c) : c$$

Ahora, por la **Propiedad 2** de la división, se tiene que:

$$((a \cdot k) \cdot c) : c = a \cdot k = a \cdot (b : c)$$

Y, por lo tanto, $(a \cdot b) : c = = a \cdot (b : c)$.

Las demostraciones omitidas quedan propuestas como ejercicios para el lector.

En resumen

Existen al menos dos intuiciones básicas de la división: repartir equitativamente y agrupar elementos.

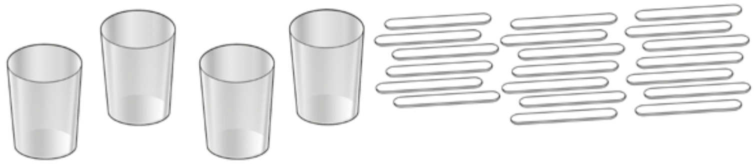
La división exacta se define como la operación inversa de la multiplicación: dados tres números a, b y q, tenemos:

$$a : b = q\text{, si y solo si } a = b \cdot q$$

Al repartir equitativamente o al agrupar en partes iguales, pueden quedar elementos sin repartir o agrupar. La cantidad de elementos que sobra se denomina resto de la división.

Ejercicios

1. La imagen muestra un grupo con 20 palos de helado y 4 vasos.



   a. Proponga una situación, usando este material, en que se aborde el significado de la división como reparto equitativo.
   b. Proponga una situación, usando este material, en que se aborde el significado de la división formando grupos con la misma cantidad de objetos.

2. Describa el significado que adopta la división en cada uno de los siguientes problemas.

Problema A:

Don Miguel va a plantar 24 matas de tomate en su huerta. Él desea plantarlas en filas como la siguiente.

¿Cuántas filas deberá formar?

Problema B:

Don Miguel recogió 24 lechugas de su huerta. Él las desea poner en estos canastos.

¿Cuántas lechugas debe poner en cada uno, para que los canastos tengan igual cantidad?

3. Calcule el resultado de las siguientes expresiones usando las propiedades de la división.
   a. (4.088 + 12.480) : 4 =
   b. (99.321 : 3) – (9.321 : 3) =
   c. (453.678 : 334) · 334 =
   d. (143.657 · 265) : 265 =
   e. (348 · 18) : 9 =
   f. 12.600 : (3 · 7) =
   g. 3.534.125 : 5 =

2.2 Estrategias de cálculo mental para dividir

Las técnicas de cálculo mental que se pueden usar para calcular divisiones, al igual que en la multiplicación, provienen de las combinaciones multiplicativas básicas, de las características del sistema posicional en base 10 y de las propiedades de la división. El trabajo con este tipo de técnicas es necesario para comprender la utilización del algoritmo usual de la división.

Las combinaciones multiplicativas básicas establecen una relación entre tres números. Por ejemplo, $4 \cdot 5 = 20$, $20 : 4 = 5$ y $20 : 5 = 4$. Estas ternas de números se denominan tríos multiplicativos.

Así, la memorización de las tablas de multiplicar no solo es una herramienta que nos permite calcular multiplicaciones, sino que también permite calcular divisiones. Por ejemplo, para calcular $42 : 7$ no es necesario usar un algoritmo de división, basta con pensar en un número que multiplicado por 7 dé como resultado 42. Esto es:

$42 : 7 = ? \rightarrow 7 \cdot ? = 42$

Al igual que en la multiplicación, se puede extender el uso de las combinaciones multiplicativas a las decenas, centenas, unidades de mil, etc. Así ,por ejemplo, si se quiere calcular $420 : 7$, basta con recordar la combinación $42 : 7 = 6$ y pensar en la combinación extendida $7 \cdot 60 = 420$, con lo que se obtiene el resultado $420 : 7 = 60$.

También se pueden calcular divisiones entre potencias de 10, por ejemplo:

$1.000 : 10 = 100$

$1.000 : 100 = 10$

Notemos que, como el 10 es la base del sistema de numeración, al dividir potencias de 10 entre sí bastará con eliminar tantos ceros como tiene la potencia que corresponde al divisor.

Lo mismo ocurre cuando dividimos un múltiplo de una potencia de 10 por otra potencia de 10. Por ejemplo:

$450 : 10 = 45$

$4.500 : 10 = 450$

$4.500 : 100 = 45$

$45.000 : 100 = 450$

A continuación, veremos algunos ejemplos de otras estrategias para el cálculo mental de divisiones y multiplicaciones

$126 : 6 = (120 : 6) + (6 : 6) = 20 + 1 = 21$, usando una descomposición aditiva y la **Propiedad 6**.

$1.700 : 4 = (1.700 : 2) : 2 = 850 : 2 = 425$, dividir por 4 corresponde a dividir dos veces por 2.

$147 \cdot 5 = (147 \cdot 10) : 2 = 1.470 : 2 = 735$, multiplicar por 5 corresponde a multiplicar por 10 y dividir por 2.

$34 \cdot 25 = (34 \cdot 100) : 4 = 3.400 : 4 = 1.700 : 2 = 850$, multiplicar por 25 corresponde a multiplicar por 100 y dividir por 4.

En resumen

Existen variadas estrategias de cálculo mental que permiten encontrar el resultado de una división. Estas se basan en: el manejo de las combinaciones multiplicativas básicas y sus extensiones, las características del sistema de numeración decimal y las propiedades de la división.

Ejercicios

1. Calcule mentalmente las siguientes divisiones.
   a. 3.600 : 100
   b. 77.000 : 100
   c. 521.000 : 10^3
2. Martín calcula 4.800 : 5 mentalmente y señala: “Es 480 y luego calculo el doble de 480, que es 960… el resultado es 960”. Explique en qué se basa el procedimiento de Martín.
3. En una librería venden un paquete con 10 cuadernos en $4.230. Javier quiere comprar solo un cuaderno, entonces el vendedor de la librería utiliza su calculadora para resolver 4.230 : 10. Una vez que efectúa el cálculo, le responde a Javier que cada cuaderno cuesta $423. ¿Qué proceso debía haber seguido el vendedor para calcular el precio del cuaderno sin la calculadora? Explique su respuesta.

2.3 El algoritmo usual de la división

El algoritmo usual de la división es más complejo que los de la suma, la resta y la multiplicación, y para su comprensión se requiere de mayor explicación que en el caso de las otras operaciones. Sin embargo, al igual que los otros algoritmos, también está basado en la notación posicional. En esta sección presentamos el algoritmo de la división partiendo de los casos más simples, hasta llegar al algoritmo general.

División por una cifra

Para divisiones de un número de una o dos cifras por un número de una cifra, el algoritmo se basa en el conocimiento de las tablas. Por ejemplo, consideremos 35 : 7. Nos preguntamos ¿por qué número debo multiplicar 7 para alcanzar 35? Esta pregunta hace muy explícita la relación entre división y multiplicación como operaciones inversas. Como este número es 5, escribimos:

$$35 : 7 = 5$$

Este primer nivel de la división puede practicarse antes que el algoritmo usual de la división, ya que solo se requiere el dominio de las tablas de multiplicar.

Cualquier número puede ser dividido por 7 o por cualquier otro número, aunque no siempre el resultado será exacto. Por ejemplo, si queremos dividir 33 por 7, entonces aparece la primera dificultad del algoritmo, ya que para responder la pregunta ¿cuántas veces cabe 7 en 33? es preciso hacer una estimación.

Vemos que $7 \cdot 5 = 35$, lo cual excede al dividendo que es 33. En términos concretos, si solo contamos con 33 dulces no podemos entregar 5 dulces a cada uno de los 7 niños. Sin embargo, sí podemos dar 4 dulces a cada uno, pero nos sobrarán 5. Escribimos:

$$\begin{array}{rl} 33 & :7=4 \\ -\,28 & \\ \cline{1-1} 5_{/\!/} & \end{array} \qquad \text{o también} \qquad \begin{array}{l} 33:7=4 \\ 5_{/\!/} \end{array}$$

Decimos que el resultado de dividir 33 por 7 es 4, con resto 5. Recordemos que este resto debe ser menor que el divisor, independientemente de cuál sea el dividendo.

> *Para pensar*
>
> ¿Cuáles son los restos posibles si dividimos un número por 7?, ¿y si lo dividimos por 2?, ¿y por 15?

Si el dividendo es un número mayor, que escapa de los resultados directos de las tablas de multiplicar, aparece una nueva dificultad.

Pensemos ahora que tenemos 341 dulces y queremos repartirlos equitativamente entre 7 niños. Podemos empezar a repartir de 1 en 1 los dulces, pero claramente esto no es muy eficiente. Repartamos 10 dulces a cada niño. De esta forma, habremos repartido 70 dulces y nos quedan aún 271 por repartir. Registremos este proceso de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rl} 341 & :7=10 \\ -\;\;70 & \\ \cline{1-1} 271 & \end{array}$$

Repartamos ahora 20 dulces, más a cada niño y registremos el proceso en el mismo esquema:

$$\begin{array}{rl} 341 & :7=10+20 \\ -\;\;70 & \\ \cline{1-1} 271 & \\ -\;140 & \\ \cline{1-1} 131 & \end{array}$$

Como nos quedan 131 dulces, no podemos repartir 20 dulces nuevamente a cada niño, entonces probemos con 15:

$$\begin{array}{rl} 341 & :7=10+20+15 \\ -\;\;70 & \\ \cline{1-1} 271 & \\ -\;140 & \\ \cline{1-1} 131 & \\ -\;105 & \\ \cline{1-1} 26 & \end{array}$$

Aún quedan 26 por repartir, por lo que podemos entregar 3 dulces más a cada niño. De esta forma, se tiene:

$$
\begin{array}{r l}
341 & : 7 = 10 + 20 + 15 + 3 = 48 \\
-\ \ 70 & \\ \hline
271 & \\
-\ 140 & \\ \hline
131 & \\
-\ 105 & \\ \hline
26 & \\
-\ \ 21 & \\ \hline
5_{//} &
\end{array}
$$

Así, cada niño recibió 10 + 20 + 15 + 3 = 48 dulces, y quedaron 5 dulces sin repartir. Se tiene que 341 dividido por 7 es igual a 48 y sobran 5. Lo que se puede escribir como: $341 = 7 \cdot 48 + 5$.

Podemos hacer más eficiente este proceso buscando los productos entre 7 y las potencias de 10. Si repartiéramos 100 dulces a cada niño, utilizaríamos $7 \cdot 100 = 700$ dulces, es decir, más de los que queremos repartir. Consideremos entonces 7 por los múltiplos de 10, es decir, por 10, 20, 30, 40, 50... Así, se tiene que $7 \cdot 40 = 280$ es el múltiplo menor más cercano a la cantidad que se quiere repartir, pues $7 \cdot 50 = 350$. Entonces, se tiene:

$$
\begin{array}{r l}
341 & : 7 = 40 \\
-\ 280 & \\ \hline
61 &
\end{array}
$$

Consideremos ahora las combinaciones multiplicativas básicas relacionadas con 7. Como $7 \cdot 8 = 56$, entonces se pueden repartir 8 dulces más a cada niño, de tal forma que:

$$
\begin{array}{r l}
341 & : 7 = 40 + 8 = 48 \\
-\ 280 & \\ \hline
61 & \\
-\ \ 56 & \\ \hline
5_{//} &
\end{array}
$$

Observemos que, en el procedimiento efectuado, se buscan los productos de 7 por las potencias de 10 que más se acercan al dividendo. Esto hace que los sumandos en el cociente se puedan componer canónicamente, esto es: 40 + 8 = 48. Si utilizamos una tabla de valor posicional para escribir el procedimiento, se puede establecer que:

$$
\begin{array}{r l}
 & \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{D} & \mathrm{U} \\ \hline 4 & 8 \\ \hline \end{array} \\
341 & : 7 = \\
-\ 280 & \\ \hline
61 & \\
-\ \ 56 & \\ \hline
5_{//} &
\end{array}
$$

Como 40 es igual a 4 decenas, se puede abreviar escribiendo solo 4 en la posición de las decenas del cociente. En el siguiente paso, como $7 \cdot 8 = 56$, escribimos 8 en la posición de las unidades y sobran 5 dulces.

Podemos sintetizar el procedimiento anterior de la siguiente manera, para calcular 341 : 7 con el algoritmo de la división, debemos mirar las cifras del dividendo de izquierda a derecha y separar, mediante una comilla, el menor número que supera a 7. En el ejemplo, escribimos:

$$3\ 4'\ 1\ :\ 7\ =$$

Entonces, haciendo caso omiso del 1, nos preguntamos ¿cuántas veces cabe 7 en 34? Observemos que, al hacer esto, se tiene una división en la que solo debemos conocer las tablas. En este caso habrá un resto. Luego, "bajamos" el 1, lo que nos da:

$$\begin{array}{rrl} 3 & 4' & 1 : 7 = 4 \\ \underline{-2} & \underline{8} & \\ & 6 & 1 \end{array}$$

Y procedemos a dividir 61 por 7. Nuevamente, debemos recurrir a las tablas de multiplicar. Vemos que 7 cabe 8 veces en 61, porque $7 \cdot 8 = 56$, y sobran 5. Escribimos:

$$\begin{array}{rrl} 3 & 4' & 1 : 7 = 48 \\ \underline{-2} & \underline{8} & \\ & 6 & 1 \\ & \underline{-5} & \underline{6} \\ & & 5_{//} \end{array}$$

Este procedimiento se puede abreviar aún más, si no se registran las restas:

$$\begin{array}{rrl} 3 & 4' & 1 : 7 = 48 \\ & 6 & 1 \\ & & 5_{//} \end{array}$$

La curiosa comilla que usamos para marcar el dividendo no es otra cosa que escribirlo como $341 = 340 + 1$ y decir: "Tenemos 34 decenas que debemos dividir por 7". Observemos que al poner la comilla hemos determinado la descomposición adecuada del dividendo, pero esto queda oculto en el algoritmo, nunca explicitamos que estamos dividiendo 34 decenas por 7, solo decimos 34 dividido por 7 es 4 y sobran 6. Pero ese 4 es en realidad 4 decenas y el 6 corresponde, también, a 6 decenas.

Esas 6 decenas equivalen a 60 unidades, las que se deben reunir con la unidad que habíamos separado en el primer caso, es decir, "bajar el 1" no es sino reunir las unidades con las decenas que sobraron en el primer reparto. Nos quedan ahora 61 unidades a repartir entre 7 grupos. Esto nos da 8 unidades para cada grupo y sobran 5. En total, a cada grupo le corresponden 4 decenas y 8 unidades, o sea, 48.

División por dos o más cifras

El algoritmo es similar, solo que tiene mayor grado de dificultad porque debemos hacer estimaciones y redondeos que escapan a las combinaciones multiplicativas básicas.

Por ejemplo, calculemos $745 : 21$ usando restas sucesivas. Comencemos con múltiplos de 10, ya que $21 \cdot 100 = 2.100$ excede al dividendo. Tenemos que $21 \cdot 10 = 210$, y restando:

$$\begin{array}{rl} 745 & : 21 = 10 \\ -\ 210 & \\ \hline 535 & \end{array}$$

Consideremos ahora repartir 20 de una vez, en este caso se tiene:

$$\begin{array}{rl} 745 & : 21 = 10 + 20 \\ -\ 210 & \\ \hline 535 & \\ -\ 420 & \\ \hline 115 & \end{array}$$

Claramente, si ahora repartiéramos 10, necesitaríamos una cantidad mayor a la que tenemos disponible de la última resta. Sabemos que $20 \cdot 5 = 100$, así que repartimos 5 de una vez:

$$\begin{array}{rl} 745 & : 21 = 10 + 20 + 5 \\ -\ 210 & \\ \hline 535 & \\ -\ 420 & \\ \hline 115 & \\ -\ 105 & \\ \hline 10_{//} & \end{array}$$

De esta forma, se tiene que el cociente es 35 y el resto 10.

Resolvamos la misma división eligiendo mejor los cocientes parciales. Consideremos primero los productos de 21 con el máximo múltiplo de 10, que no exceda al dividendo. Restamos $21 \cdot 30 = 630$, ya que $21 \cdot 40 = 840$ es mayor que 745. Luego quedan 115. Elegimos la mayor unidad que multiplicada por 21 no exceda a 115, es decir, 5:

$$\begin{array}{rl} 745 & : 21 = 30 + 5 = 35 \\ -\ 630 & \\ \hline 115 & \\ -\ 105 & \\ \hline 10_{//} & \end{array}$$

Al igual que en el apartado anterior, esta estrategia permite componer directamente el cociente: $30 + 5 = 35$. Podemos expresar la división en forma resumida incorporando el uso de comillas, para indicar la descomposición del dividendo que se está considerando en cada paso. De esta forma, se tiene:

$$\begin{array}{llll} 7 & 4' & 5 & : 21 = 35 \\ 1 & 1 & 5 & \\ & 1 & 0_{/\!/} & \end{array}$$

Para utilizar este algoritmo resumido, se observan las cifras del dividendo de izquierda a derecha y se separa, mediante una comilla, el menor número que supera a 21. Ahora, nos preguntamos: ¿cuántas veces cabe el 21 en 74? Esta respuesta no la encontramos en las tablas de multiplicar que hemos estudiado. Para responder a ello, debemos realizar una estimación. Veremos, a continuación, algunas estrategias para realizar este tipo de estimaciones.

Estimación en el uso del algoritmo de la división

Una estrategia es truncar el divisor y estimar la cantidad de veces que está contenida la primera cifra de este en las primeras cifras del dividendo. Por ejemplo, para calcular $134 : 32$, podemos considerar solo las decenas de 32 y preguntarnos cuántas veces cabe 3 en 13. Como la respuesta es 4, probemos calculando el producto $4 \cdot 32$ y veamos si es menor que 134. En este caso, $4 \cdot 32$ es 128. Si hubiéramos elegido 5, tendríamos que $5 \cdot 30 = 150$, es decir, sin considerar las 2 unidades del divisor, el valor ya es superior a 134. En esta estrategia, el número que obtenemos puede ser mayor que el que corresponde escribir en el cociente, pero no puede ser menor.

Veamos otro ejemplo, $134 : 39$. Nuevamente, estimamos la cantidad de veces que cabe 3 en 13, esto es 4 veces. Al calcular $4 \cdot 39$, obtenemos 156 que es mayor que el dividendo. El número que buscamos es, entonces, 3.

En el caso $134 : 39$, podríamos modificar la estrategia y redondear el 39 a 40. De esta forma, nos preguntaríamos ¿cuántas veces cabe el 4 en 13?, y la respuesta es 3. El producto $3 \cdot 39 = 117$ es el número buscado.

La habilidad de estimar se va desarrollando con el estudio de todas las operaciones aritméticas. En el capítulo siguiente, abordaremos este tema con mayor profundidad.

La división por tres o más cifras es similar a lo que hemos visto de la división por dos cifras. Como no manejamos los múltiplos de números en ese ámbito, se hace necesario efectuar una estimación que permita ir calculando el cociente. No nos detendremos a analizar los detalles de este caso.

Ejercicios

1. Calcule las siguientes divisiones usando el algoritmo y escribiendo las restas sucesivas.
   a. 564 : 3
   b. 845 : 15

2. Observe los pasos usados para calcular 593 : 13.

Paso 1

$$\begin{array}{r l}
59'3 & : 13 = 4 \\
-\ 52 & \\
\hline
7 &
\end{array}$$

Paso 2

$$\begin{array}{r l}
59'3 & : 13 = 45 \\
-\ 52 & \\
\hline
73 & \\
-\ 65 & \\
\hline
8 &
\end{array}$$

Responda las siguientes preguntas:

   a. En el paso 1 ¿qué significa el 4 en el cociente?, ¿a qué corresponde el 52 que se escribe como sustraendo?
   b. En el paso 2, ¿qué significa el 5 en el cociente?, ¿qué significa el 8?

3. El número 21 se puede expresar de las siguientes formas:

$$21 = 5 \cdot 4 + 1 \text{ o } 21 = 6 \cdot 4 - 3$$

Utilice la recta numérica para representar las dos expresiones aritméticas anteriores.

Observe que hay un múltiplo de 4 a distancia 1 de 21 por la izquierda en la recta numérica y otro a distancia 3 de 21 por la derecha. Utilice esta idea para justificar que es posible encontrar un múltiplo de 15 a una distancia menor que 7 de cualquier número.

4. Explique cada paso del siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{r l r}
59'3 & : 13 = & 35 \\
-\ 39 & & +1 \\
\hline
20 & & 45 \\
-\ 13 & & \\
\hline
73 & & \\
-\ 65 & & \\
\hline
8 & &
\end{array}$$

5. Calcule el cociente 5.643 : 124 explicando paso a paso el procedimiento que utilice.

2.4 Dificultades y posibles errores en el uso del algoritmo de la división

Aplicar el algoritmo de la división requiere estimar productos, efectuar restas y registrar de manera ordenada los pasos realizados. Esto hace que, en ocasiones, se cometan errores en su uso. Veamos algunos ejemplos:

Cuando en el dividendo aparece un cero intermedio, puede suceder que se considere la cifra siguiente al cero, sin escribir un cero en el cociente, por ejemplo:

```
  408 : 4 = 12
 -4
  008
    8
    0//
```

En este caso, la división de las centenas se realiza correctamente, sin embargo, al llegar a la cifra de las decenas, no se escribe el resultado de dividir **0** por **4**, y se pasa directamente a la cifra de las unidades para continuar la división. Cuando el divisor es de dos cifras, podemos observar el mismo error:

```
  12049 : 12 = 14
-12
  00049
    -48
      1//
```

Otro error similar se produce cuando el resto en una de las restas parciales es cero y al considerar la cifra siguiente, esta es menor que el divisor, por ejemplo:

```
 8153 : 8 = 119
-8
 015
-  8
   75
  -72
    1//
```

Lo mismo ocurre en divisiones por números de dos cifras:

```
  4385 : 21 = 28
 -42
   185
  -168
   017//
```

Otro error que se produce en el uso del algoritmo al dividir por dos cifras, tiene relación con el valor posicional de los dígitos que forman el dividendo. Cuando estos dígitos son iguales al divisor, un error es dividir cada dígito por separado sin considerar el valor posicional. Por ejemplo:

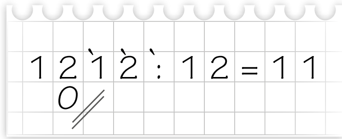


Figura III.43.

En este caso, se separó 1.212 como 12 y 12, se efectuó la división por separado y se obtuvo 11 como cociente. Este error se produce generalmente cuando se tiene una noción de los números como yuxtaposición de dígitos, sin considerar que la posición que ocupa el dígito determina un valor. En el ejemplo, 1.212 = 1.200 + 12, por tanto, no es lo mismo dividir 1.200 por 12 que dividir 12 por 12.

Una dificultad que se presenta en el uso de la división por números de dos o más cifras es que, en cada paso, debemos hacer una estimación del valor aproximado del cociente, lo que a menudo incluye un proceso de prueba y error. Por ejemplo, al dividir 3.714 : 75 separamos las tres primeras cifras y decimos "cuántas veces cabe 75 en 371". Hacemos una estimación, debe ser un número entre 4 y 5, pero no estamos seguros, debemos probar multiplicando $75 \cdot 4 = 300$ y $75 \cdot 5 = 375$, obteniendo que el cociente parcial es 4.

Las siguientes acciones pueden ayudar a evitar errores al trabajar con la división:

- Verificar el resultado obtenido calculando el producto entre el cociente y el divisor, y sumando el resto. Si bien esta estrategia requiere hacer un cálculo, realizar una multiplicación entre dos números es un proceso menos complejo que realizar una división.
- Estimar el resultado del producto entre el cociente y el divisor, y luego comparar dicha estimación con el dividendo. Esto nos permite detectar errores cuando la diferencia entre el cociente obtenido y el correcto es significativa.
- Estimar el resultado de la división antes de resolverla, y tener un antecedente de lo que debería ser una respuesta correcta.
- Cuando la división está asociada a un problema, es posible detectar errores evaluando la pertinencia de la solución obtenida. Por ejemplo, si el contexto es la estatura de una persona, el resultado estará en un rango apropiado y no podría ser mayor que 3 metros.

2.5 La división y el material concreto

El trabajo con la división se puede apoyar con el uso de material concreto y representaciones pictóricas. Para realizar repartos o agrupaciones es posible usar vasitos, cajas, palitos de helado y fichas, entre otros. El ábaco y los bloques base 10 también pueden ser usados con este propósito. En particular, el ábaco también puede usarse para comprender el algoritmo de la división, ya que explicita la característica posicional del sistema de numeración. Veamos algunos ejemplos usando estos materiales.

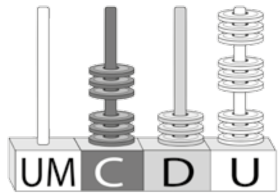
El ábaco

Se puede utilizar el ábaco para enseñar a dividir y deducir el algoritmo de la división por una cifra. Si bien es posible usar el ábaco para realizar divisiones arbitrarias, su manejo requiere del conocimiento previo del algoritmo y de mucha práctica. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo

1) Calculemos 639 : 3.

Para encontrar el resultado de 639 dividido por 3, representamos el dividendo, en este caso, 639, y en cada posición agrupamos de acuerdo a la cantidad de elementos que indica el divisor, en este caso, 3.



En la posición de las centenas formamos dos grupos de tres elementos cada uno y no queda ningún elemento por canjear. En la columna de las decenas y unidades, se repite la misma acción.

Para encontrar el cociente contamos el número de grupos formados en cada posición:

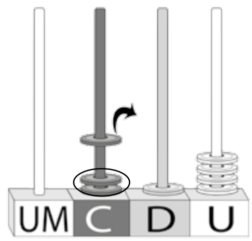
En las centenas, dos grupos.

En las decenas, un grupo, y en las unidades, tres grupos.

El cociente corresponde a 213.

2) Calculemos 314 : 2.

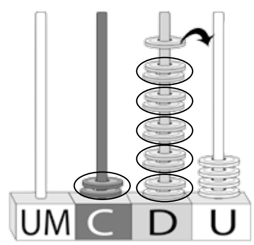
Para encontrar el resultado de 314 dividido por 2, representamos primero el dividendo, en este caso, 314, y formamos grupos de acuerdo a las cifras que indica el divisor, en este caso 2.



Partimos por las centenas. Formo un grupo de dos elementos y queda una centena, la cual debemos canjear por diez decenas.

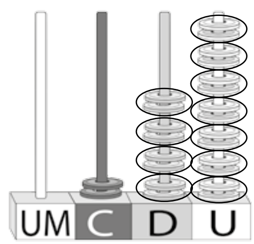
El paso siguiente consiste en formar grupos de dos en la posición de las decenas.

Formamos cinco grupos de dos y queda una decena que debemos canjear por diez unidades.



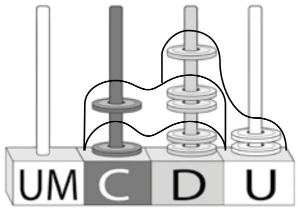
Ahora, formamos grupos de dos en la posición de las unidades, y resultan siete grupos de dos elementos.

Para identificar el cociente, contamos el número de grupos formados en cada posición, es decir, 147.



3) Calculemos 252 : 12.

Para encontrar el resultado de 252 dividido por 12, debemos observar que el divisor tiene dos cifras, por lo tanto, consideramos dos varillas en el ábaco, de izquierda a derecha, en forma sucesiva.



Agrupamos de a uno en la posición de las centenas y de a dos en la posición de las decenas, y obtenemos dos grupos en la posición de las centenas y dos en la posición de las decenas.

Luego, consideramos la posición de las decenas y las unidades. Como quedó un elemento en la posición de las decenas, repetimos la acción agrupando de a uno en la posición de las decenas y de a dos en la de las unidades.

Al observar las agrupaciones, identificamos que en el primer paso logramos formar dos grupos y en el segundo, uno. Entonces, el cociente es 21.

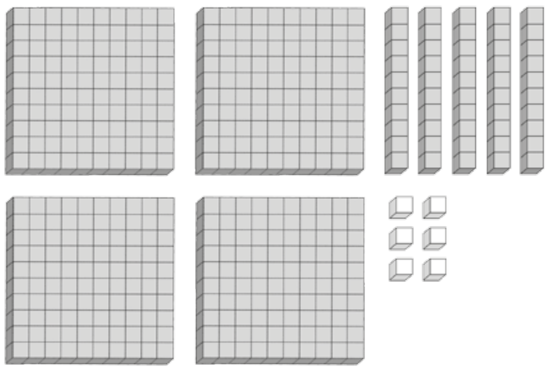
Bloques base 10

Podemos utilizar los bloques base 10 para efectuar divisiones por reparto.

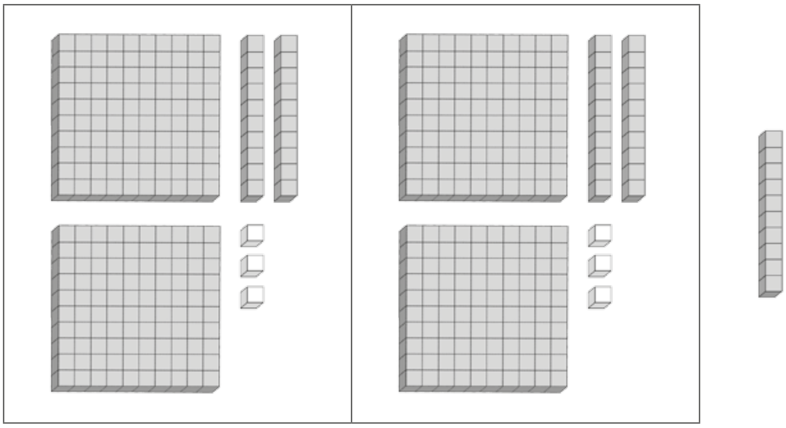
Ejemplo

Encontremos el resultado de 456 : 2.

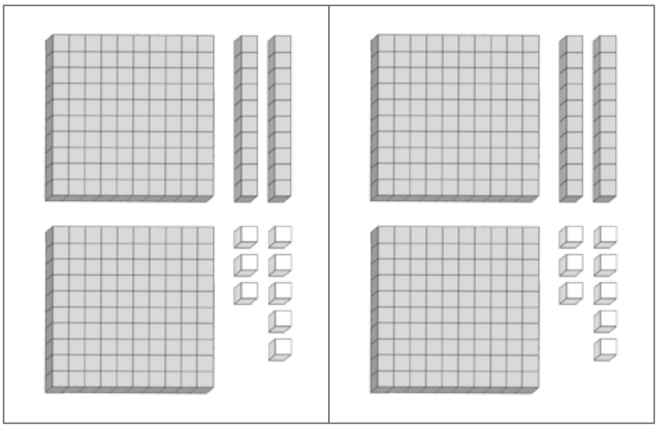
Representamos 456 con 4 bloques de 100, 5 barras de 10 y 6 cubitos de 1.



Ahora repartimos equitativamente los bloques:



Nos queda por repartir una barra de 10. La canjeamos por 10 cubitos, y repartimos 5 en cada recuadro.



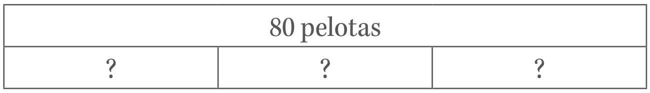
Contando los bloques en cada recuadro, tenemos que 456 : 2 = 228.

Ejercicios de la sección

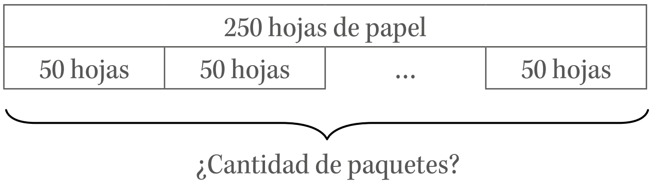
1. Plantee un problema de división con la siguiente información:
   a. 200 metros de tela, 10 trozos de tela del mismo tamaño.
   b. 84 láminas, 4 niños.
   c. 80 niños, 10 niños por fila.
   d. 640 litros, 20 litros por envase.

2. Plantee un problema que se pueda representar con los siguientes diagramas.

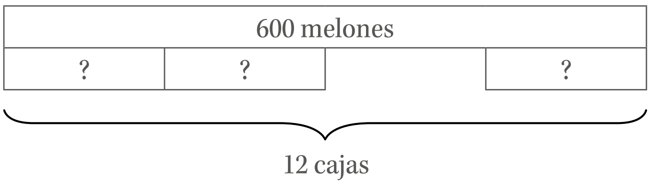
a.



b.



c.



3. Resuelva los siguientes problemas. Interprete el resto de la división, en caso de que se produzca.

a. Fernanda debe pagar $35.000 en 7 cuotas iguales sin interés. ¿Cuál es el valor de cada cuota?

b. Se tienen 25 litros de jugo para repartir en botellas de 2 litros. ¿Cuántas botellas se podrán llenar?

c. Juan compra una lavadora en $330.000 y la tienda le ofrece pagar en cuotas mensuales, sin interés, del mismo valor, $15.000. ¿Cuántos meses demorará en pagar la lavadora?

d. 4 personas ganaron un premio de $350.000, si se lo reparten en partes iguales ¿Cuánto dinero le toca a cada una?

4. Observe la siguiente tabla y formule un problema con los datos de cada fila. Considere que x representa la incógnita del problema.

Cantidad total de elementos	Cantidad de elementos por paquete	Cantidad de paquetes
300 cuadernos	x	6
850 folletos	50 folletos	x
288 lápices	12 lápices	x
x	30 yogures	82
x	24 discos	320
90 rosas	x	6

5. Complete los espacios en blanco e indique la propiedad de la multiplicación o de la división que utiliza.

   a. ________ · 562 = 562
   b. 1 · ________ = 0
   c. 34 · (20 + ________) = 680 + 1.360
   d. 78 · 54 = 54 · ________
   e. 5.400 : ________ = 10.800 : 6

6. Indique en qué casos la igualdad es verdadera. Justifique su respuesta usando las propiedades de la multiplicación y la división.

   a. 45 : 1 = 45 · 1
   b. 435 · (827 + 256) = (435 · 827) + 256
   c. 2.340 : (12 · 3) = (2.340 : 12) · 3

7. Resuelva mentalmente cada división, luego escriba el procedimiento que aplicó.

   a. 2.500 : 25
   b. 35.000 : 700
   c. 85.000 : 850

8. Observe el siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{r l}
5234 & : 7 = 700 + 40 + 7 \\
-4900 & \\
\hline
334 & \\
-280 & \\
\hline
54 & \\
-49 & \\
\hline
5 & \\
\end{array}$$

   a. Explíquelo.
   b. ¿Qué relación hay entre el procedimiento anterior y el algoritmo usual de la división?
   c. Calcule 9.362 : 6 usando el procedimiento anterior.

9. Encuentre el valor de *a* en cada una de las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{r l}
15a3 & : 9 = 175 \\
6a & \\
53 & \\
8 & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r l}
58a & : 7 = 8a \\
2a & \\
2 & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r l}
a673 & : 22 = 2a \\
127 & \\
173 & \\
19 & \\
\end{array}$$

10. Observe el procedimiento que se utilizó para calcular **2.451 : 82.**

```
2451 - 820 = 1631      10
1631 - 820 =  811      10
 811 - 410 =  401       5
 401 - 246 =  155       3
 155 -  82 =   73     + 1
                      ----
                       29
Cociente:29. Resto 73.
```

a. Explique el procedimiento anterior.

b. ¿Qué relación tiene con el algoritmo usual de la división?

11. Calcule las siguientes divisiones usando el procedimiento anterior.

a. **453 : 6**

b. **6.352 : 12**

c. **52.632 : 350**

12. Describa el error en cada procedimiento de división:

```
408 : 4 = 12
008
  0
```

```
2502 : 12 = 28
 102
   6
```

```
88 : 22 = 44
 0
```

13. En una prueba de Matemática una profesora incluye la siguiente división:

5.602 : 7 =

a. Anticipe qué error podrían cometer los estudiantes al resolverla.

b. Explique cómo calcularla mentalmente.

14. Para calcular la división **783 : 2**, un estudiante procede partiendo de las unidades, como en el algoritmo de la multiplicación. Observe el procedimiento:

```
783 : 2 = 350
 81
701
1
```

a. ¿Cuál es el error en el procedimiento anterior? Explique su respuesta.

b. ¿Qué resguardo tendría que tener el estudiante para que el procedimiento anterior lo llevara al resultado correcto?

3. Situaciones multiplicativas

Las situaciones multiplicativas son tipos de problemas simples cuya resolución involucra multiplicaciones y divisiones. Estos problemas permiten contextualizar las distintas interpretaciones que hemos estudiado para estas operaciones, tales como: repetir un grupo de elementos, reparto o agrupación de elementos, combinaciones, etc. Al igual que en las situaciones aditivas, el uso de diagramas de barra permite hacer la transición del problema con contexto a su formulación matemática y, con ello, determinar las operaciones que permiten resolverlo.

Existen varias formas de clasificar las situaciones multiplicativas, a partir de las cuales se pueden formular distintos problemas. No es conveniente traspasar estas categorías a los niños y las niñas, pues son una herramienta para el docente. En esta sección abordaremos cuatro tipos de situaciones multiplicativas:

- Agrupación y reparto equitativo.
- Proporcionalidad directa.
- Comparación multiplicativa.
- Combinaciones.

Agrupación y reparto equitativo

Corresponde a aquellos problemas en que interviene una cantidad total de elementos que están repartidos o agrupados en grupos con la misma cantidad. Cuando se desconoce la cantidad total de elementos, estos problemas se resuelven con una multiplicación, mientras que si la cantidad desconocida es el número de grupos o la cantidad de elementos que hay en cada grupo, se resuelven con una división.

Problema 1

El curso de Víctor recibe 8 cajas de lápices y en cada caja vienen 6 lápices. ¿Cuántos lápices recibe el curso de Víctor?

En este problema se conoce el número de grupos y la cantidad de elementos por grupo, y se desconoce la cantidad total de elementos. La operación que resuelve el problema es una multiplicación. Un diagrama que permite representarlo es el siguiente:

¿Total?							
6	6	6	6	6	6	6	6

Figura III.39.

A partir del problema anterior, se pueden formular los dos problemas, de agrupación y reparto, que se resuelven con una división.

Problema 2

El curso de Víctor recibe 48 lápices. Los lápices vienen en cajas de 6 lápices cada una. ¿Cuántas cajas recibe el curso de Víctor?

A diferencia del problema anterior, en este se conoce el total de los elementos y el número que tiene cada grupo. La cantidad desconocida corresponde al número de grupos. Este tipo de problemas corresponde a la interpretación de la división como agrupación de objetos. Un diagrama de barras que lo representa es el siguiente:

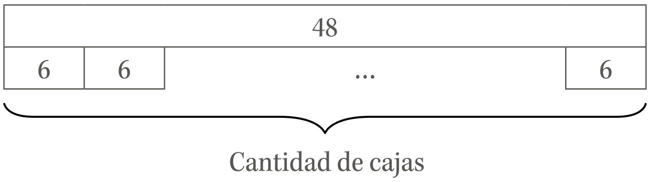


Figura III.40.

Problema 3

El curso de Víctor recibe 48 lápices. Los lápices vienen en 8 cajas con igual número de lápices cada una. ¿Cuántos lápices tiene cada caja?

La cantidad desconocida en este problema es la cantidad de elementos por grupo, y los datos son el total de elementos y la cantidad de grupos. Este tipo de problemas corresponde a la interpretación de la división como reparto equitativo. Un diagrama de barras que representa el problema es:

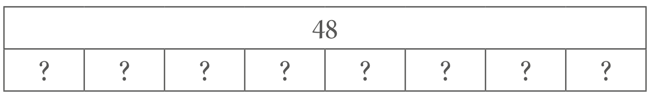


Figura III.41.

En los problemas de división es indispensable señalar que el reparto o la agrupación se hará en partes iguales o en forma equitativa. En el ejemplo señalamos que en cada caja hay el mismo número de lápices. Si no se entregara esta información, podrían presentarse diferentes respuestas, una de ellas puede ser: 4 cajas con 10 lápices y 4 cajas con 2 lápices.

Otro tipo de diagrama que permite representar las situaciones de agrupamiento y reparto equitativo es el de conjuntos:

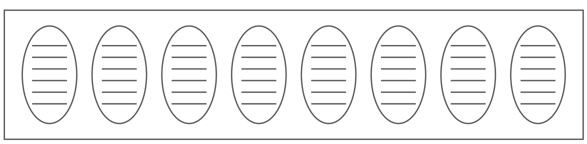


Figura III.42.

A continuación, mostramos algunos ejemplos de situaciones que permiten plantear problemas de agrupamiento y reparto equitativo:

- Paquetes de 4 velas cada uno.
- Floreros con 12 flores cada uno.
- Paneras con 6 panes cada una.
- Bandejas con 10 empanadas cada una.
- Sobres con 5 láminas cada uno.
- Cajas con 3 pañuelos cada una.
- Cuadrados de un tablero de juego.
- Botellas de bebida en una caja.
- Butacas en un cine.
- Huevos en una bandeja.
- Ventanas de un edificio.

Proporcionalidad directa

En estos problemas se establece una correspondencia entre dos cantidades variables x e y, a través de una multiplicación por un número constante k, lo que se expresa como: $y = k \cdot x$. Veremos, a continuación, algunos ejemplos. En el **Capítulo IX** estos problemas serán abordados en mayor profundidad.

Problema 1

En una pastelería un pastel cuesta $300. ¿Cuánto se debe pagar si se compran 6 pasteles?

En este problema, una cantidad es el número de pasteles y la otra es el costo. Con esta información se puede construir la siguiente tabla:

Número de pasteles	Costo
1 pastel	$300
2 pasteles	$600
3 pasteles	$900
4 pasteles	$1.200
5 pasteles	$1.500
6 pasteles	$1.800

Tabla III.7.

Se establece una correspondencia, de 1 a 300, entre la cantidad de pasteles y la cantidad de dinero que se debe pagar por la compra. El valor a pagar varía proporcionalmente respecto del número de pasteles que se compran. Una forma de presentar esta relación es la siguiente:

$$1 \text{ pastel} \longrightarrow \$\ 300$$

$$6 \text{ pasteles} \longrightarrow \$\ \boxed{}$$

Figura III.48.

Este problema se resuelve con la multiplicación **300 · 6.**

A partir del problema anterior, se pueden formular dos variantes:

Problema 2

En una pastelería un pastel cuesta $300. ¿Cuántos pasteles se pueden comprar con $1.800?

En este caso, la cantidad desconocida es el número de pasteles que corresponden a una cantidad de dinero dada. El problema se resuelve con la división **1.800 : 300.**

$$1 \text{ pastel} \longrightarrow \$\ 300$$

$$\boxed{}\ \text{pasteles} \longrightarrow \$1.800$$

Figura III.49.

Problema 3

En una pastelería, por 6 pasteles se pagan $1.800. ¿Cuál es el precio de un pastel?

La cantidad desconocida es el precio de un pastel. El problema se resuelve con la división **1.800 : 6.**

$$1 \text{ pastel} \longrightarrow \$\ \boxed{}$$

$$6 \text{ pasteles} \longrightarrow \$1.800$$

Figura III.50.

Para pensar

Hasta el momento, hemos revisado situaciones de agrupamiento y distribución equitativa, y las situaciones de proporcionalidad directa. ¿Qué relación se podría establecer entre ambos tipos de situaciones?, ¿se puede decir que las de proporcionalidad directa son de agrupamiento o distribución equitativa o viceversa?

Algunas situaciones que permiten plantear problemas de proporcionalidad directa son:

- Una campaña de salud, en la que cada participante visita 6 familias.
- La confección de delantales con 5 botones.
- Una fábrica donde se producen 50 vasos cada 4 horas.
- Un enfermo que debe tomar 3 pastillas, 3 veces al día.
- Una estufa a parafina que consume 2 litros de parafina cada 6 horas.
- Un intercambio de objetos de diferente valor. Por ejemplo: una estampilla extranjera por 4 dólares o 1 lámina escasa por 10 láminas fáciles de encontrar.
- Un dibujo cuyas medidas se duplican o se triplican para agrandarlo.
- Una receta con ingredientes son para 6 personas que se quiere preparar para 3 personas.
- Una convivencia donde se parte cada queque en 20 tajadas.

Las situaciones de proporcionalidad directa son numerosas en la vida diaria, pero debemos estar alerta para delimitar en cada una de ellas el rango en que la variación proporcional es válida. Así, por ejemplo:

- Un atleta que corre un circuito en 3 minutos, después de un tiempo se fatigará y aumentará el tiempo que emplee en hacer este recorrido.
- Un enfermo que toma un remedio puede experimentar mejoría y requerir una dosis diferente después de unos días.
- El precio de un artículo puede disminuir, si se compra al por mayor.

Comparación multiplicativa

En este tipo de problemas se comparan dos cantidades a través de un cociente. En el enunciado intervienen las cantidades que se están comparando (una como referente y la otra como cantidad comparada) y un número que cuantifica la relación de comparación. Estos problemas se tratarán en más detalle en el **Capítulo IX**.

Se pueden encontrar dos tipos de problemas de comparación multiplicativa.

Problema 1

Eugenio tiene 30 láminas y Marcelo tiene 3 veces la cantidad de láminas que tiene Eugenio. ¿Cuántas láminas tiene Marcelo?

En este problema se conoce una de las cantidades que se está comparando y el número correspondiente a la relación de comparación. En este caso, el problema se resuelve mediante la multiplicación $3 \cdot 30$. El planteamiento puede variar considerando como cantidad desconocida la mayor.

Problema 2

Eugenio tiene 30 láminas y Marcelo tiene 90 láminas. ¿Cuántas veces la cantidad de láminas que tiene Marcelo tiene Eugenio?

La cantidad desconocida, en este caso, es el número correspondiente a la relación de comparación. El problema se resuelve con la división 90 : 30.

Algunas situaciones que permiten plantear problemas de comparación multiplicativa son:

- Dos personas que recorren una distancia.
- Dos envases que se llenan con algún líquido.
- Dos amigos que ganan premios.
- Dos candidatos que compiten en una elección.
- Dos equipos de jugadores que marcan puntos.
- Dos personas que reciben un sueldo mensual.
- Dos películas en cartelera y el número de personas que las ve en un día.
- Dos tipos de refrescos que se venden en un restaurante.

Combinaciones

Este tipo de situaciones corresponde al significado de la multiplicación como combinación de objetos. En los problemas intervienen dos categorías de elementos que se combinan. De esta forma, con los elementos se pueden formar pares ordenados que representan todas las posibles combinaciones.

Se pueden formular dos tipos de problemas de combinaciones.

Problema 1

En una heladería hay 4 sabores de helado para vender: frutilla, vainilla, chocolate y pistacho. Además, hay dos tipos de agregado: chispitas y perlitas. Si se puede elegir un sabor y un agregado, ¿cuántas combinaciones diferentes se pueden hacer?

En este problema, la cantidad desconocida es el número de combinaciones que se pueden formar con las cantidades de elementos disponibles en ambas categorías, es decir, el número de pares ordenados que representan las combinaciones posibles. En este caso, el problema se resuelve con la multiplicación $4 \cdot 2$.

Problema 2

En un almacén, eligiendo un sabor y un agregado, hay 8 combinaciones diferentes de helados. Si los sabores son: frutilla, vainilla, chocolate y pistacho, ¿cuántos tipos de agregados tienen en el almacén?

La cantidad desconocida es el número de elementos correspondiente a una de las categorías con las que se forman las combinaciones. En este caso, el problema se resuelve con la división 8 : 4. Una variación de este tipo de problemas se puede plantear considerando como cantidad desconocida la otra categoría; en el ejemplo anterior, la cantidad de sabores.

Algunas situaciones que permiten plantear problemas de combinaciones son:

- Sándwiches con 3 tipos de pan (hallulla, molde y marraqueta) y 4 tipos de relleno (manjar, mermelada, queso y paté).
- Globos que resultan de combinar 3 formas (salchicha, conejo y redondo) y 5 colores (azul, verde, rojo, amarillo y morado).
- Nombres de personas que se pueden formar con 5 nombres y 4 apellidos distintos.
- Menú con 3 entradas, 3 platos de fondo y 2 postres.
- Helados de 3 sabores que se pueden armar eligiendo de una variedad de 6 sabores.
- Helados de 3 sabores que se pueden armar eligiendo de una variedad de 6 sabores, sin repetir un sabor.

En resumen

Las situaciones multiplicativas, que incluyen tanto problemas de multiplicación como de división, tienen como propósito favorecer que los niños y las niñas conceptualicen diferentes interpretaciones de estas operaciones. Entre las situaciones multiplicativas podemos mencionar:

- Agrupaciones y reparto equitativo.
- Proporcionalidad directa.
- Comparación multiplicativa.
- Combinaciones.

Ejercicios

Resuelva los siguientes problemas e indique a qué tipo de situación multiplicativa corresponden.

a. En una fábrica producen 20 camisas cada hora. Si trabajan 8 horas diarias, ¿cuántas camisas pueden fabricar en un día?

b. En un evento escolar participaron 340 niños. Para sentarlos se organizaron en filas con el mismo número de niños en cada una. ¿Cuántos niños hay en cada fila si se formaron 20?

c. En una caja de chocolates se disponen 5 filas con 10 chocolates en cada una. ¿Cuántos chocolates hay en la caja?

d. Eugenio lee, aproximadamente, 15 palabras por segundo. ¿Cuántas palabras lee, aproximadamente, por minuto? ¿Y si leyera una hora?

e. En una pastelería quieren exhibir los alfajores que elaboraron en 6 bandejas. Si tienen 120 alfajores, ¿cuántos deben poner en cada bandeja para que todas queden con la misma cantidad?

f. En un colegio organizaron una rifa, donde cada curso debía vender 20 listas con 20 números cada una. En el colegio hay 18 cursos y el valor de cada número es de $150. ¿Cuánto dinero recolectarán si se venden todos los números?

Problemas que combinan situaciones multiplicativas y/o aditivas

La resolución de problemas es un elemento central del currículum escolar, el cual señala que es tanto un medio como un fin para lograr una buena educación matemática. Resolver problemas matemáticos permite darle sentido al trabajo con operaciones y desarrollar la capacidad de abstraer y la capacidad de modelar matemáticamente una situación de contexto. Por lo anterior, un profesor debe ser capaz de resolver y plantear problemas que resulten interesantes para los estudiantes, que vayan más allá de un simple cálculo con contexto y que permitan conectar las cuatro operaciones aritméticas.

A continuación, se discutirán algunos problemas que requieren más de una operación para encontrar su solución. Este tipo de problemas permite desafiar a los estudiantes, desarrollar habilidades matemáticas y verificar que pueden usar más de una forma para resolverlos. Para apoyar su resolución se utilizarán diagramas de barra que, al igual que en las situaciones aditivas o multiplicativas, utilizan barras de ancho fijo que se yuxtaponen para representar los datos del problema y las relaciones entre ellos. Es importante mencionar que se pueden usar distintos tipos de diagramas para representar la información que proporciona un problema, pero, en este caso, hemos usado los diagramas de barra.

Problema 1

Jorge compra una caja de lápices que cuesta $785 y un cuaderno que cuesta $650. Al pagar con $2.000, ¿cuánto recibe de vuelto?

En este problema se combinan dos situaciones aditivas. Un diagrama que permite representar el problema es el siguiente:

2.000		
785	650	¿Vuelto?

Figura III.46.

En el diagrama se han dibujado una barra que corresponde al dinero con que se paga la compra y tres barras más pequeñas que representan el precio del cuaderno, el precio de la caja de lápices y el vuelto. Una forma de resolver el problema es sumar el precio de los productos y luego restar dicha cantidad al dinero con que se paga la compra. De esta forma, se tiene:

Vuelto recibido = 2.000 – (785 + 650)

Calculando la suma, encontramos el total de la compra: 785 + 650 = 1.435. Y restando esta cantidad al dinero con que se paga, se tiene: 2.000 – 1.435 = 565, que corresponde al vuelto.

Otra forma de resolver el problema es a través de dos sustracciones, esto es quitamos a la cantidad de dinero que tiene Jorge el precio de la caja de lápices, 2.000 – 785 = 1.215, y luego, a lo que queda de dinero restamos el precio del cuaderno, 1.215 – 650 = 565. El resultado corresponde al vuelto recibido. La ecuación que permite expresar el procedimiento anterior es la siguiente.

Vuelto recibido = (2.000 – 785) – 650

Ejercicios

Resuelva los siguientes problemas usando un diagrama.

a. El día viernes, en una panadería vendieron 145 kilos de pan. El sábado vendieron 23 kilos más que el viernes y el domingo vendieron 5 kilos menos que el sábado. ¿Cuántos kilos de pan vendieron en total en los tres días?

b. En una biblioteca hay 123 libros de Matemática, de los cuales 32 son de geometría, 56 de estadística y el resto de aritmética. ¿Cuántos libros de aritmética hay?

c. En un supermercado hay 62 trabajadores. Hay 14 hombres menos que las mujeres. Si de las mujeres 22 son cajeras, ¿cuántas mujeres no trabajan como cajeras?

d. En una sala de cine hay 138 personas. Si en la sala hay 44 niños, ¿cuántos adultos más que los niños hay?

Problema 2

A una sede social llegaron 46 cajas con 20 cuadernos cada una. En el sector hay 115 estudiantes. Si los cuadernos se reparten en forma equitativa entre los estudiantes, ¿cuántos recibe cada uno?

Este problema combina dos situaciones multiplicativas. Un diagrama que permite representarlo es el siguiente:

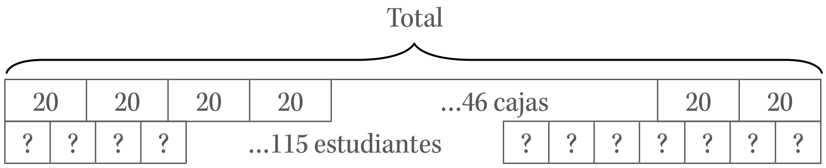


Figura III.52.

Una forma de resolver el problema es calculando primero el total de cuadernos que se recibieron en la sede, esto es: $46 \cdot 20 = 920$. Luego, como se debe encontrar la cantidad de cuadernos que recibe cada estudiante, se calcula la división: $920 : 115 = 8$. La ecuación que permite representar el procedimiento anterior es la siguiente:

$$\text{Cuadernos por estudiante} = (46 \cdot 20) : 115$$

Ejercicios

Resuelva los siguientes problemas usando un diagrama.

a. Tenemos 3 cajas rojas y 3 azules. En cada caja roja hay el triple de fichas que en cada caja azul. Si las cajas rojas tienen en total 672 fichas, ¿cuántas fichas hay en cada caja azul?

b. La longitud de un poste es de 144 centímetros. Si se corta el poste en cuatro secciones de igual longitud, ¿cuánto mide cada sección?, ¿cuál es la longitud total si juntamos 6 secciones como las anteriores?

c. Carlos ha reunido 18 botellas de vidrio para reciclar y Pedro, 5 veces la cantidad que reunió Carlos. ¿Cuántas cajas con 6 botellas puede armar Pedro?

d. Los buses salen del terminal cada 10 minutos. ¿Cuántos buses habrán salido en 60 minutos? Discuta.

Problema 3

Paula tiene ahorrados $1.600, el doble de dinero que tiene ahorrado su hermano. ¿Cuánto dinero tienen entre los dos?

Este problema combina una situación aditiva y una multiplicativa. Observemos que al señalar que Paula tiene el doble de dinero que su hermano, se tiene una situación de comparación (multiplicativa), mientras que al preguntar por el dinero que tienen entre los dos, se tiene una situación de juntar (aditiva). Un diagrama que permite representar el problema es el siguiente:

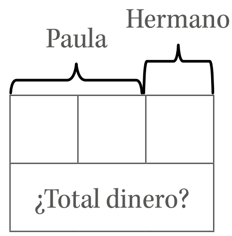


Figura III.48.

En el diagrama se dibujaron tres barras del mismo tamaño, una representa la cantidad de dinero que tiene el hermano de Paula y las otras dos el dinero que tiene ella. Otro diagrama que permite representar el problema es el siguiente:

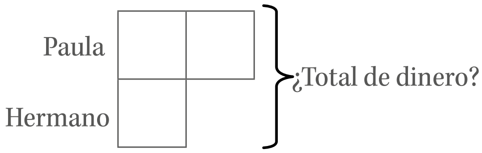


Figura III.49.

Para resolver el problema, se puede calcular primero el dinero que tiene el hermano, a través de la división 1.600 : 2 = 800, y a ese resultado se le agrega la cantidad que tiene Paula, calculando la suma: 800 + 1.600 = 2.400. La ecuación que permite representar el procedimiento anterior es la siguiente:

$$\text{Dinero total} = (1.600 : 2) + 1.600$$

Problema 4

La estatura de Pedro es 186 centímetros. Se sabe que su estatura es 3 veces la estatura de su hija. Encuentre la diferencia entre ambas estaturas.

En este problema también se combina una situación aditiva, que corresponde a la diferencia de estatura entre Pedro y su hija, y una multiplicativa, que corresponde a la comparación por cociente de las estaturas. Como la estatura de Pedro es el triple de la estatura de su hija, para representar esta relación con un diagrama, se pueden dibujar cuatro barras de la siguiente manera:

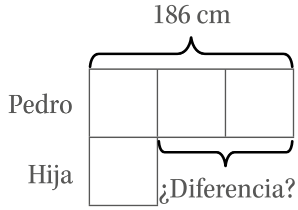


Figura III.50.

Una forma de resolver el problema es dividiendo por 3 la estatura de Pedro, **186 : 3 = 61**, y con ello obtener la estatura de la hija, para luego calcular la diferencia, **186 – 61 = 135,** que es la solución.

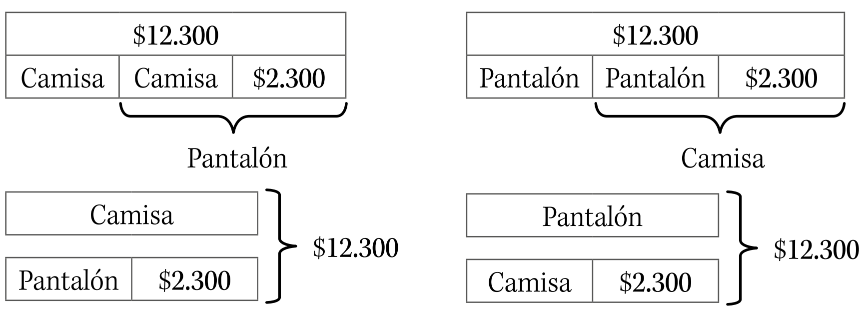
Ejercicios

1. Resuelva los siguientes problemas usando un diagrama.
   a. Juana, Alejandro y Marta se pesan. Juana pesa **41** kilos y Alejandro pesa el doble. Marta pesa **11** kilos menos que Alejandro. ¿Cuál es el peso de Marta?
   b. Dos personas reúnen dinero mensualmente durante **6** meses, ahorrando la misma cantidad mes a mes. Una de ellas ahorra **$1.500** más que la otra cada mes. Si en total reunieron **$57.000**, ¿cuánto dinero ponía cada una mensualmente?
   c. Entre tres personas tienen **$3.200**. La primera tiene el doble de dinero que la segunda y, a su vez, la segunda tiene **$400** menos que la tercera. ¿Cuánto dinero tiene cada persona?

2. Considere el siguiente problema:

   En una tienda, al comprar una camisa y un pantalón se pagan en total $12.300. La camisa cuesta $2.300 menos que el pantalón. ¿Cuál es el precio del pantalón?

   ¿Cuál o cuáles de los siguientes diagramas permiten representar el problema?



Ejercicios de la sección

1. Resuelva los siguientes problemas dibujando un diagrama e indique a qué tipo de situación multiplicativa corresponde.
   a. La señora María compró un televisor en 6 cuotas de $17.550 sin interés. ¿Cuál es el costo del televisor?
   b. Una forestal plantó eucaliptus en un predio. Los eucaliptus se plantaron en 25 filas y en cada una se pusieron 50 eucaliptus. ¿Cuántos eucaliptus se plantaron en total?
   c. Luis tiene 4 camisas y 3 pantalones. ¿Cuántas tenidas distintas puede formar Luis con las camisas y los pantalones?
   d. El profesor de Educación Física quiere distribuir a 72 estudiantes en filas de 8 estudiantes cada una. ¿Cuántas filas debe formar el profesor?
   e. Se quieren repartir equitativamente 56 kilogramos de arroz entre 8 familias. ¿Cuántos kilos de arroz le corresponden a cada familia?
   f. En una biblioteca están ordenando 56 libros de una colección. ¿Cuántas repisas necesitan si en cada una se quieren ubicar 8 libros?
   g. Se quieren distribuir 120 litros de aceite en 8 bidones, de manera que todos contengan la misma cantidad de aceite. ¿Cuántos litros de aceite se deben poner en cada bidón?
   h. Se tienen 126 lápices para almacenar en 3 cajas. ¿Cuántos lápices se deben poner en cada caja para que todas queden con la misma cantidad?

2. Resuelva los siguientes problemas usando un diagrama.
   a. Cristóbal tiene el triple de la edad de Luis, y Camila tiene 8 años más que Cristóbal. ¿Qué edades tienen Cristóbal, Luis y Camila, si la suma de sus edades es igual a 85 años?
   b. En una caja hay 105 manzanas distribuidas en 4 bolsas. La primera bolsa tiene 5 manzanas más que la segunda, a su vez, la segunda tiene 20 manzanas más que la tercera, y la tercera tiene 4 manzanas más que la cuarta. ¿Cuántas manzanas hay en cada bolsa?
   c. Un estanque con agua acumuló 14 litros el día lunes. El día martes acumuló el doble de litros que el lunes, y el miércoles, el triple de litros que el martes. Si el total de agua acumulada se quiere vaciar en partes iguales en 4 tambores, ¿cuántos litros de agua hay que poner en cada tambor?
   d. Tres gatas tienen cada una tres gatitas y estas gatas tienen tres gatas más cada una. ¿Cuántas gatas hay en total?
   e. Un tren de metro demora 2 minutos en ir de una estación a otra y se queda 1 minuto en cada estación antes de partir. ¿Cuántos minutos le lleva ir de la primera estación hasta la quinta?
   f. Un niño forma un triángulo usando monedas. En cada vértice del triángulo hay una moneda y en cada lado hay, en total, 5 monedas. ¿Cuántas monedas hay en total?

Ejercicios del capítulo

1. Realice los siguientes ejercicios:
   a. Calcule 735 ·19 usando dos estrategias distintas.
   b. Elija una de ellas y explique por qué es una manera correcta de calcular ese producto.
   c. Diga qué ideas o conceptos refuerza cada una de estas estrategias.

2. Cuenta la leyenda que Beremís Samir[3] entró a una tienda que tenía por nombre Los Cuatro Cuatros. Interesado en este nombre, le comentó a su acompañante:

   –*Observo que la tienda de este mercader se llama Los Cuatro Cuatros. Hay en ello una gran coincidencia, digna de mi atención.*

   – *¿Coincidencia? ¿Por qué?*

   – *La leyenda que figura en ese letrero me recuerda una de las maravillas del cálculo. Podemos formar un número cualquiera, empleando solamente cuatro cuatros, ligados por signos matemáticos.*

   Y antes de que su acompañante lo interrogara sobre aquel enigma, Beremís explicó, dibujando en la fina arena que cubría el piso:

   – *Quiero formar el número* **0***. Nada hay más simple. Basta escribir:*

   $$0 = 44 - 44$$

   Están así los cuatro cuatros formando una expresión igual a cero.

   – *Pasamos ahora al número 1. Esta es la forma más cómoda:*

   $$1 = 44 : 44$$

   – *¿Quiere ver ahora el número 2? Fácilmente, se usan los cuatro cuatros escribiendo:*

   $$2 = (4 : 4) + (4 : 4)$$

   Usando cuatro números cuatro y los signos de operación +, –, · y : (nota: solo se aceptan divisiones exactas, por ejemplo 4 : 44 no es aceptable), más paréntesis, de ser necesarios, realice las siguientes actividades:

   a. Encuentre otra forma de escribir el número 1 y otra forma de escribir el número 2.
   b. Encuentre al menos dos formas distintas de escribir el número 3.
   c. Encuentre una forma de escribir el número 4.
   d. Encuentre una forma de escribir el número 10.
   e. Encuentre formas de escribir otros números.
   f. ¿No será una exageración decir que: "Podemos formar un número cualquiera empleando solamente cuatro cuatros, ligados por signos matemáticos"? Comente.

[3] Tomado de Malba Tahan, *El hombre que calculaba*, Centro Gráfico, 2003.

3. Diremos que un número es "descendente" si sus dígitos disminuyen de uno en uno. Por ejemplo, 432 y 87.654 son números descendentes.

   Encuentre el menor número descendente de cuatro cifras que se puede dividir en forma exacta por 4 y por 3.

   No basta con adivinar un número, debe explicar cómo llegó al resultado.

4. Explique por qué no es posible realizar la división $3 : 0$, pero, sin embargo, $0 : 0$ se dice que es indeterminado. Utilice que $a : b = q$, si y solo si $a = q \cdot b$.

5. Utilice una representación gráfica que permita visualizar simultáneamente:

   a. $3 \cdot 8$
   b. $24 : 3$
   c. $8 \cdot 3$
   d. $24 : 8$

6. En la clase de Educación Física hay 15 estudiantes. Al final de cada clase se eligen dos para que actúen como árbitros en un juego de fútbol. ¿Cuántas parejas diferentes de árbitros se pueden formar?

7. Un alumno realiza la división 3.297 : 32 y obtiene como resultado 13 con resto 1. Explique una probable causa del error.

8. Considere el siguiente problema: *Si en 100 metros podemos plantar seis árboles, ¿cuántos árboles podemos plantar en un tramo de 500 metros?*

   a. Muestre dos interpretaciones posibles para este enunciado.
   b. Modifique el enunciado para convertirlo en un problema apropiado para introducir la multiplicación.

9. Muestre una solución adecuada para presentar el siguiente problema a alumnos de 2º Básico: *Si hoy es jueves, ¿qué día de la semana será en 70 días más?*

10. Presente una solución detallada y apropiada para ser presentada a los alumnos para el siguiente problema: *Ana tiene 11 años y su mamá, 33. ¿En cuántos años la edad de la mamá será el doble que la edad de Ana?*

11. Un Paseo por Fantasilandia

El colegio cordillera está de aniversario y el equipo directivo ha decidido organizar una visita a Fantasilandia. Para un total de 500 alumnos. Entonces hicieron una encuesta y las preguntas y algunas de las respuestas fueron:

Las preguntas y algunas de las respuestas fueron

- ¿Quieren ir al Tsunami? 410 alumnos contestaron que sí.
- ¿Quieren ir al Boomerang? 430 alumnos contestaron que sí.
- 10 alumnos contestaron que no querían ir ni al Tsunami ni al Boomerang.
- 350 alumnos dijeron que querían ir al Tsunami y al Boomerang.

Con los datos anteriores, responda las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos alumnos quieren ir al Tsunami, pero no quieren ir al Boomerang?
- ¿Cuántos alumnos quieren ir al Boomerang, pero no quieren ir al Tsunami?

12. Para cada uno de los siguientes problemas, indique a qué tipo de situación multiplicativa corresponde y resuelva.

a. Un equipo de fútbol tiene camisetas de 3 colores diferentes y shorts de otros 5 colores. ¿Cuántas combinaciones distintas puede formar?
b. Una caja de lápices cuesta $1.500. ¿Cuántas cajas se pueden comprar con $9.000.
c. Lucía caminó 30 cuadras y Marcelo caminó la tercera parte de lo que caminó Lucía. ¿Cuántas cuadras caminó Marcelo?
d. Juanita, profesora de primer año, debe repartir en forma equitativa a sus 30 alumnos 150 fichas. ¿Cuántas fichas le corresponden a cada niño?
e. En la presentación de Educación Física participaron 36 niños. El profesor los organizó en 4 filas con la misma cantidad de niños. ¿Cuántos niños había en cada fila?
f. Sofía gastó $5.000 en el paseo , en cambio Luis gastó 2 veces lo que gastó Sofía. ¿Cuánto gastó Luis?
g. La siguiente receta es para preparar arroz graneado para 4 personas.

2 tazas de arroz
3 tazas de agua (hirviendo)
5 cucharadas de aceite
1/2 cebolla (picada fina)
1/4 de pimentón
1 diente de ajo (picado)
1/2 cucharada de sal

¿Cuáles serían los ingredientes necesarios para 2 personas?

13. El curso de Lucía juntó $25.000 para la fiesta de fin de año, en cambio el curso de Alejandro juntó $100.000. ¿Cuántas veces la cantidad de dinero que juntó Alejandro tiene Lucía?

FECHA:_____/_______/_____

Capítulo IV

Estimación

Introducción

Desde el punto de vista matemático, estimar es dar un valor cercano o aproximado de una cantidad desconocida. Se pueden distinguir dos tipos de situaciones asociadas a la estimación. Una de ellas corresponde a la estimación de una cantidad o medida y la otra, a la estimación del resultado de una operación.

Estimamos una cantidad o una medida cuando decimos, por ejemplo, "había cerca de 10.000 personas en el estadio" o "me tomará aproximadamente una hora y media llegar a mi casa". Esta estimación está basada en experiencias previas y también en información disponible al momento de estimar. En la primera situación, para tener una idea de cuánta gente hay en el estadio, podemos contar cuánta gente hay en una fila de asientos que consideremos representativa y luego multiplicar por el número aproximado de filas. También podemos usar nuestra experiencia y comparar con situaciones anteriores en las cuales sí sabemos cuántas personas había en el estadio.

El segundo tipo de situación en la cual se requiere estimar corresponde a encontrar una respuesta aproximada a una operación aritmética, usualmente de manera rápida. Por ejemplo, como vimos en el capítulo anterior, se requiere estimar al aplicar el algoritmo de la división.

En este capítulo estudiaremos las diversas situaciones en que se requiere realizar estimaciones y veremos algunas estrategias para su uso en la resolución de problemas.

1. Consideraciones en el uso de la estimación

La estimación permite dar respuesta a problemas en los cuales no es necesario o posible determinar una solución exacta, o resulta difícil y requiere mucho tiempo encontrarla.

A continuación, veremos algunas razones que hacen necesario el uso de estimaciones.

Restricciones que fuerzan a realizar estimaciones:

- *Cantidad desconocida*: si la cantidad a considerar no es conocida, es necesario dar una estimación de ella. En general, esta estimación se basa en experiencias y conocimientos previos de quien la realiza. Por ejemplo, la distancia en metros entre dos puntos, la edad de una persona, el peso de un animal, etc.
- *Fluctuaciones en una cantidad*: a causa de distintos factores, una cantidad puede variar cuando es medida en momentos distintos. Para referirse a dicha cantidad en un momento determinado, es necesario hacer una estimación basada en mediciones anteriores o en la propia experiencia. Por ejemplo, la polución del aire, la población de Chile, la tasa de desempleo, etc.
- *Limitaciones al efectuar una medición*: las mediciones físicas no son exactas en la mayoría de los casos. Por ejemplo, medir exactamente la longitud de un objeto es imposible, entre otras razones, porque los instrumentos de medición tienen imperfecciones. Cuando hablamos de una medida, nos estamos refiriendo a una estimación de ella.
- *Estimaciones a partir de estimaciones*: la medida de una cantidad puede ser una estimación. El resultado de cualquier cálculo que la involucra es otra estimación. Por ejemplo, el área de un rectángulo, calculada a partir de la medición de sus lados, es una estimación.

Verificar la razonabilidad de los resultados

Actualmente, el uso de calculadoras y de computadores da una sensación de exactitud en los resultados. Sin embargo, el resultado obtenido puede no ser razonable, simplemente, porque se oprimió la tecla incorrecta. Es importante que los estudiantes desarrollen el hábito de estimar la magnitud de la respuesta y "ver" si el resultado obtenido con la calculadora es razonable. Por ejemplo, si un cálculo hecho con una calculadora nos dice que 30 millones de personas asistieron a un concierto de rock en el Estadio Nacional, debemos darnos cuenta de que algo debe estar mal en el cálculo.

Algunas consideraciones en el uso de la estimación

Algunos niños y niñas se sienten incómodos estimando cantidades, sobre todo considerando que en la mayoría de los ejercicios que han hecho se requiere que entreguen una respuesta exacta. El profesor debe ayudar a los estudiantes a desarrollar la capacidad de estimar. La estimación ayuda al desarrollo del concepto de número y se espera que los estudiantes estén alerta a su uso y sean capaces de aplicar estrategias simples de estimación y verificar si las respuestas son razonables. Los niños y las niñas necesitan ser convencidos de que algunas veces las estimaciones son necesarias o convenientes. Se sugiere usar ejemplos simples al comienzo y evitar una alta precisión en las estimaciones. También es importante introducir el lenguaje adecuado, por ejemplo:

- Aproximadamente 35.
- Cerca de 35.
- Un poco menos que 35.
- Entre 30 y 35, pero probablemente un poco más cerca de 35.
- En algún lugar entre 30 y 35.

Para lograr que la estimación forme parte de la experiencia cotidiana de los niños y las niñas, el profesor debe usar ejemplos del mundo real tanto como sea posible. La habilidad de estimar se desarrolla y mejora con el tiempo, ya que requiere de motivación además de un conjunto de habilidades. Debe ser enfatizada regularmente, a través de todos los temas matemáticos. Esto puede hacerse por medio de ejercicios o tareas, y en el desarrollo de la clase, preguntando a los estudiantes por una estimación de las cantidades involucradas. Los niños y las niñas deben percibir cuándo es apropiado estimar, y reconocer cuánta precisión es necesaria en una situación dada.

Como lo hicimos ver en su momento, el uso de la estimación es esencial en la división por dos o más cifras, por lo que es conveniente desarrollar esta habilidad antes de la introducción del algoritmo. Por otra parte, el profesor debe ser capaz de estimar el resultado de operaciones y problemas, y así reconocer rápidamente las respuestas incorrectas.

2. Estimar una cantidad o una medida

Existen situaciones en las que contar una cantidad de objetos resulta engorroso o inviable en un tiempo razonable y, por tanto, realizar una estimación de dicha cantidad puede ser la forma más apropiada de dar una respuesta. Por ejemplo, para saber la cantidad de dulces que hay en el plato de la **Figura IV.1**, se requeriría sacar los dulces y contarlos uno por uno, lo que llevaría mucho tiempo.

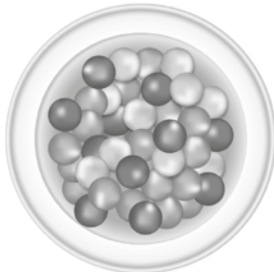


Figura IV.1.

Una forma de estimar la cantidad de dulces que hay en el plato es dividirlo mentalmente en octavos y estimar la cantidad de dulces que hay en cada parte. En este caso, diremos que hay alrededor de 15 dulces en la superficie de cada parte y, como la imagen muestra que son alrededor de dos capas, cada parte tiene alrededor de 30 dulces. Luego, como son ocho partes, una estimación de la cantidad de dulces es 240. Otra forma de estimar la cantidad de dulces es usando la fórmula del área del círculo. Como el radio tiene una longitud de alrededor de 6 dulces, el área de la superficie circular es $\pi \cdot 6^2 \approx 3 \cdot 6^2 = 108$. Luego, como hemos considerado alrededor de dos capas, la cantidad estimada de dulces es 216.

Una variación de este tipo de situaciones son aquellas donde la colección no se encuentra disponible y solo se conoce una parte de ella, que denominaremos *referente*. La **Figura IV.2** presenta una lámina en la que se han dibujado círculos, uno al lado del otro, pero se ha tapado una parte de ella. Queremos estimar la cantidad de círculos de la lámina completa.

Figura IV.2.

Para estimar la cantidad total de círculos, debemos estimar la cantidad de veces que está contenido el referente en la parte que no podemos ver. Así, el procedimiento que permite estimar el número de círculos, suponiendo que se distribuyen en forma homogénea, es el mismo que en la actividad anterior.

Otros ejemplos que requieren estimar una cantidad de objetos, pues no es posible contar, es cuando preguntamos por la cantidad de pelos que tenemos en la cabeza, la cantidad de hojas de césped que hay en un metro cuadrado de jardín, etc.

Veamos ahora un ejemplo en que la estimación se puede realizar basándonos en nuestra propia experiencia.

Ejemplo

¿Cuántos habitantes tiene el edificio?

Primero, estimamos la cantidad de departamentos que hay en cada piso. Supongamos que hay 4 departamentos, considerando la superficie de un piso. Luego, si en cada departamento viven en promedio 4 personas, en cada piso hay 16 personas. Finalmente, como el edificio tiene 8 pisos, una buena estimación de la cantidad de personas es 128.

También podemos estimar medidas que puede basarse en un referente de medida conocida o en nuestra propia experiencia. Por ejemplo, consideremos la cinta de papel de la **Figura IV.3**

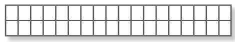


Figura IV.3.

Si la medida de la cinta es 3 centímetros, ¿cómo se puede estimar la longitud de la cuerda en la **Figura IV.4**?

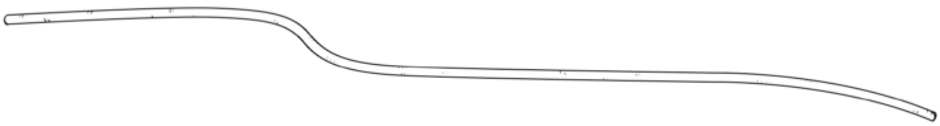


Figura IV.4

Al conocer una longitud referencial, se puede estimar la cantidad de veces que la misma está contenida en la longitud que se quiere estimar. En este caso, "alrededor de 5 veces". Luego, como la longitud del referente es 3 centímetros, una estimación del largo de la cuerda es 15 centímetros.

En ocasiones, no es posible tener un referente determinado, y debemos recurrir a nuestros conocimientos y experiencias relacionados con la medición de longitudes. Por ejemplo, si se quiere estimar el largo de una mesa en metros, debemos recurrir a una estimación de la longitud del metro. Está claro que si no se ha tenido la experiencia de conocer concretamente un metro, se debe buscar otra estrategia de estimación.

Para pensar

¿De qué depende que una estimación sea "una buena estimación" de la cantidad o de la medida real?

Otro tipo de situaciones que requieren realizar una estimación son aquellas relacionadas con la medición del volumen o capacidad de un objeto. Por ejemplo, estimar la capacidad de un bidón antes de verter un líquido en él, el espacio que ocupará un mueble en nuestra casa, la cantidad de tazas de leche necesarias para llenar una botella, etc. Al igual que en el caso de la longitud, la estimación del volumen o capacidad de un objeto puede efectuarse basándonos en un referente conocido o en nuestra propia experiencia. Por ejemplo, ¿es posible estimar la capacidad del jarro en la **Figura IV.5**, si sabemos que el vaso tiene una capacidad de $\frac{1}{4}$ de litro?

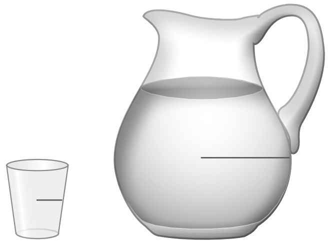


Figura IV.5.

Consideremos ambos recipientes como si fueran cilíndricos. El radio del vaso es aproximadamente la mitad del radio del jarro, y la altura del vaso es la mitad de la altura del jarro. Podemos ver que caben aproximadamente 8 vasos dentro del jarro, por lo tanto, el jarro tiene una capacidad de alrededor de 2 litros, como se muestra en la **Figura IV. 6**.

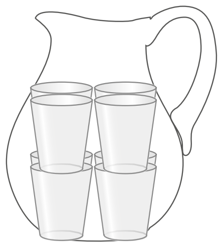
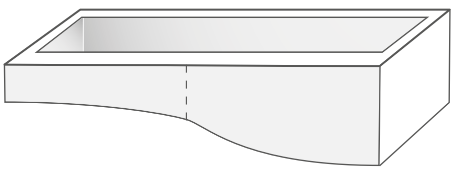


Figura IV.6.

Ejemplo

Una piscina rectangular mide 5 metros de largo y 3 de ancho. Sabemos que la parte menos profunda mide 1 metro, mientras que la más profunda mide 3 metros. ¿Cuál es el volumen estimado de la piscina?



Podemos calcular el área de la superficie de la piscina, que en este caso es 15 metros cuadrados. Luego, podemos estimar que la piscina tiene una profundidad promedio de 2 metros, ya que se sabe que la menor profundidad es 1 metro y la mayor, 3 metros. El volumen de la piscina es de aproximadamente 30 metros cúbicos.

Cuando la magnitud que se quiere estimar es el peso de un objeto, el procedimiento puede variar y se necesita manipular dicho objeto. Es decir, si se quiere estimar el peso de una silla será necesario levantar la silla y recurrir a experiencias previas en que se manipuló el peso de un objeto conocido, por ejemplo, 1 kilogramo de azúcar. Un tipo de tarea que se relaciona con este tipo de estimación del peso es la comparación del peso de dos o más objetos.

Ejemplo

> Se desea estimar el peso de una gota de agua. Como para pesar una gota se necesita un instrumento que no está a nuestra disposición, podríamos juntar 100 gotas de agua en un recipiente. Al aislar el peso de las gotas del peso del recipiente y dividir por 100, obtenemos una estimación del peso de una gota de agua.

El tiempo es otra magnitud que requiere de experiencias previas para realizar estimaciones. Por ejemplo, cuando queremos estimar el tiempo que nos llevará ir de un lugar a otro, se puede recurrir a experiencias anteriores en que hemos recorrido un tramo de longitud similar.

Ejemplo

> Se desea estimar cuántos ceros se pueden dibujar en 10 minutos. Para esto, podemos realizar la experiencia en 1 minuto. Supongamos que se pueden dibujar 120 ceros, dos por segundo, por lo tanto, en 10 minutos podríamos dibujar 1.200 ceros. Sin embargo, como es probable que nos cansemos durante el ejercicio y disminuyamos la velocidad, una estimación de la cantidad de ceros que se pueden dibujar es 1.000.

Finalmente, detengámonos a analizar cuándo nuestras estimaciones son pertinentes o son buenas estimaciones de la medida real. De manera informal, se dice que tenemos una buena estimación cuando, de acuerdo al contexto, es aceptable el valor estimado en el lugar del valor real. Por ejemplo, si estamos estimando kilos de papas, una diferencia de 200 gramos no tendrá gran efecto en las decisiones que se puedan tomar, mientras que si esta diferencia corresponde a la estimación de una cantidad de oro, una pequeña variación puede resultar inaceptable.

En resumen

Estimar permite resolver problemas de la vida cotidiana donde no es necesario o posible determinar una cantidad o medida exacta. Estimamos el cardinal de una colección, la longitud, masa o volumen de un objeto o la duración de un evento, entre otras magnitudes. Para estimar, en general, se requiere contar con un referente y una estrategia para comparar este referente con la magnitud a cuantificar.

2.1 Algunos ejemplos para estimar una cantidad de objetos

Es muy importante tener en cuenta que para que el alumno aprenda a estimar se le deben enseñar estrategias de cómo hacerlo. Además, las experiencias también se deben secuenciar de lo más simple a lo más complejo.

Antes de desarrollar la habilidad de estimación, el alumno debe experimentar diversas acciones de conteo, por ejemplo:

- Conteo de objetos de 1 en 1, de 10 en 10 y de 100 en 100.
- Reconocer agrupaciones de 10 en 10 y de 100 en 100.

Las actividades anteriores le permiten al niño o niña familiarizarse con el sentido de cantidad y adquirir experiencia en el conteo. Esto crea un referente para estimar el cardinal de una colección. Algunos aspectos a tener en cuenta al seleccionar colecciones de objetos son: la disposición espacial de los objetos, la forma de presentarlos, si se tiene material concreto o son representaciones pictóricas, entre otros.

Algunos ejemplos de actividades son:

a. Reciben un canasto con objetos y estiman su cardinal diciendo si hay: "Más de 10", "más de 100", "más de 1.000", etc. Luego comentan y comprueban sus estimaciones contando. Esta actividad se puede realizar varias veces colocando diferentes cantidades de elementos en el canasto.
b. Reciben dos canastos iguales, con distinto número de elementos u objetos en cada uno. Estiman en cuál hay más objetos y luego estiman cuántos objetos hay en cada canasto. Después comprueban, contando los objetos de cada canasto. Esta actividad se puede realizar varias veces variando los recipientes y las cantidades de objetos.
c. Observan dos hileras de objetos (fichas, monedas, clips, etc.) una tiene más que la otra. Por ejemplo: 7 y 14; 18 y 23; 30 y 35; 30 y 40, etc. Estiman cuántos elementos hay en una fila sabiendo el total de objetos de la otra fila. Esta actividad se puede realizar varias veces cambiando el número de objetos de las hileras.
d. Reciben 2 montones de cartas y estiman cuántas hay en cada uno, expresando su estimación como: "Hay más de 30", "hay menos de 30", "hay cerca de 15", "hay más de 10 y menos de 20", etc. Comprueban contando las cartas y verifican los resultados de la estimación.

Ejercicios de la sección

1. Observe las siguientes imágenes y señale la estrategia que podría usar un niño o niña para estimar la cantidad de esferas y ovejas.

2. Sobre un recuadro de 5 cm de ancho y 7 cm de largo hay un trozo de hilo. Describa una estrategia que permita estimar su longitud.

3. Proponga situaciones en que niños y niñas estimen:
   a. La longitud de un objeto.
   b. El área de una superficie irregular.
   c. La cantidad de objetos de una colección, donde solo se ve una parte de ella.
   d. La capacidad de un recipiente.
   e. La cantidad de objetos que puede contener un recipiente.
   f. El tiempo de duración de un evento.

4. Describa una estrategia que permita estimar el peso de un clip.

3. Estimar el resultado de una operación

La estimación se usa también para obtener un valor aproximado del resultado de una operación aritmética. Con ello es posible, por ejemplo, tener en forma rápida información sobre una situación que involucre una operación o verificar la razonabilidad de una respuesta a un cálculo o problema. Antes de analizar las formas de estimar el resultado de una operación, nos detendremos a explicar cómo se puede aproximar un número.

3.1 Aproximaciones

La aproximación de un número se pueden hacer siguiendo alguna convención. Los procedimientos más conocidos, aunque no los únicos, son el redondeo y el truncamiento.

Redondeo

Para redondear un número, primero debemos saber o decidir a qué orden queremos aproximar: unidades, decenas, centenas, décimos, centésimos, milésimos, etc. Si la cifra a la derecha de la posición elegida es menor que 5, la cifra elegida se deja igual y todas las cifras a su derecha se cambian por 0. Si la cifra a la derecha de la posición elegida es mayor o igual que 5, a la cifra elegida se le suma 1 y todas las cifras a su derecha se cambian por 0.

Ejemplo

1.438 ≈ 1.440 cuando redondeamos a las decenas.

1.438 ≈ 1.400 cuando redondeamos a las centenas.

1.438 ≈ 1.000 cuando redondeamos a las unidades de mil.

4.963 ≈ 4.960 cuando redondeamos a las decenas.

4.963 ≈ 5.000 cuando redondeamos a las centenas.

4.963 ≈ 5.000 cuando redondeamos a las unidades de mil.

Notemos la siguiente particularidad: si, por ejemplo, redondeamos 448 primero a las decenas, obtenemos 450. Luego, si este resultado lo redondeamos a las centenas, obtenemos 500, lo cual es distinto al resultado que obtendríamos al redondear el número original 448 directamente a las centenas, que es 400.

Una forma de interpretar o visualizar el redondeo es en la recta numérica. Si estamos aproximando a las decenas, buscamos la decena que está más cerca de nuestro número, siguiendo la convención de que si nuestro número está justo al medio de dos decenas, elegimos la mayor.

Ejemplo

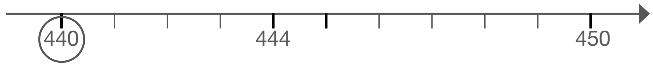


Figura IV.7.

Con esta interpretación es razonable que la aproximación de 444 a las decenas sea 440 y no 450. Si el número marcado fuera 445, estaría justo en el punto medio y se elegiría 450 como aproximación.

Truncamiento

Este procedimiento consiste en reemplazar todas las cifras a la derecha de la escogida, para efectuar la aproximación, por ceros.

Ejemplo

$3.578 \approx 3.570$ cuando es truncado a las decenas.

$3.578 \approx 3.500$ cuando es truncado a las centenas.

$3.578 \approx 3.000$ cuando es truncado a las unidades de mil.

En la recta numérica, truncar a las decenas corresponde a tomar la decena exacta menor o igual a la decena del número dado.

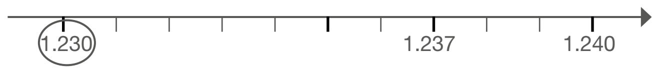


Figura IV.8.

Cuando se requiere estimar el resultado de una operación aritmética, se debe elegir el tipo de aproximación adecuada a la situación.

Aproximaciones por exceso y por defecto

Como su nombre lo indica, aproximar por exceso significa tomar como aproximación un número mayor que el dado, y aproximar por defecto, tomar un número menor. Por ejemplo, el número 3.452 aproximado por exceso a las decenas es 3.460. Aproximar por defecto a las potencias de 10 corresponde a lo que ya definimos como truncar. En muchas situaciones donde aplicamos la estimación, podemos necesitar prestar atención a si la estimación es mayor o menor que el resultado exacto de las operaciones.

Ejemplos

1) Un conductor necesita hacer un viaje en auto entre dos ciudades que están a una distancia de 442 kilómetros y entre las cuales no es posible cargar combustible. Su auto rinde 13 kilómetros por litro y el tanque de combustible del auto tiene una capacidad de 41 litros, ¿será posible hacer el viaje?

En este caso, queremos saber si el auto puede recorrer, sin cargar combustible, por lo menos 442 kilómetros. Nos conviene aproximar por defecto, para estar seguros de llegar. Tenemos $13 \cdot 41 > 12 \cdot 40 = 480$. Por lo tanto, lo más probable es que pueda llegar al destino.

2) Cristina tiene \$2.000 y desea comprar un cuaderno que cuesta \$880, un lápiz que cuesta \$270, una goma de \$245 y un sacapuntas de \$490, ¿tendrá suficiente dinero?

En este caso, queremos estar seguros de poder pagar, por lo tanto, nos conviene aproximar por exceso. Tenemos $880 + 270 + 245 + 490 < 900 + 300 + 300 + 500 = 2.000$. Por lo tanto, Cristina tiene suficiente dinero para pagar.

Como hemos mencionado en párrafos anteriores, la estimación nos puede ayudar a determinar si una respuesta dada es razonable. Esto, es muy útil cuando estamos trabajando con una calculadora y queremos evitar errores.

Ejercicio

Analice las siguientes situaciones pensando en que está estimando el tiempo que le tomará llegar a almorzar a su casa, dado que dispone de una hora de colación y quiere saber si el tiempo le alcanza para ir.

Situación 1): estima que demorará más de media hora de ida y más de media hora de vuelta, y sabe que en menos de media hora almuerza.

Situación 2): estima que demorará menos de 15 minutos en llegar a su casa y también en volver, y sabe que en menos de media hora almuerza.

Situación 3): estima que demorará 25 minutos o menos en ir y lo mismo en volver, y sabe que en menos de media hora almuerza.

¿En cuáles de las situaciones previas sus estimaciones le sirven, en cuáles no y por qué? Conecte esto con estimar por exceso y por defecto. Piense en otras situaciones donde uno de estos tipos de estimaciones es útil y el otro no.

3.2 Estrategias para estimar el resultado de operaciones

Una forma de estimar el resultado de operaciones es estimando cada uno de los números involucrados. Por ejemplo, podemos truncar, redondear o elegir alguna otra estrategia dependiendo de la operación y de los números involucrados.

Estimar por truncamiento

Esta estrategia consiste en estimar el resultado de una operación truncando los números involucrados. Es la más simple de aplicar y permite, de manera rápida, tener una idea del resultado. Sin embargo, es la que, en general, entrega estimaciones más alejadas del valor exacto. En el caso de la suma y la resta, conviene truncar todos los números al mismo orden. En el caso de la multiplicación y la división, podemos truncar cada factor a un orden distinto.

Ejemplo

$5.876 + 3.192 \approx 5.000 + 3.000 = 8.000$

$8.940 - 4.112 \approx 8.000 - 4.000 = 4.000$

$285 \cdot 29 \approx 200 \cdot 30 = 6.000$

$354 : 64 \approx 300 : 60 = 5$

Para pensar

Si estimamos por truncamiento a la decena una suma de dos sumandos, ¿cuál es la máxima diferencia posible entre la estimación y el valor exacto?

Estimar por redondeo

Esta estrategia consiste en redondear cada número y luego operar. En el caso de la suma y de la resta, es importante que ambos redondeos se hagan al mismo orden.

Ejemplo

$5.876 + 3.192 \approx 6.000 + 3.000 = 9.000$

$8.940 - 4.112 \approx 9.000 - 4.000 = 5.000$

En el caso de las multiplicaciones y las divisiones, cada número se puede redondear a un orden diferente. Más aún, dependiendo de los números involucrados, puede resultar conveniente redondear solo uno de ellos.

Ejemplo

$285 \cdot 29 \approx 300 \cdot 30 = 9.000$

$354 : 64 \approx 360 : 60 = 6$

$886 \cdot 7 \approx 900 \cdot 7 = 6.300$

Para pensar

En el caso de la resta, ¿qué estimación es más cercana al resultado exacto, el redondeo o el truncamiento?

Estimar compensando

En capítulos anteriores, vimos que para calcular mentalmente sumas o restas se podía compensar para facilitar el cálculo. Podemos usar la misma idea para estimar una suma o una resta. Así, cuando sumamos o multiplicamos puede ser conveniente aproximar un sumando por exceso y el otro por defecto, de esta forma, la diferencia entre el valor real y el estimado decrece. En la resta y en la división, en cambio, puede ser conveniente aproximar ambos por exceso o ambos por defecto.

Ejemplo

$2.476 + 3.583 \approx 2.500 + 3.500 = 6.000$

$5.287 - 3.974 \approx 5.300 - 4.000 = 1.300$

$6.137 - 3.075 \approx 6.000 - 3.000 = 3.000$

$315 \cdot 27 \approx 300 \cdot 30 = 9.000$

$457 : 28 \approx 480 : 30 = 48 : 3 =16$

Para pensar

Para estimar la suma de dos números podemos aproximar uno de ellos por exceso y otro por defecto, para tratar de acercarnos al resultado exacto. En la resta, aproximamos ambos números en la misma dirección. ¿Por qué cree usted que estas estrategias dan una mejor aproximación?

Ejercicio

Estime, de dos formas diferentes, los resultados de 485 : 38 y 886 : 9.

Otra forma de estimar el resultado de una operación, consiste en realizar descomposiciones y agrupaciones con los números involucrados, tratando de simplificar los cálculos.

Estimar agrupando

En esta estrategia, formamos grupos de números cuya suma sea fácil de efectuar. Por ejemplo:

$$38 + 70 + 60 + 23 + 20 + 45 = (38 + 70) + (60 + 23 + 20) + 45 \approx 100 + 100 + 45 = 245$$

Una mejora para esta estrategia consiste en descomponer antes de agrupar. Por ejemplo:

$$429 + 548 + 354 = (400 + 500 + 300) + (29 + (48 + 54)) \approx 1.200 + (30 + 100) = 1.330$$

En el caso de la multiplicación, podemos usar la propiedad distributiva para facilitar la estimación. Por ejemplo, estimemos $605 \cdot 379$. Tenemos:

$$605 \cdot 379 \approx 600 \cdot 380 = 600 \cdot (300 + 80) = 600 \cdot 300 + 600 \cdot 80 = 180.000 + 48.000 = 228.000$$

Estimar por promedio

Esta estrategia se puede utilizar cuando los sumandos corresponden a números que son próximos entre sí. Por ejemplo, estimemos 7.837 + 8.208 + 8.099 + 7.879 + 8.053.

Observemos que los números son cercanos a 8.000 y, por lo tanto, estimamos que el promedio es 8.000. Tenemos 5 sumandos, entonces:

$$7.837 + 8.208 + 8.099 + 7.879 + 8.053 \approx 8.000 \cdot 5 = 40.000$$

Para pensar

Reflexione acerca de cuán buena es la aproximación del resultado de una operación, si se aproximan los números antes de operar con ellos. Por ejemplo, si resta dos números aproximando cada uno de ellos a la decena más cercana, el resultado de esta resta ¿será necesariamente la aproximación a la decena más cercana de la resta de los números originales? Busque ejemplos.

Estimar un rango para una operación aritmética

Muchas veces se requiere determinar entre qué números puede encontrarse el resultado de una operación. A este tipo de intervalo lo llamaremos un *rango del resultado*. En el caso de la suma, un valor mayor que esta se obtiene aproximando por exceso los sumandos y luego calculando la suma. Un valor menor que la suma se obtiene aproximando por defecto los sumandos y luego calculando la suma.

Ejemplo

Encontremos un rango para el resultado de 394 + 710.

Aproximando por defecto tenemos:

$394 + 710 \approx 300 + 700 = 1.000$

Aproximando por exceso tenemos:

$394 + 710 \approx 400 + 800 = 1.200$

Por lo tanto, el resultado de la suma 394 + 710 se encuentra entre 1.000 y 1.200.

Para pensar

¿Cómo encontraría un rango para el resultado de una resta de dos números?, ¿y para la multiplicación y la división?

En la división, en algunos casos es posible ajustar dividendo y divisor para facilitar el cálculo del cociente.

Estimar para que el dividendo sea múltiplo del divisor

Esta estrategia consiste en aproximar el dividendo a un múltiplo conocido del divisor, de manera que la división no tenga resto y se pueda calcular mentalmente.

Ejemplo

$475 : 7 \approx 490 : 7 = 70$

Para pensar

Dos alumnos presentan las siguientes aproximaciones para estimar el resultado de la multiplicación:

$567 \cdot 17 \approx 600 \cdot 15 = 9.000$ $\qquad$ $567 \cdot 17 \approx 565 \cdot 50 = 28.250$

En ambos casos sumaron 33 a un factor, mientras que al otro le restaron 2. ¿A qué se debe la enorme diferencia?, ¿qué resguardos hay que tener para usar la compensación al estimar un producto?, ¿ocurre algo similar con la división?

Ejercicios de la sección

1. Estime el resultado de las siguientes sumas y restas, señalando la o las estrategias usadas.

   a. 647 + 878 + 324 + 555

   b. 1.526 + 8.799 + 12.768 + 5.211 + 1.011

   c. 8.759 – 4.677

   d. 6.798 – 1.202

2. Una profesora planteó la siguiente suma y le pidió a niños y niñas que estimaran su resultado.

$$3.548 + 28 \approx$$

   Un niño estimó de la siguiente forma:

$$3.548 + 28 \approx 3.500 + 30 = 3.530$$

   ¿Es esta una buena estimación? Justifique su respuesta.

3. Estime el resultado de las siguientes multiplicaciones y divisiones, señalando la o las estrategias usadas.

   a. $764 \cdot 18$

   b. 3.652 : 521

   c. $4.398 \cdot 309$

   d. 4.802 : 146

4. Para estimar el resultado de 7.198 : 598, una persona señala lo siguiente:

   "Calculo primero 6.000 : 600 = 10, y luego 1.200 : 600 = 2. La estimación es: 10 + 2 = 12".

   a. ¿Es esta una buena estimación? Explique su respuesta.

   b. Utilice una expresión matemática para representar el procedimiento. ¿Qué propiedad de la división está utilizando?

   c. Use la misma estrategia para estimar las siguientes divisiones:

   95.789 : 7.995 2.571 : 82

3.3 Algunos ejemplos de estimación del resultado de una operación

Cuando se estima el resultado de una operación, en general, se utilizan las combinaciones aditivas y multiplicativas básicas y sus extensiones a las decenas, centenas, unidades de mil, etc., y se aplican algunas de las estrategias de cálculo mental.

a. Se presenta un afiche con productos de un supermercado y sus respectivos precios, como en la **Figura IV.9**.

Figura IV.9.

Luego se pueden plantear problemas que requieran estimar el costo de una compra, por ejemplo:

- Se compra un lavalozas a $747, un paquete de detergente a $3.987 y una botella de cera líquida que vale $1.198. Estime el costo de la compra.
- Si una persona lleva un producto de cada tipo, ¿cuál es el costo estimado de la compra? Si paga con un billete de $20.000, ¿le alcanza para llevar todos los productos?

b. Se presenta un menú como el siguiente:

Menú

Almuerzo 1:	Sopa y plato principal	$ 2.268
Almuerzo 2:	Sopa, plato principal y postre	$ 2.468
	Vaso de bebida cola	$ 390
	Botella de agua mineral	$ 490
	Taza de té o café	$ 320

Luego, se pueden plantear actividades tales como:

i. Diez personas fueron a almorzar y el mozo registró la siguiente orden:

- 6 Almuerzo 1.
- 4 Almuerzo 2.
- 7 bebidas cola.
- 3 agua mineral.
- 8 café o té.

ii. Estime la cuenta total.

Gasto estimado por la comida	$
Gasto estimado por bebestibles	$
Gasto estimado total	$

iii. Si el grupo decide compartir la cuenta en partes iguales, estime la cantidad de dinero que debe pagar cada uno.

En resumen

La estimación es una habilidad que se desarrolla paulatinamente a través de actividades donde no es posible realizar un cálculo exacto o no es necesario hacerlo. Para que un alumno o alumna aprenda a estimar, es importante orientarlo en el uso de estrategias que le permitan realizar una estimación adecuada y pertinente a la situación planteada. Las situaciones que se propician para efectuar estimaciones provienen de la vida cotidiana y es posible utilizar diversos contextos para desarrollar esta habilidad en niños y niñas.

4. Dificultades y posibles errores al realizar estimaciones

Estimar es una habilidad que se desarrolla y se potencia en los distintos niveles de Educación Básica. Como vimos en secciones anteriores, existen numerosos tipos de situaciones donde se requiere estimar una cantidad, una medida o el resultado de una operación. Sin embargo, no siempre los estudiantes estiman al enfrentarse a este tipo de situaciones y utilizan directamente la cuantificación o el desarrollo de un cálculo para encontrar la solución, y presentan una dificultad en la enseñanza y aprendizaje de este tema.

En el caso de la cuantificación, la forma de presentación de una actividad es clave para hacer surgir la necesidad de estimar y construir estrategias. Cuando las situaciones se presentan de manera tal que es posible contar o medir en forma eficiente, no es necesario estimar y, en consecuencia, los niños y niñas aproximan el resultado obtenido por conteo o medición. Para desarrollar la habilidad de estimar una medida o una cantidad, es necesario plantear ejemplos donde sea muy difícil o imposible contar o medir los objetos.

Es natural presentar situaciones para estimar el cardinal de una colección poniendo a disposición de los estudiantes los objetos en forma pictórica. Por ejemplo, estimar la cantidad de estrellas de la **Figura IV.10**:

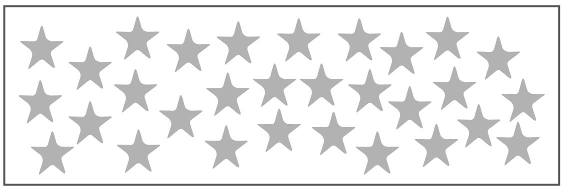


Figura IV.10.

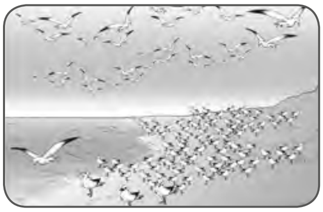
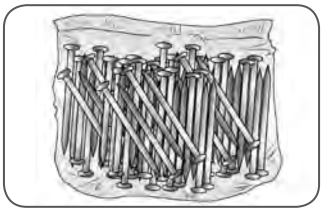
Es probable que frente a esta forma de presentación, niños y niñas cuenten la cantidad de estrellas de la lámina y eviten la estimación.

En el caso de estimar el resultado de una operación matemática, la relación entre los números involucrados debe ser tal que dificulte el cálculo mental del resultado. Por ejemplo, si se solicita estimar el resultado de **1.400 + 560**, es probable que los niños sumen ambos números y no estimen. También se debe estar atento a que los estudiantes no efectúen primero la operación y luego escojan una estimación apropiada, ya que de esta manera se pierde el sentido original de desarrollar la habilidad de estimar. Para trabajar la estimación de operaciones matemáticas, se sugiere presentar cálculos en que la relación entre los números presente canje o no corresponda a una combinación aditiva o multiplicativa básica.

Otra dificultad al estimar el resultado de una adición o sustracción se produce cuando los números a sumar o restar son de diferente orden de magnitud y el redondeo de ambos sumandos se realiza considerando distinto valor posicional. Por ejemplo, al estimar el resultado de **5.347 + 38** y redondear a la centena el primer sumando y a la decena el segundo, se tiene: **5.300 + 40 = 5.340**, resultado que es menor que el primer sumando y que no tiene sentido en el contexto del cálculo.

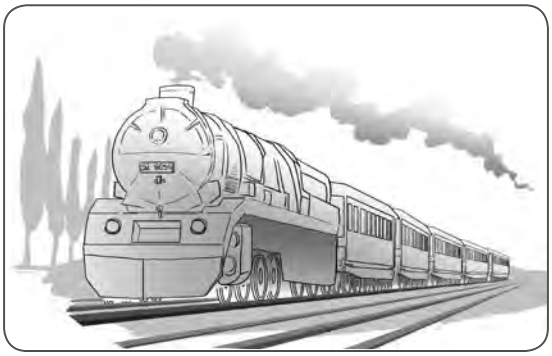
Ejercicios del capítulo

1. Observe las imágenes y describa una estrategia que permita estimar:


   a. La cantidad de aves que hay en la playa.
   b. La cantidad de clavos que hay en la bolsa.
   c. La cantidad de estrellas que hay en el papel que envuelve el regalo.

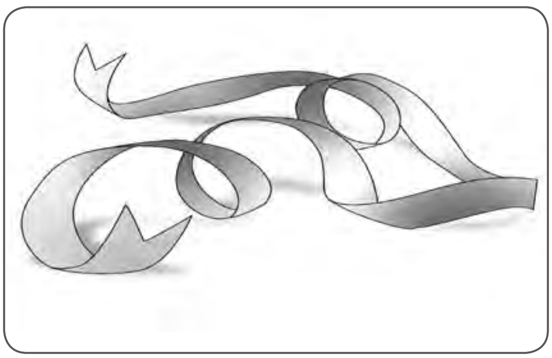
2. Estime la capacidad de pasajeros sentados que puede llevar este tren con 5 vagones.



3. Describa una estrategia que permita estimar el peso de un clavo.

4. Proponga situaciones en que niños y niñas deban estimar:
   a. La longitud de un objeto.
   b. El volumen de un objeto.
   c. La cantidad de objetos que puede contener un recipiente.
   d. El tiempo de duración de un evento.

5. Estime la longitud de la cinta.



6. Una piscina rectangular mide 4 metros de largo y 2 metros de ancho. Si se sabe que la parte menos profunda mide 1 metro y la más profunda mide 3 metros, ¿cuál es el volumen estimado de la piscina?

7. Estime el resultado de las siguientes sumas y restas, identificando la o las estrategias usadas.
   a. 876 + 458 + 624 + 998
   b. 3.526 + 4.779 + 10.988 + 5.311 + 1.911
   c. 5.659 – 3.487
   d. 7.878 – 1.312

8. Estime el resultado de las siguientes multiplicaciones y divisiones, identificando la o las estrategias usadas.
   a. 534 · 17
   b. 4.752 : 61
   c. 3.598 · 209
   d. 7.202 : 81

9. Considere las siguientes estimaciones:
   a. 515 · 328 ≈ 500 · 300 = 150.000
   b. 43.531 : 621 ≈ 42.000 : 600 = 420 : 6 = 70
   c. 316 · 78 ≈ 300 · 80 = 24.000
   d. 378 + 192 ≈ 400 + 200 = 600
   e. 5.721 – 845 ≈ 6.000 – 1.000 = 5.000

   Responda las preguntas para cada una de las estimaciones:
   1. ¿Cuál es la diferencia entre el resultado exacto y la estimación?
   2. ¿Qué estrategia o estrategias se usaron?
   3. ¿Con qué otra estrategia podría haber obtenido una estimación más cercana al resultado exacto?

Capítulo
V
Números naturales

Introducción

Como vimos en los capítulos anteriores, los números se han usado desde hace mucho tiempo para contar y medir. A partir de nuestras intuiciones básicas de juntar, separar, repetir y repartir, le dimos a estos números las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, y de acuerdo a estas intuiciones, justificamos algunas de sus propiedades elementales. Estas operaciones le dan una estructura particular a los números, relacionando grupos de números de acuerdo a alguna característica, por ejemplo, los múltiplos de un número dado. En este capítulo estudiaremos algunos aspectos más complejos de la estructura de los números, principalmente, aquellos relacionados con la división.

Un aspecto importante de este capítulo es que comenzaremos con el desarrollo de razonamiento deductivo más sofisticado que el usado en los capítulos anteriores. Debido a esto, haremos uso de letras para representar números arbitrarios y se requerirá de expresiones que las contienen. El tratamiento de estas expresiones se aborda en profundidad en el **Capítulo I** del texto de *Álgebra* de esta colección.

Los temas tratados en este capítulo, especialmente la divisibilidad, ofrecen muchas oportunidades para que, basados en el desarrollo de ejemplos concretos, los niños y las niñas formulen conjeturas sobre los números, y luego las demuestren a partir de resultados ya aceptados, promoviendo el desarrollo de habilidades de argumentación.

Cabe mencionar que, si bien para la lectura de este capítulo no se requieren conocimientos más allá de los tratados anteriormente, su naturaleza hace que necesite de un mayor esfuerzo de abstracción. Es posible omitir su lectura en este punto y retomarla cuando se hayan adquirido destrezas algebraicas. Sin embargo, es importante remarcar que la mayoría de los resultados de este capítulo son parte del currículo escolar de Educación Básica.

1. Los números naturales

En los tres capítulos anteriores hemos estudiado los números desde una perspectiva intuitiva, explorando cómo pudo haberse generado la idea de número y sus operaciones y propiedades. A la colección de estos números la llamaremos *números naturales* y los denotaremos con la letra N, es decir:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}$$

Por motivos históricos, muchos textos no incluyen al **0** entre los números naturales. En este texto sí lo hemos incluido, pues, de esta forma, muchas definiciones y teoremas resultan un poco más sencillos de enunciar y demostrar. Notamos que no es relevante, para nuestro propósito, si el **0** es o no un número natural. Lo que sí es relevante es que en cada definición, propiedad o teorema quede claro si incluimos o excluimos al **0**.

Recordemos aquí las propiedades principales de las operaciones suma y multiplicación de números naturales:

Dados cualesquiera números naturales m, n y p, se verifican las siguientes propiedades:

- Asociatividad de la suma: $(m + n) + p = m + (n + p)$.
- Conmutatividad de la suma: $m + n = n + m$.
- El **0** es neutro de la suma: $m + 0 = m$.
- Asociatividad de la multiplicación: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$.
- Conmutatividad de la multiplicación: $m \cdot n = n \cdot m$.
- El **1** es neutro multiplicativo: $m \cdot 1 = m$.
- Distributividad del producto sobre la suma: $p \cdot (m + n) = p \cdot m + p \cdot n$.

Todas estas propiedades, y otras, fueron justificadas intuitivamente en los capítulos anteriores. Se omitirá en este texto un tratamiento axiomático formal de los números naturales y sus operaciones, por ejemplo vía los Axiomas de Peano.

En el **Capítulo III**, a partir de estas propiedades, demostramos:

- El **0** es elemento absorbente de la multiplicación: $m \cdot 0 = 0$.

Recordemos que si m y n son números naturales cualesquiera, entonces su resta se puede definir como:

$$m - n = d, \text{ si y solo si } m = n + d.$$

Es decir, $m - n$ es lo que le falta a n para alcanzar a m.

Demostramos anteriormente que la distributividad puede extenderse a la resta:

- Distributividad del producto sobre la resta: $p \cdot (m - n) = p \cdot m - p \cdot n$.

Tenemos también que si $m + p = n + p$, entonces $(m + p) - p = (n + p) - p$, y por la **Propiedad 5** de la **Sección 2.1**, **Capítulo II**, tenemos que $m + (p - p) = n + (p - p)$. Por lo tanto, $m + 0 = n + 0$, y como 0 es neutro de la suma, obtenemos $m = n$. Hemos demostrado la siguiente propiedad:

- Propiedad de cancelación de la suma:

$$\text{Si } m + p = n + p, \text{ entonces } m = n.$$

Recordemos ahora la definición de división entre dos números. Si m y n son números naturales, decimos que:

$$m : n = q, \text{ si y solo si } m = q \cdot n.$$

Por la **Propiedad VI**) de la división, del **Sección 6.5**, **Capítulo III**, tenemos que si $m \cdot p = n \cdot p$ para algún número natural $p \neq 0$, entonces $(m \cdot p) : p = (n \cdot p) : p$, y entonces $m = n$. Hemos demostrado la siguiente propiedad:

- Propiedad de cancelación del producto:

$$\text{Si } p \neq 0 \text{ y } m \cdot p = n \cdot p, \text{ entonces } m = n.$$

A partir de estas propiedades, deduciremos otras más sofisticadas sobre la estructura de los números naturales. Veamos primero qué entendemos por demostración.

Teoremas y demostraciones

El conocimiento matemático se basa en el método deductivo, este consiste en sacar conclusiones, usando el razonamiento lógico, a partir de ciertos principios fundamentales o propiedades que sabemos o suponemos ciertas. En nuestro caso, las propiedades listadas anteriormente. Las conclusiones que realizamos a partir de dichos principios o propiedades son afirmaciones que constituyen un nuevo conocimiento y se llaman *teoremas*. Los teoremas, entonces, son deducciones a partir de los principios básicos obtenidas mediante una *demostración*. Una demostración es un argumento que busca convencer a quien lo escribe y a quien lo lee, de la verdad de lo afirmado por el teorema. Una demostración consiste en pequeños pasos, cada uno de los cuales se basa en algún conocimiento previamente aceptado, ya sea porque es un principio o propiedad, o porque es un dato del problema. De ese conocimiento previo, ayudados por un razonamiento lógico, se saca una conclusión. Una buena demostración debe ser una sucesión de pequeños pasos que conducen a nuevos conocimientos, cada uno de los cuales no debe dejar dudas de su validez.

La demostración de cada afirmación está en la esencia de la matemática, en la que todo nuevo conocimiento debe ser justificado. Parte importante de los beneficios de estudiar y aprender matemática está en la práctica de la deducción: estimula nuestra capacidad de razonar lógicamente. El arte de demostrar afirmaciones se aprende practicando, luego de ver muchas demostraciones, nuestro cerebro, gran buscador y analista de patrones, aprende a imitar demostraciones y llegamos a adquirir destrezas argumentativas.

1.1 La división inexacta o con resto: el algoritmo de la división

El siguiente teorema se llama algoritmo de la división. Sin embargo, no se trata de un algoritmo. Su nombre se debe a que su demostración consiste en aplicar un algoritmo.

Este teorema, de alguna forma, ya fue tratado en el **Capítulo III** y nos dice que si dividimos un número por otro, entonces hay un cociente y un resto. El resto debe ser más pequeño que el divisor, porque si no, el divisor cabría al menos una vez más en el dividendo.

Teorema V.1: el algoritmo de la división

Sean m y n dos números naturales, $n \neq 0$. Entonces existen dos números naturales, q y r, tales que:

- $m = n \cdot q + r$
- $0 \leq r < n$
- Los números q y r son los únicos con estas dos condiciones.

El número q se llama *cociente* y el número r se llama *resto* de la división.

Damos, a continuación, una demostración del teorema, la cual posteriormente es ilustrada con un ejemplo.

Demostración

Recordemos la discusión que hicimos al desarrollar el algoritmo para dividir dos números, en el **Capítulo III**. Tomemos dos números, 342 y 25. Si restamos 25 de 342 una y otra vez, obtenemos:

$$342 > 317 > 292 > 267 > 242 > 217 > 192 > 167 > 142 > 117 > 92 > 67 > 42 > 17$$

Vemos que no podemos seguir restando 25. De esta manera, obtenemos:

$$342 = 25 \cdot 13 + 17$$

Es decir, 13 es el cociente y 17 es el resto. Restando sucesivamente 25 de 342, eventualmente llegamos al número más pequeño que se puede obtener de esa manera. Este es un procedimiento totalmente general para cualesquiera dos números m y n en el lugar de 342 y de 25, respectivamente. Siempre podremos encontrar el número más pequeño que se obtiene restándole a m sucesivamente n sin pasar el 0:

$$m > m - n > m - 2n > m - 3n > m - 4n > \ldots \geq 0$$

La idea, entonces, es que ese número más pequeño que se obtiene por restas sucesivas es el resto buscado, $r = m - q \cdot n$.

También podemos pensar que q es el mayor número tal que $q \cdot n \leq m$. Es decir, podemos acercarnos a m sumando n sucesivamente a partir de 0.

En el ejemplo de la división 342 : 25, tenemos:

$$0 < 25 < 50 < 75 < 100 < 125 < 150 < 175 < 200 < 225 < 250 < 275 < 300 < 325$$

Vemos que no podemos seguir sumando 25 sin pasarnos de 342. Entonces, 25 cabe 13 veces en 342 y sobran $17 = 342 - (13 \cdot 25)$.

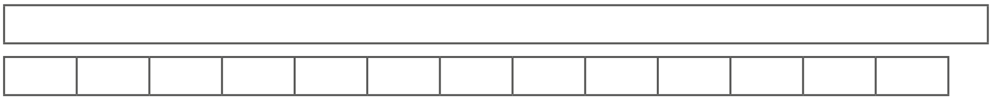


Figura V.1.

En la figura anterior, la barra grande representa al dividendo m y las barras pequeñas al divisor n. Vemos que la barra pequeña cabe un cierto número de veces en la barra blanca (concretamente 13 veces). Esto corresponde a aproximarse con múltiplos de n menores o iguales que m. Vemos también que lo que sobra es menor que la barra pequeña, es decir, esta no cabe otra vez más; lo que sobró es el resto. En el caso de las restas sucesivas, colocamos las barras pequeñas desde el extremo derecho de la barra grande.

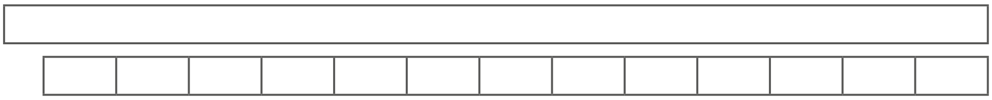


Figura V.2.

Podemos notar que ambos procesos llegan al mismo resultado.

De lo anterior, también podemos decir que:

$q \cdot n \leq m < (q+1) \cdot n$

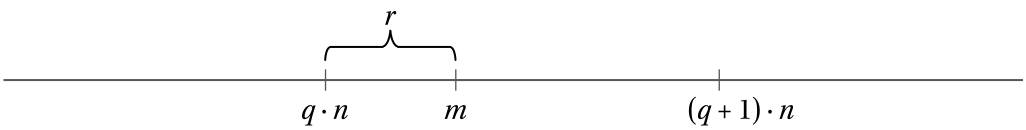


Figura V.3.

Recordamos que el algoritmo que usamos para dividir, y que discutimos en el **Capítulo III**, usa alternadamente ambas estrategias en cada uno de sus pasos, primero aproximando el dividendo con un múltiplo del divisor y luego restando ese múltiplo.

Ejemplos

En la división $26 : 13$, el cociente es $q = 2$ y el resto $r = 0$. Escribimos: $26 = 13 \cdot 2 + 0$.

En la división $47 : 3$, el cociente es $q = 15$ y el resto es $r = 2$. Escribimos: $47 = 15 \cdot 3 + 2$.

En la división $34 : 44$, el cociente es $q = 0$ con resto $r = 34$. Escribimos: $34 = 44 \cdot 0 + 34$.

Una afirmación importante que se hace en el teorema es la unicidad, es decir, existe una única forma de expresar el número m como $m = n \cdot q + r$, con $0 \leq r < n$. Por lo tanto, tenemos que si $m = n \cdot q + r$, con $0 \leq r < n$, entonces en la división $m : n$, el cociente es q y el resto r.

Ejemplos

1) Tenemos que $45 = 8 \cdot 5 + 5$, por lo tanto, el cociente de la división $45 : 8$ es $q = 5$ y el resto, $r = 5$. Sin embargo, no podemos afirmar que $45 : 5$ tenga cociente $q = 8$ y resto $r = 5$, pues r debe ser menor que el divisor, 5 en este caso.
2) Si N es un número tal que $N = 3 \cdot q + 2$, para algún q, tendremos que el resto de la división $N : 3$ es $r = 2$.

Para pensar

¿Por qué se excluye el caso $n = 0$ en el Algoritmo de la División?

Una de las consecuencias del Algoritmo de la División, y que se usa a menudo, es que si fijamos un número n, entonces todo número m se puede escribir de manera única en una de las formas:

$$n \cdot k\,,\; n \cdot k + 1\,,\; n \cdot k + 2\,,\; n \cdot k + 3\,,\; \ldots\; n \cdot k + (n - 1)$$

En otras palabras, al dividir $m : n$ podemos obtener resto $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$, …,o $r = n - 1$.

Por ejemplo, si $n = 2$, dado cualquier número m, o bien $m = 2k$, en cuyo caso decimos que m es par, o bien $m = 2k + 1$, en cuyo caso decimos que m es impar.

Si $n = 3$, entonces todo número es de una de las formas $3 \cdot k$, $3 \cdot k + 1$ o $3 \cdot k + 2$, por ejemplo, $17 = 3 \cdot 5 + 2$, $211 = 3 \cdot 70 + 1$.

Ejemplo

Si a y b son impares, entonces $a^2 + b^2$ es par, pero no es divisible por 4.

Demostración: como a es impar, $a = 2k + 1$ e igualmente $b = 2j + 1$, para ciertos números k y j. Entonces:

$$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2j + 1)^2 = 4 \cdot k^2 + 4k + 1 + 4 \cdot j^2 + 4j + 1$$

Es decir:

$$a^2 + b^2 = 4\,(k^2 + j^2 + k + j) + 2$$

Vemos que $a^2 + b^2$ es par, ya que es suma de múltiplos de 2. Sin embargo, al dividirlo por 4 deja resto 2. Luego, no es divisible por 4.

En resumen

- Dado un número natural $n \neq 0$, cualquier otro número natural m puede expresarse de manera única como un múltiplo de n más un resto menor que n. Es decir, existen únicos q y r, tal que $m = n \cdot q + r$, con $0 \leq r < 0$.

Ejercicios

1. Si se hace una resta sucesiva de 4 en 4 a partir de 115, se obtiene una serie como la siguiente: 115, 111, 107, 103…
   a. ¿En qué número termina la serie? Explique su respuesta.
   b. Si la serie parte en 1.223, ¿en qué número termina? Explique su respuesta.
   c. ¿Cuántos términos tiene la secuencia en a)?, ¿y en b)?

2. Considere la siguiente relación: $D = q \cdot d + r$; donde D es el dividendo de una división, q el cociente, d el divisor y r el resto. Si se sabe que $D < 1000$, que $q = 45$ y $r = 13$, determine todos los pares de números naturales, D y d, que cumplen con la relación anterior para los valores de q y r dados.

3. Sin calcular, señale cuál es el resto de las siguientes divisiones:
   a. 6.362.381.296.356 : 10
   b. 5.730.213790.009.043 : 5
   c. 75.963.000.002.423.400 : 2

4. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta.
   a. El producto de dos números impares es impar.
   b. La suma de números impares es impar.

5. Si hoy es jueves, ¿qué día de la semana será dentro de 50 días? ¿Qué día de la semana será en 18 días?, ¿y en 105 días? Diseñe un método que le permita determinar qué día de la semana será dentro de n días.

6. Demuestre que el cuadrado de cualquier número entero puede tener la forma $3k$, o bien $3k + 1$, pero no puede tener la forma $3k + 2$.

1.2 Divisibilidad

En esta sección profundizaremos las propiedades características de la multiplicación y de la división de números naturales.

Definición V.1: Sean m y n dos números naturales, $n \neq 0$. Decimos que m es divisible por n, si existe un número natural k tal que $m = n \cdot k$ [1].

La siguientes expresiones son equivalentes y son usadas indistintamente:

- m es divisible por n.
- n divide a m.
- n es un divisor de m.
- n divide exactamente a m, es decir, el resto de dividir m por n es 0.
- n es un factor de m.
- m es un múltiplo de n.

Ejemplos

1) 2 divide a 6, ya que $6 = 2 \cdot 3$.
2) 5 divide a $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.
3) 2 no divide a 3, porque no existe un número natural tal que multiplicado por 2 dé 3 como resultado.
4) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ es múltiplo de 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30.

Observamos que:

- Para cualquier número natural $n \neq 0$, tenemos que n divide a n, ya que $n = n \cdot 1$. Es decir, todo número es múltiplo de sí mismo.
- Dado cualquier número natural n, tenemos que 1 divide a n, ya que $n = 1 \cdot n$. Es decir, todo número es múltiplo de 1.
- Dado cualquier número natural $n \neq 0$, tenemos que n divide a 0, ya que $0 = n \cdot 0$. En otras palabras, 0 es múltiplo de cualquier número natural distinto de 0.

Para pensar

Tenemos que $0 = 0 \cdot 0$, sin embargo, de acuerdo a la definición dada, no decimos que 0 es un divisor de 0. ¿Qué diferencia tiene este caso con, por ejemplo, el caso 3 divide a 6?

[1] En muchos libros se escribe $m \mid n$ para abreviar "m divide a n", nosotros no usaremos esta notación.

La relación de divisibilidad tiene tres propiedades elementales, las cuales demostramos en el siguiente teorema:

Teorema V.2

Si A, B y C son números naturales cualesquiera, entonces:

1. A divide a A.
2. Si A divide a B y B divide a C, entonces A divide a C.
3. Si A divide a B y B divide a A, entonces $A = B$.

Demostración

1. Esto ya fue demostrado.
2. Como A divide a B, existe un m tal que $B = A \cdot m$ y como B divide a C, existe un n tal que $C = B \cdot n$. Tenemos entonces que:

   $$C = B \cdot n = (A \cdot m) \cdot n = A \cdot (m \cdot n)$$

   Es decir, A divide a C.
3. Si A divide a B, tenemos que existe un m tal que $B = A \cdot m$. Notamos que m puede ser 1, 2, 3, etc. Por lo tanto, $B \leq A$. Por otro lado, B divide a A y de manera similar tendremos que $A \leq B$.

   Ambas condiciones pueden verificarse simultáneamente solo cuando $A = B$.

Gráficamente podemos ver que un número m es múltiplo de otro número n, si podemos ubicar m cuadraditos en una cuadrícula de n filas, cada una con la misma cantidad de cuadraditos. Por ejemplo, 42 es múltiplo de 7, pues 42 cuadraditos pueden ser colocados exactamente en una cuadrícula de 7 filas.

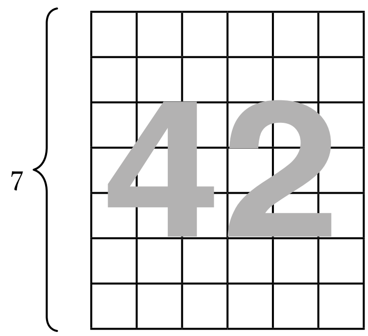


Figura V.4.

Sin embargo, 45 no es múltiplo de 7, pues si tratamos de colocar 45 cuadraditos en 7 filas con igual cantidad de cuadraditos cada una, podremos formar 7 filas con 6 cuadraditos y sobrarán 3 cuadraditos.

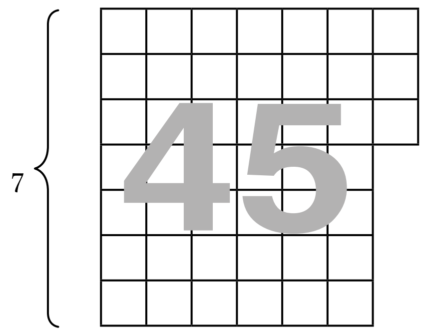


Figura V.5.

Por lo tanto, $45 = 7 \cdot 6 + 3$. Obviamente, esta forma de ver si un número es divisible por otro no es muy práctica para números mayores.

Para averiguar si un número es divisible por otro, tal vez lo primero que se nos ocurre es aplicar el algoritmo de la división visto en el **Capítulo III**. Por ejemplo, para ver si 7.892 es divisible por 7, hacemos:

```
7892 : 7 = 1127
  8
  19
    52
      3
```

Obtuvimos que 7.892 dividido por 7 es 1.127 con resto 3. Escribimos $7.892 = 7 \cdot 1.127 + 3$. Decimos entonces que 7.892 no es divisible por 7, que no es múltiplo de 7, que 7 no divide a 7.892, o que 7 no es un factor o divisor de 7.892.

Veamos ahora si 8.765.232 es divisible por 3.

```
8765232 : 3 = 2921744
27
  06
    05
      22
        13
          12
            0
```

El resto de la división es 0 y, por lo tanto, 8.765.232 es divisible por 3.

Existen, sin embargo, formas más eficientes para averiguar si un número es múltiplo de otro. Previamente, necesitaremos algunos resultados.

Supongamos que queremos ver si 72 es múltiplo de 3. Podríamos escribir $72 = 60 + 12$ y responder que sí, pues $60 + 12 = 3 \cdot (20 + 4)$ es un múltiplo de 3. En otras palabras, al descomponer 72 en una suma de múltiplos de 3, concluimos inmediatamente que también debe ser múltiplo de 3. De manera similar, $72 = 30 + 42$ y como sabemos ahora que 72 es múltiplo de 3 y 30 también lo es, tenemos que:

$$42 = 72 - 30 = 3 \cdot 24 - 3 \cdot 10 = 3 \cdot (24 - 10) = 3 \cdot 14$$

Es también múltiplo de 3.

En general, tendremos que si un número divide a otros dos, también divide a su suma y, por otro lado, si un número divide a una suma y a uno de los sumandos, también divide al otro sumando. Enunciamos esto en el siguiente teorema:

Teorema V.3

Sean R, S y T números naturales tal que R divide a S. Entonces se tiene que:

R divide a $S + T$, si y solo si R divide a T.

Observación:

La suposición inicial del teorema es que R divide a S. Luego, se hacen dos afirmaciones distintas:

La primera afirmación dice que: R divide a $S + T$, si R divide a S. Agregando la suposición inicial, lo que se está diciendo es: si R divide a S y R divide a T, entonces R divide a $S + T$.

La segunda afirmación dice que: R divide a $S + T$, solo si R divide a T. Agregando la afirmación inicial, lo que está diciendo es: si R divide a S y R divide a $S + T$, entonces R debe dividir a T.

Demostración

Demostraremos por separado ambas afirmaciones:

Afirmación 1: si R divide a S y a T, entonces divide a $S + T$.

Como supusimos que R divide a S, tenemos que existe un K tal que $S = R \cdot K$.

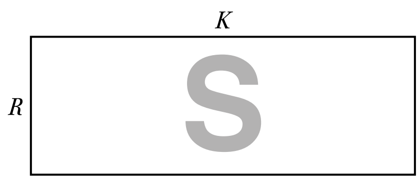


Figura V.6.

Y como supusimos que R divide a T, tenemos que existe un D tal que $T = R \cdot D$.

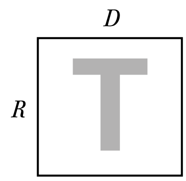


Figura V.7.

Por lo tanto: $S + T = R \cdot K + R \cdot D = R\,(K + D)$ por distributividad. Entonces, $S + T$ es múltiplo de R.

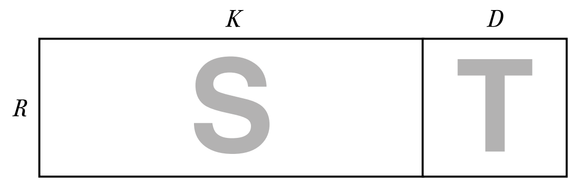


Figura V.8.

Afirmación 2: si R divide a S y a $S + T$, entonces divide a T.

Nuevamente, tenemos que existe un K tal que $S = R \cdot K$.

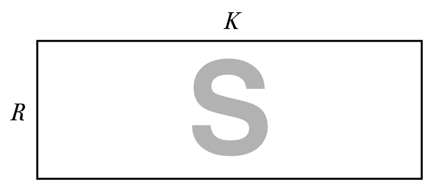


Figura V.9.

Y como ahora R divide a $S + T$, tenemos que existe un E tal que $S + T = R \cdot E$.

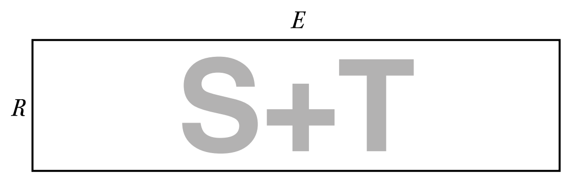


Figura V.10.

Por lo tanto, $T = (S + T) - S = R \cdot E - R \cdot K = R \cdot (E - K)$ por distributividad. Entonces, T es múltiplo de R.

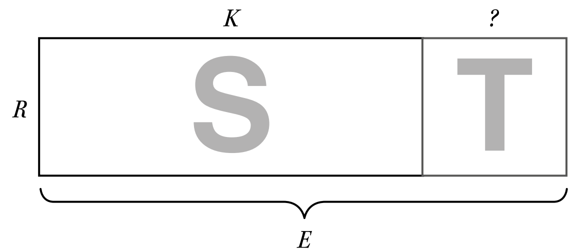


Figura V.11.

Para pensar

En algunos textos se puede encontrar el siguiente teorema respecto de la divisibilidad:

Si S, R y T son números naturales, entonces si R divide a dos de los números S, T y $S+T$, también divide al tercero.

Explique por qué este teorema es equivalente al **Teorema V.1**, es decir, expresan la misma propiedad.

Observamos que podría suceder que $S + T$ fuera múltiplo de R, pero S y T no lo fueran. Por ejemplo, $72 = 35 + 37$ es múltiplo de 3, pero 35 y 37 no lo son.

Ejercicios

1. En una fila de cuadrados de colores se repite el siguiente patrón: rojo, azul, amarillo, verde, morado y blanco. Determine de qué color es el cuadrado que ocupa el lugar 50 y en qué lugar está ubicado el último cuadrado de color morado antes de este. Explique los procedimientos aplicados y fundamente su selección.

2. Si dos números naturales son múltiplos de otro número, lo son también su suma y la diferencia entre el número mayor y el menor.

   Compruebe si esta afirmación se cumple en los siguientes pares de números y fundamente su respuesta.

   a. 10 y 45
   b. 12 y 18
   c. 16 y 50

1.3 Criterios de divisibilidad

Una aplicación importante de este teorema es en el estudio de las condiciones de divisibilidad de números grandes por números pequeños. Es probable que el lector o la lectora ya haya aprendido que si la suma de las cifras de un número es divisible por 3, entonces el número mismo es divisible por 3.

Se llama *criterios de divisibilidad* a reglas simples que permiten saber rápidamente si un número natural es múltiplo de otro. Los criterios más conocidos y los que generalmente aparecen en los libros de texto son los de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11 y 13.

El criterio de divisibilidad más simple es por 10 y sus potencias. En efecto, un número es divisible por 10 si su cifra de las unidades es 0. Esto no es más que una consecuencia de la notación posicional en base 10. El criterio se extiende a potencias de 10.

Ejemplos

1.000 es múltiplo de 10, de 100 y de 1.000.
100 es múltiplo de 10 y de 100.
3.450 es múltiplo de 10.
1.800 es múltiplo de 10 y de 100.

Veamos ahora la divisibilidad por 2. Por ejemplo, comprobemos si el número 3.548 es múltiplo de 2. Podemos escribir:

$3.548 = 3.540 + 8$	Descomponiendo en decenas y unidades.
$= 10 \cdot 354 + 8$	Pues 3.540 es múltiplo de 10.
$= 2 \cdot (5 \cdot 354) + 8$	Pues 10 es múltiplo de 2.

En esta última expresión, vemos que el primer número, $2 \cdot (5 \cdot 354)$, es explícitamente un múltiplo de 2, y como 8 también lo es, por el **Teorema V.3**, la suma debe ser también un múltiplo de 2.

Este mismo procedimiento puede realizarse con cualquier número y vemos que el hecho de que un número sea divisible por 2 es equivalente a que la cifra de las unidades sea divisible por 2.

Antes de proseguir, nos detendremos para explicar una notación muy usada en Matemática. En álgebra usamos letras para denotar objetos matemáticos, números, conjuntos, funciones, etc. Frecuentemente, necesitamos muchas letras y nuestro alfabeto solo tiene unas pocas. Solemos recurrir a letras griegas u otros símbolos, sin embargo, estos también son pocos, ¿cómo seguimos si se nos acaban?

Hay una manera muy sencilla, la de los subíndices. Si necesitamos, digamos, 100 variables para denotar números, entonces usando una sola letra, por ejemplo la a, podemos denotarlos todos con un símbolo distinto: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{100}$. Como podemos imaginarnos, no importa cuántas variables necesitemos, siempre tendremos suficientes subíndices. De esta manera, decir "sean x_1 y x_2 dos números naturales", es equivalente a decir "sean R y S dos números naturales".

En particular, usaremos esta notación con subíndices para referirnos a los dígitos de un número cualquiera. Escribiremos a_0 para el dígito que ocupa el lugar de las unidades, a_1 para el dígito de las decenas, a_3 para el de las centenas, etc. Tendremos entonces que un número de n+1 cifras se puede expresar como:

$$a_\mathrm{n} a_{n-1} \cdots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Usaremos esta notación para demostrar en forma general algunos de los criterios de divisibilidad. Veamos un ejemplo para ilustrar su uso en el caso de la divisibilidad por 2.

Tenemos que el número $78.924 = a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$ con $a_0 = 4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 9$, $a_3 = 8$, $a_4 = 7$.

Para ver si es múltiplo de 2, procedemos como antes. En paralelo, usamos la notación con subíndices:

$$\begin{aligned} 78.924 = 78.920 + 4 \quad & = a_4 a_3 a_2 a_1 0 + a_0 \\ =10 \cdot 7.892 + 4 \quad & = 10 \cdot a_4 a_3 a_2 a_1 + a_0 \\ =2 \cdot 5 \cdot 7.892 + 4 \quad & = 2 \cdot 5 \cdot a_4 a_3 a_2 a_1 + a_0 \end{aligned}$$

El número, $2 \cdot 5 \cdot 7.892$, es múltiplo de 2 y el 4 también lo es, por lo tanto, su suma debe ser un múltiplo de 2. Con subíndices, diríamos que $2 \cdot 5 \cdot a_4a_3a_2a_1$ es múltiplo de 2 y $a_0 = 4$ también lo es, por lo tanto, la suma $2 \cdot 5 \cdot a_4a_3a_2a_1 + a_0$ también es múltiplo de 2.

Estamos listos para escribir la demostración general de la divisibilidad por 2.

Teorema V.4

Un número natural es divisible por 2 si y solo si la cifra de las unidades es 0, 2, 4, 6 u 8.

Demostración

Un número natural puede escribirse en notación decimal como:

$$a_na_{n-1} \cdots a_1a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Donde a_0 es la cifra de las unidades, a_1 es la cifra de las decenas, etc. En particular, podemos escribir:

$$\begin{aligned} a_na_{n-1} \ldots a_1a_0 &= 10 \cdot a_na_{n-1} \cdots a_1 + a_0 \\ &= 2 \cdot 5 \cdot a_na_{n-1} \cdots a_1 + a_0 \end{aligned}$$

Como $2 \cdot 5 \cdot a_na_{n-1} \cdots a_1$ es múltiplo de 2, por el **Teorema V.3**, tenemos que $a_na_{n-1} \cdots a_1a_0$ es múltiplo de 2, si y solo si a_0 es múltiplo de 2.

Para concluir, notamos que como a_0 es un dígito, será múltiplo de 2 si y solo si es igual a 0, 2, 4, 6 u 8.

Hemos demostrado que $a_na_{n-1} \cdots a_1a_0$ es divisible por 2 si y solo si a_0 es 0, 2, 4, 6 u 8.

Teorema V.5

Un número natural es divisible por 5 si y solo si la cifra de las unidades es 0 o 5.

Ejercicio

1. Demuestre el teorema de divisibilidad por 5 siguiendo el modelo de la divisibilidad por 2.

Ejemplos

1.234.562.345 es múltiplo de 5, pues el dígito de las unidades es 5, pero no es múltiplo de 2, pues el dígito de las unidades no es 0, 2, 4, 6 u 8.

32.184 es múltiplo de 2, pero no de 5.

5.689.340 es múltiplo de 2 y de 5.

34.789 no es múltiplo de 2 ni de 5.

Si queremos averiguar si 3.548 es múltiplo de 4, podemos escribir:

$$\begin{aligned} 3.548 &= 3.500 + 48 && \text{Descomponiendo el número.} \\ &= 100 \cdot 35 + 48 && \text{Expresándolo como suma de centenas y unidades.} \\ &= 4 \cdot (25 \cdot 35) + 48 && \text{Escribiendo 100 como } 4 \cdot 25. \end{aligned}$$

Como $4 \cdot 25 \cdot 35$ es múltiplo de 4, por el **Teorema V.** se tiene que 3.548 es divisible por 4 si y solo si 48 lo es. Se verifica directamente, es decir, mediante una división, que 48 es múltiplo de 4. Podemos observar, entonces, que la divisibilidad por 4 depende solo de los dos primeros dígitos del número.

Teorema V.6

Un número natural es divisible por 4 si y solo si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.

Demostración

Escribimos, como antes, un número natural como:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 &= 100 \cdot a_n a_{n-1} \cdots a_2 + a_1 a_0 \\ &= (4 \cdot 25) \cdot a_n a_{n-1} \cdots a_2 + a_1 a_0 \\ &= 4 \cdot (25 \cdot a_n a_{n-1} \cdots a_2) + a_1 a_0. \end{aligned}$$

Por el **Teorema V.1** tenemos que $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ es múltiplo de 4 si y solo si $a_1 a_0$ es múltiplo de 4.

Ejercicios

1. Demuestre que un número $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ es divisible por 4 si y solo si $2\,a_1 + a_0$ lo es. Sugerencia: considere primero un número concreto y luego realice la demostración formal.

2. Encuentre un criterio que permita determinar la divisibilidad por 8.

   Sugerencia: considere primero un número concreto e intente un argumento similar a la divisibilidad por 4. Luego realice la demostración formal.

Teorema V.7

Un número natural es divisible por 9 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Demostración

Consideremos un número $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ y veamos su descomposición como suma de potencias de 10, es decir:

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Observamos que para cada n:

$$10^n = \underbrace{99 \cdots 99}_{n} + 1 = 9 \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{n} + 1 = 9 \cdot k_n + 1$$

Para el número k_n, el cual tiene n cifras todas iguales a 1. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 &= a_n (9 \cdot k_n + 1) + a_{n-1} (9 \cdot k_{n-1} + 1) + \cdots + a_2 (99 + 1) + a_1 (9 + 1) + a_0 \\ &= 9 (a_n \cdot k_n + a_{n-1} \cdot k_{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 11 + a_1 \cdot 1 + a_0) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0) \end{aligned}$$

Por el **Teorema V.3** tenemos que $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ es un múltiplo de 9 si y solamente si $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$ es un múltiplo de 9.

La demostración del siguiente teorema es muy similar a la del teorema anterior.

Teorema V.8

Un número natural es divisible por 3 si y solo la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

En resumen

Sea $N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ un número natural. Entonces tenemos que N es:

- Múltiplo de 2, si a_0 es múltiplo de 2.
- Múltiplo de 3, si $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ es múltiplo de 3.
- Múltiplo de 4, si $a_1 a_0$ es múltiplo de 4.
- Múltiplo de 5, si a_0 es 0 o 5.
- Múltiplo de 9, si $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ es múltiplo de 9.

Ejercicios de la sección

1. Demuestre el **Teorema V.8**.

2. Sean a, b y c tres números naturales (o cero) cualesquiera. Demuestre o dé un contraejemplo para:
   a. Si a divide a $a+b$, entonces a divide a b.
   b. Si a divide a b, entonces a divide a $a^2 + bc$.
   c. Si a divide a b y b divide a c, entonces a divide a $b + c$.
   d. Si a no divide a $b + c$, entonces a no divide a b y a no divide a c.
   e. Si a^2 divide a b^2, entonces a divide a b.
   f. Si a divide a b^2, entonces a^2 divide a b^2.

3. Demuestre los siguientes criterios de divisibilidad. Recordemos que todo número natural se escribe en notación decimal como:

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

a_0 es su dígito de las unidades, a_1 es su dígito de las decenas, etc.

   a. Un número es divisible por 8, si 8 divide $a_2 a_1 a_0$.
   b. Un número es divisible por 8, si 8 divide $4a_2 + 2a_1 + a_0$.
   c. Un número es divisible por 7, si $a_2\, a_1\, a_0 - a_5\, a_4\, a_3 + a_8\, a_7\, a_6 - \cdots$ es divisible por 7. Haga la demostración para un número de 6 cifras. Note que 1.001 y 999.999 son múltiplos de 7.
   d. Un número es divisible por 7 si y solo si $a_n a_{n-1} \cdots a_1 - 2\, a_0$ es múltiplo de 7. Para la demostración, observe que $a_0 = 21\, a_0 - 20\, a_0$). Explique cómo se puede usar esta propiedad para ver si un número es múltiplo de 7.
   e. Un número es divisible por 11 si $a_2\, a_1\, a_0 - a_5\, a_4\, a_3 + a_8\, a_7\, a_6 - \cdots$ es divisible por 11. Haga la demostración para un número de 6 cifras. Note que 1.001 y 999.999 son múltiplos de 11.
   f. Un número es divisible por 11 si la suma de las cifras de lugar par, menos la suma de las cifras de lugar impar es múltiplo de 11. Es decir, si $(\cdots a_6 + a_4 + a_2 + a_0) - (\cdots a_7\, a_5\, a_3 a_1)$. Haga la demostración para un número de 5 cifras. Note que $10.000 = 9.999 + 1$, $1.000 = 1.001 - 1$, $100 = 99 + 1$ y $10 = 11 - 1$.
   g. Un número es divisible por 13 si y solo si $a_n a_{n-1} \cdots a_1 - 9\, a_0$ es múltiplo de 13. Para la demostración, observe que $a_0 = 91\, a_0 - 90\, a_0$.
   Explique cómo se puede usar esta propiedad para ver si un número es múltiplo de 13.

4. Invente un criterio de divisibilidad por 17, observando que $a_0 = 51a_0 - 50\, a_0$.

5. Invente un criterio de divisibilidad por 19, observando que $a_0 = 171\, a_0 - 170\, a_0$.

6. Señale, para cada uno de los siguientes números, si son divisibles por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 13.

   a. 32.568
   b. 6.475
   c. 216.495
   d. 4.213.220

7. Escribimos $N!$ y leemos "N factorial" para expresar de manera compacta el producto de los N primeros números naturales. Por ejemplo:

   $1! = 1$
   $2! = 1 \cdot 2$
   $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$
   $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

   a. Escriba la factorización en primos de 10!
   b. ¿Es 30! divisible por 2.400.000?
   c. ¿Cuántos ceros hay al final de la expresión decimal de 10!, de 40! y de 1.000!?

8. El número 5! es divisible por 2, 3, 4 y 5.

   a. Pruebe que los números 5! + 2, 5! + 3, 5! + 4, 5! + 5 son compuestos.
   b. Encuentre un factor de 50! + 35.
   c. Encuentre 1.000 números consecutivos que sean compuestos.

2. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

En esta sección veremos los conceptos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor y cómo se relacionan. Desarrollaremos el Algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos números. Los conceptos de primo y de primo relativo serán usados a lo largo de la sección y por esta razón de definen tempranamente. Se demostrará el Lema de Euclides y se usará para obtener resultados sobre la factorización de números naturales.

2.1 Números primos

Definición V.2: Un número natural p se dice *primo* si $p \neq 1$ y sus únicos divisores son 1 y p. Los números que no son primos se llaman *compuestos*.

Por ejemplo, 2, 3, 5, son los primeros números primos, en cambio $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$ son compuestos, porque tienen otros divisores distintos de ellos mismos y el 1.

Para pensar

¿Por qué cree usted que el número 1 se excluye de la definición de número primo?

Los números primos juegan un papel muy importante en la teoría de números, ya que, como veremos, son bloques básicos con los que se forman todos los números. De esta manera, los números primos son más simples que los otros, ya que solo se pueden descomponer como producto de 1 por el propio número.

Determinar si un número es primo o no puede ser muy difícil. De hecho, en las últimas décadas la investigación en torno a la búsqueda de números primos muy grandes ha tenido mucha actividad debido a su aplicación en los códigos secretos que se emplean para transferir información computacional. La manera más sencilla para encontrar los números primos pequeños es la llamada Criba de Eratóstenes[1]. Esta consiste en una tabla en la que se escriben todos los números a partir del 1, hasta donde nos interese conocer, 100, 500, 1.000, etc. Enseguida, se van borrando los números como sigue. El 2 es primo, lo dejamos. Luego borramos todos los múltiplos de 2, o sea, 4, 6, 8, etc. Una vez que hemos terminado, buscamos el primer número que no ha sido borrado. Este es el 3, primo también, y procedemos como con el 2, dejamos el 3 y borramos todos sus múltiplos. Volvemos a empezar, vemos que el 4 ya fue borrado en una etapa anterior, luego sigue el 5, la próxima vez será el 7 y la siguiente el 11, ya que 8, 9 y 10 fueron eliminados en las primeras rondas. El proceso termina cuando ya no quedan números por borrar y los que han sobrevivido son todos los primos menores que la cantidad elegida.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Figura V.12. La Criba de Eratóstenes hasta el número 100.

[1]La palabra "criba" significa cedazo o harnero.

Así, obtenemos que los números primos menores que 100 son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

2.2 Máximo común divisor

Definición V.3: Sean m y n dos números naturales no nulos. El mayor número natural que divide tanto a m como a n se llama el *máximo común divisor* de m y n. El máximo común divisor de m y n se denota $MCD\{m, n\}$[2].

Dos números naturales se dicen primos relativos si su máximo común divisor es 1.

Notamos que, por definición, $MCD\{m, n\} = MCD\{n, m\}$.

El máximo común divisor de dos números pequeños se puede calcular fácilmente haciendo una lista de los divisores de cada número y constatando cuál es el mayor número que se repite en ambos. Por ejemplo, para calcular $MCD\{24,32\}$, vemos.

Divisores de 24: $\underline{1}$, $\underline{2}$, 3, $\underline{4}$, 6, $\underline{\mathbf{8}}$, 12 y 24.
Divisores de 32: $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{4}$, $\underline{\mathbf{8}}$, 16 y 32.

Donde hemos subrayado los divisores comunes y 8 es el mayor. Por lo tanto, $MCD\{24,32\} = 8$. Notamos también que todos los divisores comunes dividen al máximo común divisor. Esto no es una casualidad, es un resultado general que será demostrado cuando tengamos algunas herramientas más.

Esta estrategia de listar los divisores no es muy eficiente para números mayores. Por ejemplo, $MCD\{454,136\}$ ya requiere de bastante trabajo. Más adelante veremos un método más eficiente.

Ejercicios

1. Calcule $MCD\{454,136\}$ haciendo una lista de todos los posibles divisores de cada uno de los números.

2. Determine si los pares de números son primos relativos.

   a. 27 y 18 b. 72 y 35 c. 28 y 63 d. 100 y 99

[2] En muchos libros el máximo común divisor se denota (n,m), pero esa notación es algo confusa porque también es usada para otros fines.

Observamos que:

- Si n divide a m, entonces $MCD\{n, m\} = n$.

Está claro que n es un divisor común, también está claro que no puede haber un divisor de n que sea más grande que n.

- Si p es un número primo, entonces o bien $MCD\{n, p\} = 1$, o $MCD\{n, p\} = p$.

Como p es primo, sus únicos divisores son 1 y p, por lo tanto, si p no divide a n, entonces $MCD\{n, p\} = 1$. Por otra parte, si p divide a n, entonces $MCD\{n, p\} = p$.

Supongamos que queremos encontrar el máximo común divisor de 44 y 12. Dividamos 44 por 12. Entonces, obtenemos $44 = 12 \cdot 3 + 8$.

Si estudiamos los divisores de dividendo, divisor y resto, tenemos:

Divisores de 44: 1, 2, 4, 11, 22 y 44.
Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
Divisores de 8: 1, 2, 4 y 8.

Observamos que los divisores comunes de los tres números son los mismos: 1, 2 y 4. Naturalmente, $MCD\{44,12\} = 4$, pero también $MCD\{12,8\} = 4$, ¿será esta una casualidad?

Ejercicio

Haga lo mismo que hicimos en el ejemplo anterior con los números 70 y 28. Inténtelo con cualquier par de números.

El siguiente teorema nos muestra que lo ilustrado en los ejemplos anteriores ocurre para cualquier par de números.

Teorema V.9

Si $m = n \cdot q + r$, entonces $MCD\{m, n\} = MCD\{n, r\}$.

Demostración

Usando el **Teorema V.3**, está claro que si un número divide tanto a n como a r, entonces ese número dividirá a m. Por lo tanto, los divisores comunes de n y r son también divisores comunes de m y n.

Por el mismo teorema, si un número divide a m y a n, entonces también divide a r. Por lo tanto, los divisores comunes de m y n son también divisores comunes de n y de r.

En resumen, ambas parejas de números, $\{m, n\}$ y $\{n, r\}$, tienen los mismos divisores comunes. Por lo tanto, el mayor de ellos debe ser el mismo. En otras palabras, $MCD\{m, n\} = MCD\{n, r\}$.

La utilidad del teorema anterior es que nos puede ayudar a calcular el máximo común divisor de dos números. Si $m > n$, vemos que los números m y n son más grandes que n y r, de modo que calcular $MCD\{n, r\}$ debería ser más fácil que calcular $MCD\{m, n\}$. A continuación analizamos un álgoritmo que, basado en esta observación, permite calcular de manera muy eficiente el máximo común divisor de dos números.

2.3 El algoritmo de Euclides

Sean m y n dos números naturales distintos de 0. Entonces, por el Algoritmo de la División, existen números q y r tales que $m = n \cdot q + r$, con $0 \leq r < n$.

Si $r = 0$, entonces n divide a m, y como ya fue discutido, $MCD\{m, n\} = n$ y hemos terminado.

Si $r > 0$, comenzamos una segunda ronda del algoritmo, dividiendo n por r.

Entonces, existen q_1 y r_1 tales que $n = r \cdot q_1 + r_1$, con $0 \leq r_1 < r$. Si $r_1 = 0$, entonces $MCD\{n, r\} = r$ y por el **Teorema V.9**, $MCD\{m, n\} = r$ y hemos terminado.

Si $r_1 > 0$, comenzamos una tercera ronda del algoritmo. Entonces, existen q_2 y r_2 tales que $r = r_1 \cdot q_2 + r_2$ y $0 \leq r_2 < r_1$.

Si $r_2 = 0$, entonces $MCD\{r, r_1\} = r_1$ y por el **Teorema V.9**, $MCD\{m, n\} = r_1$ y hemos terminado.

Vemos que en este proceso se puede ejecutar ronda tras ronda. En cada una, si el resto obtenido en la división es 0, el resto anterior es el máximo común divisor buscado. Si el resto obtenido no es 0, ejecutamos otra ronda.

La observación importante ahora es que el proceso no puede continuar indefinidamente. En efecto, en cada aplicación del procedimiento el resto obtenido es estrictamente menor que el de la aplicación precedente, vale decir, si r es el resto obtenido en la primera ronda, tenemos:

$$r > r_1 > r_2 > \cdots > r_n > 0$$

Pero hay solo $r - 1$ números entre 0 y r, de modo que antes de r pasos, el procedimiento tiene que arrojar resto 0.

Si $r_n = 0$, entonces r_{n-1} divide a r_{n-2}, en cuyo caso $MCD\{r_{n-1}, r_{n-2}\} = r_{n-1}$ y aplicando el T**eorema V.9** varias veces, $MCD\{m, n\} = r_{n-1}$, es decir, el resto inmediatamente anterior al resto que se anula.

Ejemplos

Calculemos el máximo común divisor de 454 y 136.

$$\begin{aligned} 454 &= 136 \cdot 3 + 46 \\ 136 &= 46 \cdot 2 + 44 \\ 46 &= 44 \cdot 1 + 2 \\ 44 &= 2 \cdot 22 + 0 \end{aligned}$$

Es decir, el máximo común divisor de 454 y 136 es 2, ya que es el último resto que es distinto de 0.

El procedimiento anterior se suele sintetizar con el siguiente diagrama:

	3	2	1	22
454	136	46	44	2
46	44	**2**	0	

Tabla V.1.

Donde hemos puesto los cocientes en la primera fila y los restos en la tercera. El último resto distinto de 0, correspondiente al máximo común divisor, está marcado.

Para pensar

Para aplicar el Algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor entre dos números, conviene comenzar con el cociente del mayor por el menor. Explique por qué el algoritmo también funciona si comenzamos con el cociente del menor por el mayor.

A partir de los cálculos realizados, podemos desandar el camino para relacionar directamente 454, 136 y su máximo común divisor. Más concretamente:

$2 = 46 - 1 \cdot 44$ Pues $46 = 44 \cdot 1 + 2$.

$2 = 46 - 1 \cdot (136 - 2 \cdot 46)$ Pues $136 = 46 \cdot 2 + 44$.

$2 = (454 - 3 \cdot 136) - 1 \cdot (136 - 2 \cdot (454 - 3 \cdot 136))$ Pues $454 = 136 \cdot 3 + 46$.

Si bien podemos evitar el uso de operaciones entre números negativos, las expresiones que se obtienen pierden de vista el objetivo de los cálculos. Preferimos, en este único caso, simplificar la expresión operando con las reglas conocidas para la operatoria de números enteros y que serán tratadas en el **Capítulo X**. Tenemos:

$2 = 454 - 3 \cdot 136 - 1 \cdot 136 + 2 \cdot (454 - 3 \cdot 136)$ → Usando distributividad y la regla de los signos.

$2 = 454 - 3 \cdot 136 - 1 \cdot 136 + 2 \cdot 454 - 2 \cdot 3 \cdot 136$ → Propiedad distributiva.

$2 = 3 \cdot 454 - 10 \cdot 136$ → Factorizando (propiedad distributiva).

Veamos otro ejemplo. Calculemos el máximo común divisor de los números 3.468 y 486:

$$\begin{aligned} 3.468 &= 486 \cdot 7 + 66 \\ 486 &= 66 \cdot 7 + 24 \\ 66 &= 24 \cdot 2 + 18 \\ 24 &= 18 \cdot 1 + 6 \\ 18 &= 6 \cdot 3 + 0, \end{aligned}$$

Por lo tanto, $MCD\{3.468,486\} = 6$.

De aquí podemos obtener la descomposición del máximo común divisor en términos de los números originales. Tenemos:

$6 = 24 - 18$	Pues $24 = 1 \cdot 18 + 6$.
$6 = 24 - (66 - 2 \cdot 24)$	Pues $66 = 24 \cdot 2 + 18$.
$6 = (486 - 7 \cdot 66) - (66 - 2 \cdot (486 - 7 \cdot 66))$	Pues $486 = 66 \cdot 7 + 24$.
$6 = (486 - 7 \cdot (3.468 - 7 \cdot 486)) - ((3.468 - 7 \cdot 486) - 2 \cdot (486 - 7 \cdot (3.468 - 7 \cdot 486)))$	Pues $3.468 = 486 \cdot 7 + 66$.

$6 = 486 - 7 \cdot 3.468 + 7 \cdot 7 \cdot 486 - 3.468 + 7 \cdot 486 + 2 \cdot 486 - 2 \cdot 7 \cdot 3.468 + 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 486$

$6 = -22 \cdot 3.468 + 157 \cdot 486$

De esta manera, $MCD\{3.468,486\} = 6 = 157 \cdot (486) - 22 \cdot (3.468)$.

Se ve que podemos hacer lo mismo con cualquier par de números.

Los dos ejemplos anteriores son casos particulares del siguiente teorema:

Teorema V.10: Teorema de Bezout

Dados dos números naturales m y n distintos de 0, su máximo común divisor $MCD\{m, n\}$ es el menor número natural positivo que se puede escribir como resta de múltiplos de m y múltiplos de n.

Omitiremos la demostración formal de este teorema, la cual puede realizarse siguiendo el razonamiento ilustrado en los ejemplos anteriores. Este teorema será usado en lo que sigue del capítulo.

Si $d = MCD(m, n)$, notamos que el Teorema de Bezout dice que:

$$d = am - bn, \text{ o } d = bn - am$$

Para algún par de números naturales a y b. Estas dos alternativas son necesarias, pues no sabemos de antemano cuál de los múltiplos va primero.

Podríamos condensar estas dos alternativas en una sola, $d = am + bn$, si permitimos que a y b sean números enteros.

A partir del Teorema de Bezout, se deduce el siguiente Teorema.

Teorema V.11

Los números m y n son relativamente primos si y solo si existen a y b números naturales tales que $1 = a \cdot m - b \cdot n$, o bien $1 = b \cdot n - a \cdot m$.

Ejemplos

1) Consideremos los números 24 y 32. Como vimos antes:

$$MCD\{24{,}32\} = 8 = 1 \cdot 32 - 1 \cdot 24$$

2) Como acabamos de ver, $MCD\{454{,}136\} = 2 = 3 \cdot 454 - 10 \cdot 136$.

3) Observemos que:

$$8 = 1 \cdot 32 - 1 \cdot 24 = 4 \cdot 32 - 5 \cdot 24 = 3 \cdot 24 - 2 \cdot 32$$

Y podríamos encontrar muchas otras descomposiciones, de hecho, hay infinitas maneras de escribir 8 como restas de múltiplos de 24 y 32. ¿Será esta una relación que se da solo entre los números 8, 24 y 32?

Ejercicio

Demuestre que si un número N se puede escribir en la forma $N = am - bn$, entonces también es posible escribirlo en la forma $N = pn - qm$. De hecho, cada número se puede escribir infinitas veces de estas formas.

Consideremos ahora dos números naturales m y n. Sea $d = MCD\{m, n\}$. Entonces $m = d \cdot k$ y $n = d \cdot k'$, para ciertos números k y k'. Demostremos que k y k' son primos relativos. Por el Teorema de Bezout, tenemos alguno de los dos casos:

$$d = a \cdot m - b \cdot n \quad \text{o} \quad d = b \cdot n - a \cdot m$$

Para ciertos números a y b. Supongamos que tenemos $d = a \cdot m - b \cdot n$, entonces:

$d = a \cdot (d \cdot k) - b \cdot (d \cdot k')$	Reemplazando a y b.
$d = d \cdot (a \cdot k - b \cdot k')$	Factorizando.
$1 = a \cdot k - b \cdot k'$	Dividiendo por d (cancelación del producto).

En el otro caso la conclusión es similar.

Ahora, como $MCD\{k, k'\}$ es el número más pequeño que se puede escribir de esa manera, no puede haber uno más chico que 1, por lo tanto, $MCD\{k, k'\} = 1$.

Hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema V.12

Si $d = MCD\{m, n\}$, entonces $MCD\{m : d, n : d\} = 1$.

Probaremos ahora un resultado que mencionamos al comienzo.

Teorema V.13

Si d' es un divisor común de m y de n, entonces d' divide a $d = MCD\{m, n\}$.

Demostración

Por el Teorema de Bezout, tenemos que existen números naturales a y b tales que:

$$d = am - bn \text{ o } d = bn - am$$

Supongamos que $d = am - bn$.

Como d' divide a m, tenemos que d' divide a am.

Como d' divide a n, tenemos que d' divide a bn.

Entonces d' divide a la resta $am - bn = d$.

La demostración en el otro caso es similar y se deja a cargo del lector.

Ejercicio

Demuestre que si d' es un divisor común de m y n, y $d = MCD(m, n)$, se tiene que:

$d : d' = MCD\{m : d', n : d'\}$.

Consideremos ahora tres números naturales, a, b y c. Queremos encontrar el máximo común divisor de estos tres números, el cual anotamos como $MCD\{a, b, c\}$. El siguiente teorema indica una forma de hacerlo:

Teorema V.14

$MCD\{a, b, c\} = MCD\{MCD\{a, b\}, c\}$

Demostración

Si d divide a a, b y c entonces, por el teorema anterior, d divide a $MCD\{a, b\}$ y a c.

Por otro lado, si d divide a $MCD\{a, b\}$ y a c, entonces divide a a, b y c.

Tenemos entonces que los divisores comunes de $MCD\{a, b\}$ y c son los mismos que los divisores comunes de a, b y c.

Por lo tanto, el máximo de los divisores comunes de $MCD\{a, b\}$ y c coincide con el máximo de los divisores comunes de a, b y c. Es decir:

$$MCD\{a, b, c\} = MCD\{MCD\{a, b\}, c\}$$

Ejercicio

Demuestre que $MCD\{MCD\{a, b\}, c\} = MCD\{a, MCD\{b, c\}\}$.

El teorema anterior nos da una forma de calcular el máximo común divisor de tres números. No es difícil adaptar este teorema para calcular el máximo común divisor de una cantidad arbitraria de números: podemos ir calculándolo de a dos.

El cálculo del máximo común divisor aparece naturalmente en diversos problemas de contexto. Veamos un ejemplo.

A una distribuidora se le hace un pedido de sándwiches de tres tipos diferentes:

Tipo A: 18

Tipo B: 45

Tipo C: 135

Si la distribuidora debe enviar los sándwiches en cajas, todas de igual tamaño y con un mismo tipo de sándwich, ¿cuántos sándwiches debe contener cada caja para que el número de cajas sea el menor posible?

Debemos encontrar un número que divida a 18, 45 y 135 a la vez. Además, ese número debe ser el mayor posible para que quepan más sándwiches por caja y usemos la menor cantidad posible de cajas.

Una forma para encontrar el máximo común divisor es listar los divisores de los tres números:

18: 1, 2, 3, 6, 9, 18

45: 1, 3, 9, 15, ...

135: 1, 3, 9, 15, ...

Notamos que no completamos las listas de 45 y 135, pues el divisor común no puede exceder al menor de los números, en este caso, 18.

Tenemos entonces que $MCD\{18, 45, 135\} = 9$.

De esta forma, las cajas deben contener 9 sándwiches cada una.

Otra forma de proceder para calcular el máximo común divisor en el problema anterior es usar que:

$$MCD\{18, 45, 135\} = MCD\{MCD\{18, 45\}, 135\} = MCD\{9, 135\} = 9$$

También podríamos haber notado que:

$$MCD\{18, 45, 135\} = MCD\{18, MCD\{45, 135\}\} = MCD\{18, 45\} = 9$$

Pues 45 divide a 135.

Más adelante veremos cómo calcular el máximo común divisor usando la descomposición en factores primos.

Veamos una interpretación gráfica del máximo común divisor. Calculemos $MCD\{16,6\}$. Si pensamos en una cuadrícula de $16 \cdot 6$, encontrar el máximo común divisor corresponde a encontrar el cuadrado de lado máximo con el cual podemos embaldosar la cuadrícula.

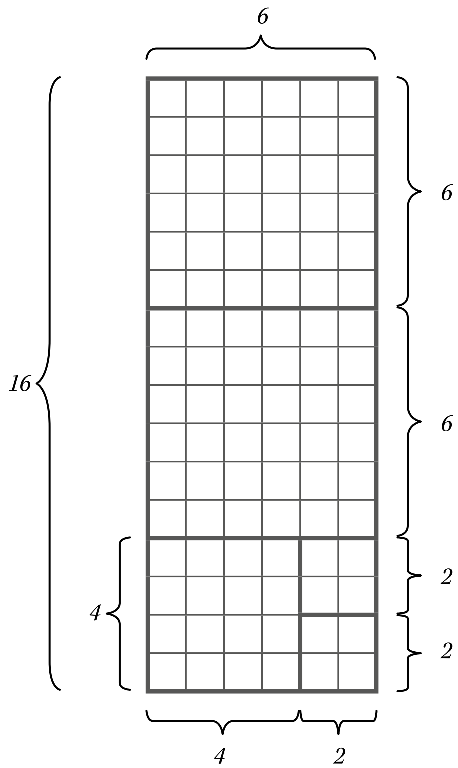


Figura V.13.

Tenemos que:

$16 = 6 \cdot 2 + 4$, entonces caben 2 cuadrados de largo 6 y sobra una cuadrícula de $4 \cdot 6$.

$6 = 4 \cdot 1 + 2$, entonces en la cuadrícula de $4 \cdot 6$ cabe un cuadrado de largo 4 y sobra una cuadrícula de $4 \cdot 2$.

$4 = 2 \cdot 2 + 0$, entonces en la cuadrícula de $4 \cdot 2$ caben exactamente dos cuadrados de lado 2.

Ya vimos que el máximo común divisor es el último resto distinto de 0 en este proceso. Por lo tanto, tenemos que el cuadrado de lado máximo con el que se puede embaldosar la cuadrícula de $16 \cdot 6$ es un cuadrado de $2 \cdot 2$. Necesitaremos 3 cuadrados a lo ancho $(6 : 2)$ y 8 cuadrados a lo alto $(16 : 2)$. En total, necesitamos $3 \cdot 8 = 24$ cuadrados para embaldosar la cuadrícula (¡sin partir ningún cuadrado!).

2.4 El lema de Euclides

El siguiente resultado es conocido como Lema de Euclides. Responde parcialmente la pregunta: ¿si un número divide a un producto, debe dividir a alguno de sus factores? En general, la respuesta es no, por ejemplo, 6 divide a $12 = 3 \cdot 4$, sin embargo, 6 no divide a 3 y 6 no divide a 4.

Teorema V.15: Lema de Euclides

Si p es un número primo y p divide a $m \cdot n$, entonces p divide a m o p divide a n.

Este teorema es un caso particular del próximo teorema, el cual responde la pregunta anterior en forma más general.

Teorema V.16

Si $MCD\{q, m\} = 1$ y q divide a $m \cdot n$, entonces q divide a n.

Demostración

Si q divide a $m \cdot n$, entonces $m \cdot n = q \cdot k$, para algún k. Si $1 = a \cdot m - b \cdot q$, multiplicando ambos miembros por n y usando distributividad, asociatividad y conmutatividad:

$$n = (a \cdot m) \cdot n - (b \cdot q) \cdot n = a \cdot (q \cdot k) - n \cdot (b \cdot q) = q \cdot (\, q \cdot k - n \cdot b)$$

Es decir, n es un múltiplo de q. Si $1 = b \cdot q - a \cdot m$, procedemos de forma similar.

Una pregunta estrechamente relacionada con el teorema anterior es la siguiente: supongamos que un número es divisible por 2 y por 3, ¿será también divisible por 6? Y si otro número es divisible por 4 y por 6, ¿será divisible por el producto $6 \cdot 4 = 24$?. La respuesta a la segunda pregunta es fácil, no, 4 divide a 12, 6 también divide a 12, pero 24 no divide a 12. La respuesta a la primera pregunta es afirmativa, pero no es tan fácil de explicar.

Veamos que si un número n es divisible por 2 y por 3, entonces también es divisible por 6. En efecto, nos dicen que $n = 2 \cdot k$ y $n = 3 \cdot k'$, para ciertos números k y k'. Pero esto implica que 2 divide a $3 \cdot k'$. Como 2 no divide a 3, por el Lema de Euclides, 2 divide a k', es decir, $k' = 2 \cdot k''$, para cierto número k''. Reemplazando adecuadamente, tenemos que

$$n = 3 \cdot k' = 3 \cdot (2 \cdot k'') = 6 \cdot k''$$

Es decir, 6 divide a n.

La demostración de este hecho se basa en que 2 divide a un producto y, como 2 es primo y no divide al 3, debe dividir al otro factor k'. La demostración del siguiente teorema queda a cargo del lector.

Teorema V.17

Si un número n es divisible por dos números primos distintos, p y q, entonces n es divisible por el producto $p \cdot q$.

Más aún, si un número n es divisible por dos números cualesquiera distintos a y b, que son primos relativos, entonces n es divisible por el producto $a \cdot b$.

2.5 Mínimo común múltiplo

Definición V.4: El mínimo común múltiplo de dos números naturales a y b es el menor número natural que es múltiplo de a y de b. Se le denotará por $mcm\{a, b\}$[4].

Como en el caso del máximo común divisor, el mínimo común múltiplo de dos números siempre existe. En efecto, como el producto $a \cdot b$ siempre es un múltiplo común, el mínimo común múltiplo será menor o igual a $a \cdot b$.

Podemos calcular el mínimo común múltiplo de dos números pequeños listando los múltiplos de ambos números hasta que se repita un número en ambas listas. Por ejemplo, para calcular $mcm\{24,32\}$:

Múltiplos de 24: 24, 48, 72, 96, ...
Múltiplos de 32: 32, 64, 96, ...

Por lo tanto, $mcm\{24,32\} = 96$. No necesitamos seguir las listas, pues cualquier otro múltiplo será mayor.

Nuevamente, esta estrategia no es muy eficiente para números mayores. Veremos un método más eficiente más adelante.

Observamos que si a divide a b, entonces $mcm\{a, b\} = b$, pues b es un múltiplo común y no puede haber un múltiplo de b que sea menor que b.

Teorema V.18

Si m es un múltiplo común de a y de b, entonces $mcm\{a, b\}$ divide a m.

Demostración

Por el Algoritmo de la División, $m = mcm\{a, b\}\, q + r$, con $0 \leq r < mcm\{a, b\}$. Pero a divide a m y a divide a $mcm\{a, b\}$, luego a divide a r.

Similarmente, b divide a r.

Por lo tanto, r es un múltiplo común de a y de b.

Si $r > 0$, entonces $mcm\{a, b\}$ no sería el mínimo común múltiplo de a y de b. Por lo tanto, $r = 0$ y $mcm\{a, b\}$ divide a m.

[4] Algunos libros usan la notación $[a, b]$.

El siguiente teorema relaciona al máximo común divisor y con el mínimo común múltiplo.

Teorema V.19

Si a y b son números naturales, $mcm\{a, b\} \cdot MCD\{a, b\} = a \cdot b$.

La demostración de este teorema se hará en la próxima sección.

Veamos un problema de contexto que involucra el cálculo del mínimo común múltiplo.

En un estadio hay entre 600 y 700 personas. Si se agrupan de 2 en 2, una persona queda sin grupo; si se agrupan de 3 en 3, quedan 2 personas sin grupo; al agruparlas de 5 en 5 hay cuatro personas que quedan sin grupo; y de 7 en 7, hay 6 que quedan sin agrupar. ¿Cuántas personas hay en el estadio?

Una forma de resolver el problema es determinar los números que cumplen lo anterior, que están entre 600 y 700 y son múltiplos de 7 más 6:

$$608, 615, 622, \ldots.699$$

Luego descartamos usando el resto de las condiciones.

Otra forma más elegante de resolverlo es notar que el número buscado es:

- Múltiplo de 7 más 6 o, lo que es lo mismo, múltiplo de 7 menos 1.
- Múltiplo de 5 más 4 o, lo que es lo mismo, múltiplo de 5 menos 1.
- Múltiplo de 3 más 2 o, lo que es lo mismo, múltiplo de 3 menos 1.
- Múltiplo de 2 más 1 o, lo que es lo mismo, múltiplo de 2 menos 1.

Por lo tanto, podemos encontrar un múltiplo común de 2, 3, 5 y 7 que esté entre 600 y 700, y luego restarle 1.

Tenemos $mcm\{2, 3, 5, 7\} = 210$. Por lo tanto, cualquier múltiplo común será múltiplo de 210. Tenemos que $600 < 3 \cdot 210 < 700$ es el único múltiplo de 210 que se encuentra entre 600 y 700. Entonces, el número buscado es $3 \cdot 210 - 1 = 630 - 1 = 629$, es decir, había 629 personas en el estadio.

En resumen

- Podemos encontrar el máximo común divisor entre dos números: haciendo una lista de los divisores de ambos números, usando el Algoritmo de Euclides o usando la factorización en primos que veremos en la siguiente sección.
- Podemos encontrar el mínimo común divisor entre dos números: listando los múltiplos de cada número hasta encontrar uno que coincida; calculado primero el máximo común divisor y usando la relación $mcm\{a, b\} \cdot MCD\{a,b\} = a \cdot b$, o usando la factorización en primos.
- Si un número divide a otros dos, entonces divide a su máximo común divisor.
- El mínimo común múltiplo de dos números divide a cualquier otro múltiplo.
- Lema de Euclides: si p es un número primo y p divide a $m \cdot n$, entonces p divide a m o p divide a n.

Ejercicios de la sección

1. Considere los números 220 y 284 y encuentre la lista de divisores de cada uno. Calcule la suma de los divisores de 220 (sin considerar el 220) y luego haga lo mismo para el 284. ¿Qué ocurre con estas sumas? Averigüe si hay más pares de números que cumplen con esta condición y si tienen un nombre especial.

2. Se cuenta con dos jarros, uno de 3 litros y otro de 5 litros, y una fuente de agua.

   a. (i) ¿Será posible medir exactamente 2 litros pasando el agua de un jarro a otro?

      (ii) ¿Será posible dejar 4 litros en el jarro grande?

      (iii) ¿Será posible dejar 1 litro en uno de los jarros?

      Supongamos ahora que contamos con un recipiente grande, una tina, por ejemplo, en la que podemos agregar o sacar agua, siempre usando los jarros llenos.

      (iv) ¿Será posible dejar exactamente 17 litros en la tina?

      (v) ¿Qué cantidades de agua podemos poner en la tina usando estos dos jarros?

   b. Cambiemos levemente el problema. Supongamos ahora que los jarros son de 6 y de 8 litros, respectivamente. Repita todas las preguntas del caso anterior.

   c. Repita todo lo anterior con jarros de distintas capacidades.

      (i) ¿Cuál es su conclusión?

      (ii) ¿Qué relación tiene esto con el teorema anterior y el máximo común divisor de dos números (las capacidades de los jarros?

3. Utilice el Algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor y expréselo como suma o resta de múltiplos de los números originales.

   a. $MCD\{234,48\}$

   b. $MCD\{72,25\}$

   c. $MCD\{344,254\}$

4. El contorno de un predio corresponde a un cuadrilátero, cuyas medidas son 90, 120, 270 y 210. Se colocaron estacas en cada uno de los vértices y además en el contorno, considerando que entre dos estacas siempre hay la misma distancia. Además, la distancia entre dos estacas es la máxima posible. ¿A qué distancia quedó una estaca de otra? ¿Cuántas estacas se colocaron?

5. A un colegio asisten a votar 1.200 hombres y 1.380 mujeres. Si las mesas de votación se deben formar con la misma cantidad de personas y solo con hombres o solo con mujeres, y además se debe considerar la mayor cantidad de personas en cada mesa, ¿cuántas personas deben votar en cada mesa?

6. En el frontis de una municipalidad hay tres árboles, cada uno con una guirnalda con luces de Navidad. Las luces del primer árbol se encienden cada 8 segundos, las del segundo se encienden cada 5 segundos y las del tercero, cada 12 segundos. Si en determinado instante las tres guirnaldas se encienden simultáneamente, ¿en cuánto tiempo se repetirá esta situación?

7. Eugenio le cuenta a su hermano José lo que hicieron en una clase de Matemática.

   "Hoy trabajamos con monedas de varios países. Cuando junté mis monedas de a dos, me sobró una. Cuando las agrupé de a tres, también me sobró una. Al final, las agrupé de a cuatro y también me sobró una".

   ¿Cuántas monedas tenía Eugenio?

   José opina que el problema no tiene solución. ¿De qué manera le podríamos explicar a José cómo se soluciona el problema? Fundamenta tu respuesta.

3. El teorema fundamental de la aritmética

En esta sección estudiaremos un resultado que por su importancia es llamado el Teorema Fundamental de la Aritmética. Este teorema establece que los números se forman como producto de números primos. Más aún, hay una única forma, salvo por el orden de los factores, de escribir un número como producto de primos.

Teorema V.20: Teorema fundamental de la aritmética

Todo número natural mayor que 1 es, o bien un número primo, o bien se puede factorizar como producto de números primos. Más aún, tal factorización es única, salvo por el orden de los factores.

Demostración

Consideremos un número natural n. Si n es primo, entonces se cumple lo pedido. Si no lo es, entonces n es compuesto, es decir, existen ciertos números p y q, ambos menores que n, tales que $n = p \cdot q$.

Si tanto p como q son primos, entonces n es un producto de números primos, tal como queremos. Si alguno de estos factores no es primo, entonces se pueden descomponer como producto de factores más pequeños. Si alguno de estos nuevos factores no es primo, lo descomponemos como primos o como producto de dos números más pequeños.

Observemos que todos los factores son más pequeños que n y, de hecho, se van haciendo más y más chicos. Es claro que este proceso no puede seguir indefinidamente, porque hay solo n números menores o iguales que n, de modo que tarde o temprano, todos los nuevos factores deben ser primos.

Para demostrar la unicidad de la descomposición, supongamos que hay un número natural n que se descompone de dos maneras como producto de números primos, digamos:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_m$$

Donde $p_1, p_2, \cdots, p_k$ y $q_1, q_2, \cdots, q_m$ son todos números primos. Entonces:

$$p_1 \text{ divide a } q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_m$$

Y por el **Teorema V.16**, p_1 divide a alguno de los números q_j. Pero como ambos son primos, p_1 debe ser igual a alguno de los números q_j. Podemos suponer (reordenando) que $j = 1$. Tenemos entonces:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k = p_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_m$$

Y podemos cancelar p_1, y nos queda:

$$p_2 \cdot \cdots \cdot p_k = q_2 \cdot \cdots \cdot q_m.$$

Procedemos ahora de la misma manera con p_2. De esta forma vamos cancelando uno a uno los números primos p_i, de modo que al cabo de, a lo más, k pasos, deben cancelarse todos los primos y, naturalmente, debe haber la misma cantidad en ambas descomposiciones. Vemos que la única diferencia que puede haber en estas dos descomposiciones es el orden de los factores primos, por lo tanto, la descomposición de n es única.

Observemos que no todos los primos que aparecen en la descomposición de un número deben ser distintos.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2.500 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ 234.612 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 19 \end{aligned}$$

Para abreviar la escritura de estas descomposiciones, es usual utilizar la notación de potencias, la cual ya hemos usado para potencias de 10. Específicamente, para un número p escribimos:

$$\begin{aligned} p^0 &= 1 \\ p^1 &= p \\ p^2 &= p \cdot p \\ p^3 &= p \cdot p \cdot p \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Es decir, el número pequeño a la derecha y arriba de p, llamado exponente, indica cuántas veces se multiplica p por sí mismo. El tema de las potencias y sus propiedades será tratado en el **Capítulo I** del texto *Álgebra* de esta colección.

Con esta notación, escribimos las factorizaciones del ejemplo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2.500 &= 2^5 \cdot 5^4 \\ 234.612 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 19 \end{aligned}$$

El número k que aparece en p^k suele llamarse la *multiplicidad* de p en la descomposición. Por ejemplo, 2 tiene multiplicidad 5 en la descomposición de 2.500, y tiene multiplicidad 2 en la descomposición de 234.612.

El Teorema Fundamental tiene muchas aplicaciones, la más elemental es, probablemente, otro algoritmo para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números:

El máximo común divisor de dos o más números es el producto de los primos comunes, con el menor exponente con que aparecen en la factorización de los números dados.

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el producto de todos los primos, comunes y no comunes, con el mayor exponente con que aparecen en la factorizaciones de los números dados.

Ejemplos

Calculemos el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 48 y 180.

Tenemos que $48 = 2^4 \cdot 3^1$ y $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

El máximo común divisor de estos números debe descomponerse como producto de primos y como divide a ambos, los primos que aparecen en su descomposición deben ser los que se repiten en las descomposiciones de 48 y de 180.

Algo similar ocurre con el mínimo común múltiplo. Los primos que aparecen en su descomposición deben ser todos los que están en las descomposiciones de 48 y de 180, con su potencia máxima, y no puede haber más, porque ya no sería el mínimo múltiplo común. De este modo:

$$MCD\{48, 180\} = 2^2 \cdot 3^1 = 12 \text{ y } mcm\{48, 180\} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 720$$

Es usual abreviar el cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, calculando simultáneamente los factores primos comunes y no comunes de los números, tal como se muestra a continuación.

Para calcular *MCD*{48, 180} y *mcm*{48, 180}, ponemos los números en dos columnas y en la tercera anotamos el primer primo que divide a alguno de los números, o a ambos, en este caso es 2.

48	180	2

Tabla V.2.

Dividimos ambos números por 2. Si uno de los números no es divisible por 2, lo dejamos igual. En la línea siguiente volvemos a dividir por 2 y proseguimos, hasta que ninguno de los dos números sea divisible por 2.

48	180	2
24	90	2
12	45	2
6	45	2
3	45	

Tabla V.3.

Repetimos ahora el procedimiento con el siguiente primo, o sea con el 3. Una vez terminado el proceso con el 3, lo hacemos con 5, luego 7, etc., hasta que ambas columnas queden en 1.

48	180	2
24	90	2
12	45	2
6	45	2
3	45	3
1	15	3
1	5	5
1	1	

Tabla V.4.

48	180	2
24	90	2
12	45	$\cancel{2}$
6	45	$\cancel{2}$
3	45	3
1	15	$\cancel{3}$
1	5	$\cancel{5}$
1	1	

Tabla V.5.

De la tabla obtenemos todos los primos que dividen a ambos números, incluyendo repeticiones (2 se repite cuatro veces, 3 se repite dos veces y 5 aparece solo una vez). Entonces, el mínimo común múltiplo de 48 y 180 es el producto de todos esos primos. Vemos que en la descomposición del mínimo común múltiplo cada primo aparece elevado a la máxima potencia posible.

En la segunda tabla, hemos borrado aquellos primos que no dividen a ambos números. Entonces, el máximo común divisor de 48 y 180 es el producto de los primos marcados en negrita, es decir, aquellos que sí dividen a ambos números. Vemos que en la descomposición del mínimo común múltiplo cada primo aparece elevado a la mínima potencia posible.

El algoritmo anterior no es muy eficiente porque no es fácil encontrar los factores de un número grande. Sin embargo, es interesante porque permite entender la estructura de los números y facilita muchas demostraciones. Por ejemplo, la demostración del Teorema V.19.

Demostración del Teorema V.19

Para esto, debemos observar que, dados dos números r y s, tenemos que sumar el máximo con el mínimo, que es lo mismo que sumar los dos números. Concretamente:

$$max\{r, s\} + min\{r, s\} = r + s$$

Ahora, si p tiene exponente r en el $mcm\{m, n\}$, significa que r es la máxima cantidad de veces que p aparece en la factorización de m o de n.

Si p tiene exponente s en el MCD$\{m, n\}$, significa que s es la mínima cantidad de veces que p aparece en la factorización de m o de n (incluimos el caso $s = 0$).

Por lo tanto, al multiplicar m con n, uno de ellos aportará r veces a p como factor y el otro aportará s veces a p como factor. Entonces, p aparece repetido $r+s$ veces en la factorización de $m{\cdot}n$.

Haciendo este mismo razonamiento para cada primo que aparece en $mcm\{m, n\}$, tenemos:

$$mcm\{m, n\} \cdot MCD\{m, n\} = m \cdot n$$

Terminamos esta sección con el siguiente teorema, uno de los más famosos y hermosos resultados de Euclides.

Teorema V.21

Existen infinitos números primos.

Demostración

Supongamos que existe solamente una cantidad finita de primos $p_1, p_2, \ldots p_n$. Consideremos ahora el número

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Obviamente, m es mayor que todos los primos, luego, no es primo. Por otra parte, m no es divisible por p_1, ni por p_2, ..., ni por p_n, o sea, m no es divisible por ningún primo. Pero por el **Teorema V.21**, m debe ser divisible por algún primo, lo cual es una contradicción, por lo tanto, debe haber otro primo que no estaba en la lista finita, por lo que esta debe ser incompleta.

En resumen

- Teorema Fundamental de la Aritmética: todo número natural mayor que 1 es, o bien un número primo, o bien se puede factorizar como producto de números primos. Más aún, tal factorización es única, salvo por el orden de los factores.
- El máximo común divisor de dos o más números es el producto de los primos comunes, con el menor exponente con que aparecen en la factorización de los números dados.
- El mínimo común múltiplo de dos o más números es el producto de todos los primos, comunes y no comunes, con el mayor exponente con que aparecen en la factorizaciones de los números dados.
- Existen infinitos números primos.

Ejercicios del capítulo

1. Determine el mcm y el MCD de los siguientes números:
   a. 30, 60, 90 y 450.
   b. 7.469 y 2.387.
   c. 116, 248, 148 y 152.

2. Utilice la descomposición en factores primos para encontrar:
   a. $MCD\{32, 1.024\}$
   b. $MCD\{1.250, 1.056\}$

3. Utilice el Algoritmo de Euclides para encontrar el $MCD\{57,23\}$. Use sus cálculos para escribir el MCD como la diferencia entre un múltiplo de 57 y un múltiplo de 23.

4. ¿Es posible tener dos números cuyo MCD es 15 y su mcm es 65? Justifique.

5. Demuestre que no existen enteros a y b tales que $MCD\{a, b\} = 7$ y $2a + b = 50$.

6. Demuestre que si $MCD\{a, m\} = 1$ y $MCD\{b, m\} = 1$, entonces $MCD\{a \cdot b, m\} = 1$.

7. Demuestre que si $MCD\{a, b\} = 1$, entonces $MCD\{a + b, a \cdot b\} = 1$.

8. Use el Algoritmo de Euclides para calcular $MCD\{a, b\}$, donde:
   a. $a = 484$ y $b = 888$.
   b. $a = 812$ y $b = 1.050$.
   c. Elija sus propios números.

9. Calcule $MCD\{a, b\}$ de los ejercicios anteriores usando el algoritmo escolar de los divisores primos. Compare la eficiencia de ambos métodos para números pequeños y para números grandes.

10. Justifique las dos proposiciones siguientes:
    a. Dado un número natural N, su menor factor p mayor que 1 es siempre primo.
    b. El factor p de la parte anterior multiplicado por sí mismo debe ser menor o igual a N.

    Podemos resumir esto en el teorema que dice: "Para ver si un número N es primo solo, debemos chequear con los primos $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$ tales que $p \leq \sqrt{N}$".

11. Un contraejemplo de una proposición matemática es un caso donde se puede ver que la proposición no se cumple. Para probar que una proposición es verdadera, es necesario probar que se cumple para todos los casos posibles, pero para probar que una proposición es falsa, se necesita mostrar un solo contraejemplo. Esto puede resultar muy útil en la enseñanza. Utilice esta idea para responder las siguientes preguntas:
    a. Un estudiante afirma que todos los impares son primos. ¿Cómo lo convencería de que esto no es siempre cierto?
    b. Un estudiante conjetura que para todo número natural n, la fórmula $n^2 + n + 11$ siempre da como resultado un número primo, ¿es esto cierto?

12. Formule una regla de divisibilidad para cada uno de los siguientes números.

    a. 12 b. 15 c. 18 d. 22 e. 24 f. 33

13. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) correctas, respecto a las reglas de divisibilidad?
    a. 32.148 es divisible por dos porque su última cifra es par.
    b. 94.513 es divisible por 9 porque la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.
    c. 658.020 es divisible por 6 porque es par y la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

14. Dos engranajes de una máquina están alineados por una marca en ambos engranajes. Hay 192 dientes en el primer engranaje y 320 en el segundo. ¿Cuántas vueltas del primer engranaje son necesarias para volver a alinear las marcas?

15. En un acto escolar, la directora quiere formar a los estudiantes en columnas del mismo largo. Cuando tratan de usar columnas de 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8, siempre queda exactamente un estudiante sin formar. Se sabe que hay menos de 1.000 alumnos para formar. ¿Cuántos hay exactamente?

16. Dos llaves arrojan agua en un estanque. Por una sale agua a razón de 5 litros por minuto y por la otra, x litros por minuto. Si la primera llave llena el estanque en 360 minutos y ambas juntas lo llenan en 200 minutos. ¿Cuál es el valor de x?

17. Tres aviones salen de una misma ciudad, el primero cada 10 días, el segundo cada 15 días y el tercero cada 20 días. Si salen los tres el 2 de enero, ¿cuáles son las próximas fechas en que volverán a salir el mismo día?

18. Se tienen tres extensiones de terreno de 183.750 m^2, 78.750 m^2 y 113.750 m^2, respectivamente. Se las desea dividir en parcelas iguales. ¿Cuál debe ser la superficie de cada parcela para que el número total de parcelas sea el menor posible?

19. Se tienen tres llaves goteando con una rapidez de 6, 10 y 18 gotas por minuto, respectivamente. Si en un instante las gotas caen al unísono, ¿cuántos minutos pasarán para que esto suceda nuevamente?

20. Encuentre la factorización en primos de los siguientes números encontrando factores grandes y construyendo un árbol de factores.

    a. 500 b. 1.560 c. 510 d. 70.840

21. La lista de factores de 40 puede escribirse en dos filas:

1	2	4	5
40	20	10	8

    a. Escriba listas similares para 280, 175, 144 y 81.
    b. Utilice lo anterior para mostrar que un número cualquiera N tiene un número par de factores, a menos que sea el cuadrado de otro número.

22. Encuentre el *MCD* de los números dados haciendo una lista de los factores de cada número:

    a. *MCD*(28, 63)
    b. *MCD*(104, 132)
    c. *MCD*(24, 56, 180)

23. Utilice el Algoritmo de Euclides para encontrar:

a. $MCD(91, 52)$

b. $MCD(812, 336)$

c. $MCD(2.389.485, 59.675)$. Use una calculadora.

24. Si n es un número natural cualquiera, ¿cuál es el mínimo común múltiplo entre los números que se obtienen de las siguientes expresiones?

$$(5^{n+1} \cdot 4 + 6 \cdot 5^{n}) \text{ y } (5 \cdot 2^{2n} + 2^{2n+3})$$

25. Si n es un número natural, encuentre todos los divisores primos del número dado con la expresión:

$$2^{n+4} \cdot 25^{n} + 2^{n+3} \cdot 5^{2n+2}$$

26. **Conjeturas sobre números primos:** una conjetura es un juicio probable que se forma basado en ejemplos o situaciones estudiadas. Cuando una conjetura se logra demostrar (o refutar) formalmente, se convierte en un teorema. El estudio de las propiedades de los números primos ha sido un terreno fértil para la realización de conjeturas. Además, algunas de las más famosas requieren solo conocimientos elementales para poder plantearlas. A continuación, se mencionan algunas de estas conjeturas. Pruebe más ejemplos de las conjeturas dadas e investigue acerca de ellas.

a. Se puede ver directamente que:

$1^2 + 1 = 2$ $\quad$ $2^2 + 1 = 5$ $\quad$ $4^2 + 1 = 17$ $\quad$ $6^2 + 1 = 37$ $\quad$ $10^2 + 1 = 101$

Es decir, los primos 2, 5, 17, 37 y 101 se pueden obtener sumándole la unidad a un cuadrado.

Conjetura: el conjunto de primos que se obtiene de esta manera es infinito.

b. Sabemos que:

Entre 1^2 y 2^2 están los primos 2 y 3.
Entre 2^2 y 3^2 están los primos 5 y 7.
Entre 3^2 y 4^2 están los primos 11 y 13.
Entre 4^2 y 5^2 están los primos 17, 19 y 23.

Conjetura: entre dos cuadrados consecutivos siempre hay, por lo menos, un número primo.

c. Observamos que:

$6 = 3 + 3$ $\quad$ $8 = 5 + 3$ $\quad$ $10 = 5 + 5$ $\quad$ $12 = 5 + 7$

En 1769, Goldbach, en una carta dirigida a Euler, propuso que todo número par mayor que 4 es la suma de dos número primos. Esta es llamada Conjetura de Goldbach.

d. Si p es primo y $p + 2$ también lo es, decimos que $(p, p + 2)$ es un par de *primos gemelos*. Los pares de números (3, 5), (5, 7), (11, 13) y (17, 19) son primos gemelos.

Encuentre todos los primos gemelos en el rango 1 – 200.

Conjetura: existen infinitos pares de primos gemelos.

Capítulo VI

Fracciones

Introducción

En la vida cotidiana se utilizan las fracciones para expresar partes de un objeto, por ejemplo, hablamos de "medio pan", "un cuarto de un pliego de cartulina" y "tres cuartos de pizza". También las usamos para expresar medidas de tiempo, volumen, longitud, etc., por ejemplo, nos referimos a "un cuarto de hora", "un litro y medio de aceite" y "tres cuartos de kilómetro". Las fracciones constituyen un tema importante en la Educación Básica y aparecen en el currículo desde niveles iniciales. Pruebas nacionales e internacionales señalan que existen dificultades en su comprensión y uso. Este es un fenómeno mundial, lo que debería indicarnos que hay aquí una dificultad intrínseca del concepto de fracción.

Hay muchas maneras de interpretar las fracciones y usarlas en distintos contextos. Por ejemplo, se usan para denotar partes de un todo o como un cociente entre dos cantidades. Estos distintos usos e interpretaciones son muy importantes en la enseñanza, nos ayudan a entender la idea de fracción, a dar sentido a sus propiedades y operaciones, y a aplicarlas en la resolución de problemas. Esta manera de abordar el tema ayuda a dar sentido a reglas como, por ejemplo: para comparar dos fracciones se multiplica cruzado, las cuales tradicionalmente se enseñaban sin mayor justificación, promoviendo solo la memorización y aportando poco a la comprensión.

Sin embargo, hay que estar conscientes de que estas distintas interpretaciones pueden crear confusión en el trabajo con las fracciones, pues puede parecer que en cada caso estuviéramos hablando de un objeto matemático distinto. Abordaremos estas distintas interpretaciones, sin perder de vista que son manifestaciones de un mismo objeto matemático, un número.

En el presente capítulo abordaremos usos e interpretaciones de las fracciones y la representación de estas en la recta numérica. También veremos cómo a partir de la interpretación de las fracciones como parte de un todo, podemos dar sentido a las operaciones de suma y resta, y a los procedimientos para comparar fracciones. Los aspectos referentes al uso de material concreto y la descripción de algunas dificultades y errores en el trabajo con las fracciones serán abordados al final del capítulo.

1. Conceptos básicos

Una forma de interpretar una fracción es como la relación entre una *parte* y un *todo* que se considera como unidad. Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ puede representar la mitad de un vaso de agua, la mitad de una docena de huevos, la mitad de dos metros. En todas las expresiones se habla de la mitad de un todo. Así, como el número dos representa la binaridad, es decir aquello que comparten todas las colecciones que tienen dos elementos, la fracción $\frac{1}{2}$ es el número que representa a todas las mitades de la unidad.

Es más difícil abstraer el concepto de fracción como número, que en el caso de los números naturales. Si pensamos en tres elefantes, tres hormigas, tres pizzas o tres litros de agua, todas colecciones considerablemente diferentes, reconocemos que en cada caso son tres unidades; sin embargo, nos puede costar entender con la misma naturalidad el número $\frac{1}{2}$.

Como veremos más adelante, las fracciones se identifican con puntos en la recta numérica. Tal como se muestra en la figura, para ubicar el número $\frac{1}{2}$ dividimos el segmento entre **0** y **1** en dos segmentos de igual medida. El número $\frac{1}{2}$ corresponde al punto que está, a partir de **0**, al final del primer segmento.

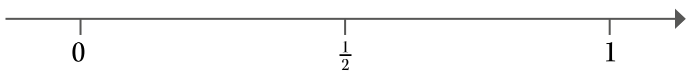


Figura VI.1.

Entender las fracciones como números nos ayuda a dar sentido a sus operaciones y a unificar el estudio de sus propiedades, ya que estas no dependen de la interpretación utilizada. Sin embargo, en el trabajo con fracciones en la Educación Básica es muy importante dar sentido a esta abstracción interpretando las fracciones en distintas situaciones.

1.1 Las fracciones como parte de un todo

Los números naturales permiten expresar **1**, **2**, **3**… barras de chocolate, pero cómo se expresa la cantidad que corresponde a un trozo de barra, tal como muestra la **Figura VI.2**.

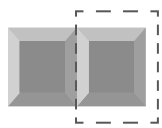


Figura VI.2.

En lenguaje común diríamos que el trozo marcado corresponde a la mitad de la barra. Es así como aparece este nuevo tipo de número, las fracciones, que permiten expresar partes de una unidad o un todo. Esta concepción de las fracciones es una de las primeras y aparece en situaciones donde se tiene una unidad que se ha dividido en n partes iguales y nos queremos referir a m de estas partes. Escribiremos $\frac{m}{n}$ para señalar la fracción correspondiente. Así, una fracción se anota de la siguiente manera[1]:

$$\text{Numerador (partes)} \longrightarrow \frac{m}{n} \longleftarrow \text{denominador (todo)}$$

Donde m y n son números naturales y $n \neq 0$.

Esta notación para las fracciones fue introducida en Occidente por Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, en su libro *Liber Abaci*, escrito en 1202, aparentemente tomada de los chinos. Esta notación (o con barra oblicua) no tuvo un uso generalizado sino hasta el siglo XVII.

En la interpretación de las fracciones como parte de un todo, el denominador de la fracción nos indica en cuántas partes iguales se dividió el todo: dos, tres, cuatro, etc. El numerador, en cambio, nos indica cuántas de esas partes estamos considerando. De esta forma, la fracción $\frac{1}{4}$ permite representar una parte de una unidad que se ha dividido en 4 partes de igual tamaño. Por ejemplo, si partimos una hoja de papel lustre como lo muestra la **Figura VI.3**, la parte achurada corresponde a $\frac{1}{4}$ del papel.

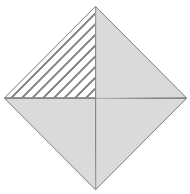


Figura VI.3.

Del mismo modo, la fracción $\frac{3}{4}$ indica que se están considerando tres partes de un todo que se ha dividido en cuatro partes de igual tamaño. Así, en el papel lustre cada pedazo pequeño representa un cuarto y el sector achurado representa los tres cuartos del papel, como lo muestra la **Figura VI.4**.

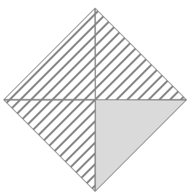


Figura VI.4.

[1] También es usual la notación con una barra oblicua, separando el numerador del denominador, de modo que $\frac{m}{n} = m/n$. En este texto solo usaremos la barra horizontal.

Observemos que si $\frac{1}{4}$ es el número que representa cada una de las partes en que se dividió un todo, entonces, extendiendo a las fracciones el significado de que la suma corresponde a agregar cantidades, se tiene que:

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

Ya que, como dijimos, $\frac{3}{4}$ es el número que corresponde a tomar tres cuartas partes del todo.

Las dos fracciones que hemos representado usando la interpretación parte-todo son menores que la unidad. Para representar una fracción mayor que la unidad usando esta interpretación, es necesario considerar más de un todo. Por ejemplo, para representar $\frac{7}{4}$ de papel lustre, es necesario considerar más de una hoja de papel, como lo muestra la **Figura VI.5:**

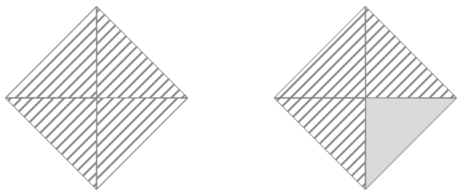


Figura VI.5.

Hemos dividido cada hoja en 4 partes iguales y tomamos 4 partes de la primera y, 3 de la segunda. Es decir, 4 cuartos de la primera y 3 cuartos de la segunda. Vemos que 1 y $\frac{3}{4}$ de papel lustre, donde 1 corresponde a la hoja de papel completamente achurada y $\frac{3}{4}$ corresponde a las 3 partes que se achuraron en la segunda, es igual a decir que se representaron $\frac{7}{4}$ de papel lustre, ya que se tiene 7 veces $\frac{1}{4}$.

También podemos expresar la fracción que corresponde a una subcolección de una colección de objetos, donde el todo estará dado por el número total de objetos y la parte a considerar corresponde a la cantidad de objetos de la subcolección. Por ejemplo, consideremos la colección de cajas blancas y grises mostrada en la **Figura VI.6**.

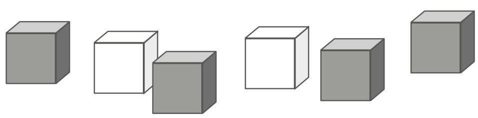


Figura VI.6.

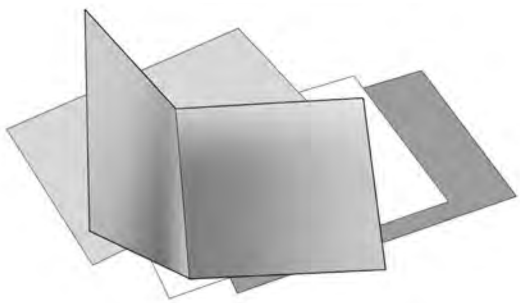
La fracción que corresponde a las cajas grises es $\frac{4}{6}$, pues son 4 cajas grises (parte) de un total de 6 cajas (todo).

Para representar fracciones con el modelo parte-todo, utilizaremos tanto "todos continuos" como "todos discretos". Esta clasificación es compleja y tiene sus sutilezas, las cuales no abordaremos en este texto. Intuitivamente, diremos que algo es continuo cuando se puede dividir en un número arbitrario de partes sin cambiar su naturaleza, por ejemplo: una cierta cantidad de agua, un rectángulo, un área y una piza, y diremos que algo es discreto cuando está constituido por un número finito de elementos indivisibles, por ejemplo: láminas, juguetes, pelotas. No podríamos dividir tres juguetes entre dos niños partiendo un juguete por la mitad, ya que perderíamos el sentido del reparto. Sin embargo, no habría inconveniente en compartir equitativamente tres vasos de agua entre dos niños.

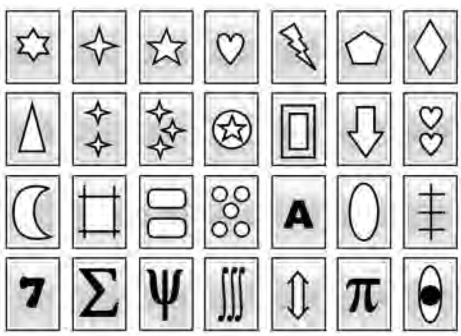
La representación parte-todo permite establecer que un todo, sea este de índole continua o discreta, se fracciona en partes congruentes o equivalentes. Para su enseñanza, es necesario que los alumnos tengan claros los conceptos de unidad, que se identifica con el todo, y fraccionamiento, que se relaciona con las partes.

Ejemplos

1) Eugenio necesitaba la mitad de un pliego de cartulina para hacer un trabajo. Dividió el pliego de cartulina (unidad o todo) por la mitad (fraccionamiento o parte). En este caso, el tipo de representación es continua.



2) María canjeó $\frac{1}{4}$ de sus 28 láminas. Esto significa que las 28 láminas (unidad o todo) se repartieron en 4 subcolecciones con igual cantidad de elementos y se canjeó una de estas partes, que corresponde a 7 láminas (fraccionamiento o parte). En este caso, nos estamos refiriendo a una representación discreta.



Habitualmente, representamos las fracciones usando gráficas como las siguientes:

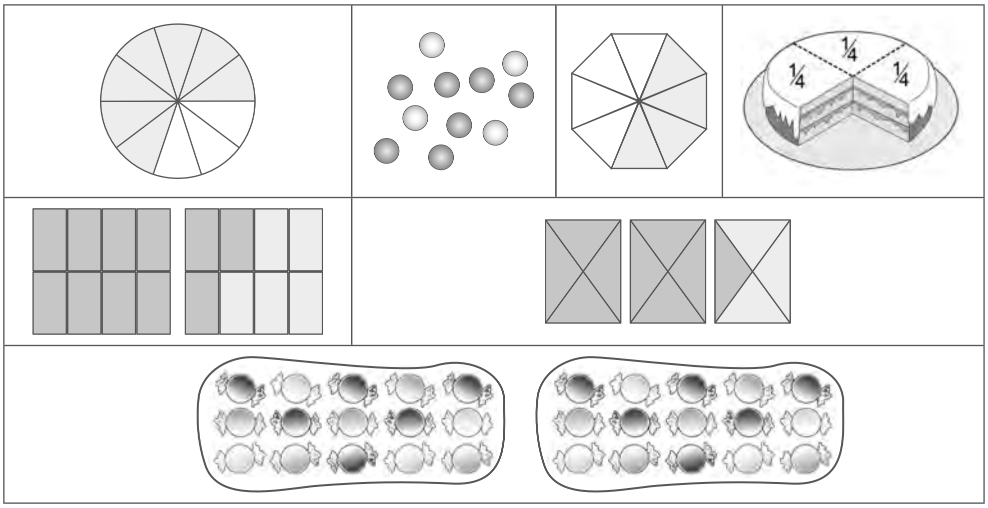


Figura VI.7.

Estas representaciones no son comparables entre sí, ya que los todos y las partes son particulares de cada situación.

En resumen

- Al interpretar las fracciones con el modelo parte-todo, escribimos $\frac{m}{n}$ para referirnos a m partes de un todo que se ha dividido en n partes iguales.
- Para representar fracciones podemos utilizar tanto cantidades continuas como discretas.

Ejercicios

1. Complete la siguiente tabla, marcando con una cruz si la unidad o unidades mencionadas son continuas o discretas.

Todo o unidad	Continuas	Discretas
Una taza de café		
Un ramo de 24 rosas		
Un terreno con lechugas plantadas		
Una hilera de 12 árboles		
Un envase con bebida		
Una colección de estampillas		

2. Represente las siguientes fracciones como región y como colección, teniendo como referente el significado de parte-todo.

a. $\frac{10}{15}$ b. $\frac{14}{13}$ c. $\frac{10}{10}$

En el trabajo con fracciones es usual usar la siguiente nomenclatura:

Fracción	Se lee
$\frac{1}{2}$	Un medio
$\frac{2}{4}$	Dos cuartos
$\frac{5}{8}$	Cinco octavos
$\frac{3}{6}$	Tres sextos
$\frac{1}{10}$	Un décimo
$\frac{1}{100}$	Un centésimo
$\frac{1}{1000}$	Un milésimo
$\frac{5}{20}$	Cinco veinteavos
$\frac{6}{80}$	Seis ochentavos

Tabla VI.1.

Observamos que las fracciones con denominador entre 2 y 9 tienen nombres especiales, medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos y novenos. Aquellas cuyo denominador es una potencia de 10 se llaman décimos, centésimos, milésimos, etc., y aquellas con otro denominador se leen usando el sufijo “avos”.

Ejercicio

Complete la siguiente tabla:

Fracción	Se lee
$\frac{2}{25}$	
	Ocho milésimos
$\frac{25}{4}$	
	Veinticuatro, sesenta y cincoavos
$\frac{320}{10000}$	
	Treinta y cinco, diecisiete avos

1.2 Modelos para representar fracciones

En el estudio que hemos hecho de las fracciones, hemos usado distintos modelos para representarlas. A continuación, resumiremos tres de estos modelos, los cuales serán de gran utilidad en la resolución de problemas.

Modelo de área

En esta categoría se encuentran los diagrama de torta y los cuadrados o rectángulos.

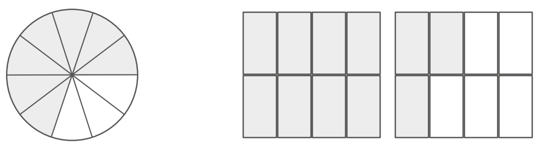


Figura VI.8.

Modelo lineal de medida

En este caso, pensamos las fracciones como medidas de segmentos a partir de una unidad patrón. Este modelo corresponde a identificar cada fracción con un punto de la recta numérica, como se muestra en la figura:

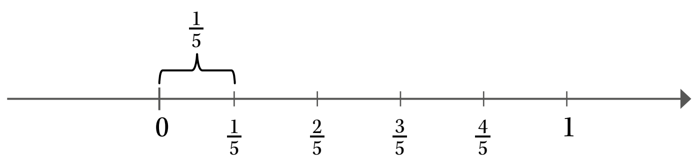


Figura VI.9.

Si en lugar de un segmento usamos una barra, tenemos lo que se conoce como modelo de barras o diagrama de barras:

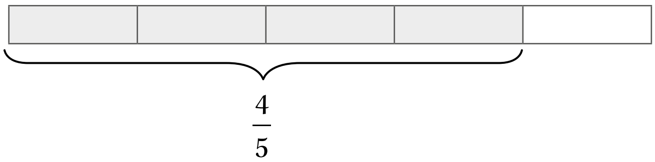


Figura VI.10.

Modelo de conjunto

Este modelo consiste en una colección o conjunto de objetos individuales que no se pueden subdividir.

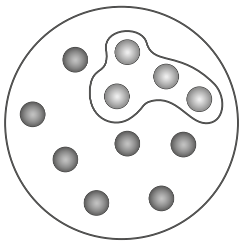


Figura VI.11.

1.3 Suma y resta de fracciones de igual denominador

Llamaremos *fracciones unitarias* a las que tienen numerador 1, es decir, a aquellas de la forma $\frac{1}{n}$. Obtenemos todas las fracciones con denominador n como iteración de la fracción unitaria $\frac{1}{n}$. Por ejemplo:

$\frac{1}{5}$ es una fracción unitaria

$\frac{3}{5}$ es 3 veces $\frac{1}{5}$

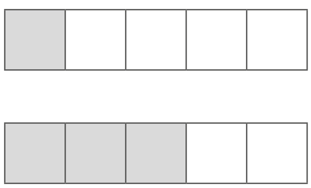


Figura VI.12.

Podemos interpretar las fracciones unitarias como un nuevo objeto. La fracción unitaria $\frac{1}{n}$ define aquella fracción que repetida n veces da como resultado la unidad, es decir:

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{ veces}}=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

Así, $\frac{1}{4}$ representa un cuarto de la unidad, por ejemplo, $\frac{1}{4}$ de una manzana, y cumple que:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

Entonces, $\frac{3}{4}$ representa tres de esos nuevos objetos, por ejemplo, tres cuartos de una manzana. Los cuartos pueden sumarse libremente:

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\quad\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\quad+\quad\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\quad=\frac{5}{4}$$

De manera análoga, podemos restar otras fracciones unitarias, por ejemplo, novenos:

$$\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\quad\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\quad-\quad\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\quad=\frac{3}{9}$$

Es decir, cinco novenos menos dos novenos es igual a tres novenos. Vemos que las fracciones con el mismo denominador se pueden sumar y restar de la misma manera que se suman y restan los números naturales, porque sus numeradores nos indican cuántas de estas fracciones unitarias tenemos.

El procedimiento para sumar o restar fracciones de igual denominador consiste en sumar o restar sus numeradores y conservar el denominador.

$$\frac{m}{n}\pm\frac{k}{n}=\quad\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m}\quad\pm\quad\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{k}\quad=\frac{m\pm k}{n}$$

En el caso de la resta, el primer numerador m debe ser más grande que k, el segundo numerador.

Notamos también que en el concepto mismo de fracción está implícita la idea de multiplicar una fracción unitaria por un número natural: $\frac{m}{n}$ es el número que designa una suma iterada del número $\frac{1}{n}$, o sea:

$$\frac{m}{n}=\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m}=m\cdot\frac{1}{n}$$

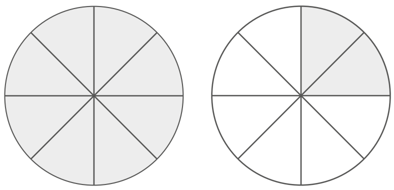
De este modo, los conceptos básicos de sumar y restar fracciones de igual denominador y multiplicar una fracción unitaria por un número natural extienden las intuiciones básicas de las operaciones con números naturales.

En el próximo capítulo, estudiaremos las operaciones con fracciones en general.

1.4 Números mixtos

Si en una fracción la cantidad de partes consideradas es mayor o igual que la cantidad de partes en que se dividió el todo, es decir, si el numerador es mayor o igual al denominador la fracción, se denomina *impropia*.

Ejemplos

1) 

Cada unidad está dividida en octavos y se representaron $\frac{10}{8}$. El numerador es mayor que el denominador, por lo tanto, es una fracción impropia.

En caso contrario, es decir, si el numerador es menor que el denominador, se denomina fracción *propia*.

1) ¿Qué fracción representa a los juguetes con ruedas?

Podemos ver que la unidad consiste en ocho juguetes, de los cuales 4 tienen ruedas. La fracción que representa a los juguetes con ruedas es $\frac{4}{8}$ y corresponde, entonces, a una fracción propia.

Notemos que si el numerador es múltiplo del denominador, la fracción corresponde a un múltiplo de la unidad considerada. Por ejemplo, si tenemos 2 pizzas divididas en 4 partes iguales cada una y consideramos 8 de estas partes, es decir $\frac{8}{4}$, corresponden exactamente a las 2 pizzas iniciales. De esta forma, cualquier número natural se puede expresar como una fracción. Así, los números naturales son un tipo particular de fracción.

Vemos que si el numerador es igual al denominador, la fracción es igual a 1:

$$1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\dots$$

También observamos que un número natural se puede escribir como fracción de varias formas:

$$5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{15}{3}=\dots$$

Esto se extiende al 0, interpretándolo como 0 partes de un todo, así:

$$0=\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}=\dots$$

En algunas situaciones cotidianas, tales como comprar en la feria, seguir recetas de cocina, la lectura de la hora y otras, es usual representar una fracción impropia como suma de un número natural con una fracción propia. Por ejemplo:

- Al comprar en la feria, podemos decir que compramos un kilo y medio de frutillas, pero rara vez diremos que compramos $\frac{3}{2}$ kilos de frutillas.
- En una receta de cocina, podemos encontrar que se necesitan 2 y $\frac{1}{3}$ tazas de harina y no $\frac{7}{3}$ tazas de harina.
- Al decir la hora, diremos que son las 3 y cuarto, y no las $\frac{13}{4}$ horas.
- Podemos decir "comí dos empanadas y media", pero no es usual decir "comí $\frac{5}{2}$ de empanada".

Veamos cómo transformar una fracción impropia en la suma de un número natural y una fracción propia. Consideremos, por ejemplo, la fracción $\frac{8}{5}$. Como vimos anteriormente, corresponde a 8 veces $\frac{1}{5}$. Si asociamos los cinco primeros quintos, tenemos:

$$\frac{8}{5}=\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\quad+\quad\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\quad=1+\frac{3}{5}$$

Dada una fracción impropia $\frac{m}{n}$ cualquiera, por el Algoritmo de la División existen números Q y r, con $0 \leq r < n$, tales que $m = Q \cdot n + r$. Entonces:

$$\frac{m}{n}=\frac{Qn+r}{n}=Q+\frac{r}{n}$$

Es decir, toda fracción impropia se puede representar como un natural más una fracción propia. Se suele escribir:

$$Q\tfrac{r}{n}$$

Lo que se lee "Q enteros y r ene-avos" y se interpreta como Q enteros más r ene-avos. A los números escritos de esta forma se les llama *números mixtos.*

El hecho de que los números mixtos sean, encubiertamente, una suma de un entero más una fracción puede producir algunas ambigüedades al operar con fracciones. En efecto, $Q\frac{r}{n}$ podría interpretarse como el producto del número natural Q por la fracción $\frac{r}{n}$, en circunstancias que es una notación que significa la suma de esos números. Es común, entonces, encontrar cálculos como el siguiente:

$$2\tfrac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

Pero de acuerdo con nuestra notación:

$$2\tfrac{3}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

Ya que dos enteros es igual a $\frac{10}{5}$.

Ejercicios

1. Exprese las siguientes fracciones impropias como números mixtos.

   a. $\frac{43}{7}$ b. $\frac{15}{4}$ c. $\frac{75}{12}$

2. Exprese los siguientes números mixtos como fracciones impropias.

   a. $12\frac{5}{12}$ b. $10\frac{1}{2}$ c. $32\frac{3}{7}$

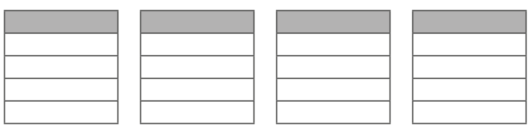
3. En cada caso, represente el número utilizando diagramas de regiones.

   a. $2\frac{3}{4}$ b. $\frac{12}{5}$

4. Para cada número mixto, proponga una situación de contexto que permita comprender su significado.

   a. $3\frac{1}{2}$ b. $2\frac{1}{4}$ c. $12\frac{3}{8}$

5. Un estudiante representó el número $4\frac{1}{5}$ usando diagramas de regiones de la siguiente forma:



¿Es correcta la representación del estudiante? Fundamente su respuesta.

En resumen

De acuerdo a la relación entre numerador y denominador, podemos clasificar las fracciones en:

- Fracciones unitarias: son las que se pueden expresar con numerador 1.
- Fracciones propias: son menores que la unidad, es decir, tienen un denominador mayor que el numerador.
- Fracciones impropias: son mayores o iguales a la unidad, es decir, tienen un denominador menor o igual que el numerador.

Las fracciones se pueden expresar de forma única como un número mixto, es decir, como una suma de un número natural y una fracción propia.

1.5 Posibles dificultades y limitaciones del modelo parte-todo

Si bien la representación parte-todo nos ayuda a dar significado a las fracciones, su uso puede presentar algunas dificultades y limitaciones:

- Ambigüedad de un patrón de medida, ya que la medida siempre se expresa en relación al todo. Por ejemplo, si se tiene $\frac{1}{4}$ de una pizza individual y $\frac{1}{4}$ de una pizza familiar, no podemos señalar que las fracciones estén representando la misma cantidad, porque corresponden a un todo distinto. Esta es una de las razones por las cuales es importante abstraer el concepto de fracción como número, sobre todo en la operatoria.
- Ambigüedad para establecer la unidad cuando esta no se entrega de manera explícita. Por ejemplo, al expresar la fracción que corresponde a las partes pintadas en la **Figura VI.13,** alguien podría señalar que corresponde a $\frac{3}{4}$, si se considera que el todo es la unión de los dos cuadrados grandes, o que es $\frac{6}{4}$, si consideramos que el todo es un cuadrado grande.

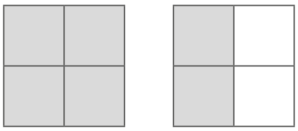


Figura VI.13.

- Dificultad para reconocer una fracción obtenida mediante un procedimiento que no sea fraccionar en partes congruentes. Por ejemplo, no es evidente a qué fracción del área del cuadrado corresponde la parte achurada que se muestra en la **Figura VI.14,** donde la diagonal del cuadrado está dividida en tres segmentos de igual longitud.

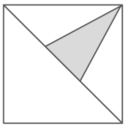
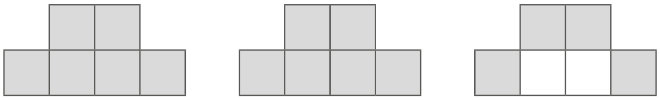


Figura VI.14

Ejercicios de la sección

1. Encuentre a qué fracción del cuadrado de la **Figura VI.14** corresponde el área sombreada.

2. Un profesor presentó la siguiente actividad a un curso de 30 alumnos de 4º Básico: *¿Qué fracción está representada por las partes pintadas?*



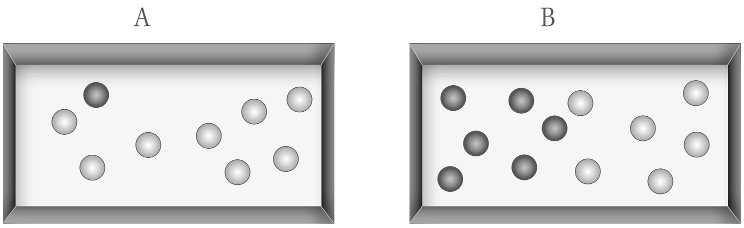
Las respuestas obtenidas fueron las siguientes:

- 2 estudiantes contestaron $\frac{16}{2}$.
- 10 estudiantes contestaron $\frac{16}{6}$ o $2\frac{4}{6}$.
- 5 estudiantes contestaron $2\frac{2}{4}$.
- 6 estudiantes contestaron $\frac{16}{18}$.
- 7 estudiantes dijeron que no se podía saber qué fracción está representada porque no era una región cuadrada.

Usando la información anterior, responda las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es la unidad que empleó cada grupo?
b. ¿Cómo cambiaría el enunciado del problema para eliminar esta ambigüedad?

3. Observe las siguientes cajas con bolitas blancas y negras:



a. ¿Cuántas bolitas negras hay que agregar en la caja A, para que la fracción de bolitas negras sobre el total sea $\frac{1}{3}$?, ¿y a la caja B?
b. ¿Cuántas bolitas negras hay que sacar de la caja A, para que la fracción de bolitas negras sobre el total sea $\frac{1}{4}$?, ¿y de la caja B?
c. Escriba cuatro ejercicios como en a. y b. usando las cajas anteriores.
d. Incluya un ejercicio para cada caja que no tenga solución.

4. Midiendo partes fraccionarias cuando se conoce la medida del todo:

a. Observe la siguiente tabla, que permite relacionar medidas de partes fraccionarias cuando es conocida la medida del todo, luego complete las celdas vacías.

Fracción	Cantidad
1	12 unidades
$\frac{1}{2}$	6 unidades
$\frac{1}{4}$	3 unidades
$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{6}$	
$\frac{3}{4}$	
$\frac{3}{6}$	

b. Redacte un problema para cada una de las filas pintadas.

c. Construya otra tabla, semejante a la presentada, donde el todo sea 18 unidades y otra donde sea 30 unidades.

5. En los siguientes problemas, escriba una solución adecuada para ser presentada a niños y niñas, usando dibujos o diagramas de acuerdo al modelo indicado.

a. Juanita usó $\frac{2}{5}$ de una botella de aceite, que midió y comprobó que eran 100 ml. ¿Cuánto aceite contenía la botella? Utilice un modelo de área.

b. En una clase, $\frac{3}{4}$ son niñas. Si hay 8 niños, ¿cuántos estudiantes hay en total? Use un modelo de medida.

c. Luis tenía 15 bolitas y le dio $\frac{2}{5}$ de ellas a Cristian, ¿cuántas le dio? Utilice el modelo de conjunto.

d. Andrés hizo 12 adornos de Navidad. Utilizó $\frac{1}{5}$ de metro de cinta en cada adorno, ¿cuánta cinta usó en total? Usen un modelo de medida.

e. Juan tenía 400 llaveros, $\frac{5}{8}$ tenían dibujado un cóndor y el resto tenía dibujado un huemul. Le dio $\frac{1}{5}$ de los llaveros con un cóndor a un amigo. ¿Cuántos llaveros le quedaron? Use un modelo de barras.

6. Es interesante hacer notar que los egipcios conocían y operaban con fracciones, pero solo con aquellas con numerador 1. Es por esto que a las fracciones unitarias se les llama también fracciones egipcias. Las demás fracciones se expresaban sumando varias de estas fracciones unitarias o egipcias. Por ejemplo:

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$$

Una característica curiosa es que no escribían $\frac{2}{5}$ como $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, sino que lo escribían como $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. Al parecer, la regla era utilizar fracciones egipcias distintas. Aun así, como se ve en el último ejemplo, la descomposición no tiene por qué ser única.

a. Descomponga como suma de fracciones egipcias:

$\frac{11}{6}$ $\qquad\qquad$ $\frac{27}{32}$ $\qquad\qquad$ $\frac{7}{9}$

b. Si se desea repartir equitativamente 3 sacos completamente llenos de trigo entre 5 hermanos, ¿cuánto le corresponde a cada hermano? Resuelva usando fracciones egipcias.

2. Fracción como cociente o reparto equitativo

Otras situaciones de nuestra vida cotidiana que dan paso al estudio de las fracciones provienen de la acción de repartir equitativamente objetos que son fraccionables, realizando el reparto de todos los objetos sin dejar un resto. Por ejemplo, consideremos 3 barras de chocolate y 2 personas. Si se quiere repartir equitativamente las barras de chocolate entre estas 2 personas, es posible entregar 1 barra a cada una y luego fraccionar la barra sobrante para continuar con el reparto. De esta forma, a cada persona le tocaría una barra y la mitad de otra, como se muestra en la **Figura VI.15:**

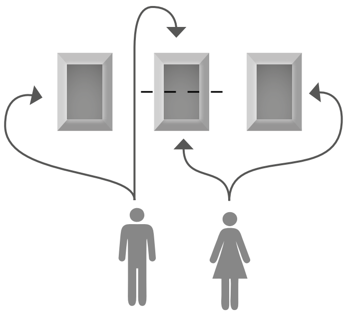


Figura VI.15.

Observemos que, en este caso, las fracciones responden a la problemática de cuantificar la cantidad de chocolate que se repartió y que no corresponde a una cantidad exacta de barras. Otra forma de efectuar este reparto equitativo es dividir cada barra en dos partes de igual tamaño.

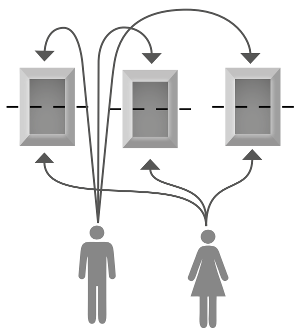


Figura V.16.

A cada persona le corresponde $\frac{1}{2}$ de cada barra, y como eran 3 barras las que se repartieron, cada persona recibe 3 veces $\frac{1}{2}$, esto es, $\frac{3}{2}$ de barra de chocolate. Notemos que esta situación plantea la pregunta, ¿cuál debería ser el resultado de calcular $3 : 2$?

En términos generales, sabemos que un número natural n divide al número m si existe un número natural q, que denominamos cociente, tal que $m = n \cdot q$. Lo que escribimos como $m : n = q$. Pero si n no divide a m, ¿cuál sería el cociente? Desde luego, no un número natural, pero sí una fracción. Esta interpretación coincide con la de la división entendida como cuánto le toca a cada una de n personas, si se reparten equitativamente m objetos. Como hemos ampliado el concepto de número a las fracciones, vemos que ahora tiene sentido dividir cualquier número natural por cualquier otro.

En general, dados dos números naturales m y n, con $n \neq 0$, tenemos que $m : n = \frac{m}{n}$.

Para pensar

Hemos interpretado las fracciones como parte-todo y como cociente de dos números, ¿cómo se relacionan estas dos interpretaciones?

Recordemos que según la interpretación parte-todo, $\frac{1}{3}$ representa cada una de las partes que resultan de dividir una unidad en tres partes iguales, es decir:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

Lo que podemos expresar como:

$$3\cdot\frac{1}{3}=1$$

De manera que $\frac{1}{3}$ es exactamente aquel número que multiplicado por 3 nos da 1, es decir, es el cociente 1 : 3. Usando la misma idea, obtenemos:

$$n\cdot\frac{1}{n}=1$$

Es decir, $\frac{1}{n}$ es el cociente $1 : n$.

La distinción entre la interpretación de fracciones como parte-todo y como cociente o reparto equitativo no deja de ser sutil, sin embargo, puede ilustrarse usando cuadrados u otras figuras como unidades. Por ejemplo, veamos las dos lecturas para 2 : 3 y $\frac{2}{3}$ usando rectángulos.

Consideremos como la unidad un rectángulo como el de la **Figura VI.17**:

Figura VI.17.

Entonces, la parte sombreada en la **Figura VI.18** corresponde a $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=2\cdot\frac{1}{3}$, es decir, el tercio de una unidad tomado dos veces.

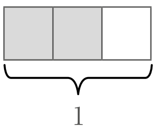


Figura VI.18.

Como la unidad se ha dividido en **3** partes de igual tamaño y se están considerando **2** de ellas, la interpretación de las fracciones que se usa en este caso es como parte de un todo. Observemos ahora que en la **Figura V.19** el rectángulo corresponde a **2** unidades, luego la parte sombreada en la figura corresponde a dividir **2** unidades en **3** partes de igual tamaño.

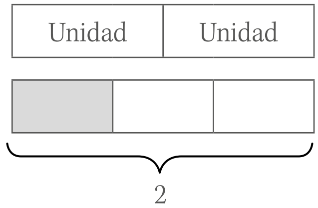


Figura VI.19.

Así, en este segundo ejemplo, la interpretación que se está usando de las fracciones es la de cociente. Observemos que en estas figuras los largos representados son iguales en las dos interpretaciones de $\frac{2}{3}$.

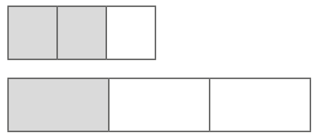


Figura VI.20.

Para pensar

Un estudiante afirma que $\frac{20}{6}$ no puede ser igual a $\frac{10}{3}$, pues **20** dividido por **6** es **3** con resto **2**, pero **10** dividido por **3** da **3** con resto **1**. ¿Qué respondería?

En resumen

Otra forma de interpretar las fracciones es con el modelo de cociente o reparto equitativo.

En este caso, la fracción $\frac{m}{n}$ se interpreta como el cociente entre el número natural m por el número natural n, es decir, el número que multiplicado por n da m.

3. Otras interpretaciones y usos de las fracciones

Las fracciones se interpretan de acuerdo al contexto en que aparecen: parte de un todo, medida, cociente, razón y operador. Todas son interpretaciones para el mismo objeto matemático, por tanto, no son excluyentes y se relacionan entre sí. Cabe destacar que la distinción de estas interpretaciones es una herramienta exclusiva para el profesor o profesora, que le permite proponer a niños y niñas diferentes tipos de problemas en que se usan las fracciones. No es conveniente que se traspase este conocimiento al aula.

3.1 Fracción como medida

Las fracciones surgen también por la necesidad de expresar una cantidad de medida continua: longitud, masa, tiempo, etc., en situaciones donde los números naturales no son suficientes para hacerlo. Es habitual que en nuestra vida cotidiana nos refiramos a $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar, $\frac{3}{4}$ metros de tela, etc., en todos estos casos se están utilizando las fracciones para expresar medidas, a partir de una unidad patrón.

Las fracciones como medida tienen en común con la interpretación de las fracciones como parte-todo, en el caso continuo, que la unidad patrón se divide en partes iguales y cada una de esas partes corresponde a una fracción unitaria. Sin embargo, cuando usamos una fracción para medir, lo que se divide es el patrón unidad y no el objeto a medir.

Por ejemplo, si consideramos que el segmento en la **Figura VI.21** es la unidad de medida, la longitud del segmento a corresponde a $\frac{1}{5}$ de unidad, ya que si repetimos 5 veces esa medida obtenemos la unidad.

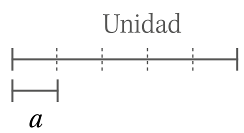


Figura VI.21.

Esta idea puede ser extendida a la interpretación de las fracciones impropias, es decir, aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador. Por ejemplo, en la **Figura VI.22** el segmento b corresponde a 7 veces $\frac{1}{5}$ de la unidad, es decir, a $\frac{7}{5}$.

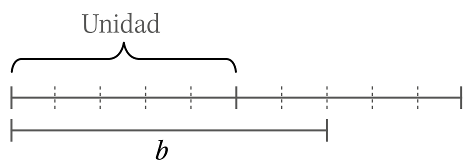


Figura VI.22.

Existen varias formas de representar las fracciones a partir de su interpretación como medida que contribuyen a la comprensión de su significado. Una de ellas es la representación a través del modelo lineal. Por ejemplo, en la **Figura VI.23**, si consideramos que la barra gris es una unidad de longitud, la parte sombreada de más abajo corresponde a $\frac{5}{6}$ de unidad.

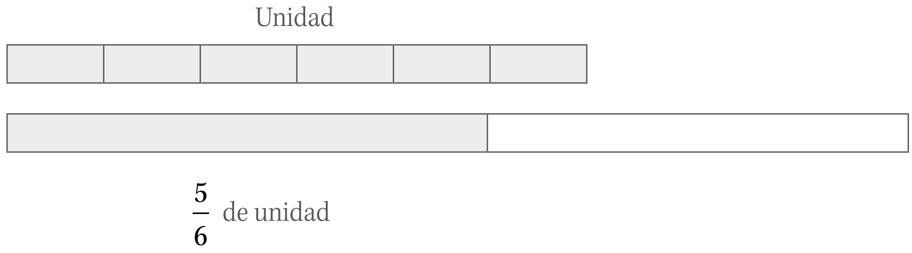


Figura VI.23.

3.2 Fracción como razón o razón de cambio

En algunos casos se desea comparar dos cantidades continuas o discretas. Tenemos, por lo menos, dos formas de hacerlo: mediante la diferencia y mediante el cociente. El uso de la resta para comparar cantidades ya fue abordado en el **Capítulo II**. A continuación, veremos brevemente la comparación mediante cociente. El estudio de razones y proporciones será tratado con mayor profundidad en el **Capítulo VII**.

Denominamos *razón* a la comparación de dos cantidades de la misma magnitud a través de un cociente. Por ejemplo, la relación entre las personas de una sala “4 hombres por cada 3 mujeres” es una razón entre dos cantidades que corresponden a la misma categoría “personas”.

Denominamos *razón de cambio* a la comparación de dos cantidades de distinta magnitud a través de un cociente. Por ejemplo, “la velocidad media de un automóvil en determinado recorrido fue de 78 kilómetros por hora” es la razón entre dos cantidades que no corresponden a la misma magnitud.

Las fracciones permiten expresar una razón, o razón de cambio, proporcionando información distinta a la que hemos analizado en interpretaciones anteriores, ya que no se está indicando una cantidad, sino que se están comparando dos cantidades. La fracción como razón pueden ser comparaciones del tipo parte - parte o parte-todo. Por ejemplo, cuando señalamos que en una caja hay pelotas rojas y negras, y están en la razón “2 pelotas rojas por cada 3 negras”, es una comparación parte-parte y se escribe como $2:3$ o $\frac{2}{3}$. La comparación parte-todo corresponde a la interpretación de las fracciones abordada anteriormente. Por ejemplo, cuando señalamos que “en un evento había 2 estudiantes por cada 5 asistentes”, se trata de una comparación parte-todo y escribimos $2:5$ o $\frac{2}{5}$. De esta forma, si al evento fueron 100 personas, 40 de ellas deben ser estudiantes.

3.3 Fracción como operador

La última interpretación de las fracciones que revisaremos es la de operador. En este caso, la fracción corresponde a un número que no expresa medida o cantidad, sino que opera sobre una medida o cantidad y la transforma. Por ejemplo, consideremos una longitud de 4 metros, si calculamos $\frac{3}{4}$ de dicha longitud, obtenemos 3 metros. Así, la interpretación de la fracción $\frac{3}{4}$ en este contexto es de operador: se tiene una situación inicial que corresponde a los 4 metros de longitud y una situación final que corresponde a los 3 metros resultantes.

En contextos físicos, esta interpretación está vinculada al aumento o disminución de una cantidad. En general, si el operador corresponde a una fracción propia, la cantidad sobre la que opera disminuye, mientras que si corresponde a una fracción impropia, la mantiene igual o la aumenta.

En las otras interpretaciones que hemos descrito las fracciones también se han visto indirectamente como operadores. Por ejemplo, cuando nos referimos a $\frac{3}{4}$ de barra de chocolate, $\frac{1}{2}$ kilo de harina, etc. En el siguiente capítulo nos referiremos con más detalle a las fracciones como operador, debido a su conexión con la multiplicación.

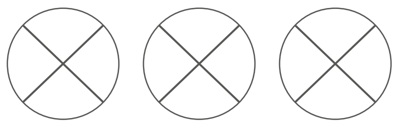
En resumen

Hay distintos usos e interpretaciones de las fracciones, las cuales están relacionadas pues se trata de un mismo concepto:

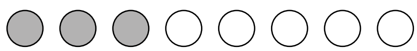
- Como parte-todo: donde se divide uno o más "todos" en partes iguales y la fracción representa a algunas de estas partes.
- Como cociente o reparto equitativo: donde la fracción resulta de repartir equitativamente una cantidad m entre n recipientes.
- Como medida: donde se considera la fracción como un patrón de medida.
- Como razón o razón de cambio: donde la fracción se usa para comparar dos cantidades por medio de un cociente.
- Como operador: cuando la fracción actúa sobre otra cantidad.

Ejercicios de la sección

1. En las siguientes situaciones, identifique la interpretación para las fracciones que más se ajusta al contexto. Explique su respuesta.
   a. Carlos comió $\frac{1}{2}$ de una pizza mediana.
   b. Raúl compró $1\frac{1}{2}$ litros de bebida en el almacén de su barrio.
   c. Para lograr un celeste específico de pintura, se puso una parte azul por tres partes de blanco.
   d. Una profesora partió un pliego de cartulina en tres partes iguales y ocupó una de ellas.
   e. Camila repartió equitativamente dos chocolates entre cinco de sus amigos.
2. Utilice la siguiente representación para formular una situación que interprete las fracciones como: reparto equitativo y parte de un todo. Pinte algunas partes de los círculos antes de formular las situaciones.



3. Utilice la siguiente representación para para formular una situación que interprete las fracciones como: razón y parte de un todo.



4. Amplificación y simplificación de una fracción

En el siguiente dibujo se representan dos barras de chocolate. Carmen divide su barra en tres pedazos iguales y se come uno de ellos, vale decir, un tercio. Manuel divide su barra en 6 partes de igual tamaño y se come 2 partes, es decir, $\frac{2}{6}$. Como se aprecia en la siguiente figura, ambos comieron la misma cantidad de chocolate. Resulta entonces que $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$.

Barra de chocolate de Carmen

Barra de chocolate de Manuel

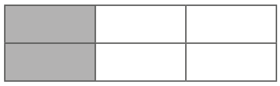


Figura VI. 24

Formalmente:

$$3\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Es decir, si sumamos tres veces la fracción $\frac{2}{6}$ obtenemos la unidad. Como esa es precisamente la definición de $\frac{1}{3}$, se tiene que $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Observemos que la relación entre ambas fracciones es $\frac{2}{6}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}$, es decir, hemos multiplicado el numerador y el denominador de la fracción $\frac{1}{3}$ por 2, lo cual se denomina *amplificar* la fracción. Esto es solo una ilustración de una propiedad general.

En el siguiente diagrama hemos representado simultáneamente las fracciones propias $\frac{m}{n}$ y $\frac{m\cdot k}{n\cdot k}$.

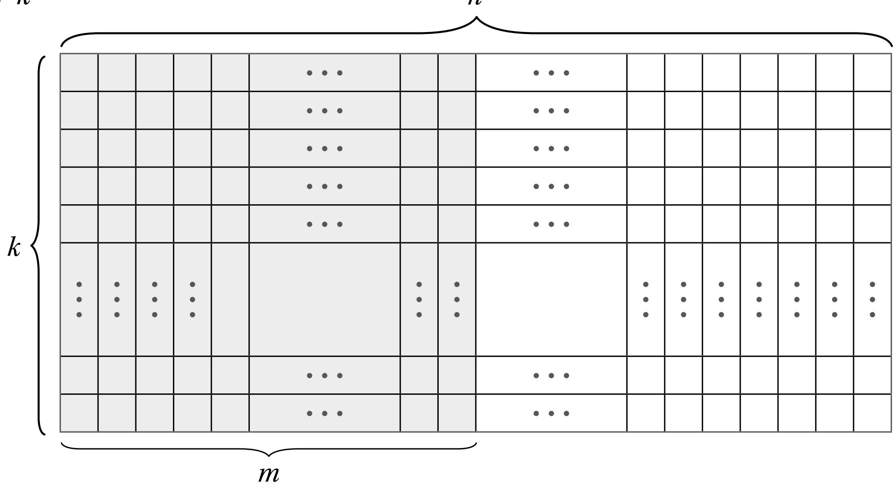


Figura VI.25

El rectángulo se dividió verticalmente en n rectángulos congruentes y luego se dividió en k rectángulos horizontales congruentes. Por tanto, la parte sombreada corresponde a m rectángulos verticales de un total de n, es decir $\frac{m}{n}$. Por otro lado, el rectángulo original está dividido en $n \cdot k$ rectángulos congruentes y la parte sombreada corresponde a $m \cdot k$ de estos rectángulos, es decir, representa la fracción $\frac{m \cdot k}{n \cdot k}$.

Veamos una justificación algebraica de esto. Consideremos primero el caso más sencillo, la fracción $\frac{k}{n \cdot k}$. Tenemos:

$$n \cdot \frac{k}{n \cdot k} = \underbrace{\frac{k}{n \cdot k} + \ldots + \frac{k}{n \cdot k}}_{n} = \frac{n \cdot k}{n \cdot k} = 1$$

Es decir, si sumamos n trozos de tamaño $\frac{k}{n \cdot k}$ obtenemos la unidad. Entonces, según nuestra definición $\frac{k}{n \cdot k} = \frac{1}{n}$. Multiplicando por m se puede deducir que:

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$$

Para valores cualesquiera de m, n y k, con n y k distintos de 0.

El proceso que acabamos de describir se conoce como amplificación de la fracción $\frac{m}{n}$. El proceso inverso se llama *simplificación* de la fracción $\frac{m \cdot k}{n \cdot k}$. Como vemos entonces, ambos procesos producen fracciones iguales.

¿Fracciones equivalentes o fracciones iguales?

Una de las más arraigadas confusiones sobre las fracciones es afirmar que $\frac{1}{2}$ es "equivalente" a $\frac{2}{4}$, pero que estas fracciones no son iguales. Esta confusión nace de una particular forma de enseñar las fracciones o números racionales, especialmente durante las décadas de los años 60 y 70 del siglo pasado, bajo la influencia de la llamada "nueva Matemática". Esta se basaba en una construcción de los números, naturales, enteros, racionales y reales, dentro de la teoría de conjuntos. Los números racionales, nuestras fracciones, eran ciertos conjuntos, llamados clases de equivalencia, de pares ordenados de números enteros. No estudiaremos esto aquí pero, en cualquier caso, debe decirse que, aun en este contexto, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, ya que ambas fracciones denotan el mismo objeto dentro de esa teoría.

Debemos agregar que la construcción de los números al interior de la teoría de conjuntos se hizo con el propósito de dar una base lógica sólida a la Matemática y es algo bastante técnico. Jamás se hizo para reemplazar la concepción intuitiva de los números ni, mucho menos, para ser enseñada a los niños y las niñas, ya que su manejo requiere del desarrollo de niveles muy altos de abstracción.

Sin embargo, subsiste la sensación de que $\frac{1}{2}$ de pizza no es lo mismo que $\frac{2}{4}$ de la misma pizza. Más aún, los dibujos como el siguiente:

$\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$

Figura V.26.

Parecen confirmar esa idea, porque se ven distintos. Lo que debemos notar es que la cantidad de pizza es la misma en cada caso, aunque se represente de maneras distintas. Las fracciones son números que representan ciertas cantidades, no su imagen.

Observemos que hay muchas maneras para referirse a los números. Por ejemplo, nadie dudaría que:

$$6 - 4 = 1 + 1 = 2$$

Sin embargo, tampoco nadie dejará de notar que la expresión "6 – 4" es bastante distinta conceptualmente de la expresión "1 + 1". Como hemos visto, la primera denota, por ejemplo, cuánto le falta a 4 para llegar a 6, vale decir, 2. La segunda, en cambio, nos dice que si juntamos un objeto con otro objeto, obtenemos 2 objetos. Nadie dirá que "6 – 4 es equivalente, pero distinto de 1+1". Lo que sucede es que ambas expresiones representan de distinta manera al número 2 y, por lo tanto, son iguales. Algo similar ocurre con las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$, ambas representan, de distinta manera, al mismo número.

En un sentido más profundo, la equivalencia se da entre las expresiones del lenguaje, "un medio" es equivalente a "dos cuartos", porque ambas frases hablan del mismo número. Lo mismo ocurre con las frases "seis menos cuatro" y "uno más uno", pero en ambos casos el número al que aluden es el mismo. Son las expresiones del lenguaje las equivalentes, pero distintas, los números que representan esas expresiones equivalentes son iguales.

En la práctica, se usan ambas expresiones para referirse a las fracciones; podemos hablar de fracciones equivalentes o de fracciones iguales, pero en ambos casos se quiere decir lo mismo: que las fracciones son iguales.

Para pensar

¿Diría usted que la quinta parte de un millón de pesos $\left(\frac{1}{5} \text{ de un millón de pesos}\right)$ es distinta de dos décimas partes de un millón de pesos $\left(\frac{2}{10} \text{ del mismo millón de pesos}\right)$?

Si su respuesta es "sí, son distintas", ¿cuál cree que es mayor? (Ambas son, finalmente, sumas de dinero y si son distintas, una debe ser más dinero que la otra). Analice otros usos similares de fracciones que permitan convencer a otro de que dos fracciones equivalentes, en realidad, corresponden a la misma cantidad.

Notemos que si se tienen dos fracciones iguales, no necesariamente encontraremos un número natural que permita multiplicar o dividir, el numerador y denominador de una de las fracciones para obtener la otra. Dicho de otra forma, no todos los pares de fracciones iguales provienen del proceso de amplificar o simplificar una fracción. Por ejemplo, consideremos las fracciones $\frac{6}{4}$ y $\frac{9}{6}$. Es claro que este par de fracciones son iguales, pues ambas son iguales a $\frac{3}{2}$; sin embargo, no es posible amplificar o simplificar una de ellas para obtener la otra. Tendremos, entonces, que dos fracciones son iguales si es posible simplificar o amplificar ambas, no necesariamente por el mismo natural, de tal manera que queden expresadas de la misma forma.

A partir de esta observación, se obtiene la conocida regla para verificar la igualdad de fracciones.

Teorema VI.1

Considere las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con b y d distintos de 0. Se tiene que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $a \cdot d = c \cdot b$ y, recíprocamente, si $a \cdot d = c \cdot b$, entonces $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Ejercicios de la sección

1. Demuestre el **Teorema VI.1.**

2. Mediante un diagrama, justifique la amplificación de fracciones en el caso de una fracción impropia.

3. Encuentre los números que faltan para que los pares de fracciones siguientes sean iguales:

   a. $\frac{x}{3}=\frac{12}{18}$

   b. $\frac{8}{12}=\frac{x}{24}$

   c. $\frac{3}{x}=\frac{21}{35}$

   d. $\frac{30}{48}=\frac{60}{x}$

   e. $\frac{5}{x}=\frac{20}{32}$

4. De la siguiente colección de fracciones, agrupe las que son iguales entre sí.

$$\frac{36}{12}, \frac{6}{15}, \frac{15}{5}, \frac{14}{35}, \frac{15}{9}, \frac{6}{4}, \frac{10}{6}, \frac{35}{21}, 1\tfrac{2}{3}, \frac{9}{6}$$

5. Las fracciones y la recta numérica

Como vimos anteriormente, existen varias formas de representar fracciones. Por ejemplo, como una región geométrica de un todo continuo; con elementos discretos, tales como fichas, láminas, juguetes o niños; entre otros. En esta sección estudiaremos las fracciones como números y utilizaremos para esto la recta numérica.

Como hemos visto, los números naturales y sus operaciones se pueden representar sobre la recta numérica. ¿Cómo podríamos representar en ella las fracciones? En algunos casos es fácil, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ queda representado por un punto equidistante entre 0 y 1, como vimos al comienzo del capítulo; el número $\frac{3}{4}$ será un punto que equidista de $\frac{1}{2}$ y de 1, etc.

En el caso general, para ubicar una fracción en la recta numérica procedemos de la siguiente manera:

- Dibujamos una recta identificando el 0.
- Ubicamos los números naturales a una misma distancia entre sí.
- Dividimos la unidad en segmentos de igual medida, según lo que indica el denominador. Finalmente, la fracción se ubica considerando tantas de estas partes como lo indica el numerador, a partir del 0.

Veamos un ejemplo. Representemos la fracción $\frac{3}{4}$, que es propia:

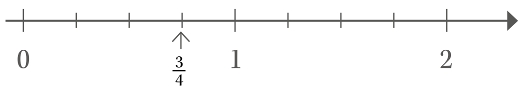


Figura VI.27.

Observamos que dividimos el segmento entre 0 y 1 en cuatro partes de igual medida, y la fracción se ubica al final del tercer segmento.

Representemos ahora $\frac{13}{8}$, que es una fracción impropia:

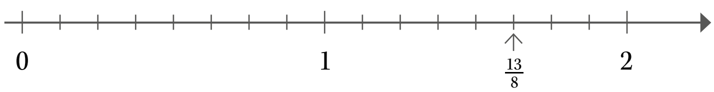


Figura VI.28.

Observemos que en el último caso $\frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$, por tanto, al ubicar este número podríamos haber agregado $\frac{5}{8}$ a partir de 1. Para proceder de esta manera, basta con subdividir el segmento entre 1 y 2. Esta alternativa puede ser útil si se tienen fracciones donde el numerador es varias veces mayor que el denominador, por ejemplo, $\frac{35}{2}$.

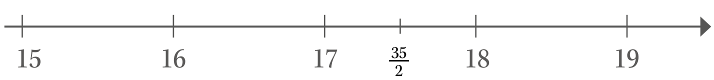


Figura V.29.

Notemos que en este último ejemplo la visualización que tenemos de la recta comienza desde 15, a diferencia de los ejemplos anteriores, donde partía desde 0.

Ubiquemos ahora dos fracciones de igual denominador en la recta numérica: $\frac{3}{8}$ y $\frac{17}{8}$.

Para esto, subdividimos el segmento entre 0 y 3 en octavos, como lo muestra la primera figura, o subdividimos solamente las unidades donde se ubican las fracciones, como se muestra en la segunda figura.

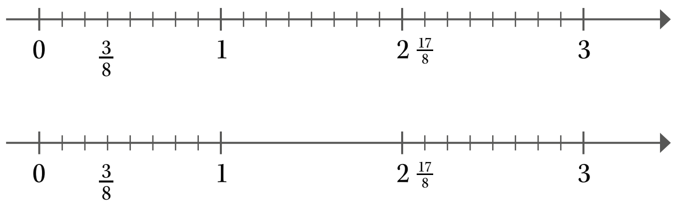


Figura VI.30.

Veamos ahora cómo ubicar fracciones de distinto denominador en la recta numérica.

Consideremos, primero, el caso en que los denominadores son múltiplos entre sí, por ejemplo, $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$. Una manera de proceder es dividir el segmento entre 0 y 1 en tres de igual medida, y luego dividir el segundo de estos en 4 segmentos iguales. Seguimos este procedimiento, pues $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, por lo que sabemos que $\frac{5}{12}$ está en el segundo tercio.

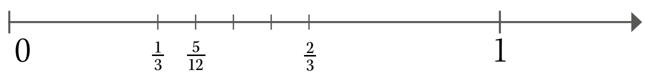


Figura VI. 31.

Ejercicio

Explique por qué el procedimiento usado para ubicar $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$ es válido. Proponga otro.

Para ubicar fracciones como $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, deberíamos dividir el segmento entre 0 y 1 en 15 segmentos de igual longitud y seguir el procedimiento anterior.

En los casos anteriores hemos usado la división de un segmento unitario en una cantidad arbitraria de segmentos de igual longitud. Si bien no es difícil dividir un segmento en potencias de 2, efectuar la división de un segmento cualquiera en tres partes no resulta obvio. Una manera de salvar esta dificultad es eligiendo una unidad adecuada a la o las fracciones que se desean ubicar.

En el caso anterior, es conveniente dibujar una recta numérica tal que cada unidad mida 15 centímetros, ya que de esta forma se podrá dividir en tercios y en quintos sin mayor dificultad.

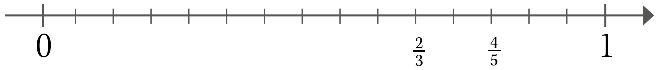


Figura VI.32.

Para pensar

Frente al ejercicio de representar $\frac{2}{7}$ en una hoja en blanco, dos alumnos proceden de la siguiente forma:

- El primero dibuja una recta y marca el 0. Luego, marca 1 centímetro sobre la recta y en ese punto ubica $\frac{1}{7}$; luego, a partir de ese punto mide 1 centímetro y ubica en el extremo la fracción $\frac{2}{7}$. Este alumno no marca el 1 en la recta ni la divide en partes iguales.
- El segundo alumno dibuja una recta y solo marca un punto al cual nombra $\frac{2}{7}$.

¿Qué opina de estas respuestas? Discuta.

Cuando la unidad está dada y no es posible elegirla de manera conveniente, no es claro cómo ubicar fracciones con denominador arbitrario. Por ejemplo, ubicar $\frac{7}{9}$ requiere la división de un segmento en nueve partes iguales. Para ubicar cualquier fracción en la recta numérica, usaremos un procedimiento geométrico basado en el Teorema de Tales[1], el cual puede recordar de Educación Media.

Supongamos que nos es dado el segmento unidad de la recta numérica:

Figura VI.33.

Si $r = \frac{m}{n}$ es una fracción, primero marcamos el número m en la recta.

Figura VI.34.

[1] Ver el texto *Geometría* de esta colección.

Construimos ahora una recta concurrente en **0** y marcamos **1** y ***n*** a distancia correspondiente de **0** sobre la otra recta

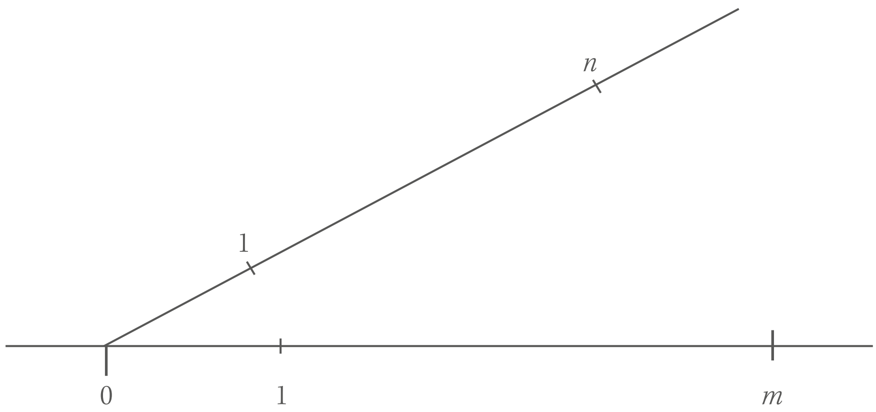


Figura VI.35.

Luego, unimos los puntos definidos por ***m*** y ***n*** (y que denotaremos de igual manera), como se muestra en la siguiente figura, y trazamos una paralela a esta recta pasando por el **1** de la recta oblicua. Esta paralela corta a la recta horizontal en ***r***.

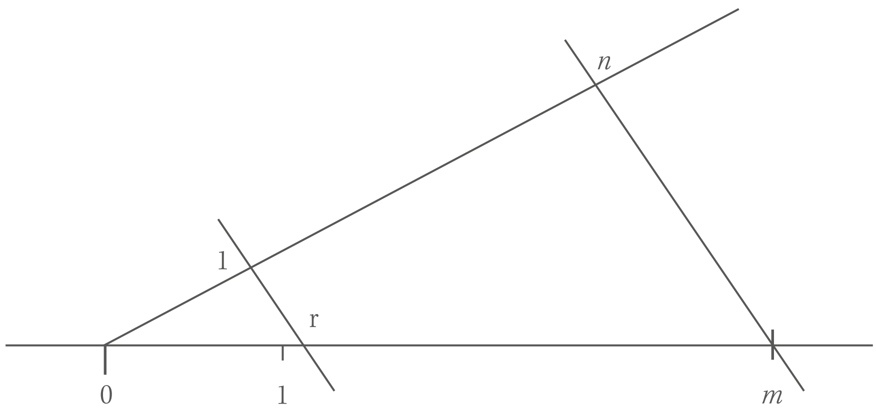


Figura VI.36.

Usando el Teorema de Tales, podemos afirmar que:

$$\frac{\left|\overline{0m}\right|}{\left|\overline{0n}\right|} = \frac{\left|\overline{0r}\right|}{\left|\overline{01}\right|}$$

Es decir:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{1}$$

De donde concluimos que $r = \dfrac{m}{n}$.

De esta manera, cualquier fracción tiene su lugar como un punto sobre la recta numérica. Sin embargo, como veremos más adelante en el texto, no todos los puntos de la recta son fracciones.

5.1 Dificultades y posibles errores en la representación de fracciones en la recta numérica

Hay distintas dificultades y errores asociados a la representación de fracciones en la recta numérica. A continuación, mencionamos algunos de ellos:

- Hay actividades en que los niños y las niñas deben construir la recta para luego ubicar una fracción. Este proceso de construcción requiere establecer una unidad como referente que corresponderá a la distancia entre dos números naturales consecutivos. Este proceso puede traer dificultades, si se utilizan distintas unidades en la misma recta. Por ejemplo, en la siguiente actividad desarrollada por un niño.

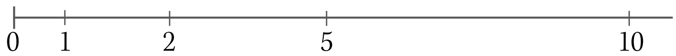


Figura VI.37.

- Al ubicar una fracción propia en la recta numérica, en lugar de ubicarla a partir del **0**, la ubican a partir de otro número natural. Por ejemplo:

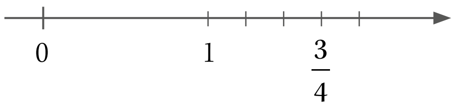


Figura VI.38.

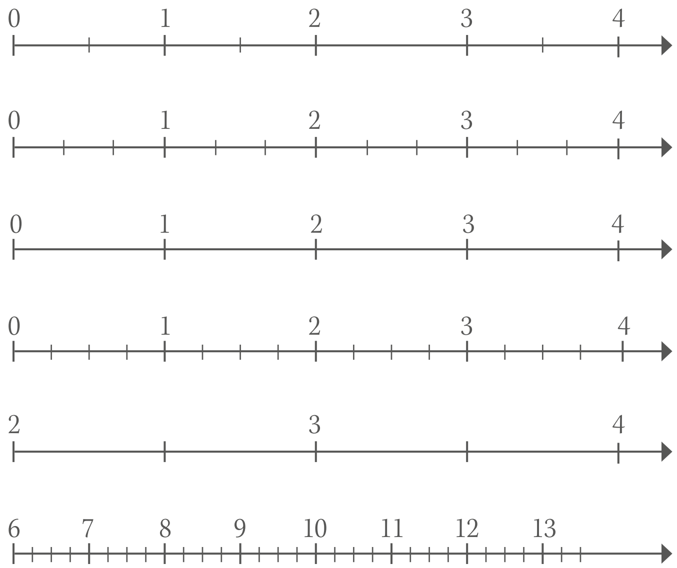
Una manera de enfrentar estos errores es que niños y niñas tengan la oportunidad de particionar rectas numéricas de acuerdo a diferentes situaciones. Se considera pertinente que el profesor asigne medidas a cada unidad, ya sea con centímetros o números de cuadrados de su cuaderno, previendo las particiones que se van a realizar posteriormente. Por ejemplo:

- Dibuje una recta numérica y represente los tres primeros números naturales, determinando una unidad de longitud como referente para la distancia entre dos números naturales consecutivos.
- Dibuje una recta numérica y divida la primera unidad en dos segmentos congruentes.
- Dibuje una recta numérica y divida las dos primeras unidades, cada una en cuatro segmentos congruentes.

Ejercicios de la sección

1. Represente las siguientes fracciones sobre la misma recta: $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}$ y $\frac{7}{4}$.

2. Escriba qué fracción representan las marcas en cada una de las rectas graduadas que se presentan a continuación:



6. Comparación de fracciones. Orden

Como hemos visto en las secciones anteriores, si usamos la interpretación de una fracción como parte de un todo, la fracción $\frac{3}{8}$ corresponde a considerar tres partes de un todo que se ha partido en ocho partes congruentes. Del mismo modo, la fracción $\frac{5}{8}$ corresponde a considerar cinco de estas partes. Una representación de ambas fracciones es la que muestra la **Figura VI.39.**

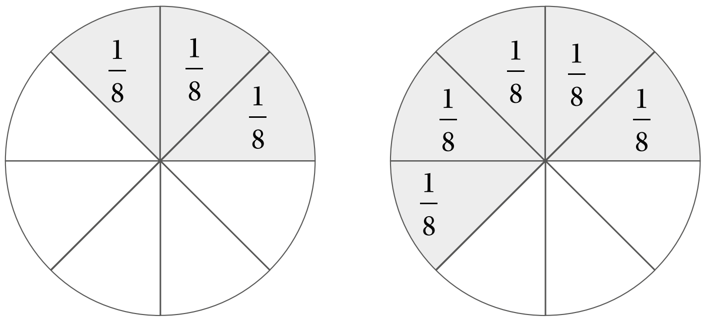


Figura VI.39.

Está claro que podemos comparar fracciones con igual denominador, $\frac{3}{8}$ es menor que $\frac{5}{8}$, porque estoy comparando octavos, y cinco octavos, son más que tres. En general, si $r < s$, entonces $\frac{r}{m} < \frac{s}{m}$ para cualquier número natural m.

Por otro lado, si pensamos en la fracción como reparto o medida, a igual numerador, será mayor la fracción que reparte en menos partes, es decir, la que tiene menor denominador. Por ejemplo, $\frac{3}{8}$ es mayor que $\frac{3}{10}$.

Figura VI.40.

En general, si $m < n$, entonces $\frac{r}{n} < \frac{r}{m}$ para cualquier número natural r.

Podemos combinar los dos criterios anteriores para comparar fracciones tales como $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{7}$. Para ello, notamos que $\frac{3}{8} < \frac{3}{7} < \frac{4}{7}$. En general, si $r < s$ y $m > n$, tenemos que $\frac{r}{m} < \frac{r}{n} < \frac{s}{n}$ y, por lo tanto, $\frac{r}{m} < \frac{s}{n}$.

Ejercicio

Ordene las siguientes fracciones en forma creciente.

a. $\frac{1}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{15}{3}$ y $\frac{7}{3}$.

b. $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{20}$ y $\frac{4}{36}$.

c. $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{5}$.

Consideremos ahora fracciones con distinto numerador y distinto denominador. Para compararlas, las podemos escribir con el mismo denominador usando amplificaciones y simplificaciones adecuadas. Por ejemplo, si queremos comparar $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{9}$, podemos amplificar la primera por 9 y la segunda por 7, es decir, $\frac{3}{7}=\frac{27}{63}$ y $\frac{5}{9}=\frac{35}{63}$. Vemos entonces que $\frac{3}{7}<\frac{5}{9}$.
Un caso particular sucede cuando tenemos un denominador múltiplo de otro. Por ejemplo, si queremos comparar las fracciones $\frac{5}{3}$ y $\frac{7}{6}$, notamos que $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}>\frac{7}{6}$, es decir, $\frac{5}{3}>\frac{7}{6}$. En este caso no es necesario amplificar o simplificar ambas fracciones, sino que basta hacerlo con una de ellas.

Resumiendo, si queremos comparar dos fracciones cualesquiera $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$, primero las amplificamos adecuadamente para que ambas tengan el mismo denominador. Si amplificamos la primera por q y la segunda por n, tenemos $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot q}{n\cdot q}$ y $\frac{p}{q}=\frac{p\cdot n}{q\cdot n}$, y podemos compararlas obteniendo que:

$$\frac{m}{n}<\frac{p}{q} \text{ si y solo si } \frac{m\cdot q}{n\cdot q}<\frac{p\cdot n}{q\cdot n}$$

Como estas últimas fracciones tienen igual denominador $\frac{m\cdot q}{n\cdot q}<\frac{p\cdot n}{q\cdot n}$, si y solo si $m\cdot q<p\cdot n$.
Así, hemos deducido la conocida regla para comparar fracciones, que consiste en multiplicar cruzado numeradores y denominadores, y luego comparar esos productos:

$$\frac{m}{n}<\frac{p}{q} \text{ si y solo si } m\cdot q<p\cdot n$$

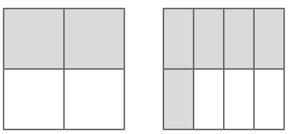
Para pensar

Encuentre una fracción menor que $\frac{1}{7}$. Ahora, encuentre otra fracción menor que la que encontró. ¿Puede continuar este proceso? ¿Existirá una fracción menor que todas las fracciones y mayor que 0?

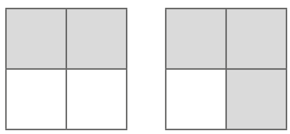
Ejercicios

1. Ordene las fracciones utilizando un procedimiento adecuado en cada caso.
   a. $\frac{8}{17}$, $\frac{10}{15}$ y $\frac{6}{19}$.
   b. $\frac{7}{20}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{2}{5}$.
   c. $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{4}$ y $\frac{10}{7}$.
2. Un alumno dice que $\frac{4}{11} > \frac{5}{12}$, pues $55 > 48$. ¿Qué error está cometiendo?
3. Utilice las siguientes representaciones para proponer una situación, en cada caso, que permita ejemplificar la comparación de fracciones. Proponga una secuencia de cómo mostraría los ejemplos, desde el más simple al más complejo de resolver.

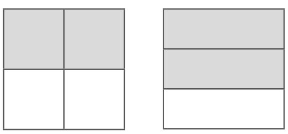
A



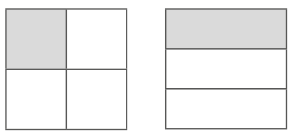
C



B



D



6.1 Densidad de las fracciones en la recta numérica

Consideremos dos fracciones, por ejemplo, $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$. Ya sabemos que $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$, y si situamos ambas fracciones en la recta numérica, vemos que hay muchos puntos entre las dos. ¿Corresponde alguno de ellos a una fracción? Intuimos que sí, pero ¿cómo lo comprobamos?

Figura VI.41.

Representamos ambas fracciones con el mismo denominador. En nuestro ejemplo, vemos que amplificándolas adecuadamente podemos escribirlas con denominador 20. Tenemos entonces $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ y $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, y ahora podemos intercalar, por ejemplo, $\frac{13}{20}$ entre ellas. Así:

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20} < \frac{13}{20} < \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

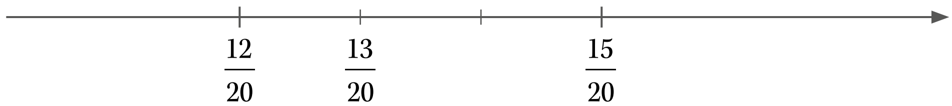


Figura VI.42.

Veamos otro ejemplo. Consideremos las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Si las amplificamos para poder compararlas, por ejemplo con denominador 6, tenemos $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ y $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. No se puede intercalar ninguna cantidad de sextos entre $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{6}$. Esto nos podría llevar a pensar que no existen fracciones entre $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{6}$. Sin embargo, no es así, es solo que hemos empleado una amplificación inadecuada para nuestro propósito. Si en lugar de usar denominador 6 (que es el mínimo común múltiplo de 2 y 3) usamos otro múltiplo común, por ejemplo 12, tenemos que $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$ y $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, de modo que $\frac{5}{12}$ está entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

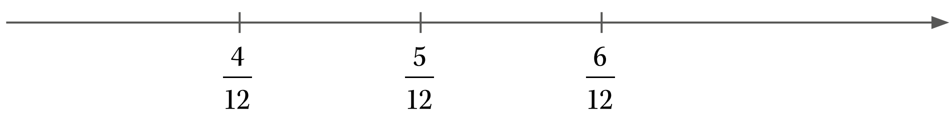


Figura VI.43.

El método se puede utilizar con cualquier par de fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$. Si $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$, entonces $m \cdot q < p \cdot n$. Así, escogemos cualquier número r tal que $m \cdot q < r < p \cdot n$. Amplificando $\frac{m}{n}$ por q y $\frac{p}{q}$ por n, tendremos:

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} < \frac{r}{n \cdot q} < \frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{p}{q}$$

La única dificultad que se puede presentar es que no podamos escoger r porque $m \cdot q$ y $p \cdot n$ son números consecutivos, es decir $m \cdot q + 1 = p \cdot n$, como sucedió en nuestro segundo ejemplo. Como vimos, basta con amplificar por números mayores, de hecho, en este caso siempre basta con amplificar $\frac{m}{n}$ por $2q$ y $\frac{p}{q}$ por $2n$.

Para pensar

En los números naturales existe el sucesor, aquel número que sigue inmediatamente a otro número. ¿Podemos encontrar una fracción que sigue inmediatamente a, por ejemplo, $\frac{1}{2}$?

La propiedad demostrada aquí se denomina *densidad* de las fracciones. Decimos que el orden de las fracciones es *denso* porque entre dos fracciones siempre hay otra fracción. Lo opuesto de un orden denso es un orden *discreto*, como el de los números naturales, en el que todos los números tienen un sucesor inmediato: no existe ningún número natural entre n y $n + 1$.

6.2 La propiedad arquimediana

El orden de las fracciones posee otra propiedad interesante, la cual tiene dos facetas. La primera nos dice que no importa cuán pequeña sea una fracción, si la repito una cantidad lo suficientemente grande de veces, superará a cualquier cantidad que podamos imaginar. Se expresa en el siguiente teorema.

Teorema VI.2

Dada una fracción $\frac{m}{n}$ y un número cualquiera M, entonces existe un número natural k tal que:

$$k \cdot \frac{m}{n} = \underbrace{\frac{m}{n} + \ldots + \frac{m}{n}}_{k} > M$$

Demostración

Basta tomar $k = 2 \cdot n \cdot M$ y vemos que se cumple lo pedido.

La propiedad expresada en el teorema anterior se denomina Propiedad Arquimediana del orden de las fracciones.

La segunda faceta de esta propiedad nos indica que no hay un número más pequeño, siempre hay uno menor y otro menor al anterior, y así sucesivamente.

Teorema VI.3

Dado un número cualquiera $M = \frac{m}{n}$, entonces existe una fracción $\frac{1}{k}$, tal que $\frac{1}{k} < M$.

Demostración

Si $m > 1$, entonces es claro que $\frac{1}{n} < \frac{m}{n}$. En el otro caso, si $m = 1$, tomamos cualquier otra representación de $\frac{m}{n}$, por ejemplo, la amplificamos por 2 y tendremos que $\frac{1}{m} = \frac{2}{2m} > \frac{1}{2m}$. Vemos que en ambos casos se cumple lo afirmado por el teorema.

En resumen

- Las fracciones son números en la recta numérica. Si dividimos la unidad de la recta en n partes iguales, la fracción $\frac{m}{n}$ se ubica al final del segmento m.
- Podemos ordenar fracciones expresándolas con un denominador común
- Entre dos fracciones distintas siempre hay otra fracción

Ejercicios de la sección

1. Intercale una fracción entre cada uno de los siguientes pares de fracciones.

   a. $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$.
   b. $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{9}$.
   c. $\frac{4}{7}$ y $\frac{7}{12}$.

2. Intercale 3 fracciones entre los siguientes pares de fracciones.

   a. $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{9}$.
   b. $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

3. ¿Cuántas fracciones hay entre dos fracciones?

7. Las fracciones y el material concreto

La Caja Rompecabezas

La Caja Rompecabezas es un material que puede ser usado para el desarrollo del concepto de fracción, del sentido de igualdad entre fracciones, relaciones de orden y operaciones con fracciones.

Se trata de un conjunto de piezas de colores que al unirlas forman una unidad cuadrada. De esta forma, cada pieza representa una fracción, por ejemplo, cuartos, tercios, medios, etc.

Las piezas, que pueden ser triangulares o rectangulares, son de color por el anverso y blancas por el reverso.

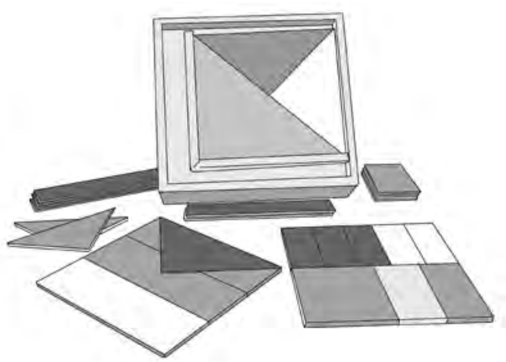
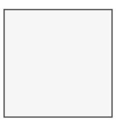
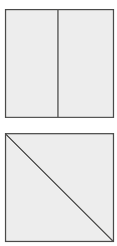
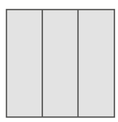
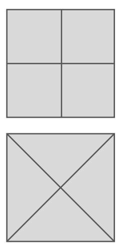
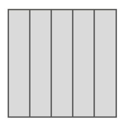


Figura VI.44.

Concretamente, este material consta de una lámina cuadrada de $20 \cdot 20$ cm, de color crema, y 12 láminas del mismo tamaño y de distintos colores, cada una dividida en partes congruentes, como se muestra a continuación:

Fracción	Unidad	Medios	Tercios	Cuartos	Quintos
Color	Crema	Amarillo	Verde claro	Anaranjado	Azul
Piezas					

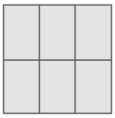
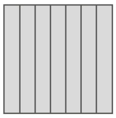
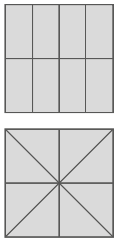
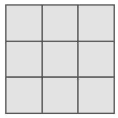
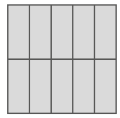
Fracción	Sextos	Séptimos	Octavos	Novenos	Décimos
Color	Verde	Café	Rojo	Verde oscuro	Celeste
Piezas					

Tabla VI.45.2.

Para representar fracciones con este material, se toma la lámina color crema, considerada como unidad, y sobre esta se ubican las partes de las otras láminas. Por ejemplo, para representar la fracción $\frac{4}{9}$, ubicamos los novenos sobre la unidad dejando cuatro por el lado de color verde oscuro y cinco por el lado de color blanco.

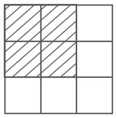


Figura V.45.

Para determinar si dos o más fracciones son iguales, tomamos la región crema, considerada como unidad, y sobre esta representamos las fracciones una sobre otra. Las que coinciden en su superficie pintada de color son iguales. Por ejemplo, para descubrir fracciones iguales a $\frac{1}{2}$, primero representamos sobre la unidad la fracción $\frac{1}{2}$ y luego superponemos la representación de otra fracción, por ejemplo $\frac{2}{4}$. Continuando hasta agotar las posibilidades que ofrece el material.

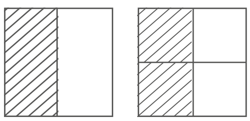


Figura VI.46.

Podemos descubrir que $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$.

Ejercicios de la sección

1. Represente con el material la fracción $\frac{5}{4}$.

   a. Indique las acciones realizadas.

   b. Dibuje la representación obtenida con el material.

2. Represente con el material la fracción $1\frac{1}{2}$.

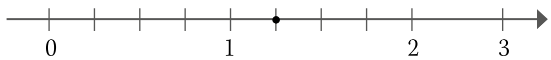
   a. Descubra todas las posibilidades que le brinda el material para descubrir las fracciones iguales a la dada.

   b. Represente, a través de diagramas de región, las igualdades identificadas.

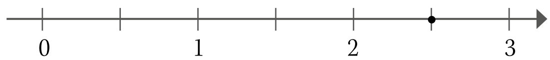
Ejercicios del capítulo

1. La profesora del 4° Básico pidió a sus estudiantes representar la fracción $\frac{5}{4}$ en una recta numérica.

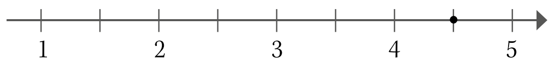
   Sebastián la representó así:



   Carlos la representó así:



   Tomás la representó así:



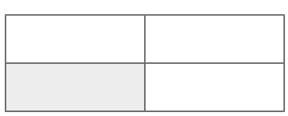
   a. ¿Quién representó correctamente la fracción $\frac{5}{4}$? Justifique su respuesta.

   b. Represente la misma fracción con un modelo de área y de conjunto.

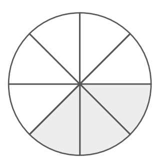
2. ¿Cuánto hay que agregarle al denominador de la fracción $\frac{5}{9}$ para que esta se reduzca a la mitad?

3. Justifique si son ciertas las siguientes afirmaciones:

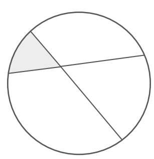
   a. La parte sombreada es $\frac{1}{4}$ del total.



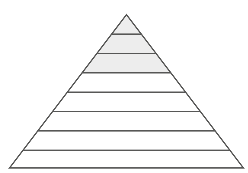
   c. La parte sombreada es $\frac{3}{8}$ del total.



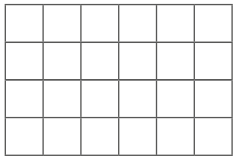
   b. La parte sombreada es $\frac{1}{4}$ del total.



   d. La parte sombreada es $\frac{3}{8}$ del total.



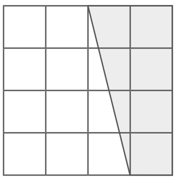
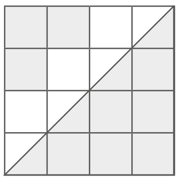
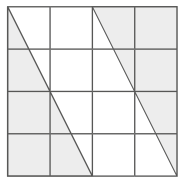
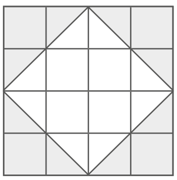
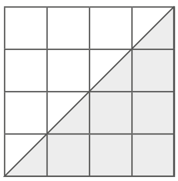
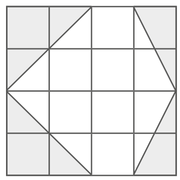
4. Las cuadrículas del tipo



Pueden servir para preguntar sobre la fracción del total que representa el área sombreada, considerando algunos cuadraditos de la cuadrícula.

Represente cinco fracciones usando este tipo de cuadrículas y considerando un orden creciente de dificultad.

5. En cada caso, escriba una fracción que represente la parte del cuadrado que está sombreada.

a.

b.

c.

d.

e.

f.


6. Lea las siguientes situaciones e identifique la interpretación para las fracciones que más se ajusta según el contexto. Explique su respuesta.

a. Juan tiene 3 chocolates para repartir equitativamente entre 6 de sus amigos.

b. Luisa cocinó un queque y sirvió $\frac{3}{4}$ de él para la once.

c. A un concierto de rock asistieron 2 mujeres por cada 5 hombres.

d. Para regar un huerto un agricultor ocupó $\frac{2}{3}$ de los 120 litros que tenía en el estanque de agua.

e. Luis compró una bebida de $2\frac{1}{2}$ litros.

7. Formule situaciones de contexto que ejemplifiquen la interpretación de la fracción $\frac{3}{5}$ como: parte-todo, cociente, medida, razón y operador.

8. Lea cada situación de contexto y señale qué relación hay entre las fracciones. Justifique su respuesta.

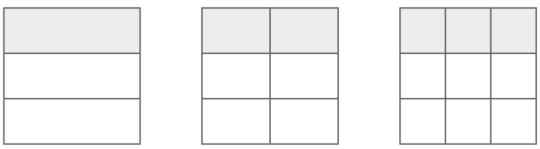
   a. Una persona come $\frac{1}{2}$ pizza individual. Otra persona come $\frac{2}{4}$ de una pizza del mismo tamaño.

   b. Un profesor reparte 3 pliegos de cartulina entre 4 estudiantes para la clase de Artes. Al día siguiente, reparte 4 pliegos de cartulina entre 3 estudiantes.

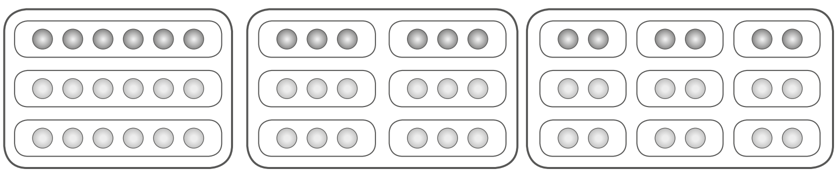
   c. Un jardinero plantó césped en $\frac{1}{3}$ de un terreno que tiene una superficie de 36 m^2 el día lunes. El martes plantó césped en $\frac{2}{6}$ del mismo terreno.

9. Observe las siguientes representaciones y explique de qué manera se pueden utilizar para justificar la igualdad entre dos fracciones.

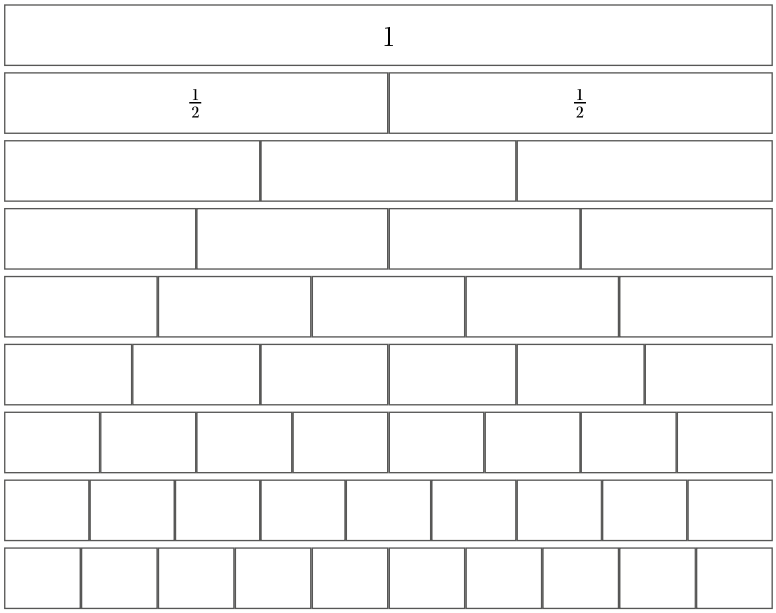
a.



b.



10. Considere que la cinta sin divisiones corresponde a la unidad. Indique a qué fracción corresponde cada barra.



11. Utilice las representaciones del ejercicio anterior para determinar igualdades entre fracciones.

Capítulo VII

Operaciones con fracciones

Introducción

Las operaciones con fracciones son uno de los temas del currículo escolar de matemática que genera mayores dificultades y ansiedad a niños y niñas. Esto persiste en la Educación Media e incluso en la Educación Superior. Uno de los motivos es que son enseñadas mayoritariamente a través de los algoritmos para efectuar los cálculos y no apoyándose en los conceptos involucrados. Debemos destacar desde el comienzo que las ideas que están detrás de las operaciones con fracciones son generalizaciones de las ideas que subyacen a las operaciones con números naturales. De esta manera, sumar fracciones corresponde a la acción de agregar, multiplicar es una generalización de la suma iterada y la división proviene de la idea de reparto o partición. Es importante abordar el cálculo de las operaciones simultáneamente con su significado en el contexto de problemas. Si bien se pueden memorizar las reglas para operar con fracciones, es mucho más complejo identificar los contextos donde ellas aparecen.

En este capítulo abordaremos el estudio de las operaciones con fracciones a partir de los significados y formas de representación estudiadas en el capítulo anterior, ligándolas a la resolución de problemas de contexto. Los algoritmos de cálculo serán desarrollados de manera intuitiva y luego serán justificados desde una perspectiva más algebraica. A lo largo del capítulo, articularemos los contenidos matemáticos con aspectos de su enseñanza, en particular, veremos las dificultades y posibles errores que se producen al operar con fracciones y en el uso de representaciones.

1. La suma y la resta de fracciones

Como vimos en el capítulo anterior, en la noción misma de fracción está implícita la idea de suma de fracciones con el mismo denominador. Por ejemplo, cuando escribimos $\frac{2}{4}$ estamos juntando dos cuartos, es decir, $\frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Así, si sumamos $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{7}$ estamos sumando séptimos, es decir:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

Tampoco hay dificultad para restar fracciones con igual denominador, por ejemplo:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

porque estamos restando a cierta cantidad de quintos otra cantidad de quintos.

En general, la suma de $\frac{p}{n}$ y $\frac{q}{n}$ corresponde a juntar p n-avos y q n-avos, por lo tanto, el resultado es $(p + q)$ n-avos, lo que se expresa como:

$$\frac{p}{n} + \frac{q}{n} = \frac{p+q}{n}$$

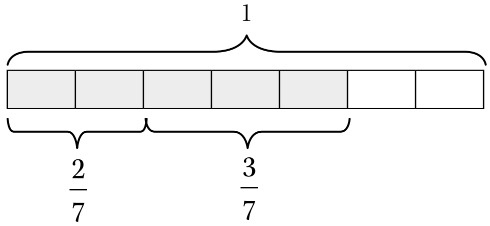
De manera similar, la resta de $\frac{p}{n}$ y $\frac{q}{n}$, con $p \geq q$, está dada por:

$$\frac{p}{n} - \frac{q}{n} = \frac{p-q}{n}$$

En los siguientes ejemplos, veremos dos problemas cuya resolución involucra la suma $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ y la resta $\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$, respectivamente. Veremos cómo los diagramas de barra nos pueden ayudar a plantear y resolver estos problemas.

Ejemplos

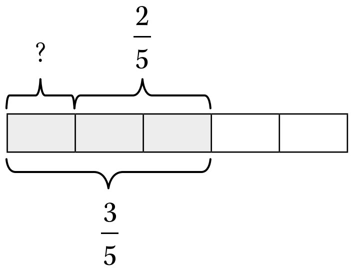
1) Tres amigos compran una caja de jugo de 1 litro. El primero se sirve $\frac{2}{7}$ de litro y el segundo $\frac{3}{7}$. ¿Cuánto de jugo le queda al tercer amigo? Representemos la situación con un diagrama de barra:



Vemos que los dos primeros amigos se sirvieron $\frac{5}{7}$ del litro de jugo y al tercer amigo le quedaron $\frac{2}{7}$ de litro.

2) En una botella se guardaron $\frac{3}{5}$ de un litro de aceite. Para hacer papas fritas se usaron $\frac{2}{5}$ de un litro. ¿Cuánto aceite queda sin usar?

Nuevamente es útil hacer un diagrama:



Vemos que quedó $\frac{1}{5}$ de litro sin usar.

Queda como ejercicio para el lector plantear las operaciones que permiten resolver los problemas anteriores.

La resta de dos fracciones es, conceptualmente, igual a la resta de los números naturales. De esta manera, la resta y la suma de fracciones responden a la misma relación que entre los números naturales, esto es:

$$a - b = d \text{ es equivalente a } a = b + d$$

Así, la resta responde a ¿cuánto más? y ¿cuánto le falta?

Podemos usar la representación en la recta numérica para efectuar la resta $\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$ respondiendo: ¿cuánto más grande es $\frac{3}{5}$ que $\frac{2}{5}$?

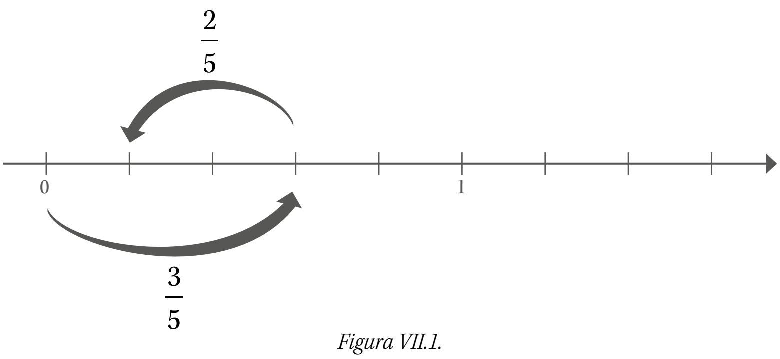


Figura VII.1.

O también podemos pensar esta misma resta como: ¿cuánto le falta a $\frac{2}{5}$ para llegar a $\frac{3}{5}$?

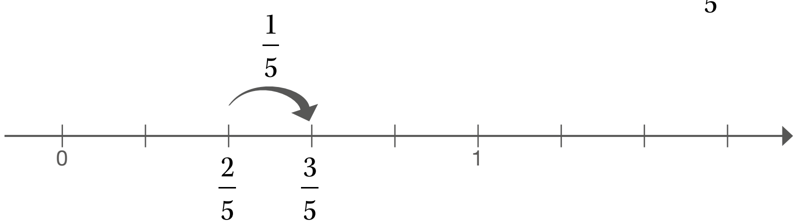


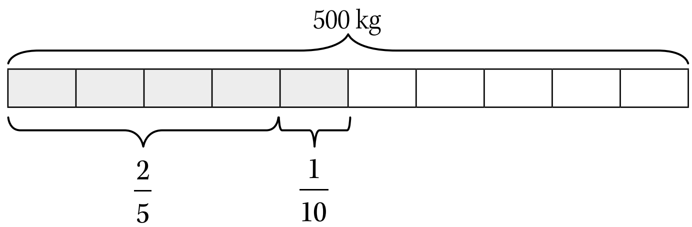
Figura VII.2.

Si uno de los denominadores es múltiplo del otro, el procedimiento para sumar y restar es muy similar. Por ejemplo, si deseamos sumar $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$, solo debemos notar que un quinto es lo mismo que 2 décimos, es decir, $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$. Luego $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{5}{10}$.

Ejemplo

Un comerciante tiene a la venta **500** kg de azúcar. Logra vender $\frac{2}{5}$ del total y utiliza $\frac{1}{10}$ para hacer conservas. ¿Cuánta azúcar le queda?

Tenemos que $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$. Representamos la situación en el siguiente diagrama de barras:



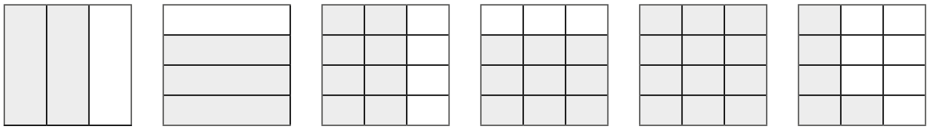
Entonces, le quedan $\frac{5}{10}$ de los **500** kg de azúcar, que corresponden a **250** kg.

Sumar y restar fracciones con distinto denominador es más complejo ya que, intuitivamente, estamos tratando de sumar o restar partes de distinta naturaleza. Por ejemplo, en $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, los tercios y los cuartos surgen al partir en tres y en cuatro, respectivamente, el mismo todo. Sin embargo, como vimos en el capítulo anterior, las fracciones se pueden amplificar o simplificar para que tengan el mismo denominador y, de esta forma, volver al caso inicial. Visualicemos la suma anterior usando un modelo de área:

Ejemplo

Calculemos $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$.

Representemos la fracción $\frac{2}{3}$ como un rectángulo dividido en tres secciones verticales iguales con dos de ellas sombreadas. La fracción $\frac{3}{4}$ la representamos con un rectángulo congruente con el anterior dividido en cuatro secciones horizontales iguales con tres de ellas sombreadas. Si el primer rectángulo lo dividimos en cuatro secciones horizontales, la parte sombreada sigue representando $\frac{2}{3}$, solo que ahora se ve claramente que es igual a $\frac{8}{12}$. El segundo rectángulo lo dividimos verticalmente en tres secciones y la parte sombreada sigue representando $\frac{3}{4}$, que ahora vemos que es igual a $\frac{9}{12}$. Tenemos, finalmente, una suma de fracciones de igual denominador $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}$.



$$\frac{2}{3} \quad + \quad \frac{3}{4} \quad = \quad \frac{8}{12} \quad + \quad \frac{9}{12} \quad = \quad \frac{17}{12}$$

El procedimiento realizado equivale a amplificar las fracciones para escribir ambas con denominador 12. Tenemos que $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ y $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, y, por lo tanto, $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}$.

En general, para sumar o restar dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$, primero las amplificamos o simplificamos adecuadamente para lograr que ambas tengan el mismo denominador. A este proceso se le llama habitualmente *buscar un común denominador*.

Una forma de obtener un común denominador consiste en observar que basta con multiplicar los denominadores entre sí. Tenemos que $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot q}{n\cdot q}$ y $\frac{p}{q}=\frac{p\cdot n}{q\cdot n}$, y podemos sumar y restar sin dificultad:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q}{n\cdot q}+\frac{p\cdot n}{q\cdot n}=\frac{m\cdot q+p\cdot n}{n\cdot q}$$

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q}{n\cdot q}-\frac{p\cdot n}{q\cdot n}=\frac{m\cdot q-p\cdot n}{n\cdot q}$$

Observamos que, como vimos en el capítulo anterior, $\frac{m}{n}\geq\frac{p}{q}$ es equivalente a $m\cdot q\geq p\cdot n$. Por lo tanto, si el minuendo es mayor o igual al sustraendo, el numerador de la fracción anterior será mayor o igual a 0.

Muchas veces, para sumar o restar fracciones se utiliza lo que se denomina el mínimo común denominador, que es el mínimo común múltiplo de los dos denominadores. Por ejemplo, para sumar $\frac{5}{18}+\frac{7}{12}$, podemos usar como común denominador el 36, que es el mínimo común denominador.

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{12}=\frac{10}{36}+\frac{21}{36}=\frac{31}{36}$$

También se puede usar como denominador cualquier otro múltiplo común, por ejemplo el 72.

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{12}=\frac{20}{72}+\frac{42}{72}=\frac{62}{72}=\frac{31}{36}$$

o directamente el producto $18 \cdot 12 = 216$.

$$\frac{5}{18}+\frac{7}{12}=\frac{60}{216}+\frac{126}{216}=\frac{186}{216}=\frac{31}{36}$$

Notemos que estos procedimientos difieren solamente en la forma en que se elige el común denominador. Cuando multiplicamos los denominadores, la obtención del común denominador es inmediata, pero las operaciones involucran números mayores que pueden dificultar el cálculo. Cuando buscamos el mínimo común denominador, los números que se obtienen son menores y el cálculo se facilita. Sin embargo, el cálculo del mínimo común denominador requiere calcular el mínimo común múltiplo. Siempre se puede usar otro múltiplo común, si no queremos o no podemos calcular el mínimo común denominador y tampoco queremos usar el producto entre los denominadores.

Para pensar

Un profesor afirma que antes de estudiar la suma y la resta de fracciones es imprescindible enseñar un procedimiento para calcular el mínimo común múltiplo entre dos o más números. ¿Está de acuerdo con este profesor?

Ejemplo

Para restar $\frac{3}{8}-\frac{1}{12}$, podemos:

- Usar el mínimo común denominador, que es 24:

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{12}=\frac{9}{24}-\frac{2}{24}=\frac{7}{24}$$

- Usar un denominador cualquiera, por ejemplo, 48:

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{12}=\frac{18}{48}-\frac{4}{48}=\frac{14}{28}=\frac{7}{24}$$

- Usar como denominador el producto de los denominadores:

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{12}=\frac{36}{96}-\frac{8}{96}=\frac{28}{96}=\frac{7}{24}$$

En la práctica, luego de elegir el denominador común procedemos como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Queremos sumar $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{4}$. Tomemos el 12 como denominador común, luego, vemos por qué número multiplicamos al 6 para obtener 12, es decir, 2 y multiplicamos el 5 también por 2, lo que nos da 10. Después vemos por qué número multiplicamos al 4 para obtener 12, o sea 3, y multiplicamos el 7 también por 3, lo que nos da 21. Por último, sumamos esos dos números, lo que nos da el numerador de la suma:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{5\cdot 2+7\cdot 3}{12}=\frac{10+21}{12}=\frac{31}{12}$$

A medida que se gana confianza en el procedimiento, se omite el paso intermedio.

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{10+21}{12}=\frac{31}{12}$$

Para pensar

¿Es posible escribir una fórmula general para sumar las fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ usando el mínimo momún múltiplo como denominador común?

1.1 Propiedades de la suma y la resta

La suma y la resta de fracciones satisfacen las mismas propiedades que enunciamos en el **Capítulo II** en las **Secciones 1.2** y **.2.1** para la suma y resta de números naturales. Las justificaciones intuitivas de estas propiedades, que hicimos en los apartados anteriores, también son válidas en el contexto de las fracciones, pues ellas se basan en la interpretación de los números naturales como longitudes de segmentos, lo que también es cierto para las fracciones (fracciones como medidas).

Por otra parte, la suma y la resta de fracciones se definen en términos de sumas, restas, productos y cocientes de números naturales, por lo tanto, las propiedades de la suma y la resta de fracciones se pueden verificar de manera formal usando las propiedades de las operaciones de números naturales.

Por ejemplo, verifiquemos que la suma de fracciones es conmutativa, es decir, verifiquemos que para cualquier par de fracciones se tiene:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$$

Para esto, sumaremos las fracciones del lado derecho e izquierdo de la igualdad, usando como denominador común $q\cdot n$, obtenemos:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{p\cdot n+m\cdot q}{q\cdot n} \text{ y } \frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q+p\cdot n}{q\cdot n}$$

Observamos que ambas fracciones tienen el mismo denominador y el mismo numerador, pues, por la propiedad conmutativa de la suma de números naturales, se tiene que $p \cdot n + m \cdot q = m \cdot q + p \cdot n$.

Enunciamos, a continuación, las propiedades de la suma de fracciones:

Conmutatividad de la suma: $\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$

Asociatividad de la suma: $\frac{p}{q}+\frac{m}{n} \quad +\frac{a}{b}=\frac{p}{q}+ \quad \frac{m}{n}+\frac{a}{b}$

Elemento neutro para la suma: $\frac{p}{q}+0=\frac{p}{q}$

Ejercicios

1. Utilice diagramas de barra para justificar las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.
2. Demuestre la propiedad asociativa de la suma y la propiedad del elemento neutro.
3. Considere la siguiente demostración para verificar que el **0** es neutro para la suma de fracciones e indique la propiedad o concepto se está usando en cada paso:

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}+0&=\frac{p}{q}+\frac{0}{q}\\&=\frac{p+0}{q}\\&=\frac{p}{q}\end{aligned}$$

4. Demuestre las propiedades de la **1** a la **11**, del **Capítulo II.** en la **Sección 2.1**, para la resta de fracciones.

En resumen

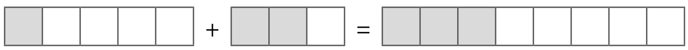
- La suma y la resta de fracciones se pueden caracterizar a partir de las mismas acciones que vimos al estudiar la suma y la resta de números naturales, estas son: juntar, separar, agregar, quitar y comparar.
- La suma y la resta de fracciones verifican las mismas propiedades que la suma y la resta de números naturales.

Ejercicios de la sección

1. Justifique formalmente que la suma de dos fracciones no depende de la representación que usemos para expresar cada sumando. Concretamente, pruebe que si $\frac{m}{n}=\frac{r}{s}$ y $\frac{p}{q}=\frac{u}{w}$, entonces:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{r}{s}+\frac{u}{w}$$

2. Un estudiante dice que $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3}{8}$ y lo justifica con el siguiente diagrama:



¿Por qué cree que se produce este error?

3. Explique cómo sumar las siguientes fracciones:

a. $\frac{1}{12}+\frac{3}{8}+\frac{4}{9}$

b. $\frac{7}{4}-\frac{1}{10}+\frac{3}{5}$

c. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$

4. Explique cómo calcular mentalmente las siguientes operaciones:

a. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$

b. $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}+\frac{1}{8}$

c. $3\tfrac{3}{5}-2$

d. $13-\frac{5}{8}$

e. $3\tfrac{2}{7}-1\tfrac{5}{7}$

f. $20-\frac{11}{13}$

g. $14-3\tfrac{7}{9}$

5. Julio es $2\tfrac{1}{2}$ cm más alto que Tomás, quien a su vez es $3\tfrac{1}{2}$ cm más alto que Emilio. ¿Quién es más alto? ¿Por cuánto?

6. Juan reparte sus láminas entre varios amigos. A su amiga Carmen le da $\frac{1}{6}$ de sus láminas, a Felipe le da $\frac{2}{5}$ y el resto equitativamente lo divide entre Pedro y Agustín. ¿Qué parte de las láminas de Juan recibe Agustín?

7. Tres niñas comparten una botella de agua. La primera toma $\frac{1}{2}$ de la botella y la segunda niña toma $\frac{1}{3}$ de lo que queda. ¿Qué fracción de la botella le queda a la tercera?

8. Invente problemas cuya solución pueda ser obtenida mediante las siguientes operaciones:

a. $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$

b. $3\tfrac{1}{2}-\frac{3}{4}$

c. $\frac{2}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

d. $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$

9. Explique cuál o cuáles de los siguientes problemas se resuelven con la resta $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$. Explique cómo resolver aquellos problemas que no se resuelven con esta operación.

a. Sandra corre $\frac{3}{4}$ km en un camino recto y luego retrocede $\frac{2}{3}$ de lo que corrió. ¿A qué distancia está de su punto de partida?

b. Sandra corre $\frac{3}{4}$ km en un camino recto y luego retrocede $\frac{2}{3}$ km. ¿A qué distancia está de su punto de partida?

c. Tomás comparte su colación con un amigo. Él come $\frac{3}{4}$ de su colación y le regala $\frac{2}{3}$ de lo que le queda a su amigo. ¿Qué fracción de la colación le regala a su amigo?

d. Antonia compra $\frac{3}{4}$ kg de frutillas y con una amiga comen $\frac{2}{3}$ kg. ¿Cuánto le queda?

10. Explique cuál o cuáles de los siguientes problemas se resuelven con la suma $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$. Explique cómo resolver aquellos problemas que no se resuelven con esta operación.

a. $\frac{1}{4}$ de los niños de un curso prefiere el color rojo y $\frac{2}{3}$ prefiere el azul. ¿Qué fracción de los niños del curso prefiere el rojo o el azul?

b. $\frac{1}{4}$ de los niños de un curso prefiere el color rojo, de los niños que no prefieren el color rojo $\frac{2}{3}$ prefieren el azul. ¿Qué fracción de los niños del curso prefiere el rojo o el azul?

c. $\frac{1}{4}$ del patio de Susana está cubierto por pasto, al igual que $\frac{2}{3}$ del patio de Mariela. Ambos patios tienen la misma superficie. ¿Qué fracción de ambos patios está cubierta por pasto?

d. Camila tomó $\frac{1}{4}$ de una botella de 1 L de jugo y luego tomó $\frac{2}{3}$ de lo que quedaba. ¿Cuánto jugo tomó Camila?

e. Camila tomó $\frac{2}{3}$ de una botella de 1 L de jugo y luego tomó $\frac{1}{4}$ L. ¿Cuánto jugo tomó Camila?

11. En cada caso invente un problema que se resuelva con la operación dada y que sea del tipo indicado.

a. $\frac{3}{4}+\frac{5}{2}$ Juntar

b. $\frac{5}{3}-\frac{1}{4}$ Separar

c. $2+\frac{1}{2}$ Agregar

d. $3-\frac{1}{3}$ Quitar

e. $\frac{7}{4}-\frac{4}{7}$ Comparar

2. La multiplicación de fracciones

En esta sección abordaremos la multiplicación de fracciones de manera progresiva, pensando en su enseñanza. Veremos primero la multiplicación de un número natural por una fracción, luego una fracción por un número natural y finalmente el producto entre dos fracciones. Para cada caso veremos la conveniencia del uso de modelos lineales, de área o de conjunto.

2.1 Multiplicación de un número natural por una fracción

Ya hemos visto algunas características de la multiplicación por fracciones. En efecto, cuando multiplicamos una fracción por un número natural, hemos preservado la idea de que multiplicar por un número natural es una manera abreviada de sumar iteradamente. Así:

$$3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

En general, si k, m y n son números naturales, con $n \neq 0$:

$$k \cdot \frac{m}{n} = \underbrace{\frac{m}{n} + \ldots + \frac{m}{n}}_{k} = \frac{k \cdot m}{n}$$

Es decir, para multiplicar un número natural por una fracción, se multiplica el natural por el numerador y se conserva el denominador. Para ilustrar esto, consideremos el siguiente problema que puede ser usado para introducir esta operación:

Para una convivencia escolar se compraron cinco pizzas, cada una de las cuales se partió en 8 partes iguales. Al final de la reunión, la profesora le informa a sus alumnos que de cada pizza quedaron 3 pedazos, ¿cuánta pizza quedó?

Para resolver este problema se debe deducir a qué fracción corresponde 5 veces $\frac{3}{8}$, es decir, $5 \cdot \frac{3}{8}$.

Representamos la situación en la siguiente figura:

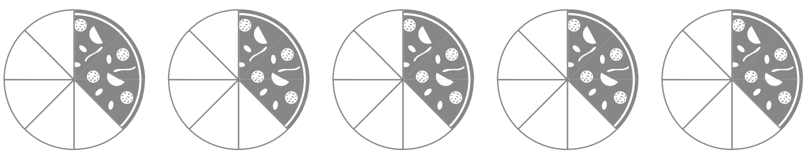


Figura VII.3.

Luego, si se junta la pizza sobrante, se tiene:

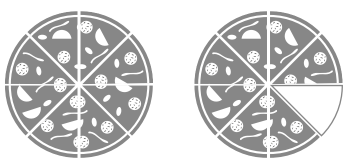


Figura VII.4.

de donde deducimos que $5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$.

Ejercicio

Proponga dos problemas que se resuelvan mediante la multiplicación de un natural por una fracción.

Los ejemplos con porciones de pizza para representar fracciones son útiles para fracciones con denominador 2, 4, 6 y 8 (¿cómo partiría una pizza en 6 porciones iguales?). Para fracciones con otros denominadores es necesario usar un transportador y saber hacer la división 360° : *n*.

En general, los modelos de área son apropiados para representar multiplicaciones de una fracción por un natural.

2.2 Multiplicación de una fracción por un número natural

Si bien debiera ser lo mismo $k\cdot\frac{m}{n}$ que $\frac{m}{n}\cdot k$, su interpretación es distinta. Como vimos, $3\cdot\frac{4}{5}$ se interpreta como 3 veces la fracción $\frac{4}{5}$. Sin embargo, $\frac{4}{5}\cdot 3$ se interpreta como $\frac{4}{5}$ de 3.

Veamos el siguiente problema, donde usamos un modelo lineal para resolverlo:

Se compraron 15 metros de cinta para hacer adornos para la sala de clases.
Se usaron $\frac{3}{5}$ de la cinta. ¿Cuántos metros de cinta se usaron?

Usando un modelo lineal para representar el problema, obtenemos una figura como la siguiente:

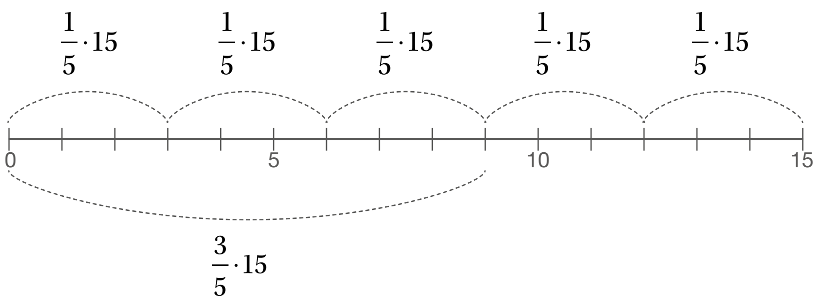


Figura VII.5.

A partir de este modelo, se puede deducir que $\frac{1}{5}$ de 15 corresponde a 15 : 5 = 3; es decir, si dividimos 15 en 5 partes iguales, a cada parte le corresponden 3 unidades. Luego, debemos considerar 3 de esas partes. La expresión matemática correspondiente es:

$$\frac{3}{5}\cdot 15 = 3\cdot\ \frac{1}{5}\cdot 15\ = 3\cdot\frac{15}{5} = \frac{3\cdot 15}{5}$$

Ejercicios

Proponga dos problemas que se resuelvan mediante la multiplicación de una fracción por un natural.

Resolveremos el siguiente problema usando un modelo de conjuntos:

Se compran 45 chocolates para entregarlos como premios en una actividad escolar. Al final de la jornada se han entregado $\frac{5}{9}$ *del total. ¿Cuántos chocolates se entregaron?*

Usando un modelo de conjuntos se tiene una figura como la siguiente:

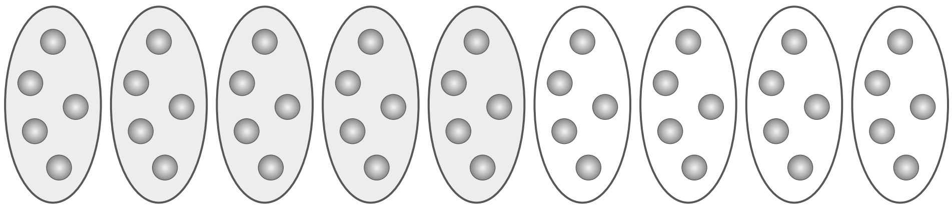


Figura VII.6.

Luego, se deduce que $\frac{5}{9}\cdot 45$ corresponde a tomar primero $\frac{1}{9}$ de 45 y luego multiplicar el resultado por 5. La expresión matemática correspondiente es:

$$\frac{5}{9}\cdot 45 = 5\cdot \frac{1}{9}\cdot 45 = 5\cdot\frac{45}{9} = \frac{5\cdot 45}{9}$$

Usando un modelo lineal o un modelo de área, se puede probar que:

$$\frac{m}{n}\cdot k = \frac{m\cdot k}{n}$$

Observamos que esto demuestra que $\frac{m}{n}\cdot k = k\cdot\frac{m}{n}$.

Ejercicio

En cada caso, proponga un problema que se resuelva con la operación dada y con la representación indicada.

a. $3\cdot\frac{5}{6}$ Modelo de área

b. $\frac{4}{9}\cdot 18$ Modelo lineal

c. $\frac{4}{5}\cdot 15$ Modelo de conjuntos

Notemos que el modelo de conjuntos no se adapta bien a representar multiplicaciones donde en cada conjunto no queda un número entero, por ejemplo, $\frac{4}{5} \cdot 12$.

Es importante que en el tratamiento de las fracciones se desarrolle simultáneamente la comprensión conceptual de la operación y la destreza necesaria para realizar el cálculo. En ese sentido, se debe desarrollar la capacidad de simplificar las fracciones hasta llegar a una irreducible, es decir, que no se puede seguir simplificando. Veamos tres estrategias equivalentes:

Estrategia 1:

$$\frac{3}{10} \cdot 15 = \frac{3 \cdot 15}{10} = \frac{\overset{9}{\cancel{45}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{9}{2}$$

Estrategia 2:

$$\frac{3}{10} \cdot 15 = \frac{3 \cdot \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{9}{2}$$

Estrategia 3:

$$\frac{3}{\underset{2}{\cancel{10}}} \cdot \overset{3}{\cancel{15}} = \frac{9}{2}$$

Ejercicios

1. Justifique las estrategias anteriores, usadas para simplificar la multiplicación de una fracción por un número natural.

2. Proponga una lista de cinco multiplicaciones de un número natural por una fracción, donde sea conveniente simplificar el resultado antes de realizar el cálculo.

2.3 Multiplicación de una fracción por otra fracción

Comprender el significado del producto entre dos fracciones puede ser más complejo que en los casos anteriores. Consideremos el siguiente problema:

> *Un agricultor posee una granja en la cual $\frac{4}{5}$ de la superficie está plantada con árboles frutales. De esta superficie, $\frac{3}{7}$ son naranjos. ¿Cuánta superficie del total está ocupada por los naranjos?*

Para resolver el problema, debemos calcular la fracción que resulta al tomar $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$, lo que se representa como $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$. Usemos un modelo de área para visualizar la situación. Primero, dividimos un rectángulo en 5 barras verticales y sombreamos 4 de ellas para representar $\frac{4}{5}$.

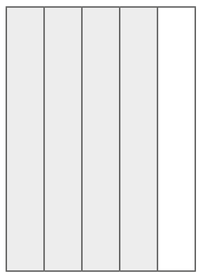


Figura VII.7.

Luego, lo dividimos horizontalmente en 7 barras, pues debemos tomar $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$.

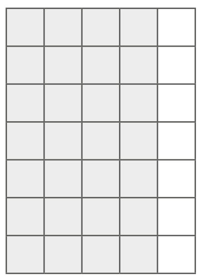


Figura VII.8.

Finalmente, marcamos los $\frac{3}{7}$ de los $\frac{4}{5}$.

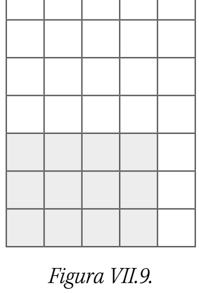


Figura VII.9.

Observemos que en total hay 35 rectángulos que corresponden a $7 \cdot 5 = 35$, y hemos pintado 12 de ellos, que corresponden a $3 \cdot 4 = 12$. Deducimos entonces que $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$ es $\frac{12}{35}$, es decir, $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35}$.

Consideremos el caso general de multiplicación de fracciones $\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}$ y representemos la situación con un diagrama de área. Usaremos fracciones propias para facilitar la representación.

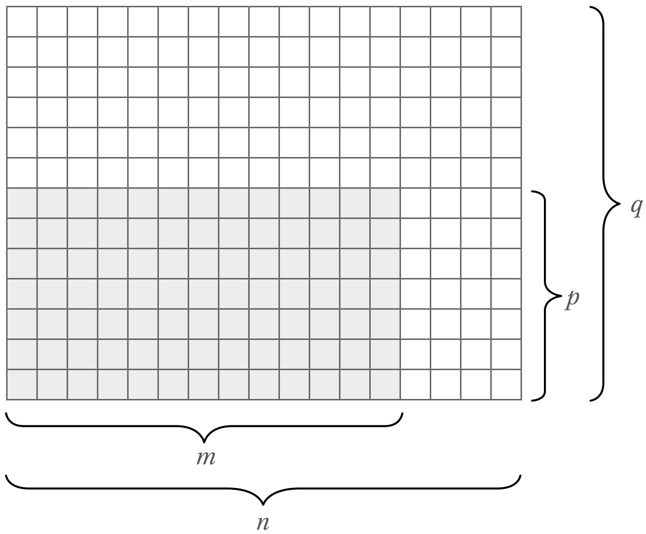


Figura VII.10.

Tenemos un total de $q \cdot n$ pequeños rectángulos, de los cuales $p \cdot m$ quedan pintados. Deducimos que debe verificarse la fórmula:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n}$$

Para pensar

Hemos usado el modelo de área para representar la multiplicación entre dos fracciones cualesquiera, ¿es posible representar esta operación usando un modelo lineal?, ¿y un modelo de conjuntos?

Ejercicios

1. Proponga tres problemas que se resuelvan representando en un diagrama de área una multiplicación de fracciones.

2. Haga un diagrama para representar la multipicación $\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}$, donde $\frac{p}{q}$ es una fracción propia y $\frac{m}{n}$ es una fracción impropia.

Nuevamente, un aspecto importante al momento de efectuar los cálculos es la simplificación del resultado, veamos tres estrategias:

Estrategia 1: $$\frac{5}{12}\cdot\frac{8}{15}=\frac{5\cdot 8}{12\cdot 15}=\frac{40}{180}=\frac{20}{90}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$$

Estrategia 2: $$\frac{5}{12}\cdot\frac{8}{15}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{12}}\cdot\underset{3}{\cancel{15}}}=\frac{2}{9}$$

Estrategia 3: $$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{12}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{15}}}=\frac{2}{9}$$

Ejercicios

1. Explique la validez de las estrategias anteriores.

2. Proponga una lista de cinco multiplicaciones de fracciones donde sea conveniente simplificar el resultado antes de realizar el cálculo.

Podemos llegar al procedimiento para multiplicar fracciones de manera analítica, sin recurrir al modelo geométrico. Basta con la definición de fracción y con suponer que las operaciones con fracciones tienen las mismas propiedades que aquellas de los números naturales, esto es: conmutatividad, asociatividad y distributividad de la multiplicación sobre la suma. Para ello, simplifiquemos un poco el problema y calculemos el resultado de multiplicar dos fracciones unitarias $\frac{1}{q}$ y $\frac{1}{n}$. Tenemos que:

$$1=1\cdot 1=\;q\cdot\frac{1}{q}\;\cdot\;n\cdot\frac{1}{n}\;=(q\cdot n)\cdot\;\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{n}$$

De tal manera que si sumamos $q\cdot n$ veces el producto $\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{n}$, como en la expresión de la derecha, la suma nos da 1, es decir:

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{q\cdot n}$$

La conclusión, entonces, es que si multiplicamos fracciones unitarias, obtenemos otra fracción unitaria cuyo denominador es el producto de los denominadores de las fracciones originales.

El problema general es ahora fácil de resolver recurriendo nuevamente a las propiedades ya aceptadas.

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=p\cdot\frac{1}{q}\cdot m\cdot\frac{1}{n}=p\cdot m\cdot\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{n}=p\cdot m\cdot\frac{1}{q\cdot n}=\frac{p\cdot m}{q\cdot n}$$

Para la primera igualdad usamos solo la definición de fracción, para la segunda suponemos que el producto de naturales y fracciones es asociativo y conmutativo. La tercera igualdad es el resultado de lo visto más arriba. La última es, nuevamente, la definición de fracción.

Vemos así que ambos análisis, el algebraico y el geométrico, nos llevan a la regla aprendida en la escuela: el producto de dos fracciones se obtiene multiplicando entre sí los numeradores y los denominadores de cada una de las fracciones.

Ejercicios

1. Calcule y simplifique

   a. $\frac{8}{25}\cdot\frac{15}{24}=$

   b. $\frac{9}{21}\cdot\frac{14}{3}=$

   c. $\frac{18}{50}\cdot\frac{15}{21}\cdot\frac{14}{9}=$

   d. $\frac{28}{15}\cdot\frac{20}{21}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{5}{4}=$

2. La quinta parte del doble de la cuarta parte de 1 es ...

3. Una máquina fabrica 3.000 tornillos en una hora, de los cuales $\frac{1}{20}$ son defectuosos. ¿Cuántos tornillos no defectuosos fabricará en tres horas y media?

4. Un pintor pinta $\frac{3}{4}$ de una muralla y al día siguiente pinta $\frac{3}{4}$ de lo que faltaba. ¿Qué parte debe pintar al tercer día para terminar la tarea?

5. En un depósito hay 50 litros de agua. Se sabe que al congelarse el agua aumenta su volumen en $\frac{1}{10}$ del total. ¿Cuántos litros de hielo se producirán si se congela el agua del depósito?

6. Justifique formalmente que el producto de dos fracciones no depende de la representación que usemos para expresar cada sumando. Concretamente, pruebe que si $\frac{m}{n}=\frac{r}{s}$ y $\frac{p}{q}=\frac{u}{w}$ entonces:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{r}{s}\cdot\frac{u}{w}$$

2.4 Propiedades de la multiplicación

La multiplicación de fracciones tiene las mismas propiedades que la multiplicación de números naturales. Estas propiedades pueden ser verificadas formalmente utilizando la fórmula que define la multiplicación, es decir, $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$. Sin embargo, su visualización es menos evidente. A continuación, discutiremos algunas formas de justificar intuitivamente estas propiedades.

Conmutatividad de la multiplicación: $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}$

Para ilustrar esta propiedad, consideremos los productos $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$.

Para representar $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$, podemos dibujar un rectángulo, dividirlo verticalmente en dos partes iguales y considerar una de ellas. Luego volvemos a dividir el rectángulo en cinco partes iguales, pero esta vez de forma horizontal. De esta manera, $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{2}$ se representa por la parte sombreada de la siguiente figura:

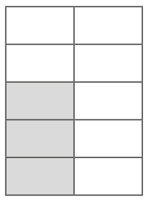


Figura VII.11.

Para representar el segundo producto $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$, consideremos el mismo rectángulo, pero esta vez interpretamos que lo dividimos primero horizontalmente en cinco partes de igual tamaño y consideramos tres de ellas, y luego lo dividimos en dos partes iguales de forma vertical. De esta manera, $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$ se representa por la misma parte sombreada. Así, hemos verificado que:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$$

Este argumento se puede generalizar directamente para el producto de fracciones propias.

Ejercicio

A partir de la fórmula que define la multiplicación de fracciones, demuestre la propiedad conmutativa.

Asociatividad de la multiplicación: $\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}\;\cdot\frac{a}{b}=\frac{p}{q}\cdot\;\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}$

Para mostrar esta propiedad, al igual que en el caso de la multiplicación de números naturales, podríamos apoyarnos en la representación de un objeto en tres dimensiones. Es por ello que en este apartado demostraremos esta propiedad usando herramientas algebraicas. Consideremos tres fracciones cualesquiera, $\frac{p}{q}$, $\frac{m}{n}$ y $\frac{a}{b}$, y veremos que se cumple la igualdad:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}\;\cdot\frac{a}{b}=\frac{p}{q}\cdot\;\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}$$

Para ello, calculemos el producto del lado izquierdo de la igualdad. Aplicando la regla para multiplicación de fracciones, se tiene:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}\;\cdot\frac{a}{b}=\frac{p\cdot m}{q\cdot n}\cdot\frac{a}{b}=\frac{(p\cdot m)\cdot a}{(q\cdot n)\cdot b}$$

Del mismo modo, si calculamos el producto del lado derecho de la igualdad, se tiene:

$$\frac{p}{q}\cdot\;\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}\;=\frac{p}{q}\cdot\frac{m\cdot a}{n\cdot b}=\frac{p\cdot(m\cdot a)}{q\cdot(n\cdot b)}$$

Como la multiplicación de números naturales es asociativa, en ambos casos se obtiene el mismo resultado, comprobándose así la propiedad.

Elemento neutro de la multiplicación: $1\cdot\frac{p}{q}=\frac{p}{q}$

Esta propiedad se obtiene directamente de la definición de la multiplicación o de cualquiera de sus interpretaciones.

Elemento absorbente para la multiplicación: $0\cdot\frac{p}{q}=0$

Al igual que la propiedad anterior, se obtiene directamente de la fórmula para la multiplicación. Podemos también interpretar de manera natural que $\frac{p}{q}\cdot 0$ corresponde a tomar $\frac{p}{q}$ partes de 0, lo que es igual a 0. La interpretación de $0\cdot\frac{p}{q}$ no corresponde a ninguna de las que tenemos.

Elemento inverso con respecto a la multiplicación: $\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=1$, para n y m distintos de 0.

De acuerdo a la regla para multiplicar fracciones, si multipicamos $\frac{m}{n}$ por $\frac{n}{m}$ tenemos:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=\frac{m\cdot n}{n\cdot m}=1$$

Decimos que $\frac{n}{m}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{m}{n}$ y viceversa.

Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma:

$$\frac{p}{q}\cdot \quad \frac{m}{n}+\frac{a}{b} \quad =\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\cdot\frac{a}{b}$$

Recordemos que la multiplicación y la suma de números naturales se relacionan a través de la propiedad distributiva. En las fracciones también se verifica esta propiedad. Consideremos tres fracciones cualesquiera, $\frac{p}{q}$, $\frac{m}{n}$ y $\frac{a}{b}$. Operando con el lado izquierdo de la igualdad, tenemos que:

$$\frac{p}{q}\cdot \quad \frac{m}{n}+\frac{a}{b} \quad =\frac{p}{q}\cdot\frac{m\cdot b+a\cdot n}{n\cdot b}=\frac{p\cdot\left(m\cdot b+a\cdot n\right)}{q\cdot n\cdot b}=\frac{p\cdot m\cdot b+p\cdot a\cdot n}{q\cdot n\cdot b}$$

Para la última igualdad usamos la propiedad distributiva para números naturales.

Para el lado derecho tenemos:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\cdot\frac{a}{b}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m\cdot b}{n\cdot b}+\frac{p}{q}\cdot\frac{a\cdot n}{n\cdot b}=\frac{p\cdot m\cdot b}{q\cdot n\cdot b}+\frac{p\cdot a\cdot n}{q\cdot n\cdot b}=\frac{p\cdot m\cdot b+p\cdot a\cdot n}{q\cdot n\cdot b}$$

Como el lado izquierdo es igual al lado derecho, hemos probado la propiedad. Notamos que también hemos usado, sin mencionarlo, las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación de números naturales.

Vale la pena mencionar que, por conmutatividad, se tiene también distributividad a la derecha, esto es:

$$\frac{m}{n}+\frac{a}{b} \quad \cdot\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}+\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}$$

Distributividad de la multiplicación con respecto a la resta:

$$\frac{p}{q}\cdot \quad \frac{m}{n}-\frac{a}{b} \quad =\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}-\frac{p}{q}\cdot\frac{a}{b}$$

La demostración de esta propiedad es idéntica a la demostración anterior. De igual forma, tenemos distributividad a la izquierda.

En resumen

- Dadas dos fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{m}{n}$, la multiplicación entre ellas se define como:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{p\cdot m}{q\cdot n}$$

- La multiplicación de fracciones mantiene las propiedades de la multiplicación de números naturales, esto es: conmutatividad, asociatividad, el 1 como elemento neutro, el 0 como elemento absorvente y la distributividad con respecto a la suma y la resta. Además, cada fracción distinta de 0 tiene inverso multiplicativo.

Ejercicios

1. Compruebe la propiedad distributiva para fracciones representando en un diagrama:

$$\frac{2}{3}\cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

2. Indique cuál es el elemento inverso multiplicativo para cada número y verifíquelo a través de un producto.

a. $\frac{2}{3}$ b. $5\frac{1}{5}$ c. 8 d. $\frac{1}{2}$

3. Demuestre algebraicamente que: $\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$.

Ejercicios de la sección

1. Indique cuál o cuáles de los siguientes problemas se resuelven con la multiplicación $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$. Explique cómo resolver aquellos problemas que no se resuelven con esta multiplicación.

a. $\frac{2}{3}$ de los niños de un curso trajeron $\frac{3}{4}$ **kg** de porotos para una campaña solidaria. En promedio, ¿cuántos porotos fueron recolectados por cada niño del curso?

b. Catalina está preparando un postre. Ella solo quiere hacer $\frac{2}{3}$ de la cantidad de la receta que tiene. Si para la receta completa se necesita $\frac{1}{4}$ de una taza de azúcar, ¿cuánta azúcar necesita Catalina?

c. En un cumpleaños queda $\frac{3}{4}$ de una torta y $\frac{2}{3}$ de los asistentes quieren un pedazo. Si se reparte todo lo que queda, en porciones iguales, a todos quienes quieren torta, ¿qué fracción de la torta le corresponde a cada uno de ellos?

d. $\frac{3}{4}$ de los estudiantes de un curso deciden hacer una página web. Si $\frac{2}{3}$ de ellos finalizaron su página, ¿qué fracción del curso hizo la página web?

e. $\frac{2}{3}$ de los estudiantes de un curso deciden hacer una página web. Si $\frac{3}{4}$ de ellos finalizaron su página, ¿qué fracción del curso hizo la página web?

2. Explique cómo calcular $2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{2}{5}$ de dos maneras, justificando los pasos realizados.

3. Proponga un problema que se resuelva con la operación $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}$. Además, proponga dos distractores para este problema justificando su elección.

4. Muestre los siguientes productos dibujando un modelo de área.

   a. $3\frac{2}{3}\cdot 6$

   b. $3\frac{2}{3}\cdot 6\frac{1}{2}$

5. Calcule mentalmente las siguientes operaciones y describa el proceso realizado.

   a. $35\frac{2}{5}-3\frac{3}{5}$

   b. $\left(2\frac{1}{4}+5\frac{1}{7}\right)+\left(3\frac{3}{4}+1\frac{5}{7}\right)$

   c. $35\frac{3}{7}+35\frac{4}{7}$

   d. $35\cdot 99\frac{4}{7}$

   e. $35\cdot\frac{3}{14}+35\cdot\frac{5}{14}$

6. Estime por exceso y por defecto, y justifique la estrategia usada.

   a. $5\frac{2}{11}+3\frac{7}{8}$

   b. $1\frac{2}{11}+3\frac{8}{9}+2\frac{1}{12}$

7. Redondee a la unidad de $\frac{1}{2}$ más cercana. Justifique.

   a. $3\frac{6}{13}+4\frac{5}{12}$

   b. $17\frac{4}{11}+19\frac{8}{9}+23\frac{7}{12}$

8. Calcule mentalmente con la ayuda de fracciones.

   a. $5\cdot 34=$

   b. $25\cdot 34=$

   c. $50\cdot 36=$

   d. $28\cdot 25=$

9. Redondee a la unidad más cercana.

   a. $89\cdot\frac{1}{3}$

   b. $36\cdot\frac{1}{5}$

3. La división de fracciones

De las operaciones con fracciones, la división es la más dificil de comprender. Si bien la fórmula que define la división de dos fracciones es muy sencilla, interpretar esta operación no lo es. En esta sección vamos a enfatizar en el sentido que tiene la división de fracciones interpretándola en los términos de los problemas que resuelve. Al igual que con la multiplicación, abordaremos el estudio de la división de fracciones en forma progresiva, pensando en su enseñanza.

3.1 Interpretación de la división de fracciones

Recordemos que en los problemas que involucran división entera hay dos formas de interpretar la operación 15 : 5.

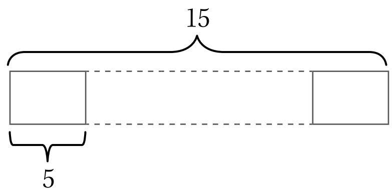
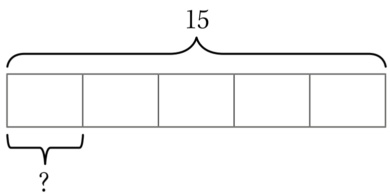
Interpretación	Pregunta	Ejemplo	Diagrama
División como agrupación o medida	¿15 es cuántas veces 5? (15 = D · 5)	Se tienen 15 kilos de arroz y se colocan en bolsas de 5 kilos. ¿Cuántas bolsas de arroz se pueden hacer?	
División como reparto o partición	¿15 es 5 veces qué cosa? (15 = 5 · D)	Se reparten equitativamente 15 kilos de arroz entre 5 personas. ¿Cuánto arroz le toca a cada persona?	

Tabla VII.1.

Para la división de fracciones también tenemos las dos interpretaciones anteriores, sin embargo, los diagramas necesitan adecuarse.

Veamos el siguiente problema, en el cual interpretamos la división como medida:

> *Un auto avanza en promedio* $\frac{1}{2}$ *kilómetro por minuto, ¿cuántos minutos demora en avanzar* $1\frac{1}{4}$ *kilóme*tros?

El problema consiste en responder ¿$1\frac{1}{4}$ es cuántas veces $\frac{1}{2}$? o resolver $1\frac{1}{4} = D \cdot \frac{1}{2}$. El diagrama correspondiente es:

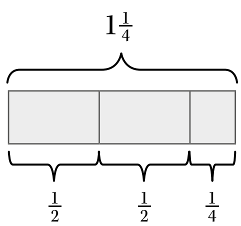


Figura VII.12.

El $\dfrac{1}{4}$ corresponde a la mitad de $\dfrac{1}{2}$, es decir, a $\dfrac{1}{2}$ de $\dfrac{1}{2}$. El diagrama muestra entonces que $1\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$. Es decir, $\dfrac{1}{2}$ cabe dos veces y media en $1\frac{1}{4}$.

Veamos ahora un problema donde interpretamos la división como partición:

Si $\dfrac{3}{5}$ de un rollo de cinta mide 2 metros, ¿cuánto mide el rollo completo?

Para resolver el problema debemos responder ¿2 es $\dfrac{3}{5}$ de qué?, que expresado a través de una ecuación es $2 = \dfrac{3}{5} \cdot D$. Una forma de hacer el diagrama consiste justamente en concentrarse en la pregunta ¿2 es $\dfrac{3}{5}$ de qué?

Primero, podemos representar la incógnita del problema como una barra sin divisiones.

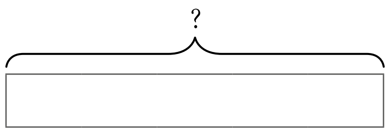


Figura VII.13.

Luego, podemos dividirla en quintos y sombrear 3 de ellos.

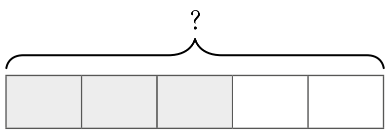


Figura VII.14.

La zona sombreada corresponde a $\dfrac{3}{5}$ de la incógnita.

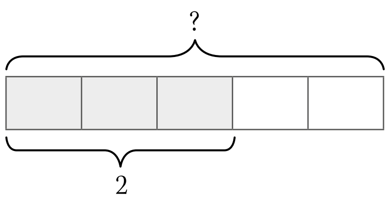


Figura VII.15.

Cada parte sombreada corresponde entonces a $\dfrac{2}{3}$, ya que la medida de las 3 partes sombreadas es 2. La incógnita son 5 de estos $\dfrac{2}{3}$, es decir, $\dfrac{10}{3}$.

Ejercicios

1. Considere la división $3:\frac{5}{4}$.
   a. Proponga un problema que se resuelva con el modelo de división por reparto o partición.
   b. Represente gráficamente el problema. ¿Cuáles son las dificultades que se presentan al ser el divisor mayor a 1?
   c. ¿En qué casos es conveniente usar esta interpretación de la división y en qué casos no?

2. Considere ahora la división $2:\frac{9}{4}$.
   a. Interprétela como un problema de división por agrupación o medida redactando una situación que se resuelva con ella.
   b. ¿Será conveniente hacer un diagrama con esta interpretación? ¿Qué causa la dificultad?
   c. ¿En qué casos es conveniente esta interpretación y en qué casos no?

Para calcular el resultado de la división de fracciones tenemos al menos dos posibles enfoques. El que desarrollaremos en esta sección corresponde a un tratamiento intuitivo, apropiado para los niños y las niñas de Educación Básica. Deduciremos la fórmula que eventualmente usaremos, siguiendo una secuencia de casos intermedios. El otro enfoque corresponde a un tratamiento algebraico, donde a partir de la propia definición de fracción se obtiene el resultado deseado. Veremos este tratamiento al final de la sección.

3.2 División de un número natural por otro número natural

Como hemos visto en el capítulo anterior, uno de los significados de las fracciones es como cociente. Es importante lograr que niños y niñas adquieran la noción de fracción como el resultado de una división. Por ejemplo: $\frac{3}{5}$ es el resultado de calcular $3:5$. Consideremos el siguiente problema:

Cuatro amigos comparten cinco pizzas equitativamente, ¿cuánta pizza le toca a cada uno?

Usemos un modelo de área para representar la situación:

Figura VII.16.

Tenemos dos formas de resolver el problema usando este modelo. Podemos interpretar que a cada amigo le corresponde $5:4$ pizzas, es decir, 1 pizza y $\frac{1}{4}$ más, como se muestra en la siguiente figura:

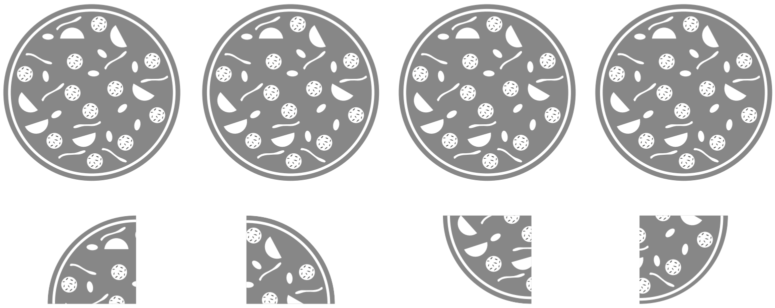


Figura VII.17.

Podemos pensar también que cada pizza es repartida en 4 partes iguales, de lo que se obtienen 20 cuartos:

Figura VII.18.

y a cada uno de los cuatro amigos le corresponden 5 cuartos.

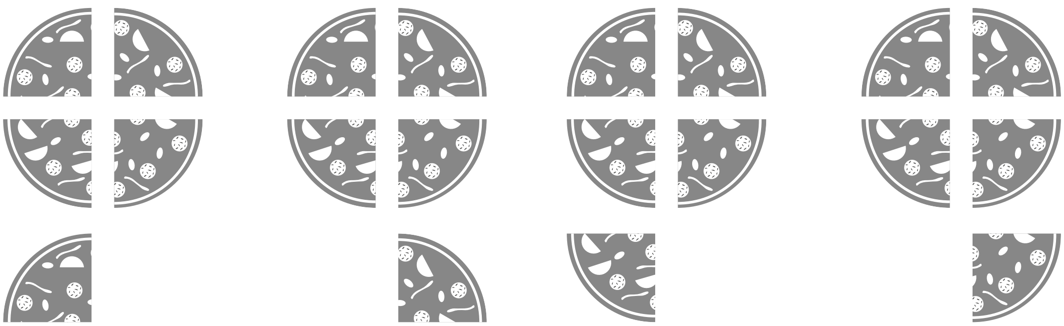


Figura VII.19.

Con esta última interpretación, tenemos que $5:4 = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Notemos que en el problema anterior podemos establecer una relación entre la multiplicación de fracciones y la división a través de la siguiente expresión, la cual ya habíamos obtenido en secciones anteriores:

$$m:n = \frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$$

3.3 División de una fracción por un número natural

En muchas situaciones se requiere dividir una medida cualquiera por un número natural, sin importar qué unidad se tome como patrón, es decir, situaciones donde se requiere dividir una fracción en partes iguales. Consideremos el siguiente problema:

> *Cuatro amigos comparten equitativamente $\frac{3}{2}$ de pizza que quedó del día anterior, ¿cuánto le corresponde a cada uno?*

Usemos un diagrama de área para resolver el problema.

Figura VII.20.

Podemos interpretar la situación como que cada mitad es dividida en cuartos, produciendo octavos de pizza.

Figura VII.21.

En total hay tres mitades, que corresponden a 12 octavos. Por lo tanto, a cada uno le corresponden 3 octavos de pizza.

También podemos usar nuestros conocimientos sobre la multiplicación para deducir el resultado de la siguiente forma:

$$\frac{3}{2} : 4 = \frac{1}{4} \text{ de } \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

En general, cuando dividimos una fracción por un número natural tenemos que:

$$\frac{m}{n} : k = \frac{1}{k} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m}{k \cdot n}$$

3.4 División de un número natural por una fracción

En algunas situaciones se requiere hacer la división de un número natural por una fracción. Consideremos el siguiente problema:

Se tienen 2 litros de agua y se quieren llenar tazas de $\frac{1}{4}$ de litro cada una. ¿Cuántas tazas se pueden llenar?

Este problema corresponde a interpretar la división $2:\frac{1}{4}$ usando las fracciones para expresar medidas. Es decir, preguntamos ¿cuántos cuartos están contenidos en 2 litros? Una forma de representar la situación es la siguiente:

Figura VII.22.

Vemos que con 2 litros se pueden completar ocho tazas de un cuarto de litro, y tenemos que $2:\frac{1}{4}=8$.

Consideremos ahora un problema similar, pero esta vez usemos un modelo de barra para resolverlo.

Se tiene una jarra llena de agua. Se sacan $\frac{3}{4}$ del total del agua de la jarra. Esto alcanza para llenar una botella de 2 litros. ¿Cuántos litros tenía la jarra llena?

El problema corresponde a interpretar la división $2:\frac{3}{4}$ con el modelo de división por reparto o partición. La pregunta es ¿$\frac{3}{4}$ de qué número es igual a 2?

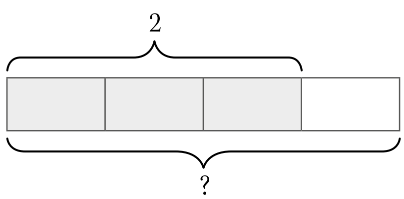


Figura VII.23.

Tenemos que:

3 partes = 2

1 parte = $\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$

4 partes = $4\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

La respuesta es entonces que la jarra contenía $\frac{8}{3}$ litros.

Así, $2:\frac{3}{4}=\frac{4\cdot 2}{3}=2\cdot\frac{4}{3}$.

En general, la división de un número natural por una fracción se puede calcular como:

$$k:\frac{m}{n}=\frac{k\cdot n}{m}=k\cdot\frac{n}{m}$$

3.5 División de una fracción por otra fracción

Este caso de división es el más general e incluye los dos casos anteriores, ya que un número natural k es igual a $\frac{k}{1}$. Consideremos el siguiente problema:

¿Cuántos recipientes de $\frac{2}{5}$ litros se pueden llenar con $\frac{8}{5}$ litros de agua?

Este problema corresponde a interpretar la división $\frac{8}{5}:\frac{2}{5}$ con un modelo de división como medida.

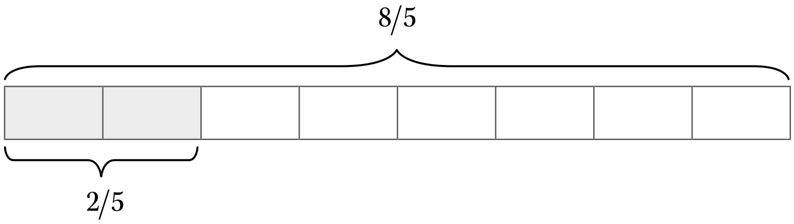


Figura VII.24.

Vemos que $\frac{2}{5}$ cabe cuatro veces en $\frac{8}{5}$. Notamos que el denominador 5 no tiene ningún efecto en el resultado, podríamos haber representado $\frac{8}{11}:\frac{2}{11}$ y la figura no habría cambiado. Tenemos entonces $\frac{8}{5}:\frac{2}{5}=8:2=\frac{8}{2}=4$.

Veamos qué pasa si la división de los numeradores no produce un número natural. Por ejemplo, representemos $\frac{7}{5}:\frac{2}{5}$ con un modelo de división como medida.

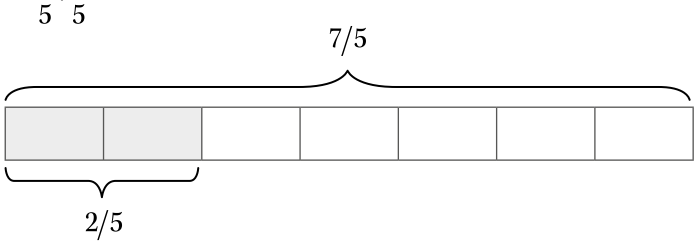


Figura VII.25.

Frente a la pregunta ¿cuántas veces cabe $\frac{2}{5}$ en $\frac{7}{5}$?, podemos observar el diagrama para obtener la solución. En este caso, los dos rectángulos, que representan $\frac{2}{5}$, caben tres veces en los siete rectángulos, que representan $\frac{7}{5}$, y sobra un rectángulo. Es decir, caben tres veces y media. Observemos que la respuesta a esta pregunta es la misma que para ¿cuántas veces cabe 2 en 7? Esto es $7:2$ o $\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$.

Si el divisor es mayor que el dividendo, aplicar el modelo de división como medida requiere un poco más de trabajo. Por ejemplo, para $\frac{4}{9}:\frac{5}{9}$ hacemos la pregunta ¿cuántas veces cabe $\frac{5}{9}$ en $\frac{4}{9}$? Esto es lo mismo que preguntar ¿cuántas veces cabe 5 en 4? La respuesta es $4:5$ o $\frac{4}{5}$.

Este modelo entrega, entonces, un método para efectuar divisiones donde el dividendo y el divisor tienen el mismo denominador:

$$\frac{8}{5}:\frac{2}{5}=\frac{8}{2}$$

$$\frac{7}{5}:\frac{2}{5}=\frac{7}{2}$$

$$\frac{4}{9}:\frac{5}{9}=\frac{4}{5}$$

En general, tenemos:

$$\frac{p}{n}:\frac{q}{n}=\frac{p}{q}$$

Veamos ahora qué pasa si los denominadores son distintos, por ejemplo, calculemos:

$$\frac{3}{8}:\frac{5}{6}$$

Podemos reemplazar cada fracción por otra igual, pero de forma tal que los denominadores sean iguales. Un denominador apropiado es 24. Tenemos que:

$$\frac{3}{8}:\frac{5}{6}=\frac{9}{24}:\frac{20}{24}=\frac{9}{20}$$

En general:

$$\frac{p}{q}:\frac{m}{n}=\frac{p\cdot n}{q\cdot n}:\frac{m\cdot q}{n\cdot q}=\frac{p\cdot n}{m\cdot q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{n}{m}$$

Es decir:

$$\frac{p}{q}:\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{n}{m}$$

Esta última es la conocida regla usada para la división de fracciones.

En los problemas que se resuelven con una división de dos fracciones, en particular con distinto denominador, tal vez la mayor dificultad consiste en deducir que la división es la operación que resuelve el problema. En dichos casos, hacer un diagrama o usar un razonamiento de proporcionalidad puede ser de utilidad. Veamos el siguiente problema, el cual resolveremos usando distintas estrategias:

Se tiene una jarra llena de agua. Se sacan $\frac{3}{4}$ *del total del agua de la jarra y eso alcanza para llenar una botella de* $\frac{5}{7}$ *litros. ¿Cuántos litros tenía la jarra llena?*

Este problema corresponde a interpretar la división $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$. Si nos damos cuenta de que esta operación es la que resuelve el problema, aplicamos directamente el procedimiento que vimos para dividir fracciones:

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$$

Si no se determina directamente cuál es la operación, podemos usar una de las siguientes estrategias:

Estrategia 1:

Dibujamos un diagrama de barras para ilustrar el problema.

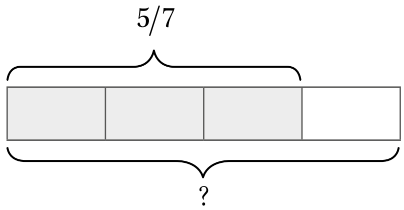


Figura VII.26.

Luego, a partir del diagrama se tiene:

3 partes $= \frac{5}{7}$

1 parte $= \frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3}$

4 partes $= \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$

Estrategia 2:

Una solución elemental de este problema corresponde a un razonamiento basado en el uso de proporciones. Podemos ir estableciendo relaciones entre la jarra y los litros de agua de la siguiente forma:

$\frac{3}{4}$ de la jarra son $\frac{5}{7}$ litros.

$\frac{1}{4}$ de la jarra son $\frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{21}$ litros.

1 jarra son $\frac{5}{21} \cdot 4 = \frac{20}{21}$ litros.

Estrategia 3:

Una solución más sofisticada, y que requiere de cierto manejo algebraico, es la siguiente: Llamemos x a la cantidad de agua en la jarra. Tenemos:

$$\frac{3}{4} \cdot x = \frac{5}{7}$$

Por lo tanto, $x = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3}$. Es decir, $x = \frac{20}{21}$ litros.

3.6 La división como multiplicación por el inverso multiplicativo

Cuando dividimos dos números, el resultado que obtenemos es el cociente, esto es, si $a : b = c$, el cociente es c y se puede establecer la relación: $a = b \cdot c$. En otras palabras, el cociente q es aquel número por el que debemos multiplicar el divisor para obtener el dividendo. Traslademos esta misma idea a las fracciones.

Tenemos que $\frac{p}{q} : \frac{m}{n} = r$ es equivalente a $\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot r$. Multiplicando ambos lados de esta igualdad por $\frac{n}{m}$, obtenemos $\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} \cdot r$. Usando que $\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} = 1$, deducimos que $\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = 1 \cdot r$. Como 1 es el neutro de la multiplicación, tenemos que $\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = r$. Por la conmutatividad de la multiplicación, $\frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} = r$. Por lo tanto, concluimos que $\frac{p}{q} : \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m}$, que es lo mismo que habíamos encontrado en el análisis anterior.

Siguiendo la identificación de la división $p : q$ como la fracción $\frac{p}{q}$, usaremos también la barra de fracción para indicar la división de fracciones. En lugar de $\frac{p}{q} : \frac{m}{n}$, es usual escribir $\frac{\frac{p}{q}}{\frac{m}{n}}$, sobre todo en situaciones donde se tiene una expresión que involucra varias operaciones. Por ejemplo, en expresiones tales como:

$$\frac{1 + \frac{2}{5}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{7}{5}$$

Para pensar

¿Cómo se justifica la siguiente simplificación de fracciones?

$$\frac{\dfrac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\cancel{4}^{\,2}}}{\dfrac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{2}^{\,1}}}=\frac{5}{2}$$

Ejercicios

1. Demuestre que el 1 es neutro por la derecha en la división de fracciones. Esto es $\frac{p}{q}:1=\frac{p}{q}$.

2. Demuestre que:

$$\frac{p}{q}:\frac{m}{n}=\quad\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}\quad:\quad\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}\quad,$$

Lo anterior, usando la barra de fracción para indicar división, corresponde a:

$$\frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{m}{n}}=\frac{\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{r}{s}}{\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{r}{s}}$$

3. Muestre con un ejemplo que la división de fracciones no es asociativa.

4. Demuestre que la división de fracciones es distributiva por la derecha, con respecto a la suma. Esto es:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\quad:\frac{m}{n}=\quad\frac{a}{b}:\frac{m}{n}\quad:\quad\frac{c}{d}:\frac{m}{n}$$

Lo anterior, usando la barra de fracción para indicar división, corresponde a:

$$\frac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}}{\dfrac{m}{n}}=\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{m}{n}}+\frac{\dfrac{c}{d}}{\dfrac{m}{n}}$$

5. Muestre con un ejemplo que la división de fracciones no es distributiva por la izquierda, con respecto a la suma.

3.7 Propiedades de la división

Al igual que en los casos de la suma, la resta y la multiplicación, la división de fracciones tiene las mismas propiedades que la división de números naturales, listadas en el **Capítulo III.** en la **Sección 2.6.** Estas propiedades pueden ser verificadas formalmente utilizando la propiedad que define la división en general, es decir, $a : b = c$ si $a = b \cdot c$, y también usando la fórmula que expresa la división de fracciones.

Queda como ejercicio para el lector, verificar que se cumplen las propiedades de la 1 a 11 de la **Sección 2.6** del **Capítulo III.**

En resumen

- La división de dos fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{m}{n}$, con q, m y n distintos de 0, se define como:

$$\frac{p}{q} : \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m}$$

- Al igual que la división de números naturales, la división de fracciones se puede interpretar como medida o como partición.

Ejercicios de la sección

1. En los siguientes problemas, identifique si corresponden a división como medida o a división como partición, y haga el diagrama pertinente.
   a. En la construcción de un camino se está avanzando $\frac{1}{2}$ kilómetro por semana. ¿Cuántas semanas tomará avanzar $2\frac{1}{4}$ kilómetros?
   b. Si la mitad de una cubeta contiene $2\frac{3}{4}$ litros de agua, ¿cuántos litros contiene la cubeta completa?
   c. Se necesita $\frac{1}{2}$ metro de cinta para hacer una humita. ¿Cuántas humitas pueden hacerse con 3 metros de cinta?
   d. ¿Cuántos medios litros hay en $3\frac{1}{4}$ litros?
   e. El perímetro de un cuadrado es 8 metros. ¿Cuánto mide cada lado?
   f. Se reparten equitativamente 6 galletas entre 8 niños. ¿Cuántas galletas le corresponden a cada uno?
   g. Una pista alrededor de una plaza mide $\frac{1}{4}$ de kilómetro. ¿Cuántas vueltas hay que dar para completar 5 kilómetros?

2. Señale cuál o cuáles de los siguientes problemas se resuelven con la división $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$. Explique cómo resolver aquellos problemas que no se resuelven con esta división.
   a. Una cuadrilla de obreros está pavimentando un camino. Han pavimentado $\frac{2}{3}$ km y llevan $\frac{1}{4}$ de la longitud total. ¿Cuán largo es el camino que deben pavimentar?

b. Una cuadrilla de obreros está pavimentando un camino. Han pavimentado $\frac{1}{4}$ **km** y llevan $\frac{2}{3}$ de la longitud total. ¿Cuán largo es el camino que deben pavimentar?

c. Felipe tomó un cuarto de una botella de $\frac{2}{3}$ L de bebida energética. ¿Cuánta bebida tomó Felipe?

d. Felipe repartió $\frac{2}{3}$ L de bebida energética entre 4 amigos. ¿Cuánta bebida le tocó a cada uno?

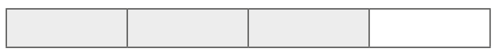
e. Felipe repartió $\frac{2}{3}$ L de bebida energética en vasos de $\frac{1}{4}$ L. ¿Cuántos vasos llenó?

f. Antonia preparó un postre de leche. Si en $\frac{2}{3}$ del postre hay $\frac{1}{4}$ de una taza de azúcar, ¿cuánta azúcar hay en el postre?

g. Antonia preparó un postre de leche. Si en $\frac{1}{4}$ del postre hay $\frac{2}{3}$ de una taza de azúcar, ¿cuánta azúcar hay en el postre?

3. Explique cómo se puede realizar la división $\frac{7}{5}:\frac{1}{3}$ sin usar la regla de multiplicar por el inverso.

4. Para calcular $1:\frac{3}{4}$, una persona usó el siguiente diagrama:



Concluyó que $1:\frac{3}{4}=1\frac{1}{4}$, razonando de la siguiente manera: si la unidad es $\frac{3}{4}$, entonces cabe una vez en 1 y sobran $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es el problema del razonamiento realizado? ¿Cómo explicaría el procedimiento correcto usando un diagrama?

5. Plantee un problema que pueda ser resuelto con la división $1\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$ y otro que pueda ser resuelto con $1\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$.

6. Plantee un problema que pueda ser resuelto con la división $\frac{2}{3}:\frac{1}{4}$ y proponga tres distractores para este, justificando su elección.

7. Resuelva los siguientes problemas explicando la diferencia entre ellos:

Un cocinero tiene $4\frac{2}{3}$ **kg** de harina y usa $\frac{1}{3}$ **kg**. ¿Cuánta harina le queda?

Un cocinero tiene $4\frac{2}{3}$ **kg** de harina y usa $\frac{1}{3}$ de ella. ¿Cuánta harina le queda?

8. Explique las siguientes divisiones usando restas sucesivas.

a. $\frac{5}{4}:\frac{1}{8}=$

b. $1\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=$

4. Operaciones con números mixtos

Tal como vimos en el capítulo anterior y en este capítulo, es usual representar una fracción impropia como la suma de un número natural con una fracción propia, es decir, usando lo que denominamos número mixto. Por ejemplo:

$$\frac{14}{3}=\frac{12}{3}+\frac{2}{3}=4+\frac{2}{3}=4\tfrac{2}{3}$$

La definición de un número mixto, como la suma de un número natural con una fracción propia, implica tener ciertas consideraciones al operar con ellos, ya que en el número mixto hay implícita una suma. En esta sección resumiremos los procedimientos de cálculo con números mixtos asociados a las cuatro operaciones aritméticas, los cuales ya han sido usados en secciones anteriores.

Suma y resta con números mixtos

Para sumar dos números mixtos se pueden aplicar las propiedades de la adición de fracciones. Así, por ejemplo, para calcular:

$$3\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{4}$$

Podemos sumar los números naturales y en forma independiente las fracciones:

$$3\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{4}=5\tfrac{3}{4}$$

Observemos que este procedimiento se sustenta en la definición de número mixto y en las propiedades asociativa y conmutativa de la adición de fracciones. Así, si escribiéramos paso a paso el procedimiento utilizado, se tendría:

$3\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{4}=\left(3+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{4}\right)$	por definición de número mixto
$=(3+2)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$	propiedad conmutativa y asociativa de la suma
$=5+\frac{3}{4}$	suma de números naturales y fracciones propias
$=5\tfrac{3}{4}$	por la definición de número mixto

Notemos que en este caso la suma de las fracciones propias resulta ser otra fracción propia, pero también podría ser mayor que 1. En dichos casos, se debe representar la fracción como número mixto y agregar la parte natural al resultado de la suma de números naturales. Por ejemplo:

$$4\tfrac{1}{2}+5\tfrac{3}{4}=9+\frac{5}{4}=9+1+\frac{1}{4}=10\tfrac{1}{4}$$

La resta de números mixtos se puede efectuar mediante un procedimiento similar, que también se basa en la definición de este tipo de números y en las propiedades de la resta, vistas en la **Sección 2.1** del **Capítulo II** que, como fue mencionado anteriormente, son válidas también para las fracciones. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 4\tfrac{3}{5} - 1\tfrac{1}{10} &= \quad 4 + \frac{3}{5} \quad - \quad 1 + \frac{1}{10} \\ &= 4 + \frac{3}{5} - 1 - \frac{1}{10} \\ &= (4-1) + \quad \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \\ &= 3 + \frac{5}{10} \\ &= 3\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Notemos que en este caso restamos ambos naturales y a su vez ambas fracciones propias. Sin embargo, puede pasar que la parte fraccionaria del primer término sea menor que la parte fraccionaria del segundo término de la resta. Por lo tanto, se hace necesario hacer un canje. Por ejemplo:

$$4\tfrac{2}{7} - 2\tfrac{5}{7}$$

El cálculo de la resta se puede efectuar escribiendo el primer término como la suma de un número natural y una fracción impropia, o representando ambos números como fracciones impropias. El primer procedimiento sería:

$$4\tfrac{2}{7} - 2\tfrac{5}{7} = 3\tfrac{9}{7} - 2\tfrac{5}{7} = 1\tfrac{4}{7}$$

Mientras que el segundo procedimiento sería:

$$4\tfrac{2}{7} - 2\tfrac{5}{7} = \frac{30}{7} - \frac{19}{7} = \frac{11}{7} = 1\tfrac{4}{7}$$

En el **Capítulo II** vimos algunas técnicas de cálculo mental que permitían resolver operaciones fácilmente basándose en las propiedades de las operaciones. Una de estas técnicas la denominamos traslado de la diferencia, que en términos generales señala que al agregar o restar la misma cantidad a los términos de una sustracción, la diferencia se mantiene, es decir:

$$a - b = (a + c) - (b + c) = (a - d) - (b - d)$$

Esta propiedad de los números naturales se puede extender a las fracciones. De esta forma, la resta que vimos en el ejemplo anterior se podría haber calculado de la siguiente manera:

$$4\tfrac{2}{7} - 2\tfrac{5}{7} = 4\left(\tfrac{2}{7} + \tfrac{2}{7}\right) - 2\left(\tfrac{5}{7} + \tfrac{2}{7}\right) = 4\tfrac{4}{7} - 3 = 1\tfrac{4}{7}$$

Es decir, sumamos al segundo término de la resta una cantidad que permita completar un entero. De esta forma, la resta se puede calcular directamente. Si bien este procedimiento resulta eficaz, se puede complicar cuando las fracciones son de distinto denominador y no es sencillo encontrar el común denominador entre ambas.

Es importante destacar también que cuando se tienen expresiones matemáticas que contienen más de un número mixto, se pueden aplicar los procedimientos anteriores con el propósito de completar los números mixtos y representarlos como números naturales. Por ejemplo:

$$2\tfrac{2}{7} + 1\tfrac{1}{2} + 5\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{7} + 3\tfrac{5}{7} =$$

$$6 + 7 + 4\tfrac{1}{7} = 17\tfrac{1}{7}$$

Figura VI.27.

Ejercicios

1. Calcule las sumas y restas de números mixtos aplicando alguna técnica que le permita encontrar el resultado mentalmente:

   a. $19\tfrac{2}{5} + 20\tfrac{1}{10}$

   b. $8\tfrac{2}{3} - 2\tfrac{1}{3}$

   c. $5\tfrac{2}{9} + 2\tfrac{1}{3}$

   d. $10\tfrac{3}{8} - 4\tfrac{5}{8}$

2. Calcule el valor de las siguientes expresiones:

   a. $1\tfrac{3}{4} + 7\tfrac{1}{2} + 5\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{4} + 7\tfrac{5}{9} =$

   b. $10\tfrac{3}{5} - 1\tfrac{1}{4} + 3\tfrac{1}{10} + 4\tfrac{1}{4} - 2\tfrac{3}{10} =$

   c. $9\tfrac{2}{9} + 3\tfrac{1}{3} + 7\tfrac{1}{4} + 5\tfrac{1}{9} + 10\tfrac{3}{4} =$

Multiplicación y división con números mixtos

Para multiplicar dos números mixtos se pueden usar al menos dos estrategias: representar los números mixtos como fracción o calcular el producto basándose en la definición de número mixto y en la propiedad distributiva. Esta última estrategia puede resultar algo compleja en algunos casos y llevar a errores, ya que se deben realizar cuatro productos. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos

Calculemos el producto $3\tfrac{3}{5} \cdot 4\tfrac{1}{2}$.

Usemos primero la estrategia basada en escribir cada número como fracción impropia:

$$3\tfrac{3}{5} \cdot 4\tfrac{1}{2} = \frac{18}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{162}{10}$$

Luego, si simplificamos el resultado y escribimos el número mixto correspondiente, se tiene:

$$3\tfrac{3}{5} \cdot 4\tfrac{1}{2} = \frac{18}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{162}{10} = \frac{81}{5} = 16\tfrac{1}{5}$$

Desarrollemos ahora el mismo cálculo, pero usando la propiedad distributiva. Representemos primero cada número como la suma de un número natural y una fracción propia.

$$3\tfrac{3}{5}\cdot 4\tfrac{1}{2} = \quad 3+\frac{3}{5} \quad \cdot \quad 4+\frac{1}{2}$$

Notemos que para desarrollar el producto debemos multiplicar cada término del primer paréntesis por los términos del segundo paréntesis, de esta forma se tiene:

$$\begin{aligned}3\tfrac{3}{5}\cdot 4\tfrac{1}{2} &= \quad 3+\frac{3}{5} \quad \cdot \quad 4+\frac{1}{2}\\ &= 12+\frac{3}{2}+\frac{12}{5}+\frac{3}{10}\\ &= 12+\frac{42}{10}\\ &= 12+4\tfrac{2}{10}\\ &= 16\tfrac{1}{5}\end{aligned}$$

El uso de la propiedad distributiva para calcular el producto entre dos números mixtos puede provocar errores si se considera solo el producto entre un término del primer número mixto y los términos del segundo, o viceversa. Otro error asociado al producto de números mixtos es calcular, por un lado, el producto entre los números naturales y, por otro, el de las fracciones propias, por ejemplo:

$$2\tfrac{3}{4}\cdot 1\tfrac{1}{3} = 3\tfrac{3}{12} = 3\tfrac{1}{4}$$

En este último procedimiento erróneo no se consideran los productos $2\cdot\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{4}\cdot 1$ en el resultado.

La división de dos números mixtos se puede efectuar representando ambos números como fracciones impropias.

Ejemplo

Calculemos el cociente $2\tfrac{3}{7}:3\tfrac{1}{2}$. Tenemos:

$$2\tfrac{3}{7}:3\tfrac{1}{2} = \frac{17}{7}:\frac{7}{2} = \frac{17}{7}\cdot\frac{2}{7} = \frac{34}{49}$$

Ejercicios de la sección

1. Calcule

   a. $12\frac{2}{9}+15\frac{5}{18}$

   b. $4\frac{2}{5}-3\frac{1}{5}$

   c. $8\frac{2}{3}+2$

   d. $15\frac{3}{7}-4\frac{5}{7}$

   e. $17-4\frac{5}{7}$

2. Encuentre el valor de las siguientes expresiones:

   a. $5\frac{1}{4}+17\frac{1}{2}+6\frac{1}{4}+8\frac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=$

   b. $5\frac{4}{9}-2\frac{1}{2}+7\frac{1}{9}+4\frac{1}{2}-2\frac{5}{9}=$

   c. $6+5\frac{1}{5}+8\frac{1}{9}+7\frac{1}{9}+10\frac{4}{5}=$

3. Observe el siguiente cálculo:

$$4\tfrac{2}{3}+2\tfrac{5}{9}=4\left(\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{9}\right)+3=4+3+\frac{2}{9}=7\tfrac{2}{9}$$

   a. Explique paso a paso el procedimiento realizado, indicando las propiedades matemáticas utilizadas.

   b. ¿El procedimiento se puede aplicar en otros cálculos similares?

5. Dificultades y posibles errores en las operaciones con fracciones

Tal vez la mayor dificultad al resolver problemas con fracciones es reconocer qué operación u operaciones utilizar en cada caso. Hemos visto en las secciones anteriores algunos tipos de problemas y los hemos resuelto usando diversas técnicas. Sin embargo, cada contexto usado hace que los problemas parezcan diferentes. En estos casos, es conveniente que los niños y las niñas se familiaricen con problemas en una variedad de contextos.

Además, en la operatoria con fracciones es frecuente encontrar alumnos y alumnas de distintas edades que presentan errores al desarrollar los cálculos. Estos errores se producen, por un lado, por la falta de comprensión del significado de las operaciones y, por otro lado, porque las fórmulas que se ocupan para cada operación son parecidas y hacen que estas se apliquen indistintamente en cualquier cálculo.

A continuación describiremos algunos posibles errores y dificultades relacionados a la operatoria con fracciones.

- Errores inducidos por la representación

  Si bien las representaciones son una herramienta de gran utilidad para entender las fracciones y sus operaciones, también pueden producir contradicciones aparentes. Consideremos las siguientes situaciones:

a. Una persona, para resolver $\frac{3}{4} \cdot 2$, usó el siguiente diagrama:

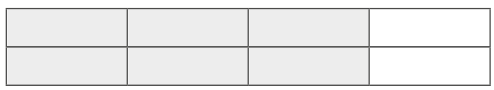


Figura VII.27.

y concluyó que $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{6}{8}$.

b. Para resolver la suma $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$, un alumno hace el siguiente diagrama:

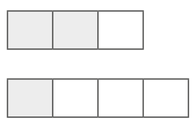


Figura VII.28.

Y luego afirma que es igual a $\frac{3}{7}$.

> ### *Para pensar*
>
> ¿Cuál es el error en el razonamiento realizado en cada caso? ¿Cómo explicaría la forma de calcular las operaciones planteadas usando diagramas?

- Dificultad para operar un número natural con una fracción.

  Operar fracciones con números naturales puede causar confusión cuando el tratamiento de las operaciones ha sido puramente algorítmico, o si los niños y niñas se han acostumbrado a utilizar las fórmulas generales y han olvidado los conceptos subyacentes. Por ejemplo, al sumar $2+\frac{3}{4}$ un posible error es dar como resultado $\frac{5}{4}$, es decir, sumar el número natural con el numerador. De manera similar, al calcular $2\cdot\frac{1}{8}$ un posible error es dar $\frac{2}{16}$ como resultado, es decir, multiplicar el número natural por el numerador y por el denominador.

- Sumar y restar fracciones operando de manera independiente numeradores y denominadores.

  Al sumar o restar fracciones, por ejemplo, $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$, un posible error es dar como resultado $\frac{3}{7}$, es decir, sumar en forma independiente numerador y denominador de ambas fracciones. Como vimos anteriormente, este error puede ser causado por la representación, pero también puede ser producto de una especie de adaptación de la fórmula para multiplicar fracciones. Es posible que este error se produzca cuando se ha olvidado el significado de las operaciones y se trata de usar algún algoritmo para obtener el resultado.

- Calcular indistintamente multiplicaciones y divisiones, multiplicando cruzado.

  Un error usual es resolver tanto las multiplicaciones como las divisiones con el algoritmo de multiplicar cruzado o alguna variación de este. Por ejemplo, frente a la multiplicación $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ se da como respuesta $\frac{8}{15}$ o $\frac{15}{8}$, o frente a la división $\frac{3}{5}:\frac{4}{7}$ se da como respuesta $\frac{21}{20}$, al invertir el dividendo en lugar del divisor.

- Error al aplicar incorrectamente el concepto de división.

  Consideremos el siguiente problema:

  Se desean repartir 3 litros de agua en botellas de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántas botellas se pueden llenar?

  La división que resuelve el problema es $3:\frac{1}{4}=3\cdot 4=12$. Sin embargo, un error posible es plantear correctamente la división, pero dividir 3 entre 4, es decir, $3:\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

- Errores causados por la notación de número mixto.

  Un error provocado por la notación de número mixto, es que al multiplicar no se tenga en cuenta que hay implícita una suma entre el número natural y la fracción. Por ejemplo, se suele encontrar cálculos como el siguiente:

$$2\tfrac{2}{3}\cdot 1\tfrac{3}{4}=2\tfrac{6}{12}$$

Ejercicios

1. Analice los siguientes procedimientos y describa el error cometido:

a. $\frac{2}{3}\;2+\frac{3}{7}=\frac{10}{21}$

b. $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$

c. $3-1\tfrac{4}{5}=2\tfrac{4}{5}$

d. $\frac{5}{3}\;\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$

$=\frac{5}{15}+\frac{2}{3}=\frac{5+10}{15}=\frac{15}{15}=1$

e. $\frac{4}{5}-\frac{4}{7}=\frac{0}{2}$

2. Considere el siguiente problema para ser incluido en una prueba de selección múltiple:

Juana está *haciendo tortas para vender, para lo cual necesita* $\frac{3}{4}$ *de tazas de harina por torta. Logra hacer sola*mente $5\tfrac{1}{2}$ *tortas. ¿Cuánta harina usó?*

Construya tres distractores, además de la respuesta correcta. Justifique.

Ejercicios del capítulo

1. Resuelva las siguientes divisiones usando diagramas de área.

   a. ¿Cuántas veces cabe un décimo en un quinto?
   b. ¿Cuántas veces caben dos décimos en un quinto?
   c. ¿Cuántas veces caben tres décimos en un quinto?
   d. ¿Cuántas veces caben cuatro décimos en un quinto?
   e. ¿Cuántas veces caben cinco décimos en un quinto?
   f. ¿Cuántas veces cabe un quinto en un décimo?
   g. ¿Cuántas veces caben dos quintos en un décimo?
   h. ¿Cuántas veces caben tres quintos en un décimo?
   i. ¿ Cuántas veces caben cuatro quintos en un décimo?

   Complete la siguiente tabla:

Pregunta	División	Resultado
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		
g)		
h)		
i)		

¿De qué manera podría utilizar esta tabla para que niños y niñas pudiesen conjeturar en relación a cómo resolver divisiones con fracciones?

2. Simplifique las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{2} \quad \cdot\dfrac{3}{7}}{1\frac{1}{3}:2\frac{1}{5}}=$

b. $\dfrac{\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{5}{6}}{\frac{2}{5}}}{\dfrac{\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}}}$

3. Para cada una de las siguientes expresiones, proponga un problema, que se solucione con ella:

a. $3\cdot \quad 1+\dfrac{2}{5}$

b. $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2} \quad \cdot\dfrac{3}{2}$

c. $1\frac{1}{3}-\dfrac{1}{4} \quad :\dfrac{1}{3}$

d. $\left(2\frac{1}{4}+1\right)\cdot 1\frac{1}{2}$

4. Represente en un diagrama de barra $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}$. ¿Qué puede decir de la suma infinita $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{128}+\ldots$?

5. Dibuje una figura que tenga sombreada $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}$ de su área.

6. Dibuje un rectángulo con:

a. $\dfrac{3}{4}$ de $\dfrac{1}{2}$ de su área sombreada.

b. $\dfrac{1}{2}$ de $\dfrac{3}{4}$ de su área sombreada.

7. Sean p, r, q y s números naturales con r, q y s distintos de 0, demuestre que $\dfrac{p}{q}:\dfrac{r}{s}=\dfrac{p:r}{q:s}$.

Capítulo

VIII

Decimales

Introducción

Los números naturales permiten cuantificar cantidades discretas, decimos hay 4 sillas o 5 sillas. Sin embargo, existen magnitudes cuya medición requiere de números que estén entre dos naturales, por ejemplo, la longitud de una cuerda puede ser mayor que 4 metros, pero menor que 5. En dicho caso, los números naturales no sirven para expresar esta longitud.

En capítulos anteriores vimos que las fracciones permiten expresar cantidades intermedias entre los números naturales, correspondientes a cocientes entre ellos. Las fracciones permiten aproximar cualquier número en la recta, como vimos en el **Capítulo VI**, y, por lo tanto, sirven para medir. Sin embargo, la manera de representar fracciones, como un cociente, es muy diferentes a la forma en que representamos números naturales, por medio de la expansión decimal. Más aún, construimos algoritmos para operar o para comparar fracciones con características distintas a los ya definidos en el sistema de numeración decimal.

Una alternativa a las fracciones son los números decimales. Estos pueden construirse extendiendo de forma natural nuestro sistema de numeración posicional en base **10**. En nuestra vida cotidiana, cuando realizamos mediciones de longitud, peso, etc., o realizamos transacciones comerciales u operamos con una calculadora, usamos, por lo general, decimales.

En este capítulo veremos cómo se extiende el sistema de numeración decimal para representar los números de la recta numérica; en particular, veremos la relación entre decimales y fracciones. También estudiaremos las operaciones básicas con números decimales y sus algoritmos. Al igual que en capítulos anteriores, incluiremos un análisis de las principales dificultades y los errores asociados al trabajo con estos números.

1. Expansión decimal y números decimales

En el **Capítulo I** de este texto estudiamos el sistema de notación posicional en base 10. El principio que rige este sistema es que agrupando 10 unidades de un orden, se obtiene una unidad del orden inmediatamente superior y, recíprocamente, cada unidad está constituida por 10 unidades de un orden inferior. Por ejemplo, 10 unidades constituyen 1 decena y 1 decena está constituida por 10 unidades. Podemos extender este principio para descomponer las unidades. La unidad de orden inmediatamente inferior a 1 es 1 décimo, ya que $10 \cdot \frac{1}{10} = 1$. De la misma manera, $10 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$, es decir, un décimo es la unidad de orden inmediatamente superior a un centésimo. El proceso se puede extender a milésimos, diez milésimos, etc.

Utilicemos una tabla de valor posicional para mostrar un ejemplo de cómo se expresa un número usando estas unidades de orden inferior a 1.

C 100	**D** 10	**U** 1	**d** $\frac{1}{10}$	**c** $\frac{1}{100}$	**m** $\frac{1}{1000}$
	3	1	2	5	4

Tabla VIII.1.

Hemos ubicado en la tabla un número compuesto por 3 decenas, 1 unidad, 2 décimos, 5 centésimos y 4 milésimos, es decir:

$$3 \cdot 10 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000}$$

Siguiendo el modelo del sistema de notación posicional decimal, expresamos este número como:

31,254

Donde, por convención, hemos usado una coma[1] para distinguir las cifras que corresponden a las partes enteras, de las que corresponden a fracciones con denominador una potencia de 10. A esta forma de expresar un número le llamaremos *expansión decimal* de dicho número.

La expansión decimal de un número permite determinar de manera eficiente su ubicación en la recta numérica. Por ejemplo, ubiquemos 31,254: tenemos que está entre 31 y 32, pues $\frac{254}{1000} < 1$. Como la siguiente cifra es 2 décimos, dividimos en 10 partes iguales el segmento entre 31 y 32, y avanzamos 2 décimos a partir del 31, tal como lo muestra la siguiente figura:

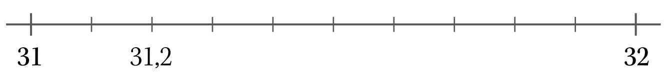


Figura VIII.1.

[1] En el mundo anglosajón se usa un punto para separar la parte entera y la parte fraccionaria, de modo que al escribir el decimal del ejemplo se tiene: 31.254.

Como 31,254 está ubicado entre 31,2 y 31,3, pues $\frac{54}{1000} < \frac{1}{10}$, dividimos el segmento determinado por 31,2 y 31,3, que corresponde a 1 décimo de la unidad, en 10 partes iguales. Cada segmento obtenido es 1 centésimo y, por lo tanto, avanzando 5 centésimos a partir del 31,2, ubicamos el número 31,25:

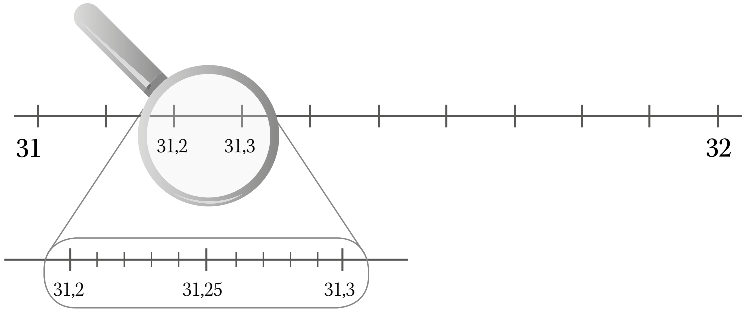


Figura VIII.2.

De la misma forma, si dividimos el segmento entre 31,25 y 31,26, que corresponde a 1 centésimo, en 10 partes iguales, cada segmento es 1 milésimo. Así, el punto que corresponde a 31,254 es el que se muestra en la siguiente figura:

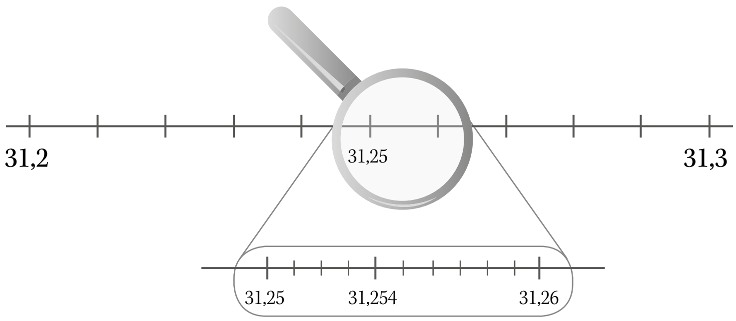


Figura VIII.3.

Para pensar

Extendimos el sistema posicional en base 10 considerando órdenes menores que la unidad. Describa cómo extender el sistema posicional en base 2. Ubique el 1,011 (expresado en base 2) en la recta numérica.

Como veremos, todos los números de la recta numérica tienen expansión decimal. Sin embargo, esta no siempre será finita. A modo de ejemplo, encontremos la expansión decimal de la fracción $\frac{1}{3}$.

Como es una fracción menor que 1, está ubicada entre 0 y 1. Luego, para encontrar la cifra correspondiente a los décimos, dividamos el segmento en 10 partes de igual longitud. Así, la fracción $\frac{1}{3}$ está ubicada entre 0,3 y 0,4, pues la longitud del segmento determinado por 0 y $\frac{1}{3}$ es 3 veces la del segmento determinado por 0 y 1.

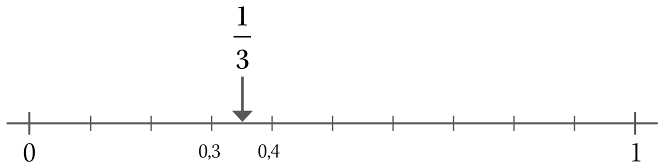


Figura VIII.4.

Ahora, la longitud del segmento entre 0,3 y $\frac{1}{3}$ es 3 veces la del segmento entre 0,3 y 0,4. Esto último, pues el segmento determinado por 0,3 y $\frac{1}{3}$ mide $\frac{1}{30}$ de unidad, y el determinado por 0,3 y 0,4 mide $\frac{1}{10}$. Por lo tanto, $\frac{1}{3}$ está entre 0,33 y 0,34.

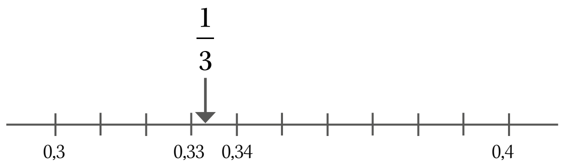


Figura VIII.5.

Si realizáramos este proceso otra vez, considerando ahora el segmento que está determinado por 0,33 y 0,34, concluiríamos que el punto correspondiente a $\frac{1}{3}$ está ubicado en el segmento determinado por 0,333 y 0,334.

Repitiendo este procedimiento, obtenemos que:

$$0 < \frac{1}{3} < 1$$

$$0,3 < \frac{1}{3} < 0,4$$

$$0,33 < \frac{1}{3} < 0,34$$

$$0,333 < \frac{1}{3} < 0,334$$

$$0,3333 < \frac{1}{3} < 0,3334$$

$$0,33333 < \frac{1}{3} < 0,33334$$

$$0,333\cdots 33 < \frac{1}{3} < 0,333\cdots 34$$

Y así la expansión decimal es:

$$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$$

Para pensar

Si multiplicamos ambos lados de la igualdad anterior por 3, obtenemos que:

$$1 = 0{,}999\ldots$$

Por lo tanto, 1 tiene dos expansiones decimales diferentes. ¿Habrá otros números que tengan dos expansiones decimales distintas?

Generalizando el procedimiento usado para encontrar la expansión decimal de $\frac{1}{3}$, podemos obtener la expansión de cualquier número r de la recta numérica[1]. Primero, buscamos el mayor natural n, menor o igual al número. Tendremos, entonces, que la expansión decimal de r debe ser de la forma $n, \ldots$

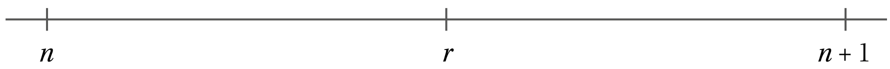


Figura VIII.6.

Si $r = n$, no hay que hacer nada más. Si $r \neq n$, buscamos el mayor número natural n_1 entre 0 y 9 tal que $n{,}n_1 \leq r$. Entonces, la expansión decimal de r debe ser de la forma $r = n{,}n_1 \ldots$

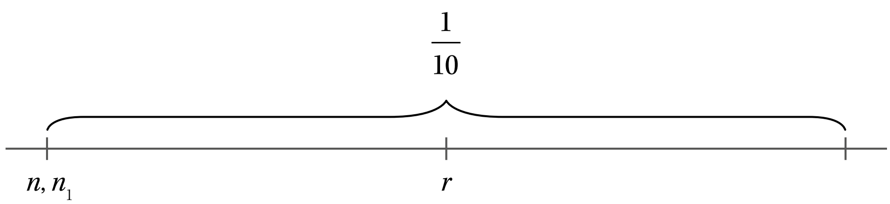


Figura VIII.7.

Si $r = n{,}n_1$, hemos encontrado la expansión. Si $r \neq n{,}n_1$, entonces buscamos el mayor número natural n_2 entre 0 y 9 tal que $n{,}n_1 n_2 \leq r$. La expansión decimal de r debe ser de la forma $r = n{,}n_1 n_2 \cdots$

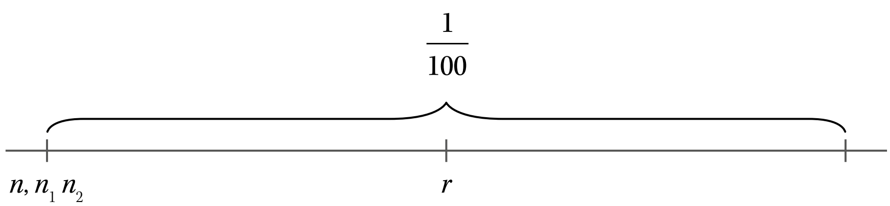


Figura VIII.8.

[1] Los números de la recta numérica que consideraremos en esta sección son aquellos que se ubican a la derecha del 0, incluyéndolo. El procedimiento que describiremos puede ser generalizado para números negativos, los que estudiaremos en el **Capítulo X**.

Si $r = n,n_1n_2$, tenemos la expansión buscada. Si $r \neq n,n_1n_2$, entonces buscamos el mayor número natural n_3 entre 0 y 9 tal que $n,n_1n_2n_3 \leq r$.

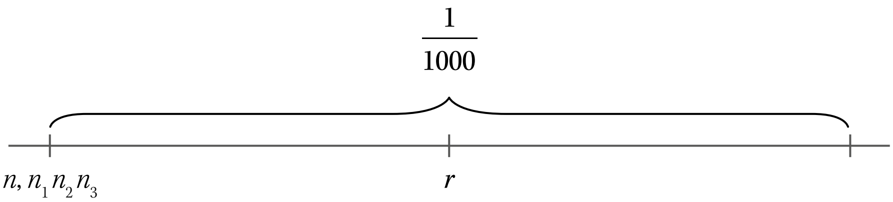


Figura VIII.9.

Puede suceder que el proceso termine en alguno de los pasos, es decir, la expansión decimal de *r* tiene un número finito de cifras a la derecha de la coma, o puede suceder que el proceso no termine y que la expansión decimal de *r* tenga infinitas cifras a la derecha de la coma.

En la práctica, si *r* es un punto arbitrario en una recta numérica dibujada en una hoja de papel, tal vez podremos determinar la cifra correspondiente a las centésimas.

Veamos ahora un proceso alternativo para obtener la expansión decimal de *r*. Primero buscamos el mayor número natural *n*, estrictamente menor que *r*. Es decir, el mayor número natural *n* tal que $n < r$. La expansión decimal de *r* será entonces de la forma *n*, ...

Luego buscamos el mayor número natural n_1 entre 0 y 9 tal que $n,n_1 < r$. Tendremos entonces que la expansión decimal de *r* debe ser de la forma $r = n,n_1\ldots$, y continuamos de la misma forma. Notamos que, a diferencia del proceso anterior, este no se detiene nunca, es decir, siempre producirá una expansión decimal con infinitas cifras a la derecha de la coma.

Para pensar

Considere el número *r* = *1*. Obtenga la expansión decimal de *r* usando las dos alternativas dadas. Comente su resultado.

Esta extensión del sistema de numeración decimal es probable que haya sido motivada por aplicaciones prácticas. Cuando miramos una huincha de medir como las que usan los carpinteros o los sastres, vemos que esta viene dividida en metros, pero también vienen marcados los décimos de metro, o decímetros. A su vez, cada decímetro está dividido en décimos que, por lo tanto, son centésimos de metro y los llamamos centímetros. Cada centímetro es dividido en 10 partes que constituyen un milésimo de metro y los llamamos milímetros. Podemos imaginarnos que volvemos a dividir los milímetros en 10 partes y obtenemos diezmilésimos de metro. En realidad, se puede hacer, pero ninguna huincha corriente viene graduada con diezmilésimos de metro, porque para las aplicaciones prácticas de un constructor o un carpintero no se necesita tal nivel de precisión. Un décimo de milímetro es tan pequeño que necesitaríamos una lupa para distinguirlo.

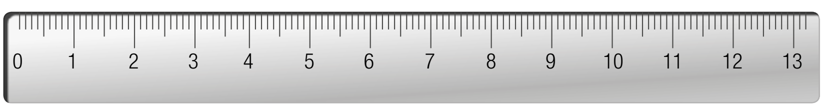


Figura VIII.10.

Es evidente que para otras aplicaciones, como los microcomputadores y otros aparatos electrónicos, la microbiología, etc., es necesario medir con unidades mucho más pequeñas. Sin embargo, incluso en este medio, igual que en el caso de la huincha, hay un límite de lo que el instrumento de medición es capaz de detectar, de modo que no tiene ninguna utilidad continuar obteniendo décimos de décimos de décimos con el propósito de medir con unidades más y más finas, ya que, más allá de la capacidad del instrumento, no nos servirían. Las mismas ideas aplicadas a los metros pueden usarse para otras magnitudes, como los litros, que son usados para medir volumen.

En resumen

- El sistema posicional en base 10 se extiende agregando posiciones hacia la derecha de las unidades. Los valores de estas nuevas posiciones corresponden a fracciones con denominador una potencia de 10, esto es: décimos, centésimos, milésimos, etc.
- Cualquier número de la recta numérica tiene una expansión decimal, la cual puede ser finita o infinita.

1.1 Números decimales

La palabra "decimal" aparece en el nombre de distintos conceptos relacionados:

- *Sistema de numeración decimal:* usamos este término para referirnos al sistema posicional en base 10.
- *Fracción decimal*: con esto nos referimos a una fracción cuyo denominador es una potencia de 10.
- *Expansión decimal*: corresponde a la expresión de un número cualquiera como suma (finita o infinita) de fracciones decimales.
- *Decimal*: también se llama decimal a cada uno de los dígitos que aparece después de la coma.

En este texto llamaremos *número decimal*, o simplemente *decimal*, a un número que está expresado mediante su expansión decimal, sea esta finita o infinita. En estricto rigor, no es que un número sea o no sea decimal, sino que esté expresado mediante su expansión decimal. Como ya vimos, cada número de la recta numérica tiene una expansión decimal.

Algunos autores llaman "número decimal" solamente a los números que tienen una expansión decimal finita y que, como vimos anteriormente, corresponden a las fracciones decimales.

Aproximación de números decimales

En el **Capítulo IV** vimos formas de aproximar un número natural, por ejemplo, usando redondeo o truncamiento. Estos mismos procedimientos se pueden extender a los decimales.

Para *redondear* un número se debe determinar el orden donde se requiere realizar la aproximación: unidades, decenas, centenas, décimos, centésimos, milésimos, etc. Si la cifra a la derecha de la posición elegida es menor que 5, la cifra queda igual y todas las cifras a su derecha se cambian por 0. Si, en cambio, es mayor o igual que 5, a la cifra elegida se le suma 1 y todas las cifras a su derecha se cambian por 0. Para *truncar* se reemplazan todas las cifras a la derecha de la que se quiere aproximar por 0. Por ejemplo:

0,9838 ≈ 1 cuando redondeamos a la unidad.

0,9838 ≈ 1 cuando redondeamos a los décimos.

0,9838 ≈ 0,98 cuando redondeamos a los centésimos.

0,9838 ≈ 0,984 cuando redondeamos a los milésimos.

1,263 ≈ 1 cuando es truncado a la unidad.

1,263 ≈ 1,2 cuando es truncado a los décimos.

1,263 ≈ 1,26 cuando es truncado a los centésimos.

1,263 ≈ 1,263 cuando es truncado a los milésimos.

1.2 Comparación de números decimales

El procedimiento para comparar y ordenar números decimales es una extensión del que se utiliza para comparar y ordenar números naturales. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

Comparemos 362,52 y 362,502.

Para comparar estos dos números comenzamos comparando las cifras correspondientes a las posiciones de mayor orden que, en este caso, corresponden a la parte entera de ambos números. Como ambos tienen 3 centenas, 6 decenas y 2 unidades, para establecer una relación de orden entre ellos, debemos comparar las cifras que corresponden a décimos, centésimos y milésimos. Ambos números tienen 5 décimos, por tanto, es necesario comparar los centésimos. El primer número tiene 2 centésimos, mientras que el segundo tiene 0 centésimos. De esta forma, se tiene que: 362,52 > 362,502.

La expresión decimal de los números puede llevar a errores al momento de comparar, en particular, cuando las diferencias están en cifras a la derecha de la coma, como en el ejemplo anterior. Un posible error es señalar que 362,52 < 362,502 pues el segundo tiene mayor cantidad de cifras decimales o porque 52 < 502.

Para pensar

Describa un algoritmo para determinar cuál es el mayor entre dos números a y b para los que se conocen sus expansiones decimales. Muestre que su algoritmo funciona en el caso simple en que los dos números son de la forma $a = 0, a_1 a_2$ y $b = 0, b_1 b_2$.

Ejemplo

Ordenemos de menor a mayor 3,45; 3,045; 3,405 y 3,54.

Un procedimiento para ordenarlos consiste en colocar los números en una tabla de valor posicional y comparar las cifras ubicadas en las mismas posiciones. Tenemos así la siguiente tabla:

U 1	**d** 0,1	**c** 0,01	**m** 0,001
3	4	5	0
3	0	4	5
3	4	0	5
3	5	4	0

Observemos que hemos completado con 0 la posición de los milésimos de los decimales expresados solo hasta los centésimos. De la tabla, podemos ver directamente que en todos los números las unidades son 3, así que compararemos las cifras en la posición de los décimos. El segundo número de la tabla tiene 0 décimos, por tanto, podemos señalar que es el menor. Del mismo modo, el último número tiene 5 décimos, por tanto, es el mayor. Para comparar los otros dos números basta con considerar las cifras en la posición de los centésimos. Concluimos que: $3{,}045 < 3{,}405 < 3{,}45 < 3{,}54$.

Una tarea relacionada con la comparación de números decimales es intercalar números decimales entre dos números dados. Por ejemplo, dados los números 76,043 y 76,044, encontremos un número mayor que el primero y menor que el segundo. Existen muchas formas de abordar esta tarea, mostraremos dos de ellas.

Ubiquemos ambos números en una tabla de valor posicional para visualizar el orden de las cifras que los componen:

D 10	**U** 1	**d** 0,1	**c** 0,01	**m** 0,001
7	6	0	4	3
7	6	0	4	4

Tabla VIII.2.

Un error que puede cometer un niño es pensar que son números consecutivos y afirmar que entre estos dos números no hay otro. Claramente, esto no es cierto. Para encontrar un número entre ambos agregamos a la tabla la posición decimal que corresponde a los diezmilésimos. Para ambos números, la cifra en dicha posición es **0**, como se muestra a continuación:

D 10	**U** 1	**d** 0,1	**c** 0,01	**m** 0,001	**dm** 0,0001
7	6	0	4	3	0
7	6	0	4	4	0

Tabla VIII.3.

Observando la tabla, se puede establecer que un decimal que cumple con la condición requerida es cualquiera que tenga una cifra distinta de **0** en la posición de los diezmilésimos, ya que entonces será mayor que el primer número dado y menor que el segundo. Por ejemplo, un número que cumple esta condición es **76,0433**.

D 10	**U** 1	**d** 0,1	**c** 0,01	**m** 0,001	**dm** 0,0001
7	6	0	4	3	0
7	6	0	4	3	3
7	6	0	4	4	0

Tabla VIII.4.

Otra forma de encontrar un decimal entre **76,043** y **76,044** es ubicarlos en la recta numérica. De esta forma, queda claro que existen infinitos números entre los números dados. En particular, podemos notar que el segmento que queda determinado por ambos números corresponde a un milésimo de unidad, como lo muestra la siguiente figura:

Figura VIII.11.

Si dividimos en **10** partes iguales este segmento, cada parte corresponderá a un diezmilésimo. Cualquiera de los puntos marcados en la recta numérica, en particular **76,0435**, cumple con lo requerido.

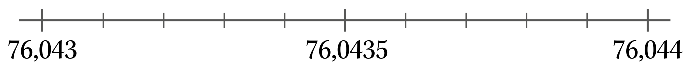


Figura VIII.12.

En resumen

Para comparar decimales se utiliza un procedimiento similar al usado en la comparación de números naturales, que se basa en el significado del valor posicional. Así, se comparan las cifras que corresponden a la misma posición partiendo por la de mayor orden. Si son iguales, se continúa con la cifra de la posición de orden inmediatamente inferior.

Ejercicios de la sección

1. Escriba en notación posicional decimal los siguientes números:

   a. $2+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}$

   b. $\frac{5}{20}$

   c. $\frac{35}{10}$

   d. $\frac{2}{3}$

2. Encuentre la expansión decimal de las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{3};\ \frac{1}{33}\ \text{y}\ \frac{1}{333}$$

   a. A partir de lo anterior, encuentre la expansión decimal de la fracción $\frac{1}{333.333}$.

   b. Si n es un número natural distinto de 0, establezca una regularidad para la expansión decimal de fracciones del tipo $\frac{1}{nnnn...nnn}$.

3. Considere un sistema de numeración posicional de base 5. Observe la siguiente tabla de valor posicional en este sistema, donde U representa la unidad.

25	5	U 1			
3	1	2	0	2	1

   a. Complete el valor de las posiciones a la derecha de la unidad.

   b. ¿Cómo representaría el número ubicado en la tabla prescindiendo de ella?

   c. ¿Cuál es la expansión decimal del número?

4. Aproxime los siguientes decimales, según se indica en cada caso.

   a. Redondear 0,8634 a los milésimos.

   b. Redondear 54,387 a los centésimos.

   c. Truncar 34,652 a los décimos.

   d. Truncar 5.342,705 a los centésimos.

5. Para cada par de números decimales encuentre otro que sea mayor que el primero y menor que el segundo.

   a. 2,3 y 2,4.
   b. 0,01 y 0,015.
   c. 1,999 y 2.
   d. 1,002 y 1,0021.

6. Ordene los números decimales de mayor a menor: 10,2001; 10,0201; 10,0221; 10,201; 10,1002 y 10,2101.

7. ¿Qué valores puede tomar el dígito k para que $4{,}5003k1$ sea menor que 4,500351, pero mayor que 4,500311?

8. Ubique en la recta numérica los siguientes decimales: 7,2; 7,5; 7,33 y 7,6.

2. Operaciones con números decimales con expansión finita

En esta sección estudiaremos las operaciones aritméticas con números decimales con expresión decimal finita. Estas operaciones ya fueron definidas, pues estos números corresponden a las fracciones decimales. El propósito principal de esta sección será estudiar los algoritmos para estas operaciones.

2.1 Suma y resta de números decimales finitos

El significado de la suma y la resta con números decimales es el mismo que abordamos cuando caracterizamos estas operaciones en los números naturales. La suma se puede asociar a acciones como agregar, juntar y avanzar, mientras que la resta se puede asociar a acciones como quitar, separar y retroceder. De esta forma, las situaciones aditivas que se pueden plantear para estudiar estas operaciones con números decimales son las mismas que ya estudiamos para los números naturales.

Los algoritmos que habitualmente usamos para sumar o restar decimales finitos son similares a los que usamos cuando sumamos o restamos números naturales.

Calculemos 278,35 + 57,322. Una forma de plantear esta suma es expresando los números como fracciones decimales. Así, el primer sumando se puede representar como $\frac{27.835}{100}$ y el segundo como $\frac{57.322}{1.000}$. Por lo tanto, tenemos:

$$278{,}35+57{,}322=\frac{27.835}{100}+\frac{57.322}{1.000}=\frac{278.350}{1.000}+\frac{57.322}{1.000}=\frac{278.350+57.322}{1.000}=\frac{335.672}{1.000}=335{,}672$$

Este ejemplo muestra que una suma de decimales finitos se reduce a una suma de números naturales. Otra forma de abordar la suma, más cercana al algoritmo, es utilizando la descomposición canónica de los números decimales. Consideremos el mismo ejemplo:

$$278{,}35+57{,}322=\quad 200+70+8+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}\quad+\quad 50+7+\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1.000}$$

Luego, sumemos agrupando en los distintos órdenes:

$$\begin{aligned}278{,}35+57{,}322&=200+(50+70)+(8+7)+\quad\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\quad+\quad\frac{5}{100}+\frac{2}{100}\quad+\frac{2}{1.000}\\&=200+120+15+\frac{6}{10}+\frac{7}{100}+\frac{2}{1.000}\end{aligned}$$

Para obtener el resultado, bastará com componer el número:

$$278{,}35+57{,}322=335+\frac{6}{10}+\frac{7}{100}+\frac{2}{1.000}=335{,}672$$

Esto se puede abreviar utilizando la expansión decimal, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
278{,}35 + 57{,}322 &= (200 + 70 + 8 + 0{,}3 + 0{,}05) + (50 + 7 + 0{,}3 + 0{,}02 + 0{,}002)\\
&= 200 + (70 + 50) + (8 + 7) + (0{,}3 + 0{,}3) + (0{,}02 + 0{,}05) + 0{,}002\\
&= 200 + 120 + 15 + 0{,}6 + 0{,}07 + 0{,}002\\
&= 335 + 0{,}6 + 0{,}07 + 0{,}002\\
&= 335{,}672
\end{aligned}$$

Para resumir el proceso anterior, consideremos una tabla de valor posicional y ubiquemos los decimales del ejemplo y su suma:

C 100	**D** 10	**U** 1	**d** 0,1	**c** 0,01	**m** 0,001
2	7	8	3	5	0
	5	7	3	2	2
3	3	5	6	7	2

Tabla VIII.5.

Completamos con 0 la posición de los milésimos del primer decimal y sumamos de la misma forma que al aplicar el algoritmo usual para los números naturales.

Si en una posición la suma de los dígitos es igual o mayor a 10, realizamos un canje agregando un 1 a la posición de orden inmediatamente superior.

Para calcular una suma prescindiendo de la tabla de valor posicional, se sigue la misma lógica que cuando sumábamos números naturales. Procedemos de la siguiente manera: alineamos los números a sumar uno debajo del otro, haciendo coincidir las comas. La posición de las milésimas del primer sumando se puede dejar vacía, pero es conveniente colocar un 0 para evitar errores.

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\,1}\\
278{,}350\\
+\ \ 57{,}322\\
\hline
335{,}672
\end{array}$$

Para la resta tenemos un procedimiento similar. Veamos un ejemplo: 127,358 – 37,888.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 16} & & {\scriptstyle 12} & & \\
 & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle \cancel{1}} & {\scriptstyle \cancel{6}} & & {\scriptstyle \cancel{2}} & {\scriptstyle 15} & \\
 & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{7} & , & \cancel{3} & 5 & 8\\
- & & 3 & 7 & , & 8 & 8 & 8\\
\hline
 & & 8 & 9 & , & 4 & 7 & 0
\end{array}$$

Al usar el algoritmo de la resta con números que no tienen la misma cantidad de cifras decimales, es conveniente que se agreguen 0 al que tiene menos cifras, para que así ambos tengan la misma cantidad. Esto evita errores como:

$$\begin{array}{r}
15{,}2\\
-\ \ 8{,}07\\
\hline
7{,}27
\end{array}$$

El 0 en el lugar de las milésimas puede omitirse y dar como resultado 89,47. Sin embargo, cuando los números corresponden a mediciones de algún tipo, por ejemplo en Física, y dependiendo del contexto, se puede preferir dar como respuesta 89,470. El 0 al final indica que la medición es precisa hasta los milésimos.

Ejercicios

1. Calcule las siguientes adiciones y sustracciones usando el algoritmo respectivo:
   a. 625,014 + 62,543
   b. 0,073 + 12,38
   c. 34,754 – 12,071
   d. 21,89 – 12,3

2. Un estudiante realiza el siguiente procedimiento para restar 32,4 – 12,43.

$$\begin{array}{r} 32{,}4 \\ -\,12{,}43 \\ \hline 20{,}03 \end{array}$$

   Describa el error del estudiante. ¿Por qué cree que se produce?

Para finalizar, mencionamos que los mismos materiales concretos que podemos usar para el desarrollo de la suma y la resta de números naturales pueden ser adaptados a la suma y la resta de decimales finitos. Esto se debe a que la estructura de los números naturales y de los decimales obedecen a los mismos principios, y las operaciones y sus algoritmos son esencialmente lo mismo. Por otra parte, como los decimales son fracciones, también se pueden utilizar diagramas de área para representar las operaciones y explicar el funcionamiento de los algoritmos.

Ejercicios

1. Explique cómo usar un ábaco para calcular las siguientes sumas y restas.
   a. 1,9 + 1,11
   b. 3,12 + 0,35
   c. 1 – 0,25
   d. 2,5 – 0,55

2. Resuelva las siguientes sumas y restas dibujando un diagrama de área.
   a. 0,04 + 0, 38
   b. 1 + 0,25
   c. 5, 62 – 1,3
   d. 2,09 – 1,1

3. Explique cómo se utilizarían los bloques base 10 para calcular una suma de decimales. ¿Qué relación existe entre los bloques y los diagramas de área?

2.2. Multiplicación y división de decimales finitos

En esta sección estudiaremos la multiplicación y la división de decimales finitos, operaciones que ya están definidas, pues estamos trabajando con fracciones. Veremos cómo extender los algoritmos usuales para la multiplicación y división a este contexto.

Multiplicación y división de un número decimal por una potencia de 10

La expansión decimal de un número decimal obedece al mismo principio usado en la expresión de un natural en base 10. De esta forma, multiplicar o dividir por potencias de 10 se hace de manera similar al caso de los naturales.

Multipliquemos 23,45 por 10. Descomponiendo canónicamente el decimal y utilizando las propiedades distributiva y asociativa de la multiplicación, tenemos:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 23{,}45 &= 10 \cdot \quad 2 \cdot 10 + 3 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} \\ &= 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 + 5 \cdot \frac{1}{10} \\ &= 234{,}5 \end{aligned}$$

Observemos que el efecto de multiplicar por 10 fue que la coma se corrió un lugar hacia la derecha.

> *Para pensar*
>
> ¿Qué ocurre cuando multiplicamos un decimal cualquiera por 0,1; 0,01; 0,001?

Por otra parte, para dividir 23,45 por 10, descomponiendo canónicamente el decimal y usando las propiedades distributiva y asociativa, se tiene:

$$\begin{aligned} 23{,}45 : 10 &= \quad 2 \cdot 10 + 3 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} \quad : 10 \\ &= 2 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000} \\ &= 2{,}345 \end{aligned}$$

Así, el efecto de dividir por 10 fue que la coma se desplazó un lugar hacia la izquierda.

> *Para pensar*
>
> ¿Qué ocurre cuando dividimos un decimal cualquiera por 0,1; 0,01; 0,001?

En resumidas cuentas, multiplicar un decimal por 10 corresponde en la práctica a correr la coma un lugar a la derecha, y dividir por 10 corresponde a correr la coma un lugar a la izquierda. De esta forma, multiplicar por 100 corresponde a multiplicar dos veces por 10, es decir, a correr la coma dos lugares a la izquierda, etc. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 23{,}45 \cdot 10 &= 234{,}5 \\ 23{,}45 \cdot 100 &= 2.345 \\ 23{,}45 \cdot 1.000 &= 23.450 \\ 23{,}45 \cdot 10.000 &= 234.500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23{,}45 : 10 &= 2{,}345 \\ 23{,}45 : 100 &= 0{,}2345 \\ 23{,}45 : 1.000 &= 0{,}02345 \\ 23{,}45 : 10.000 &= 0{,}002345 \end{aligned}$$

Ejercicio

Calcule las siguientes multiplicaciones:

$$\begin{aligned} 23{,}45 \cdot 0{,}1 &= \underline{\qquad\qquad} \\ 23{,}45 \cdot 0{,}01 &= \underline{\qquad\qquad} \\ 23{,}45 \cdot 0{,}001 &= \underline{\qquad\qquad} \\ 23{,}45 \cdot 0{,}0001 &= \underline{\qquad\qquad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23{,}45 : 0{,}1 &= \underline{\qquad\qquad} \\ 23{,}45 : 0{,}01 &= \underline{\qquad\qquad} \\ 23{,}45 : 0{,}001 &= \underline{\qquad\qquad} \\ 23{,}45 : 0{,}0001 &= \underline{\qquad\qquad} \end{aligned}$$

Algoritmo de la multiplicación para decimales finitos

Para ilustrar cómo se extiende el algoritmo de la multiplicación a los decimales finitos, desarrollemos el siguiente ejemplo:

$$765{,}27 \cdot 23{,}5$$

Podemos representar cada número como una fracción decimal y luego operar con las fracciones:

$$765{,}27 \cdot 23{,}5 = \frac{76.527}{100} \cdot \frac{235}{10} = \frac{76.527 \cdot 235}{1.000} = \frac{17.983.845}{1.000} = 17.983{,}845$$

En la práctica, esto corresponde a multiplicar ambos números olvidando la coma y luego al resultado colocarle la coma, de forma tal que la cantidad de dígitos decimales sea igual a la suma de la cantidad de dígitos decimales de ambos factores. En nuestro caso, el primer número tiene

2 dígitos a la derecha de la coma, y el segundo factor tiene 1 dígito. Por lo tanto, el resultado debe tener 3 dígitos a la derecha de la coma. Mostramos, a continuación, cómo se presenta usualmente este algoritmo:

$$\begin{array}{r} 765{,}27 \ \cdot 23{,}5 \\ \hline 382635\phantom{\ \cdot 23{,}5} \\ 229581\phantom{0\ \cdot 23{,}5} \\ 153054\phantom{00\ \cdot 23{,}5} \\ \hline 17983{,}845\phantom{\ \cdot 23{,}5} \end{array}$$

Es importante notar que al colocar la coma en el resultado debemos contar los 0 que pudieran aparecer a la derecha. Veamos un ejemplo de esta situación:

$$\begin{array}{r} 3{,}35 \cdot 2{,}44 \\ \hline 1.340\phantom{\cdot 2{,}44} \\ 1.340\phantom{0\cdot 2{,}44} \\ 670\phantom{00\cdot 2{,}44} \\ \hline 8{,}1740\phantom{\cdot 2{,}44} \end{array}$$

El resultado es, entonces, 8,1740 que generalmente se presenta como 8,174.

Ejercicios

1. Explique paso a paso cómo realizar las siguientes multiplicaciones con el algoritmo:
   a. 2,07 · 30,02
   b. 0,075 · 1,2
   c. 10,1 · 5,05
2. Las siguientes multiplicaciones serán incluidas en una prueba de selección múltiple. Proponga dos distractores para cada una de ellas justificando su elección.
   a. 2,4 · 1,3
   b. 0,2 · 0,3
   c. 0,4 · 0,8

Divisiones de decimales finitos

Recordamos que el algoritmo de la división de números naturales entrega un cociente o resultado y como resto, un número natural. Al trabajar con decimales, podemos continuar la división hasta que estemos satisfechos con el número de dígitos después de la coma. Recordemos que en la mayoría de las aplicaciones prácticas no tiene sentido calcular una gran cantidad de cifras decimales, pues estas carecen de significado concreto.

Calculemos la división 34,25 : 21,8. Recordemos que si multiplicamos el divisor y el dividendo por el mismo número, el cociente no cambia. Podemos interpretar la operación de la siguiente forma:

$$34,25:21,8=342,5:218= \quad 342+\frac{5}{10} \quad :218=\frac{342}{218}+\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{218}=1+\frac{124}{218}+\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{218}$$

$$=1+\frac{1}{10} \quad \frac{1240}{218}+\frac{5}{218} \quad =1+\frac{1}{10} \quad \frac{1.245}{218} \quad =1+\frac{1}{10} \quad 5+\frac{155}{218} \quad =1+\frac{5}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{155}{218}$$

$$=1+\frac{5}{10}+\frac{1}{100}\cdot\frac{1.550}{218}=1+\frac{5}{10}+\frac{1}{100}\cdot \quad 7+\frac{24}{218} \quad =1+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{24}{218}$$

$$=1+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{1.000}\cdot\frac{240}{218}=1+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{1.000}\cdot \quad 1+\frac{22}{218}$$

$$=1+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{1.000}+\frac{1}{1.000}\cdot\frac{22}{218}$$

$$=1,571+\frac{22}{218.000}$$

Por lo tanto:

$$34,25 \quad :21,8=1,571+\frac{22}{218.000}$$

Entonces, el resultado truncado a las milésimas es 1,571. Si continuamos con el procedimiento, obtenemos cada vez más cifras decimales.

Veamos cómo se esquematiza el procedimiento anterior para la división 34,25 : 21,8:

Paso 1: 34,25 : 21,8

Paso 2:

$$\begin{array}{l} 342,5 : 218 = 1 \\ -\underline{218} \\ 124 \end{array}$$

Paso 3:

$$\begin{array}{l} 342,5 : 218 = 1,5 \\ -\underline{218}\downarrow \\ 124\ 5 \\ -\underline{109\ 0} \\ \ \ 15\ 5 \end{array}$$

Paso 4:

$$\begin{array}{l} 342,5 : 218 = 1,57 \\ -\underline{218}\downarrow \\ 124\ 5 \\ -\underline{109\ 0\ \ } \\ \ \ 15\ 50 \\ -\ \ \underline{15\ 26} \\ \ \ \ \ \ \ 24 \end{array}$$

Paso 5:

```
 342,5 : 218 = 1,571
−218
 124 5
−109 0
   15 50
 −15 26
      240
     −218
       22
```

El esquema del procedimiento descrito arriba es:

1) Se multiplica el dividendo y el divisor por una potencia adecuada de 10 para que el divisor sea ahora un número natural.
2) La parte entera del dividendo se divide por el divisor y se obtiene cociente q y resto r. Hasta ahora el resultado de la operación es q,...
3) Al resto se le agrega a la derecha la siguiente cifra decimal no usada aún, la que a partir de un punto será 0, y se lo divide por el dividendo.
4) Se repite el paso 3 tantas veces como sea necesario.

Para pensar

Otra forma de calcular 34,25 : 21,8 hasta las milésimas consiste en calcular la división con resto 342.500 : 218 y luego dividir por 1.000 el cociente. Justifique la validez de este procedimiento. ¿Cómo se debería proceder para calcular hasta la millonésima?

Ejercicios

1. Explique, en la división del ejemplo dado, cómo corresponde cada paso de la operatoria realizada con fracciones al esquema del procedimiento con el algoritmo.
2. Calcule la división 22,32 : 13,2 usando fracciones, como en el ejemplo, y usando el algoritmo.
3. La siguiente pregunta será incluida en una prueba de selección múltiple. “Calcule hasta las centésimas la división 2,08 : 1,9”. Proponga dos distractores para esta pregunta. Justifique.
4. Se desea calcular el cociente 5,2 : 3,13 aproximado a las décimas. ¿Cuántas cifras decimales se necesita calcular? Justifique.

2.3 Estrategias de cálculo mental para las operaciones con decimales finitos

Las técnicas de cálculo mental se extienden de manera natural a decimales finitos. Veremos distintos ejemplos que ilustran esto.

Para calcular $3{,}041 - 0{,}04$, como los centésimos del minuendo son iguales a los del sustraendo, basta con restar al primer número 4 centésimos, de esta forma, se tiene $3{,}041 - 0{,}04 = 3{,}001$.

Para resolver algunas sumas y restas de decimales, es útil recordar las combinaciones aditivas básicas, las cuales se pueden extender a los decimales. Por ejemplo, las que suman 1, esto es: $0{,}3 + 0{,}7$; $0{,}4 + 0{,}6$; etc.

Ejercicio

Complete la tabla con las combinaciones aditivas con décimos.

+	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1									
0,2									
0,3									
0,4									
0,5									
0,6									
0,7									
0,8									
0,9									

Otra técnica útil es la de trasvasije. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

Calculemos $3{,}24 + 1{,}97$.

Observemos que el segundo sumando es un número cercano a 2. Si agregamos 3 centésimos a 1,97, obtenemos 2. Luego, para mantener la suma se debe quitar la misma cantidad al primer sumando. De esta forma, se tiene:

$$\begin{aligned} 3{,}24 + 1{,}97 &= (3{,}24 - 0{,}03) + (1{,}97 + 0{,}03) \\ &= 3{,}21 + 2 \\ &= 5{,}21 \end{aligned}$$

Veamos ahora un ejemplo donde se usa la técnica de traslado de la diferencia para calcular una resta:

Ejemplo

Calcular $5{,}35 - 2{,}98$.

Observemos que el sustraendo es un número cercano a 3. Agregamos 2 centésimos a 2,98 y obtenemos 3. Para mantener la diferencia se debe agregar la misma cantidad al primer término de la resta. De esta forma, se tiene:

$$\begin{aligned} 5{,}35 - 2{,}98 &= (5{,}35 + 0{,}02) + (2{,}98 + 0{,}02) \\ &= 5{,}37 - 3 \\ &= 2{,}37 \end{aligned}$$

Combinando estos procedimientos e identificando los decimales con fracciones, podemos encontrar otras técnicas de cálculo mental.

Por ejemplo:

- Para multiplicar por 0,2, multiplicamos por 2 y dividimos por 10.
- Para multiplicar por 0,4, multiplicamos dos veces por 2 y dividimos por 10.
- Para multiplicar por 0,5, tomamos la mitad del número.
- Para dividir por 0,5, basta con multiplicar el número por 2.
- Para multiplicar por 1,5, se puede sumar al número su mitad.

También se puede usar la compensación para la multiplicación de decimales. Por ejemplo:

$$2{,}3 \cdot 0.99 = 2{,}3 - 2{,}3 \cdot 0{,}01 = 2{,}3 - 0{,}023 = 2{,}277$$

Lo cual también se puede hacer así

$$2{,}3 \cdot 0.99 = (23 \cdot 99) : 1{,}000 = (2{,}300 - 23) : 1{,}000 = 2{,}277$$

Ejercicios

1. Señale las combinaciones aditivas de centésimos que suman 1.

2. Resuelva las siguientes sumas y restas utilizando cálculo mental. Señale la estrategia usada.

   a. $3{,}47 + 2{,}3$
   b. $23 + 0{,}6 + 0{,}03$
   c. $45{,}7 - 0{,}7$
   d. $3{,}6 + 0{,}099$
   e. $87{,}23 - 23{,}0998$

3. Observe el siguiente procedimiento y explique su funcionamiento señalando las propiedades involucradas.

$$2{,}35 + 1{,}89 \rightarrow 2{,}35 + 2 = 4{,}35 \rightarrow 4{,}35 - 0{,}11 = 4{,}24$$

$$2{,}35 + 1{,}89 = 4{,}24$$

4. Observe la siguiente suma y describa el error del estudiante al calcularla.

$$3{,}04 + 1{,}2 = 3{,}16$$

5. Utilice técnicas de cálculo mental para efectuar las siguientes operaciones:

a. $7{,}8 : 2$
b. $3{,}5 : 2$
c. $1{,}5 : 4$
d. $3{,}7 \cdot 0{,}5$
e. $3{,}7 : 0{,}5$
f. $3{,}1 : 0{,}25$
g. $5{,}2 \cdot 0{,}2$
h. $15 \cdot 0{,}9$
i. $15 \cdot 9{,}9$

En resumen

- Las operaciones con decimales finitos están definidas por las operaciones de las fracciones, por lo tanto, cumplen con las mismas propiedades.
- Los algoritmos para calcular sumas, restas, multiplicaciones y divisiones para decimales finitos son extensiones de los algoritmos correspondientes para los números naturales.
- Al permitir el resultado decimal, el algoritmo de la división puede no terminar.
- Las técnicas de cálculo mental usadas en los números naturales también se pueden aplicar a las operaciones con decimales.

Ejercicios de la sección

1. Resuelva los siguientes problemas utilizando diagramas de barras.
   a. En una fábrica hay dos recipientes con cloro marcados como A y B. El recipiente A tiene 2,54 litros más de cloro que B. Si el recipiente A contiene 56,8 litros de cloro, ¿cuántos litros contiene B?
   b. Si Pamela y su hermana se pesan juntas en una balanza, esta marca 84,6 kilogramos. Pamela pesa 45,3 kilogramos entonces, ¿cuánto pesa su hermana?
   c. El día lunes, René recorrió una vez un circuito de atletismo y se demoró 0,3 horas. El martes recorrió el mismo circuito y se demoró 0,27 horas. ¿Cuántos minutos menos se demoró el martes que el lunes?, ¿cuántos segundos menos?

2. En cada caso, invente un problema con las características dadas. Posteriormente, dibuje un diagrama de barras para cada uno.
   a. Problema de comparación para la suma $53{,}27 + 0{,}56$.
   b. Problema de agregar-quitar para la resta $34{,}87 - 3{,}7001$.
   c. Problema de juntar-separar para la resta $4.231{,}93 - 562{,}938$.

3. Calcule usando el algoritmo usual de la multiplicación y la división de decimales. Explique paso a paso el algoritmo.

   a. $23{,}76 \cdot 3{,}24$
   b. $32{,}098 : 2{,}1$

4. Observe el siguiente procedimiento para dividir $2{,}01 : 0{,}25$

$$2{,}01 : 0{,}25 = 8{,}04 : 1 = 8{,}04$$

   a. Expliquelo.
   b. ¿Qué propiedades de la multiplicación o la división sustentan el procedimiento anterior?

5. En la multiplicación de números naturales mostramos algunas técnicas alternativas al algoritmo usual. Por ejemplo, el algoritmo árabe.

   a. ¿Es posible usar este algoritmo para multiplicar decimales? Explique su respuesta.
   b. Calcule $5{,}32 \cdot 2{,}104$ usando el algoritmo árabe.

6. Formule un problema que se resuelva con las siguientes operaciones:

   a. $32{,}54 : 4$
   b. $32{,}98 \cdot 2{,}5$

7. Calcule mentalmente explicando el procedimiento realizado:

   a. $18{,}46 - 9{,}95$
   b. $4{,}71 + 22{,}456 + 0{,}19$
   c. $13{,}2 : 0{,}001$
   d. $37{,}2 \cdot 0{,}5$
   e. $67{,}009 \cdot 100$
   f. $49{,}23 - 34{,}99$
   g. $34 \cdot 0{,}99$

8. Estime el resultado de las siguientes operaciones:

   a. $24{,}3 : 2{,}96$
   b. $15{,}834 : 0{,}93$
   c. $34{,}59 \cdot 1{,}93$
   d. $2{,}598 \cdot 3{,}03$

9. Invente problemas cuya resolución involucre las siguientes operaciones:

   a. $3{,}6 + 2{,}5 \cdot 3{,}5$
   b. $33{,}4 - 17{,}6$
   c. $12 : 0{,}75$
   d. $80 : 2{,}5$

10. Una niña pregunta: "¿Por qué si $0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$, entonces $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$? El resultado debería ser $0{,}4$". ¿Cómo le explicaría a la niña por qué $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$?

11. Resuelva $67 : 34$ explicando con detalle todos los pasos seguidos.

12. Calcule el área de un rectángulo cuyos lados miden $36{,}7$ centímetros y $24{,}5$ centímetros.

13. El volumen de un paralelepípedo es $45{,}6$ centímetros cúbicos. Si el área de la base es $9{,}12$ centímetros cuadrados, ¿cuál es su altura?

14. Una distribuidora cuenta con 435 litros de aceite para embotellar. ¿Cuántas botellas de $0{,}75$ litros se pueden llenar?

3. Representación decimal de las fracciones

En esta sección estudiaremos cómo encontrar la expansión decimal de una fracción cualquiera. Para esto es clave el algoritmo de la división para decimales y el hecho de que cualquier fracción es el cociente entre dos números naturales.

Ilustremos con un ejemplo cómo se obtiene la expansión decimal de una fracción. Encontremos la expansión de $\frac{4}{13}$. Para esto, calculamos $4 : 13$ usando el algoritmo de la división:

$$
\begin{array}{l}
4 : 13 = 0{,}307692 \\
-0 \\
\hline
40 \\
-39 \\
\hline
\ \ 10 \\
\ \ -\ 0 \\
\hline
\ \ 100 \\
\ \ -\ 91 \\
\hline
\qquad 90 \\
\quad -\ 78 \\
\hline
\quad\ \ 120 \\
\quad -\ 117 \\
\hline
\qquad\ \ 30 \\
\qquad -\ 26 \\
\hline
\qquad\quad 4
\end{array}
$$

En el último paso realizado obtuvimos resto 4, que es el mismo número con el que comenzamos. Por lo tanto, si continuamos la división, obtendremos la misma serie de decimales, como se muestra a continuación:

$$
\begin{array}{l}
4 : 13 = 0{,}\underbrace{307692}\underbrace{307692} \\
-0 \\
\hline
40 \\
-39 \\
\hline
\ \ 10 \\
\ \ -\ 0 \\
\hline
\ \ 100 \\
\ \ -\ 91 \\
\hline
\qquad 90 \\
\quad -\ 78 \\
\hline
\quad\ \ 120 \\
\quad -\ 117 \\
\hline
\qquad\ \ 30 \\
\qquad -\ 26 \\
\hline
\qquad\quad 40 \\
\qquad -\ \ 39 \\
\hline
\qquad\quad 10 \\
\qquad\ \ -\ 0 \\
\hline
\qquad\quad 100 \\
\qquad\ \ -\ 91 \\
\hline
\qquad\qquad 90 \\
\qquad\ \ -\ 78 \\
\hline
\qquad\qquad 120 \\
\qquad\ \ -\ 117 \\
\hline
\qquad\qquad\ \ 30 \\
\qquad\qquad -\ 26 \\
\hline
\qquad\qquad\ \ 40
\end{array}
$$

Si continuamos este proceso, al dividir obtendremos nuevamente la misma secuencia de números. Esto se repetirá infinitas veces, así:

$$\frac{4}{13} = 0{,}307692307692307692\ldots$$

Donde los puntos suspensivos indican que la serie 307692 se repetirá indefinidamente.

A este tipo de expansión la llamamos *expansión decimal periódica* y para indicarla, se coloca una barra sobre la serie que se repite. En el ejemplo anterior:

$$\frac{4}{13} = 0{,}\overline{307692}$$

Calculemos ahora la expansión decimal de $\frac{32}{125}$. Procediendo como antes, tenemos:

$$\begin{array}{l}
32 : 125 = 0{,}256 \\
-\underline{0} \\
320 \\
-\underline{250} \\
\quad 700 \\
-\underline{\quad 625} \\
\qquad 750 \\
-\underline{\qquad 750} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

El último resto es 0, por lo tanto, $\frac{32}{125} = 0{,}256$ y su expansión decimal no es periódica, sino finita.

Encontremos ahora la expansión decimal de $\frac{51}{55}$. Procediendo como antes, tenemos:

$$\begin{array}{l}
51 : 55 = 0{,}927 \\
-\underline{0} \\
510 \\
\underline{495} \\
\quad 150 \\
\underline{\quad 110} \\
\qquad 400 \\
\underline{\qquad 385} \\
\qquad\ 15
\end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{51}{55} = 0{,}9272727\ldots = 0{,}9\overline{27}$$

Esta expansión no es periódica al comienzo, pero luego sí lo es. Este tipo de expansión se suele llamar *expansión decimal semiperiódica*.

Hemos visto que tenemos por lo menos tres tipos de expansiones decimales para una fracción. El primer tipo corresponde a una expansión decimal finita y, por lo tanto, la fracción es igual a una fracción decimal. El segundo tipo corresponde a una expansión decimal periódica, es decir, una serie de números se repite una y otra vez después de la coma. El tercer tipo corresponde a una expansión decimal semiperiódica, donde una serie de números se repite infinitamente, pero no inmediatamente después de la coma.

Hay cierta ambigüedad con la nomenclatura. Todos los tipos tienen, eventualmente, un período, incluso las finitas, ya que podemos considerar que ellas tienen al 0 como período. Además, la distinción entre expansiones decimales periódicas y semiperiódicas es algo forzada. Por ejemplo, podemos escribir $0{,}\overline{123}$ como

$$0{,}\overline{123} = 0{,}1\overline{231} = 0{,}12\overline{312}$$

La expansión ¿es periódica o semiperiódica? Hemos conservado esta nomenclatura porque está muy arraigada, pero no tiene demasiada utilidad.

¿Habrá algún otro tipo de expansión decimal? La respuesta es sí. Consideremos la siguiente expansión:

$$0{,}101001000100001000001\ldots$$

Donde la cantidad de 0 va aumentando y los separamos con 1. Se ve que esta expansión no corresponde a ninguno de los tipos anteriores, no tiene período.

Ya hemos visto que las fracciones dan origen a tres tipos de expansión, pero ¿habrá fracciones con expansión decimal no periódica? Es interesante notar que las fracciones dan origen solo a expansiones que son periódicas, semiperiódicas o finitas. La razón está en el algoritmo de la división.

Teorema VIII.1

La expansión decimal de una fracción es finita, periódica o semiperiódica.

Demostración

Revisemos el método empleado para calcular la expansión decimal de una fracción. Este descansa en el algoritmo de la división pues, como vimos, vamos multiplicando por 10 o agregando un 0 al resto obtenido en el paso anterior, y tan pronto como uno de estos restos se repite, la secuencia de cifras decimales tendrá que repetirse una y otra vez.

Pero ¿por qué habría de repetirse siempre un resto? Como en cada paso estamos dividiendo por el denominador, digamos n, de la fracción, nos preguntamos ¿cuántos restos posibles hay? El resto es estrictamente menor que el divisor, por lo tanto, hay exactamente n restos posibles, de tal modo que, a lo sumo, al cabo de $n + 1$ pasos el resto tiene que repetirse. Cuando esto sucede, la serie de decimales comprendida entre las dos apariciones de un mismo resto se repetirá hasta el infinito.

Observemos también que si un resto es 0, entonces el proceso termina y tenemos una expansión decimal finita.

Si no aparece el 0, pueden ocurrir dos cosas la primera es que el resto que se repite por primera vez sea igual al resto obtenido en el primer paso del proceso; en este caso, la expansión será periódica. El segundo caso es si el resto que se repite por primera vez no es igual al resto obtenido en el primer paso del proceso; en este caso, la expansión será semiperiódica.

Hemos demostrado que toda fracción tiene una expansión decimal que es finita, periódica o semiperiódica.

Ahora surge, en forma natural, otra pregunta, ¿será cierto el recíproco? Es decir, ¿corresponde toda expansión decimal finita, periódica o semiperiódica a una fracción? La respuesta es sí, como lo veremos a continuación. Como una fracción arbitraria se puede expresar como suma de un número natural y una fracción propia, es decir, menor que 1, basta con preocuparse de este tipo de fracciones.

Veamos primero un ejemplo del caso más sencillo, el finito:

$$0{,}1234 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1.000} + \frac{4}{10.000}$$

Es una suma de fraccionen y, por lo tanto, es una fracción. El procedimiento se puede generalizar, así:

$$0{,}b_1b_2\ldots b_n = \frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^n}$$

El siguiente es el caso de un número periódico, por ejemplo, $x = 0{,}\overline{256}$. Si multiplicamos este número por 1.000, tenemos:

$$1.000x = 256{,}\overline{256}$$

Por lo tanto, $1.000x - x = 256{,}\overline{256} - 0{,}\overline{256} = 256$, de donde obtenemos que:

$$999x = 256$$

Y así

$$0{,}\overline{256} = \frac{256}{999}$$

Veamos el caso general, sea:

$$r = 0{,}\overline{b_1b_2\ldots b_n}$$

Una expansión decimal periódica. Multiplicando r por 10^n tenemos:

$$10^n \cdot r = b_1b_2\ldots b_n, \overline{b_1b_2\ldots b_n}$$

Y restando obtenemos que:

$$10^n \cdot r - r = b_1b_2\ldots b_n$$

Usando la propiedad distributiva tenemos que:

$$(10^n - 1)\, r = b_1b_2\ldots b_n$$

Y multiplicando ambos lados de la ecuación por $\dfrac{1}{10^n - 1}$ obtenemos:

$$r = \frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^n - 1}$$

Tanto el numerador como el denominador son números naturales, más aún:

$$10^n - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{n}$$

Por lo tanto, una expansión decimal periódica corresponde a la fracción cuyo numerador es el período y cuyo denominador es el número formado por tantos 9 como el largo del período. Esta es la regla que habitualmente se aprende en Educación Básica.

Ahora veremos el caso semiperiódico. Consideremos la expansión $x = 0{,}9\overline{27}$. Si multiplicamos por 10, tenemos:

$$10 \cdot x = 9{,}\overline{27} = 9 + 0{,}\overline{27} = 9 + \frac{27}{99}$$

Y entonces:

$$x = \frac{9}{10} + \frac{27}{990} = \frac{918}{990}$$

De manera general, consideremos

$$r = 0{,}a_1a_2\ldots a_m\overline{b_1b_2\ldots b_n}$$

Un decimal con expansión semiperiódica. Vemos que:

$$10^m \cdot r = a_1a_2\ldots a_m + 0{,}\overline{b_1b_2\ldots b_n}$$

Descomponiendo y escribiendo $0{,}b_1b_2\ldots b_n$ como una fracción, obtenemos que:

$$10^m \cdot r = a_1a_2\ldots a_m + \frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^n - 1}$$

Dividiendo por 10^m, finalmente, concluimos que:

$$r = \frac{a_1a_2\ldots a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^m(10^n - 1)}$$

Por lo que r es una suma de fracciones, luego r es una fracción.

Los argumentos que hemos realizado demuestran el siguiente teorema:

Teorema VIII.2

Si una expansión decimal es finita, periódica o semiperiódica, entonces corresponde a una fracción.

Notemos que en los procedimientos anteriores se han sumado, restado o multiplicado expresiones infinitas. En las siguientes secciones abordaremos esta forma de operar.

Para pensar

Dada una expansión decimal semiperiódica de una fracción, a la secuencia de números que se repite indefinidamente suele llamársele *período de la fracción*. ¿Es correcto hablar de "la" secuencia de largo mínimo que se repite indefinidamente? Es decir, para una fracción semiperiódica cualquiera ¿deja esta definición identificado de manera única a este período?, ¿si no es único, qué relación hay entre los posibles períodos distintos de una misma fracción?

Ejercicios

1. Represente como decimal las siguientes fracciones:

   a. $\frac{2}{3}$ b. $3\frac{1}{4}$ c. $\frac{5}{6}$

2. Escriba como fracción los siguientes decimales:

   a. 0,23141414141... b. 0,77777... c. 2,25

3. Transforme las siguientes fracciones en decimal. Sugerencia: amplifique adecuadamente por potencias de 5 o de 2.

   a. $\frac{1}{5}$ b. $\frac{7}{25}$ c. $\frac{11}{40}$

4. Considere una fracción de la forma $\frac{a}{2^n 5^m}$, donde a, n y m son números naturales. ¿Qué tipo de expansión decimal tiene?

3.1 ¿$1 = 0,\overline{9}$?

El proceso descrito en la sección anterior puede ser usado para cualquier expansión decimal periódica, sin embargo, hay un caso que provoca la perplejidad de la mayoría de las personas, este es cuando el número es $0,\overline{9}$. Veremos por qué. Procediendo al igual que antes, multiplicamos este número por 10 y obtenemos $10 \cdot 0,\overline{9} = 9,\overline{9}$, y luego restamos $0,\overline{9}$. Llegamos a que $9 \cdot 0,\overline{9} = 9$ y, por lo tanto, $0,\overline{9} = 1$.

Este resultado va contra la intuición porque 0,999... parece nunca alcanzar 1, siempre es un poquito menor. El problema es que nos resulta difícil pensar en objetos o en procesos infinitos, y la expansión decimal 0,999... es en realidad el resultado de un proceso infinito. A la dificultad intuitiva anterior se suma que, a diferencia de cualquier otra expansión decimal periódica, el resultado no se puede comprobar por división usando el algoritmo: si dividimos numerador por denominador, o sea 9 : 9, no recuperamos la expansión decimal $r = 0,\overline{9}$.

Para entender qué significa 0,9999..., observemos a modo de comparación que el equivalente para números naturales escritos en notación decimal sería ... 99999, donde los puntitos indican que seguimos agregando 9 indefinidamente hacia la izquierda. Claramente, eso no representa ningún número, ya que todos los números tienen representación finita, no podemos seguir agregando indefinidamente cifras hacia la izquierda. ¿Por qué entonces para las expansiones decimales, como nuestro 0,9999..., tendría que representar a algún número? Debemos darle un significado. Consideremos las fracciones siguientes, escritas como expansiones decimales finitas.

$$\begin{array}{c} 0{,}9 \\ 0{,}99 \\ 0{,}999 \\ 0{,}9999 \\ 0{,}99999 \\ \vdots \end{array}$$

Vemos que cada uno de estos números es más y más grande y al mismo tiempo es más y más cercano a $0{,}\overline{9}$, pero nunca lo alcanza, siempre falta otro 9 y otro, y otro. También vemos que cada uno de estos números es menor que 1.

Notamos además que no puede haber ningún número tal que $0{,}\overline{9} < x < 1$, porque agregando más 9 decimales siempre podremos sobrepasar x. Esta última observación nos permite intuir qué pasaría si efectivamente pudiéramos seguir agregando 9 infinitamente: llegaríamos a 1.

El proceso anterior es lo que en Matemática más avanzada se conoce como un *límite*. Un pequeño cálculo nos permite justificar mejor las intuiciones anteriores. Usemos una variante del método empleado más arriba para calcular la fracción correspondiente a una expansión decimal dada, solo que ahora sí están justificadas todas las operaciones, porque se trata de una cantidad finita de números. Si:

$$x_n = 0{,}\underbrace{999\ldots9}_{n} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1.000} + \ldots + \frac{9}{10^n}$$

Multiplicando por 10 y restando x_n obtenemos:

$$\begin{array}{rl} 10 \cdot x_n = & 9 + \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{100} + \dfrac{9}{1.000} + \ldots + \dfrac{9}{10^{n-1}} \\ - \quad x_n = & \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{100} + \dfrac{9}{1.000} + \ldots + \dfrac{9}{10^{n-1}} + \dfrac{9}{10^n} \\ \hline 9x_n = & 9 - \dfrac{9}{10^n} \end{array}$$

Y dividiendo por 9 queda:

$$x_n = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Ahora es cuando hacemos el razonamiento del proceso límite, ¿qué sucede con x_n si n se hace muy grande, tan grande como queramos? Vemos que $\frac{1}{10^n}$ se hace muy, muy pequeño. Decimos que "su límite es 0". De esta manera, la cantidad expresada al lado derecho de la última ecuación tiene por límite 1. ¿Pero qué sucede con la cantidad del lado izquierdo? Como notamos más arriba, la intuición nos dice que si n crece indefinidamente, esa expresión se transforma en $0,\overline{9}$. Observando concluimos que el número 1 tiene, por lo tanto, dos expansiones decimales, 1 y $0,\overline{9}$.

Ejercicios

1. Encuentre el número que corresponde a la expansión decimal:

   a. $4,\overline{9}$ b. $10,\overline{9}$ c. $2,1\overline{9}$

2. Explique por qué:

$$0,35824 = 0,35823\overline{9}$$

3. Justifique por qué cualquier decimal finito tiene dos expansiones decimales distintas.

3.2 Operaciones con expansiones decimales infinitas

Sin mencionarlo específicamente, hemos estado haciendo ciertas operaciones con expresiones decimales infinitas, pero ¿podemos hacerlo realmente? Si sumamos:

$$\begin{array}{r} 34,782 \\ +\ 13,245 \\ \hline 48,027 \end{array}$$

Podemos ver fácilmente que este procedimiento es correcto porque, como vimos, se reduce a la suma:

$$34+\frac{7}{10}+\frac{8}{100}+\frac{2}{1.000} \quad + \quad 13+\frac{2}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1.000} \quad = 47+\frac{9}{10}+\frac{12}{100}+\frac{7}{1.000}$$

$$= 48+\frac{0}{10}+\frac{2}{100}+\frac{7}{1.000} = 48,027$$

Esta no es más que una suma de fracciones. De la misma manera, restar expansiones decimales finitas no difiere de hacerlo con números naturales, porque la notación decimal está construida para que el proceso se extienda y se justifique correctamente. Las multiplicaciones y divisiones también se generalizan bien.

Recordemos que para sumar o restar dos números comenzamos por las unidades, decenas y centenas, en ese orden, descomponiendo o componiendo la unidad de mayor orden cuando es necesario. Pero si queremos sumar fracciones periódicas, ¿cómo lo hacemos?, ¿cuál es el algoritmo empleado?

En los párrafos anteriores hemos restado expansiones periódicas de forma muy intuitiva y aparentemente correcta. Por ejemplo, multiplicamos la expansión decimal de $r = 0,\overline{254}$ por 1.000. Obtuvimos $1.000 \cdot r = 254,\overline{254}$ y luego restamos *r*.

Sin embargo, si queremos sumar o restar dos decimales, por ejemplo $0,\overline{78}$ y $0,\overline{468}$, y los escribimos como una suma habitual, con las unidades bajo las unidades, los décimos bajo los décimos, los centésimos bajo los centésimos, etc., tal como lo hicimos con las expansiones decimales finitas en una sección anterior, queda:

$$\begin{array}{r} 0,787878787\ldots \\ +\ \ 0,468468468\ldots \\ \hline \end{array}$$

¿Cómo procedemos?, ¿cuál es el algoritmo? Hay varias dificultades, la más notoria es que no tenemos por dónde comenzar, porque no existe la unidad de menor orden, siempre existirá una más y más pequeña. En particular, si hay que descomponer o componer para realizar un canje, esta situación se repetirá más adelante hacia la derecha infinitamente. De la misma manera, surgen problemas al intentar multiplicar una expansión decimal por un número natural. Si multiplicamos una expansión decimal finita por 10, vimos que el resultado debe ser que se corra la coma un espacio hacia la derecha. Intuitivamente, hicimos lo mismo en el caso infinito, por ejemplo, $1000 \cdot 0,\overline{254} = 254,\overline{254}$. La dificultad aumenta si tratamos de multiplicar o dividir expansiones decimales infinitas entre sí.

El problema es que no sabemos operar con infinitas cifras. De hecho, estas operaciones sí se pueden hacer y justificar en forma rigurosa, pero para ello se requiere de herramientas matemáticas más avanzadas, tal como el concepto de límite mencionado anteriormente, pero que escapan al espíritu y los contenidos de este libro. En todo caso, es importante notar que estos cálculos avanzados dan el mismo resultado que el cálculo y la operatoria intuitiva que hemos usado hasta ahora con expansiones decimales infinitas.

Hay, sin embargo, una forma de resolver este pequeño inconveniente teórico o, mejor dicho, de evitarlo. Podemos convertir las expansiones decimales a fracciones y operar de la manera conocida. Luego, si se desea, se puede obtener la expansión decimal del resultado. En nuestro ejemplo:

$$0,\overline{78} = \frac{78}{99} = \frac{26}{33} \quad \text{y} \quad 0,\overline{468} = \frac{468}{999} = \frac{52}{111}$$

Entonces:

$$0,\overline{78} + 0,\overline{468} = \frac{26}{33} + \frac{52}{111} = \frac{1.534}{1.221} = 1,\overline{256347}$$

Para pensar

¿Pudo haber conjeturado, solo a partir de las expresiones decimales periódicas de los sumandos, que el largo del período de esta suma iba a ser 6, que el período sería 256347 o incluso que la suma sería $1,\overline{256347}$? Explique.

Ejercicio

Calcule mostrando el desarrollo:

a. $0,\bar{7} - \frac{1}{7} + 0,\bar{9} + \frac{1}{6} - 4$

b. $\dfrac{0,\overline{36} : 0,3 + 2 : 0,\bar{5}}{0,\bar{3} + \frac{1}{3} + 3}$

c. $\dfrac{0,1\bar{5} + 0,15 - 15}{0,0\bar{5} + 0,05 - 5}$

3.3 Las expansiones decimales no periódicas: números irracionales

Hemos visto que hay expansiones decimales no periódicas y que, por lo tanto, no corresponden a ninguna fracción. La pregunta inmediata es ¿a qué corresponden estas expansiones?

Veamos un ejemplo de este tipo de número. Para ello consideremos un cuadrado de lado 1. Si construimos otro cuadrado cuyo lado es la diagonal d del primer cuadrado, como vemos en la figura, el área del segundo cuadrado es el doble que la del primero, es decir, $d^2 = 2$.

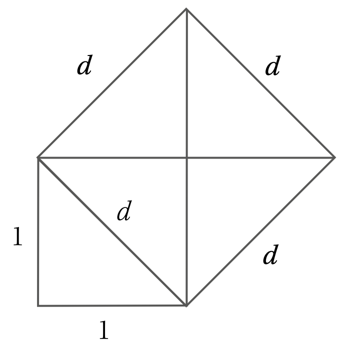


Figura VIII.13.

¿Será este d una fracción? Si lo fuera, tendría que ser un número entre 1 y 2. Supongamos que sí es una fracción, es decir, $d = \frac{n}{m}$, donde n y m son números naturales. Entonces se verifica que:

$$2 = d^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2}$$

Es decir:

$$2 \cdot m^2 = n^2$$

Como n y m son números naturales, ellos se pueden expresar como producto de números primos. Si elevamos un número natural n al cuadrado, los primos que aparecen en la descomposición de n^2 son los mismos que aquellos de la descomposición de n, solo que aparecen dos veces. Por ejemplo, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ y $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Sin embargo, en la igualdad $2m^2 = n^2$ el primo 2 aparece una cantidad impar de veces en el lado izquierdo y un número par de veces al lado derecho. Esto es una contradicción. Luego, d no puede ser igual a una fracción.

Este número d que verifica $d^2 = 2$ se llama la *raíz cuadrada* de 2 y se escribe $\sqrt{2}$.

Ejercicios

1. Indique si hay números naturales a y b tales que:

   a. $2a^2 = 3b^2$ b. $a^2 = 6b^2$ c. $a^3 = b^2$ d. $a^3 = 6b^2$

2. Demuestre que el número d, tal que $d^2 = 3$, el cual se denota como $d = \sqrt{3}$, es irracional.

En resumen

- La expansión decimal de una fracción puede ser finita, periódica o semiperiódica. Recíprocamente, una expansión decimal finita, periódica o semiperiódica corresponde a una fracción.
- Las fracciones decimales tienen dos expansiones decimales. Una de ellas es finita y la otra corresponde a una expansión con una serie infinita de 9.
- Las únicas fracciones que tienen expansión decimal finita son las que se pueden expresar con denominador de la forma $2^n 5^m$.
- Los números irracionales son aquellos que no tienen expansión decimal finita, periódica o semiperiódica. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es irracional.
- Para operar con decimales periódicos o semiperiódicos, podemos expresarlos como fracciones.

Ejercicios de la sección

1. Calcule la expansión decimal de las siguientes fracciones:

   a. $\dfrac{5}{8}$ b. $\dfrac{45}{125}$ c. $\dfrac{9}{12}$ d. $\dfrac{25}{625}$ e. $\dfrac{24}{9}$

2. Escriba los siguientes números decimales como fracción:

   a. $0,\overline{345}$ b. $23,4\overline{56}$ c. $0,08\overline{247}$ d. $45,08\overline{9}$

3. A partir de la expansión de $\dfrac{1}{3} = 0,\overline{3}$, escriba como fracción:

   a. $0,\overline{1}$

   b. $0,\overline{n}$ donde n puede tomar el valor: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9.

4. Use que $0,\overline{01} = \dfrac{1}{99}$, para escribir los siguientes números decimales como fracción:

   a. $3,4\overline{01}$ b. $42,0\overline{54}$ c. $0,001\overline{78}$

4. Dificultades y posibles errores en el trabajo con decimales

Como hemos dicho anteriormente, los decimales surgen a partir de una extensión del sistema de numeración decimal. Sin embargo, el trabajo con estos números, al leer, escribir, comparar u operar con ellos, puede generar dificultades en niños y niñas. Algunas de estas dificultades se generan por la concepción que se tiene de los decimales como "números naturales con coma", esto significa que, se trabaja la parte entera separada de la parte decimal sin comprender su relación. Otras provienen del trabajo con números naturales.

En esta sección analizaremos algunas dificultades y posibles errores que pueden presentar niños y niñas, al escribir, leer, ordenar u operar con decimales.

Dificultades y errores en la lectura, escritura y comparación de decimales

Una de las primeras tareas que los niños y las niñas resuelven al enfrentarse al estudio de los decimales tiene relación con la lectura y la escritura de estos números. Por ejemplo, escribir en cifras un decimal dado en forma oral: "treinta y cuatro milésimos". Es claro que para desarrollar esta tarea se requiere comprender el valor de las nuevas posiciones que se han agregado al sistema de numeración decimal y manejar el significado de décimos, centésimos, milésimos, etc. Un posible error en niños y niñas, cuando no se manejan estos conocimientos, es que representan décimos, centésimos o milésimos como decenas, centenas o miles "después de la coma" Por ejemplo, frente a la tarea señalada anteriormente escriben:

Treinta y cuatro milésimos = 34,1000

Figura VIII.14.

Del mismo modo, cuando los decimales presentan **0** en las posiciones enteras, la lectura puede generar dificultades, pues se requiere comprender el valor de posición de los dígitos mayores que **0**. Así, por ejemplo, para leer **0,028** es necesario comprender que el **2** corresponde a **2** centésimos y que el **8** corresponde a **8** milésimos. Un posible error frente a esta tarea es el siguiente:

0,028 = veintiocho

Figura VIII.15.

Otra tarea relacionada con la escritura de los decimales es representar fracciones como decimales. Por ejemplo, dada una fracción con denominador **10** o una potencia de **10**, representarla como decimal. Cuando la fracción dada es mayor que **1**, un posible error que pueden cometer niños y niñas es expresar el decimal escribiendo **0** en las unidades y el numerador de la fracción, como las cifras decimales, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\frac{43}{10} = 0{,}43$$

Figura VIII.16.

Es posible que el error anterior se deba al tipo de fracción, que al leerlo corresponde a "cuarenta y tres décimos", por tanto, escriben esta cantidad a partir de la coma.

Establecer una relación de orden entre dos o más decimales es una tarea que se presenta desde el comienzo del trabajo con decimales. Si bien el procedimiento que se utiliza para comparar dos decimales es similar al que se utiliza para comparar dos números naturales, se pueden presentar dificultades si al compararlos se considera en forma independiente la parte entera de la parte decimal. Con esto se generan errores como el siguiente:

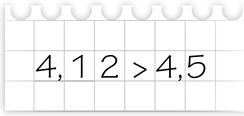


Figura VIII.17.

Un razonamiento que puede explicar este error es el siguiente: "Como la parte entera es igual, se compara la parte decimal; luego, como 12 > 5, se concluye que 4,12 > 4,5". Este error se genera cuando no se usa un procedimiento basado en la comparación de las cifras según su valor posicional. Para el ejemplo anterior, bastaría considerar que el primer decimal tiene 1 décimo, mientras que el segundo tiene 5 décimos, por tanto, 4,5 > 4,12. Otra razón que puede explicar este error es el uso inadecuado de un conocimiento estudiado para la comparación de números naturales que, en dicho caso, era correcto. Esto es, como el primer número tiene mayor cantidad de cifras que el segundo, no es necesario hacer una comparación cifra a cifra y se puede establecer directamente que 4,12 > 4,5.

Dificultades y errores al operar con decimales

Si bien los algoritmos para el cálculo de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones se construyen a partir de los algoritmos que se utilizan para operar con los números naturales, su uso puede presentar dificultades para su enseñanza y provocar errores en niños y niñas. Veremos algunos ejemplos de ellos.

Hemos visto en secciones anteriores que se pueden definir algunas técnicas de cálculo mental, como la composición canónica, para operar con los números decimales. Sin embargo, cuando se compone un número entero con décimos o centésimos, se observan errores como el siguiente:

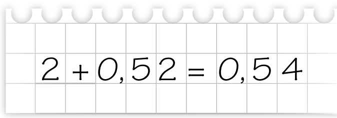


Figura VIII.18.

Probablemente, el error se produce por una falta de claridad respecto del valor posicional de los dígitos de cada sumando, y al efectuar el cálculo se suman 2 unidades con 2 centésimos. Una posible explicación para este procedimiento erróneo tiene relación con el uso del algoritmo de suma en los naturales, esto es que si se sumara 2 + 52, es correcto agregar un 2 a la última cifra del segundo sumando. Sin embargo, en los decimales la última cifra de un número no necesariamente corresponde a las unidades. Del mismo modo, esta dificultad puede generar errores en la resta de decimales, como el siguiente:

$$32{,}48 - 32 = 32{,}16$$

Figura VIII.19.

En este caso, se restan 32 unidades a 48 centésimos, sin considerar los valores posicionales de los dígitos que se están operando. Cabe señalar que bastaría con haber descompuesto el primer sumando, y procediendo de la siguiente forma, se encontraría el resultado correcto:

$$32{,}48 - 32 = (\cancel{32} + 0{,}48) - \cancel{32} = 0{,}48$$

El uso de los algoritmos para sumar y restar decimales requiere escribir en columnas los números, según el valor posicional de sus cifras. En los naturales estudiamos que este proceso se realiza comenzando por las cifras de la derecha, que corresponden a las unidades, y vimos que este aspecto constituía una dificultad para los niños y las niñas, pues algunos podrían tratar de alinearlos por la izquierda. En los números decimales se produce un fenómeno similar, pero esta vez los niños y lasniñas podrían ordenar los números partiendo desde la derecha y no considerar que esto puede provocar que los decimales queden mal ubicados y se sumen o resten dígitos de distintas posiciones, como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rr} & 47{,}83 \\ + & 32{,}9 \\ \hline & 511{,}2 \end{array}$$

Figura VIII.20.

Observemos que la parte decimal del primer sumando es del orden de los centésimos, mientras que la del segundo sumando es del orden de los décimos. De esta forma, al ubicar los números partiendo desde la derecha, estaremos sumando centésimos con décimos, unidades con décimos, etc. Este error se puede evitar guiándonos por la coma que indica dónde está la unidad en ambos decimales.

En algunos casos de restas, si bien niños y niñas ubican correctamente los decimales, cuando el sustraendo tiene mayor cantidad de cifras decimales que el minuendo, se producen errores como el que se muestra en la siguiente resta:

$$\begin{array}{rl} & 3{,}64 \\ + & 2{,}345 \\ \hline & 1{,}305 \end{array}$$

Figura VIII.21.

En este caso, como el minuendo tiene 0 milésimos y no aparece un dígito escrito en dicha posición, al desarrollar el cálculo, el error consiste en escribir un 5 en la posición de los milésimos del resultado. Notemos que el 5, que corresponde a los milésimos del sustraendo, si bien coincide con el resultado de restar 10 – 5, no proviene de realizar el canje. Al usar el algoritmo, es conveniente que ambos números tengan la misma cantidad de cifras decimales. Para ello se puede completar con 0.

Los canjes que se deben efectuar cuando una suma o resta con decimales presenta reserva pueden generar dificultades en los niños y las niñas al momento de resolver los cálculos. Estas son similares a las que se producen al sumar o restar naturales. Entre los errores asociados a esta dificultad se pueden mencionar: no realizar el canje cuando la suma de los dígitos en una posición es igual o mayor que 10, y restar al sustraendo el dígito del minuendo cuando el primero es mayor que el segundo.

También se pueden producir errores cuando niños y niñas resuelven multiplicaciones o divisiones. Veremos, a continuación, algunos ejemplos.

Un posible error en la multiplicación se produce cuando al calcular deben contar las cifras decimales de ambos factores para determinar en qué posición debe ir la coma en el producto. Por ejemplo, al calcular 44,7 · 1,25 se producen errores como el siguiente:

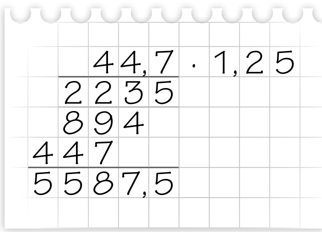


Figura VIII.22.

Notemos que en este caso el producto se desarrolla en forma correcta; sin embargo, al determinar en qué posición debe ir la coma para expresar correctamente el resultado, se considera solo una cifra decimal y no las tres cifras, que sería lo correcto. Una forma de abordar este error, que puede ser común en niños y niñas, es estudiar regularidades en el producto de decimales, por ejemplo, generalizar el *orden decimal* cuando se multiplican décimos por décimos, centésimos por centésimos, milésimos por milésimos, etc.

También es posible encontrarse con errores relacionados con multiplicar la parte entera y la parte decimal en forma independiente, como lo muestra el siguiente ejemplo:

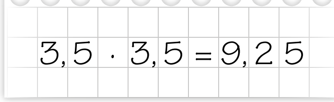


Figura VIII.23.

Un posible razonamiento que explica el error es: "Se multiplica la parte entera 3 · 3 = 9 y se escribe en la parte entera del resultado, y luego se multiplica la parte decimal 5 · 5 = 25 y se escribe en la parte decimal del resultado".

En cuanto a la división con números decimales, se observan errores al determinar el número de cifras decimales por las cuales se debe amplificar para iniciar el proceso de la división. Por ejemplo:

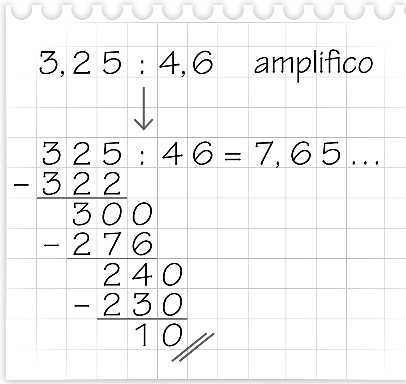


Figura VIII.24.

Observemos que el dividendo llega hasta los centésimos, mientras que el divisor, hasta los décimos. Para efectuar la división bastaría con amplificar por **10** ambos números y así representar el divisor como entero y calcular el cociente. Sin embargo, el error está en escribir como naturales dividendo y divisor, sin considerar que, para hacerlo, sería necesario amplificar por distintas potencias de **10** y, por ende, el cociente que se obtiene es distinto al correcto.

Otro error es efectuar la división considerando en forma independiente la parte entera de la parte decimal, como en el siguiente ejemplo:

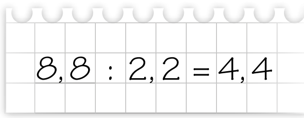


Figura VIII.25.

Un posible razonamiento que explica el error es: "Dividir la parte entera del dividendo por la del divisor, y escribir el resultado en la parte entera del cociente, luego hacer el mismo procedimiento con la parte decimal".

También es posible que surjan errores cuando se aborda el cálculo de cifras decimales de un cociente que van más allá del orden decimal del dividendo, por ejemplo:

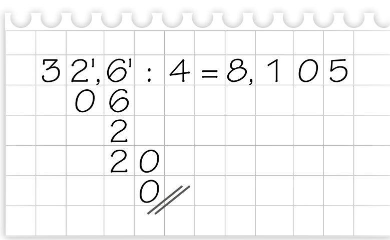


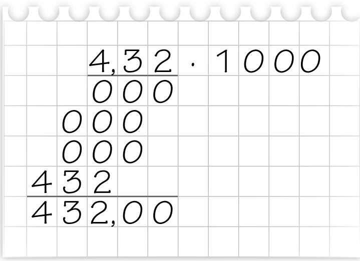
Figura VIII.26.

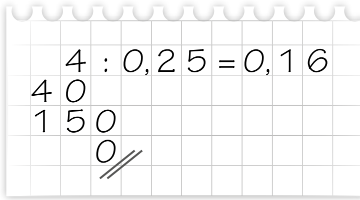
Notemos que el proceso para calcular esta división es correcto, hasta que se determinan los décimos en el cociente. El resto de dividir 6 décimos por 4 es 2 décimos, se sigue efectuando la división y se calcula 2 : 4, escribiendo un 0 en el cociente. Sin embargo, este paso constituye el error del procedimiento, pues 2 décimos es igual a 20 centésimos, por tanto, se debe escribir 20 : 4 = 5 en lugar de 0.

Ejercicios de la sección

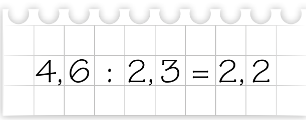
1. Dada la resta con decimales 53,62 – 12, *k*1, donde *k* es un número natural. ¿Qué valor puede tomar *k* para que la resta anterior pueda evaluar si los estudiantes comprenden la noción de canje al restar decimales?

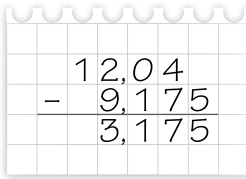
2. Observe los siguientes errores y proponga una técnica alternativa que permita facilitar el cálculo evitarlos.

a.


b.


3. Describa los errores que presentan los siguientes cálculos:

a.


b.


4. Un niño pregunta: "Si 0,4 · 0,4 = 0,16, ¿por qué 0,4 · 0,2 no es 0,8?".
¿Qué le respondería al niño? ¿Qué ejercicio le sugeriría para que se diera cuenta de su error?

Ejercicios del capítulo

1. Encuentre dos decimales que estén entre:
   a. 56,0987 y 56,0988.
   b. 4,00109 y 4,001.
   c. $23{,}0\overline{54}$ y $23{,}05453$.
   d. $\frac{1}{3}$ y $0{,}33\overline{34}$.

2. Un niño afirma: "0,7 es menor que 0,14, pues 7 es menor que 14". Indique cómo le explicaría al niño la manera de ordenar correctamente estos números, usando las siguientes ideas:
   a. Ubicándolos en la recta numérica.
   b. Transformando los números en fracciones.
   c. Usando la expansión decimal de cada número.

3. Ordene los siguientes números indicando si hay cifras que son iguales, sin hacer ningún cálculo:

   145,67 : 0,001; 14,567 : 0,1; 1,4567 · 100; 0,014567 · 1000; 14.567 · 1.000.000

4. Estime la ubicación de los siguientes decimales en la recta numérica dada.

   a. 5,3 – 2,1
   b. 0,6 · 2,5
   c. 125,8 – 123,3
   d. 1,24 + 0,35

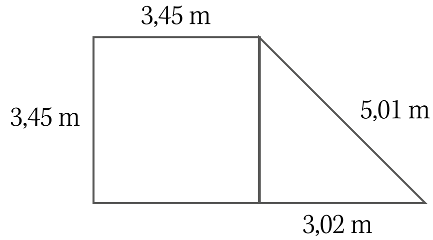
5. Usando el cálculo mental, complete las siguientes igualdades:
   a. 5,4·2,6 = 5,2 · ____
   b. 23,4 · 0,001 = 2340 : ____
   c. 0,1 · 54,23 = ____ : 100
   d. 16,7 · ____ = 167 : 5
   e. 13,9 – ____ = 10,1
   f. 45,78 + ____ = 47
   g. 12,56 – ____ = 12 + 0,5
   h. 2 · (134,56 – ____) = 65

6. Un agricultor cosechó 600,5 kilogramos de papas más que el año pasado. Si este año cosechó 2.300,75 kilos de papas, ¿cuánto cosechó el año pasado?

7. Un tambor de agua tiene capacidad para 45,75 litros. Durante la mañana tenía cierta cantidad de agua, en la tarde le agregaron 11,9 litros más. Si aún le faltan 2,5 litros para completarse, ¿cuántos litros de agua tenía el tambor en la mañana?

8. Paula va a unir dos trozos de cinta, uno de color azul y otro de color rojo. El trozo azul mide 40,8 centímetros y el rojo mide 5,6 centímetros más que el azul. ¿Cuántos centímetros medirá la cinta que formará Paula?

9. Calcule el perímetro de un terreno que tiene la siguiente forma:



10. Marta tiene dos paquetes de harina en su cocina y el más grande pesa 3,75 kilogramos. Si el paquete más grande pesa 0,8 kilos más que el paquete de menor peso, ¿cuántos kilos de harina hay entre los dos paquetes?

11. Un metro de tela cuesta $2.800, ¿cuánto se debe pagar por 3,75 metros de esta tela?

12. Lucas, usando una escalera, pudo medir las ¾ partes de un 6,45, que corresponden a 1,8 metros. ¿Cuál es la longitud del poste completo?

13. Martín corrió 3,8 kilómetros el día martes y el miércoles corrió 1,5 veces lo del martes. ¿Cuántos kilómetros corrió el miércoles?

14. Algunas curiosidades sobre expansiones decimales:
    a. Compare las expansiones decimales de 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7 y 6/7.
    b. Compare ahora las expansiones decimales de 1/39, 2/39, ..., 38/39. Utilice una calculadora.
    c. Considere una fracción tal que su expansión decimal tiene un período de largo par, por ejemplo, 5/13. Muestre que si se suma la primera mitad del período con la segunda mitad, se obtiene un número que tiene solo varios 9. Este es un hecho general llamado Teorema de Midy.

15. Si a = 0,625, ¿cuál es el valor de : $\dfrac{1}{a-0{,}75}+\dfrac{1}{a-0{,}25}$?

FECHA:_____/_______/_____

Capítulo

IX

Razones, proporciones y porcentajes

Introducción

Los términos razón, proporción y porcentaje forman parte de un vocabulario de frecuente uso social, presente en la prensa y también en artículos de divulgación científica. Usamos expresiones como: "El IPC fue **0,3%** el último año", "la tasa de desempleo el último semestre es del **7%**", "**3** de cada **10** niños obtuvieron un nivel básico de desempeño en la última prueba de Matemática", etc. Estas nociones matemáticas están relacionadas, pues todas ellas hacen referencia a la comparación de dos cantidades a través de un cociente.

La comprensión y dominio de estos temas es de gran utilidad en la vida diaria, por ejemplo, en acciones como: entender qué significa la tasa de interés de un banco, calcular el descuento en una tienda, efectuar un cambio entre dos tipos de moneda, leer un plano a escala, calcular un aumento de sueldo, calcular los impuestos que se deben pagar, etc. Esta estrecha relación entre los conceptos matemáticos de razón, proporción y porcentaje, y los contextos en que se usan pueden constituir una dificultad al estudiarlos.

En el presente capítulo abordaremos el estudio de razones, proporciones y porcentajes, y la aplicación de estos conceptos para plantear y resolver problemas con contexto. Para esto último, usaremos tanto diagramas de barra como desarrollos algebraicos que involucran fracciones y números decimales. Al final del capítulo, discutiremos algunos aspectos del uso de la calculadora, que puede ser de utilidad al abordar estos contenidos.

También haremos una introducción a los conceptos de proporcionalidad directa e inversa, los cuales describen relaciones entre variables. Este tema se estudia con mayor detalle en el **Capítulo IV** del texto *Álgebra* de esta colección.

Al igual que en los capítulos anteriores, se estudiarán las dificultades y los posibles errores asociados al trabajo con estos conceptos.

1. Razones y proporciones

Las razones aparecen cuando queremos comparar dos cantidades. Cuando hablemos de cantidad, nos estaremos refiriendo a un número que tiene asociada una cierta unidad de medida, por ejemplo, 3 kilos, 50 manzanas, etc.

Una razón expresa una relación entre dos cantidades que se miden en las mismas unidades. Diremos que dos cantidades p y q están en la razón $p : q$ si por cada p unidades de la primera cantidad hay q unidades de la segunda. La razón $p : q$ se lee "p es a q".

La razón entre dos cantidades no es un número, sin embargo, podemos asociar a la razón $p : q$ la fracción $\frac{p}{q}$. Esta fracción expresa que 1 unidad de la primera cantidad corresponde a $\frac{p}{q}$ unidades de la segunda.

Notamos que al comparar dos cantidades que se miden en las mismas unidades, la razón no tiene unidad de medida. Por ejemplo, en el caso de los árboles decimos que las alturas están en razón de $3 : 2$, independiente si estas están expresadas en metros, centímetros, pies, etc.

Muchas veces también es necesario comparar cantidades de distinta naturaleza por medio de un cociente. Este cociente se denomina *razón de cambio*. Por ejemplo, la velocidad promedio de un objeto es una razón de cambio. Esta expresa cuantas unidades de distancia se recorren por cada unidad de tiempo transcurrido. Por ejemplo, si un objeto recorre 30 kilómetros en 2 horas, su velocidad promedio es 15 km/h.

En este capítulo, trataremos razones y no razones de cambio. El trabajo con razones de cambio es similar al trabajo con razones, pero en el primer caso se deben indicar las unidades de las cantidades involucradas, las cuales entregan unidades a la razón de cambio.

Para pensar

¿Qué otras magnitudes físicas se expresan a través de razones de cambio?

Ejemplos

1) Si se mezclan 2 kilos de harina con 1 kilo de azúcar para hacer galletas, decimos que la razón entre la cantidad de harina y la de azúcar es de $2 : 1$. También podemos decir que la razón entre la cantidad de azúcar y la de harina es $1 : 2$.
2) Podemos considerar razones entre más de dos cantidades. Por ejemplo, si para formar una masa mezclamos 20 cucharadas de harina con 5 cucharadas de polvos de hornear y 10 de azúcar, decimos que la razón entre la cantidad de harina, la de polvos de hornear y la de azúcar es $20 : 5 : 10$.

En el ejemplo anterior, podríamos haber dicho que la razón era de $4 : 1 : 2$, considerando 5 cucharadas como unidad.

En general, si k es un número natural distinto de 0, $p : q$ es la misma razón que $k \cdot p : k \cdot q$ y que $\frac{p}{k} : \frac{q}{k}$, ya que lo que estamos haciendo en cada caso es cambiar la unidad de referencia. Esto también se puede ver a través de la fracción que representa la razón, pues:

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot k}{q \cdot k} = \frac{\frac{p}{k}}{\frac{q}{k}}$$

Cuando la razón está expresada con números naturales, decimos que está en su forma más simple, si dichos números no tienen factores en común.

Ejercicios

1. En un corral hay 250 patos y 125 gallinas. ¿En qué razón se encuentran?
2. Juana tiene 20 años de edad y Eugenio tiene el triple de la edad de Juana. ¿En qué razón se encuentran las edades de Juana y Eugenio?
3. Un pintor necesita mezclar dos colores de pintura para obtener un tercer color, en una razón de 3 es a 2. Si tiene 30 litros del primer color, ¿cuántos litros necesita del segundo color?

En muchas situaciones se conoce la razón entre dos cantidades, y una de las cantidades. A partir de esto, podemos averiguar el valor de la otra cantidad. Por ejemplo, si la razón entre los niños y las niñas en una sala es de 3 : 2, y se sabe que hay 30 niños, para encontrar la cantidad de niñas que hay en la sala, podemos establecer una igualdad entre las razones 3 : 2 y 30 : x, donde x expresa la cantidad de niñas. Esto se puede escribir como una igualdad entre dos fracciones:

$$\frac{3}{2} = \frac{30}{x}$$

De donde obtenemos que $x = 20$, es decir, hay 20 niñas.

Cuando se tiene una igualdad entre dos razones, diremos que tenemos una *proporción.*

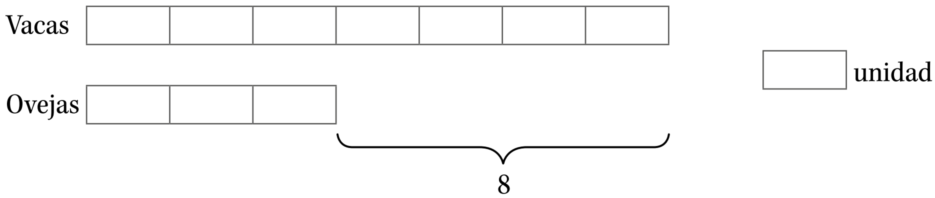
Veamos ejemplos de problemas que involucran el uso de razones y proporciones.

Ejemplos

1) La razón entre vacas y ovejas en una granja es de 7 : 3. Se sabe, además, que hay 8 vacas más que ovejas. ¿Cuántos de estos animales hay en total?

   Podemos resolver este ejemplo usando un diagrama de barras, como los que hemos usado en los capítulos anteriores.

   Como la razón entre la cantidad de vacas y la de ovejas es 7 : 3, si representamos la cantidad de vacas como una barra dividida en 7 partes, entonces la cantidad de ovejas se puede representar como 3 de estas partes (o unidades).



Cada unidad representa a una cierta cantidad de animales, así:

4 unidades = 8 animales

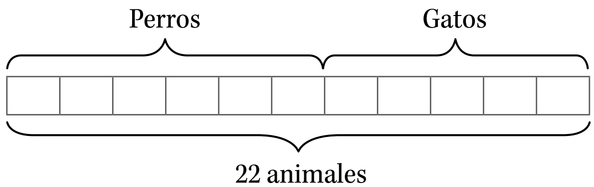
1 unidad = 2 animales

10 unidades = 20 animales

Por lo tanto en total hay 20 animales, entre vacas y ovejas.

2) La razón entre perros y gatos en un refugio para animales es de $6 : 5$. Si en total suman 22 animales, ¿cuántos gatos y cuántos perros hay?

Un diagrama de barras que permite representar el problema es el siguiente:



En este caso, tenemos:

6 + 5 unidades = 22 animales

1 unidad = 2 animales

6 unidades = 12 animales

5 unidades = 10 animales

Por lo tanto, hay 12 perros y 10 gatos.

Otra forma de resolver el problema es utilizando una proporción. Como la razón entre los perros y gatos es $\frac{6}{5}$, entonces la cantidad de perros será $6 \cdot k$ y la de gatos $5 \cdot k$, para algún número k, luego $\frac{6}{5} = \frac{6 \cdot k}{5 \cdot k}$. De esta forma, como en el refugio hay 22 animales, podemos establecer que:

$$6\,k + 5\,k = 22$$

$$11k = 22$$

$$k = 2$$

Así, se tiene que la cantidad de perros en el refugio es 12 y la de gatos, 10.

Observemos que en el último ejemplo hemos usado dos técnicas distintas para resolverlo: diagramas de barras y un procedimiento algebraico.

Si bien en un comienzo los diagramas de barras son útiles para plantear y resolver problemas que involucran razones y proporciones, vemos rápidamente que se vuelven difíciles de usar en casos apenas más complejos. Hay que tener en cuenta que aunque puede ser un buen ejercicio para el profesor buscar un diagrama para una situación dada, esto puede ser en sí mismo más difícil que el problema original.

Ejemplo

Se tienen dos números en razón $9:7$. Luego de restarle 5 a cada uno, quedan en razón $3:2$. ¿Cuáles son esos números?

Resolvamos el problema usando un procedimiento algebraico. Llamemos x a la unidad. Entonces tenemos que el primer número es $9x$ y el segundo, $7x$. Al restarle 5 a cada uno de ellos, obtenemos la proporción:

$$\frac{9x-5}{7x-5}=\frac{3}{2}$$

Resolviendo tenemos:

$$18x - 10 = 21x - 15$$
$$15 - 10 = 21x - 18x$$
$$5 = 3x$$
$$\frac{5}{3} = x$$

Por lo tanto, el primer número es $9x = 9\left(\frac{5}{3}\right) = 15$ y el segundo número es $7x = 7\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{35}{3}$.

La resolución de ecuaciones es abordada en el **Capítulo II** del texto *Álgebra* de esta colección.

En resumen

Una razón es una comparación por cociente entre dos cantidades medidas en las mismas unidades. Una proporción es una igualdad entre dos razones.

1.1 Proporcionalidad directa

En muchas situaciones de nuestra vida cotidiana hay variables que se relacionan entre sí, de forma que, para cualquier valor de ellas, el cociente se mantiene constante. Por ejemplo, si el costo de sacar una fotocopia es \$20, si se sacan 2 fotocopias el costo es \$40, y el costo de sacar 5 fotocopias es \$100. Una forma de representar esta situación es a través de una tabla como la siguiente:

Cantidad de fotocopias	Costo (\$)
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100
6	120

Tabla IX.1.

Dos variables x e y, tal que el cociente entre ellas se mantiene constante, se dirán *directamente proporcionales.*

Volviendo al ejemplo anterior, observemos que si multiplicamos por 20 cualquier valor de la primera columna, obtenemos el valor de la segunda columna. Este número se denomina *constante de proporcionalidad*. Si x denota la cantidad de fotocopias e y el costo en pesos, entonces $y = 20 \cdot x$, y también $x = \frac{1}{20}y$. Veamos otro ejemplo de proporcionalidad directa.

Ejemplo

En una fábrica se almacena agua mineral en bidones de 5 litros de capacidad. ¿Cuántos litros de agua se almacenan en 4 bidones?, ¿y en 10 bidones?

Observemos que las variables del problema son el número de bidones y la cantidad de litros de agua mineral que contienen. Sabemos que 1 bidón contiene 5 litros de agua mineral, por tanto, podemos establecer la siguiente relación:

Cantidad de bidones	Cantidad de agua mineral (litros)
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
10	50

La constante de proporcionalidad, en este caso, es 5. Luego, para determinar la cantidad de litros de agua que hay almacenada en 4 bidones, basta calcular $4 \cdot 5$ litros = 20 litros. Del mismo modo, para determinar el agua almacenada en 10 bidones, se debe calcular $10 \cdot 5$ litros = 50 litros.

> Otra manera de abordar el problema es notar que para determinar la cantidad de agua que hay en 20 bidones, basta con duplicar la cantidad de agua que hay en 10 bidones, estableciendo que en 20 bidones hay 100 litros. De la misma forma, para determinar la cantidad de agua que hay en 15 bidones, podemos sumar la cantidad que hay almacenada en 10 bidones y en 5 bidones. Así, se tiene que en 15 bidones hay 50 + 25 litros de agua, es decir, 75 litros. Esta manera de abordar el problema puede ser útil cuando no queramos calcular la constante de proporcionalidad.

Ejemplos de situaciones de proporcionalidad directa:

- La cantidad de unidades de un cierto producto en una compra y el precio que se debe pagar por ellos.
- El peso total de varios objetos iguales y el número de objetos.
- El perímetro de una circunferencia y su diámetro.
- El ángulo correspondiente a un sector circular y su área.
- La distancia que recorre un móvil y el tiempo que demora en hacerlo cuando la velocidad se mantiene constante.
- La relación entre la distancia trazada en un mapa o plano y la distancia real que representa.

Existen otras relaciones que se pueden establecer entre dos variables, pero estas no necesariamente son de proporcionalidad directa. Por ejemplo, un niño mide 1,30 metros de altura a sus 10 años de edad y 1,43 metros, un año después. Si suponemos que hay una relación de proporcionalidad directa entre las variables edad del niño y estatura, podríamos pensar que a los 12 años medirá 1,56 metros, por lo que a los 20 años mediría 2,6 metros, lo cual no es razonable.

Ejemplos de situaciones que no son de proporcionalidad directa:

- El área de un cuadrado y la longitud de su lado.
- La cantidad de páginas que tiene un texto y la cantidad de horas que se demora una persona en comprender su contenido.
- Las edades de un padre y un hijo.

1.2 Proporcionalidad inversa

Supongamos que en una tienda de mascotas alimentan a los perros de razas pequeñas con una ración similar todos los días y cuentan con alimento para alimentar a 5 perros durante 10 días. Si a la tienda llegan 5 perros más, está claro que la cantidad de alimento ya no alcanzará para los mismos 10 días. Como son más perros, el alimento alcanzará para menos días. Podemos establecer una relación entre las variables involucradas en el problema, tal como se muestra en la **Tabla IX.2**.

Cantidad de perros	Duración alimento (días)
1	50
5	10
10	5
15	3,3
20	2,5

Tabla IX.2.

Observemos que, en este caso, al aumentar la cantidad de perros la duración del alimento en días disminuye. También notemos que el producto entre los valores de las variables en cada fila de la tabla se mantiene constante, y es 50.

Diremos que dos variables x e y son inversamente proporcionales si su producto se mantiene constante. El producto k se denomina constante de proporcionalidad y se tiene que $x \cdot y = k$. En el ejemplo anterior, las cantidades involucradas eran inversamente proporcionales con $k = 50$.

Ejemplo

En una imprenta hay dos máquinas funcionando para imprimir afiches de tamaño doble oficio. Las 2 máquinas en 1 hora imprimen 100 afiches. ¿Cuánto tiempo demorarán 3 máquinas del mismo tipo en imprimir 100 afiches?, ¿y 4 máquinas?

Para establecer la relación entre las variables cantidad de máquinas y tiempo que utilizan para imprimir 100 afiches, construiremos una tabla. De esta forma, se tiene:

Cantidad de máquinas	Tiempo (horas)
1	2
2	1
3	0,66
4	0,5
10	0,2

El producto entre los valores de las variables involucradas en el problema es siempre constante y, en este caso, es 2.

Para pensar

¿De qué manera se puede interpretar una relación de proporcionalidad inversa como una relación de proporcionalidad directa?

Ejemplos de situaciones de proporcionalidad inversa:

- El número de llaves de agua que llenan un estanque y el tiempo que demoran en hacerlo.
- El número de máquinas que elaboran un producto y la cantidad de productos que elaboran en 1 hora.
- La longitud de los lados de un rectángulo cuando el área se mantiene constante.
- La velocidad de un móvil y el tiempo que demora en recorrer una distancia fija.

En resumen

- Diremos que dos variables x e y se dicen directamente proporcionales si el cociente entre ellas se mantiene constante, es decir: $\frac{y}{x} = k$.
- Diremos que dos variables x e y son inversamente proporcionales si el producto entre ellas se mantiene constante, es decir: $x \cdot y = k$.

Ejercicios de la sección

1. Resuelva las siguientes situaciones usando un diagrama de barras.
   a. La razón entre camisas de manga corta y camisas de manga larga, que se confeccionan en una fábrica, es de 100 : 50. Se sabe además que hay 200 camisas más de manga corta que de manga larga. ¿Cuántas camisas confecciona la fábrica?
   b. En un almacén tienen helados de agua y helados de leche en una razón de 21 : 9. Se sabe que tienen en stock 24 helados más de agua que de leche. ¿Cuántos helados tienen en stock?
   c. En un curso la razón entre estudiantes aprobados en Matemática versus estudiantes reprobados es de 10 : 4. Se sabe que hay 12 estudiantes más aprobados que reprobados. ¿Cuántos estudiantes hay en total?

2. Se hizo un mapa a una escala de 1 : 1.000. Enuncie un ejemplo que permita comprender el significado de la razón 1 : 1.000 usando el mapa.

3. En un restaurante hay dos salas ocupadas con clientes. En la sala A hay 45 hombres y 60 mujeres y en la sala B hay 32 hombres y 44 mujeres.
   a. Escriba la razón entre la cantidad de hombres y mujeres que hay en la sala A.
   b. Escriba la razón entre la cantidad de hombres y mujeres que hay en la sala B.
   c. Escriba la razón entre el total de hombres y el total de mujeres que hay en ambas salas del restaurante.

4. Tres alumnos deben resolver el siguiente ejercicio:

   Una urna contiene 5 bolitas rojas y 3 azules, y se le agregan 8 rojas y 4 azules. ¿Cuál es la razón actual entre bolitas rojas y azules?

   Las respuestas obtenidas son

   Estudiante 1: $5:3+8:4=13:7$

   Estudiante 2: $\frac{5}{3}+\frac{8}{4}=\frac{20+24}{12}=\frac{44}{12}$

   Estudiante 3: $(5+8):(3+4)$, que es lo mismo que $13:7$.

   ¿Cuál es la respuesta correcta? Conjeture por qué se producen las otras dos respuestas incorrectas.

5. Considere el problema: *En una urna la razón entre bolitas rojas y azules es 3 : 7 y entre bolitas azules y blancas es de 4 : 5. ¿Cuál es la razón entre bolitas rojas y bolitas blancas?”*

   Un estudiante dice que la respuesta es $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{35}$. Decida si la respuesta es correcta o no, y justifique su razonamiento.

6. El costo de un día de alojamiento en un hotel es \$31.500. ¿Cuánto debe pagar un turista si se queda 5 días en el hotel?

7. ¿Cuáles de los siguientes pares de magnitudes se relacionan a través de una proporcionalidad directa?

   a. La longitud de la arista de un cubo y su volumen.
   b. La longitud del lado de un cuadrado y su perímetro.
   c. El costo de comprar un producto y la cantidad de unidades que se compran de él.
   d. Edad y peso de una persona.

8. Cuatro máquinas aran un campo de 10 hectáreas en 1 día. ¿Cuánto demorará una sola máquina?

2. Porcentajes

Muchas veces necesitamos comunicar una razón entre cantidades, de forma tal que sea fácil de comprender. Por ejemplo, cuando se quiere comunicar que 1.872 personas, de un total de 4.800 de una comuna, votaron en la última elección municipal, no es muy útil señalar que votaron $\frac{1.872}{4.800}$ del total. Una forma de facilitar la comprensión es buscar una fracción igual a la anterior, pero con denominador 100, en este caso, $\frac{39}{100}$. Esta última fracción nos dice directamente que de 100 personas votaron 39. Por convención, se usa denominador 100 dada nuestra familiaridad con el sistema de numeración decimal, sin embargo, se podría haber elegido otro número.

Un porcentaje es una fracción con denominador 100. Para denotar un porcentaje se usa un número *N* seguido del símbolo %, para indicar el *N* por ciento (*N*%). Por ejemplo:

$$5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

Al igual que las fracciones, los porcentajes se pueden interpretar como operadores sobre otras cantidades. Cuando nos referimos al 5% de algo, podemos interpretar que dividimos ese algo en 100 partes iguales y nos quedamos con 5 de esas partes. Tenemos entonces que:

100% = la unidad.

75% = tres cuartas partes de la unidad.

50% = la mitad de la unidad.

25% = un cuarto de la unidad.

10% = la décima parte de la unidad.

1% = la centésima parte de la unidad.

200% = el doble de la unidad.

250% = dos veces y media la unidad.

300% = el triple de la unidad.

Por ejemplo, decir que para un partido de fútbol solo el 50% de las entradas fueron vendidas es lo mismo que decir que solo se vendieron la mitad de las entradas.

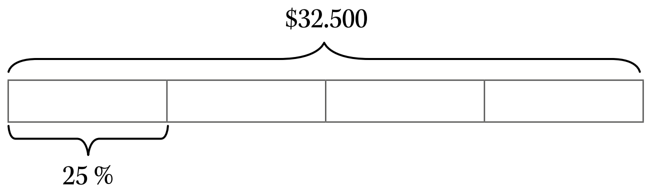
Los porcentajes permiten referirse a una parte de un todo, sin especificar la medida de este todo. En el ejemplo de la venta de entradas, no sabemos cuántas entradas había en total, pero sabemos que de ellas se vendieron solo la mitad.

Veamos ejemplos en que se requiere calcular el porcentaje de una cantidad dada.

Ejemplos

1) En una tienda hay un descuento del 25% en un producto cuyo valor es de \$32.500. ¿A cuánto dinero equivale el descuento?

Observemos que el todo es el valor total del producto, \$32.500. Para representar la situación usaremos un diagrama de barras. Dibujamos una barra que corresponde al precio total, la cual dividimos en 4 partes iguales, cada una de ellas representando el 25%.



Así, la cantidad de dinero que corresponde al 25% es:

$$25\% \text{ de } 32.500 = \frac{25}{100} \cdot 32.500 = \frac{1}{4} \cdot 32.500 = 8.125$$

Por lo tanto, el descuento es de \$8.125.

2) Calcule cuánto es el 35% de 80.

Observemos que para realizar este cálculo hay más de una forma de proceder.

Podemos argumentar que el 1% de 80 es $\frac{80}{100} = 0{,}8$ y, por lo tanto, el 35% es $0{,}8 \cdot 35 = 28$.

Otra manera es usar directamente fracciones:

$$35\% \text{ de } 80 = \frac{35}{100} \cdot 80 = \frac{560}{20} = 28$$

Si bien se pueden elegir los ejercicios para obtener números "redondos", en la práctica el cálculo de porcentajes está asociado con el uso de decimales.

3) Por atrasarse en el pago, una cuenta que originalmente era de \$185.000 fue recargada en un 8,5%. ¿De cuánto es la deuda actual?

Observemos que, en este caso, además de calcular el porcentaje que corresponde a una cantidad, se debe sumar el resultado a la cantidad total. Se puede proceder de las siguientes maneras:

Podemos argumentar que:

$$1\% \text{ de } 185.000 = \frac{185.000}{100} = 1.850$$

$$8{,}5\% \text{ de } 185.000 = 8{,}5 \cdot 1.850 = 15.725$$

Ahora, a la cantidad original le sumamos el recargo y obtenemos:

$185.000 + $15.725 = $200.725

También podríamos haber escrito directamente:

$$185.000 + 8{,}5 \cdot \frac{185.000}{100} = 185.000 \cdot \left(1 + \frac{8{,}5}{100}\right) = 185.000 \cdot (100\% + 8{,}5\%)$$

Entonces, si debía el 100% y se recarga el 8,5%, debe ahora el 108,5%. El monto adeudado es:

108,5% · $185.000 = 1,085 · $185.000 = $200.725

Notemos que en el ejemplo anterior permitimos porcentajes con números decimales. No hay inconveniente para esto, ya que la siguiente es una fracción válida:

$$8{,}5\% = \frac{8{,}5}{100} = \frac{\frac{85}{10}}{100} = \frac{85}{1000} = 0{,}085$$

En la resolución de problemas que involucran el cálculo de porcentajes, puede ser conveniente el uso de la calculadora. Aun así, en muchos casos nos vemos obligados a redondear los resultados. Por ejemplo, en los problemas de dinero, puede no tener sentido un resultado que involucre fracciones menores a la menor de las unidades del sistema monetario usado. También en los problemas que involucran longitudes, áreas o volúmenes, hay que tener presente que el resultado dado no exceda la precisión de las cantidades originales. Al plantear los ejercicios a los estudiantes, y para no complicar el razonamiento con consideraciones externas a la aritmética, podemos establecer de antemano el número de cifras después de la coma que se utilizarán.

En los problemas anteriores resolvimos:

$$a\% \text{ de } b = x$$

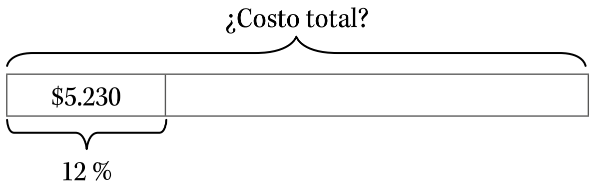
Con la x como incógnita.

Otro tipo de problemas que involucran el cálculo de porcentajes son aquellos en que se conoce el porcentaje y la cantidad correspondiente a dicho porcentaje, pero se desconoce la cantidad total. Este tipo de situaciones puede tener un grado de dificultad mayor que las vistas anteriormente. El uso de diagramas de barras puede ser una herramienta eficaz para comprender el problema. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

1) En una tienda el descuento que se aplica a un producto es 12%. Si el valor del descuento es \$5.230, ¿cuál es el precio del producto sin descuento?

Para resolver el problema dibujaremos un diagrama de barras. Representemos el costo total del producto con una barra y la cantidad que corresponde al 12% de descuento como una parte de ella. Así, se tiene:



Luego, como \$5.230 corresponde al 12%, para calcular el costo total podemos dividir dicha cantidad por 12 y luego multiplicar el resultado obtenido por 100. De esta forma, se tiene:

$$\frac{5.230}{12} \approx 436$$

$$436 \cdot 100 = 43.600.$$

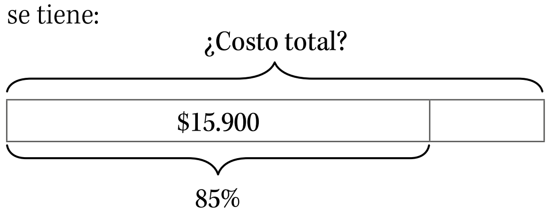
La expresión numérica que permite encontrar la solución del problema de manera directa es:

$$\frac{5.230}{12} \cdot 100 = \frac{5.230}{\frac{12}{100}} = \frac{5.230}{12\%} = \frac{5.230}{0{,}12} \approx 43.600$$

Lo que corresponde a dividir por 0,12 la cantidad del descuento. Así, el precio original es \$43.600.

2) En la misma tienda se aplicó el 15% de descuento a otro producto. El precio de oferta es \$15.900. ¿Cuál es el precio del producto sin descuento?

En este problema conocemos el precio que se obtiene al restar el valor correspondiente al 15% del precio inicial. Si dibujamos un diagrama para representar la situación, se tiene:



Para resolver el problema, se puede dividir el precio de oferta por 85%, es decir, por 0,85.

$$\frac{15.900}{85} \cdot 100 = \frac{15.900}{\frac{85}{100}} = \frac{15.900}{85\%} = \frac{15.900}{0{,}85} \approx 18.706$$

Así, el precio del producto sin descuento es \$18.706.

En estos ejemplos resolvimos:

$$a\% \text{ de } x = c$$

Donde x es la incógnita del problema.

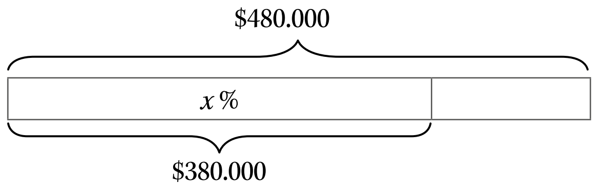
La variedad de problemas relacionados con el cálculo de porcentajes es amplia, solo enunciamos algunos ejemplos simples donde el cálculo del resultado es directo.

Veamos algunos ejemplos en que se desconoce el porcentaje calculado.

Ejemplos

1) María gana \$480.000 mensuales y Jaime gana \$380.000. ¿A qué porcentaje de lo que gana María corresponde lo que gana Jaime?

   Un diagrama que representa la situación es el siguiente:



   Observemos que 480.000 corresponde al 100% y queremos ver a qué porcentaje corresponde la parte 380.000. Por lo tanto, debemos calcular $\dfrac{380.000}{480.000} \approx 0,79 = 79\%$.

2) María gana \$480.000 mensuales y Jaime gana \$380.000. ¿A qué porcentaje de lo que gana Jaime corresponde lo que gana María?

   Este problema es similar al anterior, pero la cantidad de referencia es lo que gana Jaime. Tenemos:

$$\frac{480.000}{380.000} \approx 1,26 = 126\%$$

3) María gana \$480.000 mensuales y Jaime gana \$380.000. Entonces, María gana ______ % más que Jaime.

   En este caso, la unidad es lo que gana Jaime. Podemos proceder como en el caso anterior y encontrar primero que María gana el 126% de lo que gana Jaime. Es decir, María gana 26% más que Jaime.

   También podemos ver que María gana \$100.000 más que Jaime, lo cual comparado con lo que él gana es:

$$\frac{100.000}{380.000} \approx 0,26 = 26\%$$

4) María gana \$480.000 mensuales y Jaime gana \$380.000. Entonces, Jaime gana ______ % menos que María.

   En este caso, comparamos respecto a lo que gana María. Habíamos calculado anteriormente que Jaime gana el 79% de lo que gana María. Razonando que María gana el 100%, entonces Jaime gana 100% – 79% = 21% menos que María. O también podemos calcularlo directamente así:

$$\frac{100.000}{480.000} \approx 0,21 = 21\%$$

Es importante leer cuidadosamente los problemas que involucran porcentajes, ya que pequeñas variaciones en el enunciado producen problemas de diferente naturaleza.

En resumen

Los porcentajes son fracciones con denominador 100. Podemos encontrar muchos contextos en los que se usan porcentajes. Tenemos 3 tipos de problemas básicos de porcentajes:

- Problemas donde la incógnita es la cantidad que resulta al calcular un porcentaje sobre una cantidad inicial.
- Problemas donde la incógnita es la cantidad inicial, y se conoce la cantidad resultante y el porcentaje a la que esta corresponde.
- Problemas donde la incógnita es el porcentaje que relaciona dos cantidades.

Ejercicios de la sección

1. Una persona tiene ahorrados \$1.945.350. El 24% de estos ahorros están en una cuenta bancaria A y el resto en una cuenta bancaria B. ¿Cuánto dinero hay en la cuenta A? y ¿cuánto dinero hay en la cuenta B?

1. Una persona tiene dinero ahorrado en dos cuentas bancarias A y B. El 24% de estos ahorros, correspondientes a \$466.884, están depositados en la cuenta A. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado en total? y ¿cuánto dinero hay en la cuenta B?

2. Juan tiene \$550 y Pedro tiene 25% más que él. ¿Cuánto dinero tiene Pedro?

3. Juan tiene \$550 y el dinero que tiene Pedro corresponde al 125% del dinero que tiene Juan. ¿Cuánto dinero tiene Pedro?

4. En un colegio de la VII Región, se prevee que durante el próximo año la matrícula aumentará en un 4%. Si en el colegio la matrícula actual es de 540 estudiantes. ¿A cuánto llegaría la matrícula el próximo año?

5. El precio de un artículo se incrementó en un 5% y luego, en un 10%. Si el precio actual del artículo es \$3.200, ¿cuál era el precio antes de los incrementos?

3. Dificultades y posibles errores en el trabajo con razones, proporciones y porcentajes

Las relaciones de proporcionalidad son un tipo particular de relación entre dos variables. En la Educación Básica, este tipo de relaciones son estudiadas con énfasis y muchas veces no se ejemplifica otro tipo de relación. Esto puede causar que cada vez que se encuentren con variables relacionadas, los niños y las niñas las clasifiquen como directamente proporcionales o inversamente proporcionales. Por ejemplo, consideremos los siguientes problemas:

- *Cuando un niño tiene 12 años, su padre tiene 32. ¿Qué edad tendrá el padre cuando el hijo tenga 24 años?*

  En este caso la diferencia se mantiene constante en 20 años, por lo tanto, el padre tendrá 44 años. Aunque las dos variables aumenten, esto no significa automáticamente que sea proporcionalidad directa.

- *De un tanque con 10.000 litros de agua, se saca agua con una motobomba a una velocidad de 100 litros por minuto. ¿Cuánta agua quedará en el tanque a los 10 minutos*?

  A los 10 minutos, la motobomba habrá sacado $10 \cdot 100$ litros, por lo tanto, quedarán aún 9.000 litros de agua. En este caso, la variable tiempo aumenta y la variable cantidad de agua en el tanque disminuye. Sin embargo, esto no es suficiente para decir que es una proporcionalidad inversa.

Los problemas con razones, proporciones y porcentajes son siempre con contexto. Esto hace que la comprensión del enunciado sea, tal vez, la dificultad mayor en estos temas. Más aún, en la enseñanza muchas veces se plantean problemas que aparentan ser, o el enunciado induce a pensarlo, de proporcionalidad directa o inversa, pero que frente a un análisis del contexto se descubre que no pueden serlo. Veamos los siguientes problemas:

- *Un trabajador pinta una pared en 2 horas. ¿Cuánto demorarán 10 trabajadores en pintar la misma pared?, ¿y 100 trabajadores?*

  Podríamos pensar, de manera razonable, que dos trabajadores demorarán la mitad, es decir, 1 hora, y concluir que tenemos una proporcionalidad inversa. Sin embargo, no parece razonable pensar que 10 trabajadores demoren 12 minutos, y mucho menos que 100 trabajadores demoren 1,2 minutos. El contexto del problema hace que esto sea imposible. Vemos, por ejemplo, que los 100 trabajadores no podrán trabajar simultáneamente en la misma pared.

- *Una gallina pone 2 huevos en una hora, ¿cuántos pondrá en 10 horas?*

  El problema está planteado como si fuera una proporcionalidad directa. Sin embargo, que la gallina haya puesto 2 huevos en una hora no significa que en 10 horas ponga 20 huevos.

En ocasiones el enunciado puede hacer caer en la tentación de sumar o restar razones. Veamos el siguiente problema:

- *Se tienen dos urnas, A y B, con bolitas blancas y negras. Cada urna tiene en total 30 bolitas. En la urna A las bolitas blancas y negras están en una razón de 5 : 10, y en la urna B la razón es de 4 : 6. Si se juntan todas las bolitas, ¿cuál será ahora la razón entre bolitas blancas y negras?*

Sería un error sumar $\frac{5}{10}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$ y decir que ahora la razón es de $7:6$. La razón $5:10$ dice que por cada 5 bolitas blancas hay 10 negras en la urna A, lo cual no tiene relación con la urna B. Para resolver el problema, notamos que en la urna A debe haber 10 bolitas blancas y 20 negras, y en la urna B debe haber 12 blancas y 18 negras. Por lo tanto, al juntar las bolitas tenemos 22 blancas y 38 negras. La razón entre bolitas blancas y negras es entonces de $22:38$ o simplificando de $11:19$.

También es habitual tratar los porcentajes como si fueran cantidades. Consideremos los siguientes problemas.

- *El 20% del territorio de Chile es apto para la viticultura y solo el 10% del territorio de Brasil lo es. ¿Cuál de los dos países tiene mayor territorio apto para la viticultura?*

  Podríamos responder erróneamente que Chile tiene más territorio apto para la viticultura, pues 20% es mayor que 10%. Sin embargo, el 20% del territorio de Chile es menos que el 10% del territorio de Brasil.

- *Una tienda de ropa tiene una liquidación donde todos los productos están con 10% de descuento sobre el precio marcado. Un cliente compra un artículo marcado a $100.000 con una tarjeta de crédito que le devuelve el 10% de lo gastado. ¿Cuánto será el costo final del artículo?*

  Sería un error responder que se descuenta el 20% y, por lo tanto, el costo es de $80.000, pues el segundo descuento se hace no sobre los $100.000 originales, sino sobre los $90.000 que quedan luego de aplicar el primer descuento. Es decir, primero se descuenta un 10% de $100.000, que corresponde a $10.000, queda el precio en $90.000 y luego se descuentan 10% de $90.000, que corresponden a $9.000, con lo que el precio final queda en $81.000.

- *Una tarjeta comercial recarga mensualmente el 4% del total del saldo. Si la deuda original es de $10.000 y no se hace ningún pago, indique cuál será la deuda a los 10 meses.*

  Es necesario componer el recargo y no sumar los porcentajes como si se refirieran a la misma cantidad. Es decir, sería un error decir que en 10 meses el recargo será del 40% y, por lo tanto, la deuda será de $14.000. Para calcular correctamente el recargo, debemos hacerlo mes a mes: la deuda inicial es de $10.000, por lo tanto, al final del primer mes se transformará a $(1{,}04)\cdot 10.000$. Al final del segundo mes será de $(1{,}04)\cdot(1{,}04)\cdot 10.000$. Al final del tercer mes será de $(1{,}04)^3\cdot 10.000$. Al final del mes 10, será de $(1{,}04)^{10}\cdot 10.000$.Usando una calculadora obtenemos que al final del mes 10 la deuda será de aproximadamente $14.800.

Ejercicio de la sección

1. Considere los siguientes problemas que serán incluidos en un test de selección múltiple. En cada caso diseñe cuatro distractores, es decir, respuestas factibles pero incorrectas de los niños, para ser incluidos en las opciones de respuesta junto con la solución correcta. Justifique cada elección.

   a. Un trabajador que gana $250.000 al mes, a comienzo de año recibe un aumento del 4,5% y a mitad de año recibe otro aumento del 4,5%. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento total?

   b. Un comerciante tiene una tinaja de aceite de 100 litros con una combinación de aceite de girasol y aceite de maní en una razón de 5 : 4. Tiene una segunda tinaja de 100 litros, pero en este caso con una mezcla de aceites de girasol y de maní en una razón de 3 : 2. El comerciante junta el aceite de ambas tinajas y lo envasa en botellas de 1 litro. ¿Cuál es la proporción de aceites en cada botella?

   c. El 3º A de un colegio tiene 50 alumnos, de los cuales el 20% va a clases caminando y el 3º B tiene 60 alumnos, de los cuales solo el 15% camina al colegio. Del total de alumnos de los Terceros Básicos, ¿qué porcentaje camina al colegio?

4. La calculadora

Las calculadoras son aparatos que permiten realizar cálculos aritméticos elementales con números decimales de manera rápida. Son usadas diariamente por personas que necesitan realizar muchos cálculos aritméticos. Por ejemplo, comerciantes, cajeros, médicos, estudiantes de Educación Media, etc. La calculadora permite mantener la atención en la tarea que se realiza y no en la aritmética. Por esta misma razón, no es conveniente su uso cuando justamente se quiere poner de manifiesto la aritmética, como es el caso de los estudiantes de Educación Básica. El cálculo aritmético usando lápiz y papel hace que los estudiantes desarrollen una comprensión intuitiva de los números y su aritmética, especialmente si los números involucrados son elegidos por el profesor para fomentar esta comprensión. Otro aspecto negativo del uso prematuro de la calculadora es la dependencia que se crea en los estudiantes. Puede pasar que el estudiante olvide las propiedades aritméticas elementales y que pierda el sentido de número.

Para pensar

¿Cuándo se justifica el uso de la calculadora en Educación Básica?

El uso de la calculadora podría justificarse cuando los estudiantes ya dominan las operaciones aritméticas y la complejidad o cantidad de los cálculos involucrados hace que realizarlos a mano desvíe demasiado la atención del problema que se está resolviendo. Un ejemplo de esto es el tema de razones, proporciones y porcentajes.

Las calculadoras surgen por la necesidad de realizar cálculos complejos de manera expedita. Podemos afirmar que las primeras calculadoras fueron los ábacos, usados por los sumerios y los egipcios antes del 2.000 a. C. El uso del ábaco para realizar operaciones aritméticas se mantiene aún en algunas regiones de Asia. Por ejemplo, en la Unión Soviética se dejó de usar en el comercio recién en los años 80. Actualmente, cuando hablamos de calculadora nos referimos a una calculadora electrónica que puede ser de varios tipos: calculadora básica, calculadora científica, calculadora graficadora o calculadora programable. Con los avances actuales en el desarrollo y diseño de chips, las diferencias entre estas calculadoras son cada vez menores. No es extraño que los teléfonos celulares cuenten con calculadora científica.

¿Cómo funciona una calculadora?

Veamos el tratamiento que hacen las calculadoras de los números decimales. No nos detendremos en el cálculo formal con fracciones u otras funciones propias de una calculadora científica.

Si bien hay algunas variantes, una idea clave para entender cómo son tratados los números en una calculadora es la de "coma flotante". El concepto es el siguiente. Consideremos por ejemplo el número 2.768,34589. Si se predetermina que se guarden los 6 dígitos más significativos del número, entonces estamos pensando en realidad en el número 2768,34. Ahora, podemos expresar esto como $2{,}76834 \cdot 10^3$. Para guardar este número, debemos recordar solamente los seis dígitos significativos y el exponente del 10. Con esta forma de guardar los números, solo se puede representar un conjunto finito de números. Si aceptamos solo seis dígitos significativos, tenemos que, por ejemplo, entre $2{,}76834 \cdot 10^3$ y $2{,}76835 \cdot 10^3$ no se puede representar ningún número. Se puede ver que cuanto más nos alejamos del 0, los números que se pueden representar están cada vez más separados.

Esto hace que al realizar operaciones con números que sobrepasan la cantidad de dígitos significativos predeterminada, los resultados comienzan a aproximarse. Supongamos, por simplicidad, que nuestra calculadora trabaja con seis cifras significativas. Se pueden generar errores del tipo:

$$\frac{1}{3}\cdot 3 = 3{,}33333\cdot 10^{-1}\cdot 3 = 9{,}99999\cdot 10^{-1} = 0{,}999999$$

Aunque algunas calculadoras están programadas para reconocer el problema y dar 1 como respuesta. Otros errores son más difíciles de reparar, por ejemplo la operación:

$$1:\left((1:3)-3{,}33333\cdot 10^{-1}\right)=\textit{error}$$

Ya que nuestra calculadora, con seis cifras significativas, entregaría un divisor igual a 0, cuando en realidad tenemos:

$$1:\left((1:3)-3{,}33333\cdot 10^{-1}\right)=3.000.000$$

En general, las computadoras utilizan representación en base 2 y no 10. En este caso, el dígito más a la izquierda es siempre 1 y no es necesario recordarlo explícitamente. Para un ejemplo más general, consideremos el sistema de doble precisión (64 bits) usado por muchas computadoras. Cada bit puede representar 0 o 1. En este caso se usan 52 bits para recordar los 53 dígitos más significativos del número (se sobreentiende que el primero es 1), 11 bits para el exponente del 2 y un bit para el signo del número (+ o –). Esto corresponde a aproximadamente 16 dígitos decimales.

Ejercicios del capítulo

1. En un colegio la razón entre niños y niñas es 3 : 2.
   a. ¿Cuál es la razón entre los niños y el total de estudiantes?
   b. ¿Cuál es la razón entre las niñas y el total de estudiantes?
2. Cristóbal tiene 1,64 metros de estatura y Pablo, su hermano mayor, 1,76 metros. ¿Cuál es la razón entre la estatura de Cristóbal y de la Pablo?
3. En el cuerpo humano hay, aproximadamente, 0,9 kilogramos de masa muscular cada 2,26 kilogramos de masa total. Si una persona tiene una masa total de 62 kilogramos, ¿cuánto es su masa muscular?
4. Se sabe que en 1 litro de leche, que pesa 1.030 gramos, el 12% de su peso corresponde a crema. Además, se sabe que el 32% del peso de la crema corresponde a mantequilla. ¿Cuántos gramos de mantequilla se pueden obtener de 10 litros de leche?
5. En una tienda reparadora de ropa pusieron una publicidad con un 10% de descuento en el arreglo de una prenda de vestir. La publicidad señala que se hará un 5% de descuento en los materiales y un 5% en la mano de obra. Una persona señala que denunciará la tienda por publicidad engañosa, ¿es justa la denuncia? Justifique su respuesta.

6. ¿Cuál de las siguientes tablas de datos representa una relación de proporcionalidad?

A	1	2	3	4
B	0,3	0,15	0,1	0,075

E	1	2	3	4
F	3,5	2,5	1,5	0,5

C	1	2	3	4
D	4	8	12	16

H	10	20	30	40
I	1,1	0,55	0,366	0,275

7. En una clínica de nutrición, dos tratamientos para bajar de peso *A* y *B* han sido probados en dos grupos de personas, de edades y situación clínica similares. Una vez finalizados los tratamientos, se han obtenido los siguientes resultados:

	Baja de peso	Mantiene el peso
Tratamiento A	20	30
Tratamiento B	27	33

a. ¿Cuál tratamiento es más efectivo? Explique su respuesta.

b. ¿Cuántos pacientes deberían haber mejorado en *A* y *B*, para que ambos tratamientos fueran igualmente efectivos?

8. Considere la siguiente tabla:

	10	100	1.000	20	200	2.000
1%		1	10			
10%	1		100		20	
100%	10		1.000	20	200	
1.000%	100					
2%		2	20		4	
20%				4	40	400
200%	20	200				
2.000%				400		

a. Complete la tabla.

b. Señale cuál o cuáles de los casilleros anteriores resulta más difícil completar para los niños. Justifique su respuesta.

Capítulo

X

Números enteros, decimales y reales

Introducción

Los números negativos se usan en situaciones donde hay un nivel de referencia, por ejemplo, en la temperatura, en la altura medida con respecto al nivel del mar, etc. También muchas veces se interpretan como deudas: si n es una cantidad de dinero, escribimos $-n$ para indicar que esta cantidad se debe. Sin embargo, la verdadera utilidad de trabajar con números negativos es que simplifican el manejo algebraico con expresiones que incorporan variables. Por ejemplo, para resolver una ecuación, esta se manipula sumando o restando cantidades desconocidas, sin preocuparnos mayormente si los números involucrados son positivos o negativos.

Los números *reales* se identifican con la recta numérica, cada punto de la recta numérica corresponde a un número real y viceversa. Por lo tanto, todos los números naturales, las fracciones y los números negativos, que serán aquellos a la izquierda del **0**, son números reales. En particular, los números reales a la derecha del **0** y el **0** corresponden a los números decimales.

El punto esencial acerca de las operaciones con números reales es que ellas satisfacen todas las propiedades básicas de las operaciones con números naturales y fracciones. El enfoque que usaremos en este capítulo para trabajar con las operaciones es distinto a lo que hemos hecho hasta el momento. Aceptaremos que es posible definir la suma y la multiplicación de números reales de manera que se satisfagan estas propiedades básicas y que coincidan con las operaciones ya definidas para las fracciones. A partir de estas propiedades, deduciremos otras tales como: "al multiplicar dos números negativos, el resultado es positivo", que el lector puede recordar de la Educación Media.

En este capítulo estudiaremos algunos aspectos de los números enteros, racionales y reales, en particular su operatoria y orden. Los temas que abordaremos nos permitirán volver a estudiar las propiedades de las operaciones, ganando comprensión sobre su significado y sus consecuencias. Será necesario trabajar con expresiones que involucran variables, debido a que deduciremos propiedades generales. En el **Capítulo I** del texto de *Álgebra* de esta colección, se aborda en detalle el trabajo con expresiones y también se discuten en profundidad las propiedades de las operaciones, revisitando y ahondando en algunos temas que abordaremos en este capítulo.

1. La recta numérica

Recordemos que la recta numérica es una recta *graduada* en la cual se distingue un punto, el 0, y otro punto que identificamos con 1, que se marca a la derecha del 0. La longitud de este segmento se fija como la unidad de medida y usándola graduamos la recta como se muestra a continuación:

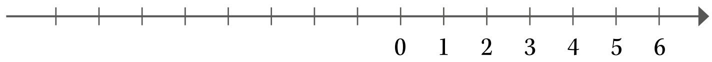


Figura X.1.

Como vimos anteriormente, los números se identifican con puntos en la recta numérica. Hablaremos indistintamente de punto en la recta numérica o de número.

Los números naturales se ubican en la recta numérica a la derecha del 0, incluyéndolo, y son aquellos en que la longitud del segmento definido por 0 y el punto es un múltiplo de la unidad. Por ejemplo, el número 5 está representado por un punto en la recta, de manera que la longitud del segmento entre el 0 y el 5 tenga 5 unidades.

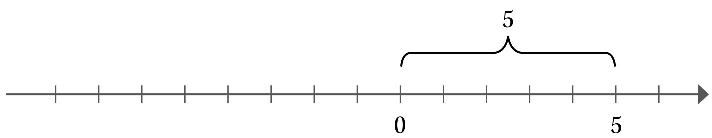


Figura X.2.

Una vez que está fija la unidad o el segmento unitario, podemos ubicar en la recta a las fracciones y, en general, a los números decimales (con expansión decimal finita o infinita), que como vimos en el **Capítulo VIII** son todos los puntos de la recta numérica a la derecha del 0.

A todos los números en la recta numérica los llamaremos *números reales*. Observemos que para identificar un número en la recta no es suficiente entregar la longitud del segmento entre 0 y el número, sino que tenemos que indicar también a qué lado del 0 está. Esto se hace a través del *signo*. Por ejemplo, el número -5 se identifica con el punto de la recta a la izquierda de 0, tal que el largo del segmento entre este punto y 0 es 5.

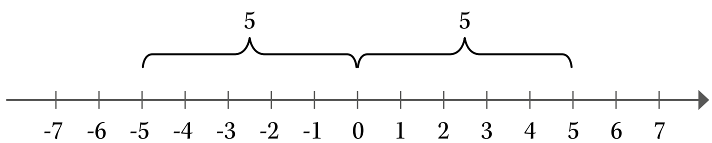


Figura X.3.

En general, si ***a*** es un número real a la derecha del **0**, entonces -***a*** será el número a la izquierda del **0**, tal que el largo del segmento entre este número y **0** sea ***a***. Al usar el signo, podemos distinguir los números reales considerando no solo su distancia al origen, sino que también su ubicación con respecto a él. Diremos que los números ***a*** y -***a*** son opuestos.

Definición X.1 Para *a*, un número cualquiera de la recta numérica, definimos su opuesto, que denotamos por -*a*, como su punto simétrico con respecto al **0**.

Tenemos que la longitud del segmento entre el **0** y ***a*** es igual a la del segmento entre el **0** y -***a***. Si ***a*** está a la derecha del **0**, entonces -***a*** estará a la izquierda, mientras que si ***a*** está a la izquierda de *0*, -***a*** estará a la derecha. También se tiene que -**0** = **0**.

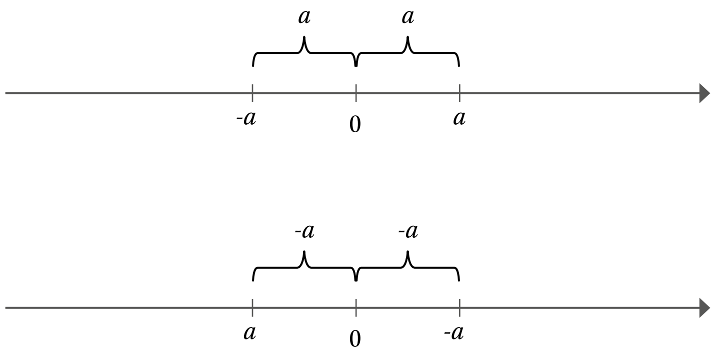


Figura X.4.

El signo - que aparece en -***a*** es una manera de indicar que es el opuesto de ***a*** y, por el momento, no tiene ninguna relación con la resta. Más adelante trataremos ese tema.

Ejercicio

Ubique los siguientes números en la recta numérica:

a. -4,5

b. -0,5

c. -(-5)

d. $- -\frac{3}{7}$

A partir de la definición, vemos que si tomamos el opuesto del opuesto de un número, obtenemos el mismo número. Es decir, para cualquier número real a, $-(-a) = a$.

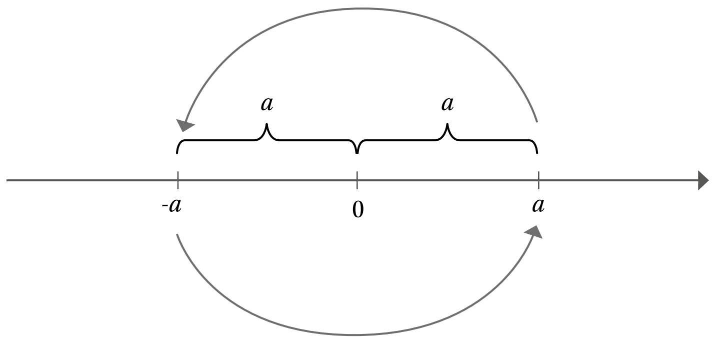


Figura X.5.

No debemos confundir esta propiedad con $(-1) \cdot (-a) = a$, ya que $-(-a) = a$ hace referencia a tomar el opuesto de un número en la recta y no a la multiplicación por (-1). Sin embargo, en la **Sección 3** veremos que ambas propiedades están relacionadas.

Definimos los *números enteros* como aquellos que son números naturales u opuestos de los números naturales. De manera similar, definimos los *números racionales* como aquellos que son fracciones u opuestos de las fracciones. Por ejemplo:

- -3 es un número entero y también racional.
- $\frac{7}{5}$ es un número racional, pero no entero.
- $-\frac{2}{11}$ es un número racional, pero no entero.
- $\sqrt{2}$ es un número real, pero no es racional.

Al identificar los números en la recta numérica podemos ordenarlos, extendiendo la noción de orden a los números enteros, racionales y reales. Diremos que $a < b$ si a está a la izquierda de b.

$$a < b$$

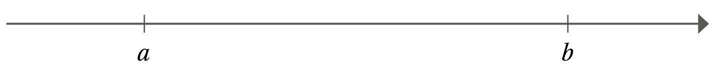


Figura X.6.

Por ejemplo, $-5 < -3$, como se muestra en la figura:

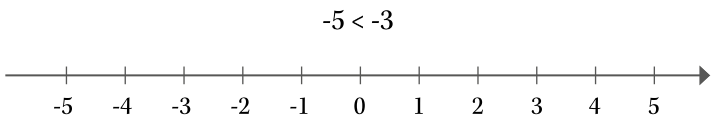


Figura X.7.

A partir del orden de los números, podemos definir cuando un número es positivo o negativo.

> **Definición X.2** Un número real a es *positivo* si $a > 0$, es decir, si está a la derecha del 0. De manera análoga, decimos que un número real a es *negativo* si $a < 0$, es decir, si está a la izquierda de 0.

Figura X.8.

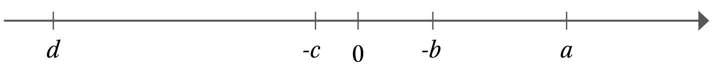
Por la definición de opuesto, vemos que si $a > 0$, entonces $-a < 0$. Recíprocamente, si $a < 0$, entonces $-a > 0$. Por ejemplo, $-5 < 0$ y $-(-5) = 5 > 0$.

Es importante enfatizar que $-a$ no siempre denota un número negativo. El error de hacer esta suposición está muy arraigado en la Educación Media. La manera de leer $-a$ como "el negativo de a" o "menos a" contribuye a pensar que siempre estamos hablando de un número negativo, lo que puede ser falso. Si $a = -4$, entonces $-a = 4$, que es un número positivo.

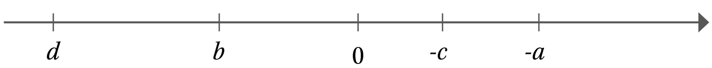
Ejercicio

Las siguientes rectas numéricas indican la ubicación de los números a, b, c y d o de sus opuestos. Para cada caso, ordene de mayor a menor: a, b, c y d.

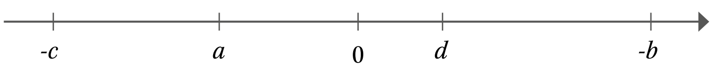
a.



b.



c.



El siguiente teorema establece que al tomar el opuesto, se invierte el orden.

Teorema X.1

Sean a y b dos números reales, si $a < b$, entonces $-b < -a$.

Demostración

Debemos considerar varios casos:

a) a y b positivos.
b) a y b negativos.
c) a negativo y b positivo.
d) a negativo y $b = 0$.
e) $a = 0$ y b positivo.

Supongamos que estamos en el caso a), es decir, a y b son positivos. Eso significa que el segmento entre 0 y b tiene mayor longitud que el segmento entre 0 y a. Por lo tanto, el segmento entre $-b$ y 0 tiene mayor longitud que el segmento entre $-a$ y 0, de donde $-b$ está a la izquierda de $-a$. Esto se ilustra en la siguiente figura:

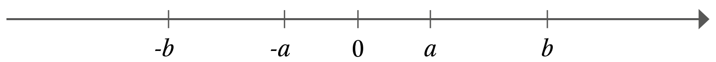


Figura X.9.

Para el caso b), que se ilustra en la figura a continuación, se puede argumentar de manera similar y queda de ejercicio para el lector.

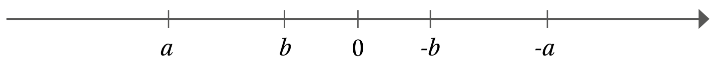


Figura X.10.

Si se tiene c), es decir, $a < 0$ y $b > 0$, entonces $-a > 0$ y $-b < 0$, por lo que $-b < -a$, como se muestra en la siguiente figura:

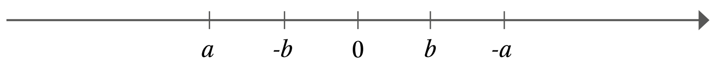


Figura X.11.

Cuando se cumple d), tenemos que como a es negativo, entonces $-a$ es positivo, por lo que $-b = 0 < -a$. Similarmente, se puede verificar la propiedad en el caso e).

Definición X.3 Para un número real a, se define su *valor absoluto*, que se anota por $|a|$, como:

- $|a| = a$, si $a > 0$.
- $|a| = -a$, si $a < 0$.
- $|a| = 0$, si $a = 0$.

El valor absoluto de un número a entrega el largo del segmento definido por el número a y 0. En particular, $|a| = |-a|$.

En la figura a continuación, se ilustra el significado del valor absoluto:

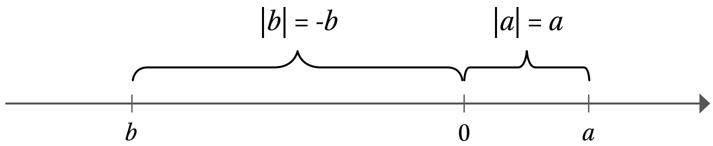


Figura X.12

Si dos números tienen el mismo valor absoluto, entonces, o bien son iguales, o uno es el opuesto del otro. También tenemos que el valor absoluto de un número es 0 solo en el caso de que el número sea 0.

En resumen

- Los números reales se identifican con los puntos de la recta numérica.
- Para cada número real a, se define su opuesto $-a$ como aquel punto simétrico con respecto al 0. Se tiene que $-(-a) = a$.
- Un número se dice entero si es un número natural o el opuesto de un número natural.
- Un número se dice racional si es una fracción o el opuesto de una fracción.
- Se puede extender el orden a los números reales. Si dos números reales satisfacen $a < b$, entonces sus opuestos satisfacen $-b < -a$; es decir, tomar el opuesto invierte el orden.

Ejercicios de la sección

1. Ordene los siguientes números reales de mayor a menor:

   a. $-0{,}5$; -2 ; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{2}$ y $1\frac{1}{2}$.

   b. $-0{,}01$; $-(-0{,}1)$; $-0{,}1$; $-1{,}01$ y $-1{,}001$.

   c. $|-21|$; -20; -22 y $-|-20|$.

2. Calcule el valor absoluto de los siguientes números: $-1{,}2$; $-\frac{6}{5}$; $\frac{5}{6}$; $-0{,}2$ y $0{,}1$. Ubique en una misma recta numérica cada uno de los números y sus valores absolutos.

3. Encuentre 5 números reales que estén entre:

   a. $-0{,}04$ y $0{,}01$.

   b. $-1{,}1$ y $-1{,}05$.

   c. $-\frac{7}{9}$ y $-\frac{4}{7}$.

4. Sean a y b dos números reales.

   a. Si $|a| = |-b|$, ¿qué puede decir de a y b?

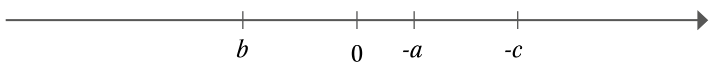
   b. Si $|a| < |b|$, ¿será cierto que $a < b$?

   c. Se sabe que $a < b$, ¿será cierto que $|a| < |b|$?

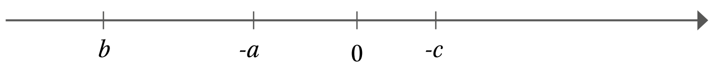
   d. ¿Qué puede decir de los números $|a| + a$, $|a| - a$ y $-|a| + a$? Distinga el caso en que a sea negativo, positivo o 0.

5. En cada una de las siguientes rectas numéricas, ubique los números a, $-b$, c, $|a|$ y $-|c|$.

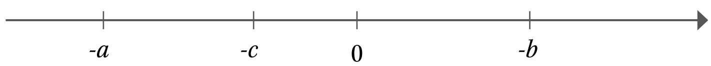
   a.



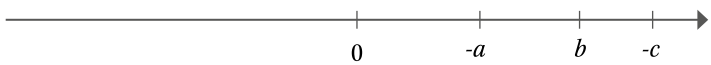
   b.



   c.



   d.



2. La suma de números reales

En esta sección estudiaremos la suma de números reales. El enfoque que adoptaremos será distinto a como se ha trabajado con la suma en los otros capítulos del libro. Vamos a suponer que la suma está definida y que satisface las siguientes propiedades básicas:

Propiedad 1: (Conmutatividad) si a y b son dos números reales, entonces $a + b = b + a$.

Propiedad 2: (Asociatividad) si a, b, c son números reales, entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Propiedad 3: (Elemento neutro de la suma) si a es cualquier número real, entonces $a + 0 = a$.

Como vimos en los **Capítulos II** y **VII**, estas propiedades se cumplen para la suma de números naturales y fracciones. Adicionalmente, vamos a suponer que la suma de números reales satisface la siguiente propiedad:

Propiedad 4: (Elemento inverso para la suma) para cualquier número real a, se tiene que $a + (-a) = 0$.

Esta última propiedad es clave, pues nos permite relacionar la resta con la suma del opuesto. Usaremos extensamente esta propiedad para deducir otras que nos permitan expresar la suma de números enteros y racionales en términos de la suma y la resta de naturales y fracciones.

Adicionalmente a las **Propiedades** 1, 2, 3 y 4, supondremos que si a y b son fracciones, entonces la suma $a + b$ coincide con la suma de fracciones que ya definimos. Esta propiedad nos dice que esta suma es una *extensión* de la operación que ya conocemos.

Calculemos $(-5) + (-6)$. La manera en que procederemos ilustrará el razonamiento que debemos seguir para calcular la suma de dos números negativos cualesquiera.

Usando la **Propiedad** 1 y la **Propiedad** 2 obtenemos:

$$((-5) + (-6)) + (5 + 6) = ((-5) + 5) + ((-6) + 6)$$

Y por las **Propiedad** 3 y 4 se tiene:

$$((-5) + (-6)) + (5 + 6) = ((-5) + 5) + ((-6) + 6) = 0$$

Sumando a ambos lados de la igualdad $-(5 + 6)$, deducimos que:

$$(((-5) + (-6)) + (5 + 6)) + (-(5 + 6)) = -(5 + 6)$$

Nuevamente, usando la **Propiedad** 2 se tiene que:

$$((-5) + (-6)) + ((5 + 6) + (-(5 + 6)) = -(5 + 6)$$

Como por la **Propiedad** 4 se tiene que $((5 + 6) + (-(5 + 6)) = 0$, concluimos, usando la **Propiedad** 3, que:

$$(-5) + (-6) = -(5 + 6) = -11$$

Veamos ahora cómo calcular la suma $6 + (-4)$. Este caso corresponde a la suma de un número positivo y uno negativo cuyo opuesto es menor que el sumando positivo. Vemos que si sumamos 4 a esta suma, obtenemos que:

$$(6 + (-4)) + 4 = 6 + ((-4) + 4) = 6$$

Donde hemos usado las **Propiedades** 2 y 4. Por lo tanto, si sumamos 4 a $6 + (-4)$, obtenemos **6**. Esto mismo se cumple para la resta $6 - 4$, si a esta le sumamos 4, obtenemos **6**. Así:

$$6 - 4 + 4 = (6 + (-4)) + 4$$

Ya que ambos lados de la igualdad son iguales a **6**. Sumando (-4) a ambos lados de esta igualdad, resulta:

$$((6 - 4) + 4) + (-4) = ((6 + (-4)) + 4) + (-4)$$

Y, usando la propiedad asociativa concluimos que $(6 - 4) = 6 + (-4)$, por lo que $6 + (-4) = 6 - 4 = 2$.

Ejercicio

Calcule las siguientes sumas:

a. $\frac{2}{3} + -\frac{1}{8}$

b. $-0{,}05 + 3{,}04$

c. $-\left(2\tfrac{3}{4}\right)+\left(-\left(5\tfrac{1}{3}\right)\right)$

La suma $a + (-b)$ generaliza la noción de resta de dos números. Recordemos que $a - b$ se define como el número que resuelve $b + \square = a$, es decir, aquel que al sumarlo a b se obtiene a. Como:

$$b + (a + (-b)) = a + ((-b) + b) = a + 0 = a$$

Se tiene que $a + (-b)$ satisface $b + \square = a$. Más aún, existe un solo número que cumple esta propiedad. De hecho, si $b + d = a$, entonces:

$$b + d + (-b) = d + b + (-b) = a + (-b)$$

Y como $d + b + (-b) = d$, obtenemos que $d = a + (-b)$.

Definición X.4 Sean a y b dos números reales, definimos la resta $a - b = a + (-b)$. Se tiene que $a - b$ es el único número que al sumarlo a b se obtiene a.

Hemos definido la resta en términos de una suma: restar un número a otro es sumarle el opuesto. También es posible expresar la suma de dos números como una resta. De hecho:

$$a + b = a + (-(-b)) = a - (-b)$$

Es decir, sumarle un número a otro es lo mismo que restarle el opuesto.

El próximo teorema expresa los opuestos de sumas y restas, en términos de sumas y restas de los opuestos. Estas propiedades nos permitirán calcular sumas y restas de números enteros y racionales, ya que las expresarán en términos de sumas y restas de números naturales o de fracciones.

Teorema X.2

Sean a y b números reales. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

a) $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

b) $-(a - b) = b - a$.

Demostración

Para demostrar a) observamos que:

$$((-a) + (-b)) + (a + b) = (-a) + (-b) + a + b = (-a) + a + (-b) + b = 0$$

Sumando $-(a + b)$ a ambos lados de la igualdad anterior, obtenemos:

$$(((-a) + (-b)) + (a + b)) + (-(a + b)) = -(a + b)$$

Y como el lado izquierdo de esta igualdad es $(-a) + (-b)$, pues $(a + b) + (-(a + b)) = 0$, deducimos que:

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

Probemos ahora b). Por definición, se tiene que $-(a - b)= -(a + (-b))$ y, usando a), tenemos que:

$$-(a + (-b)) = -a + (-(-b)) = -a + b.$$

Pues $-(-b) = b$. Concluimos entonces que $-(a - b) = -a + b = b + (-a) = b - a$.

Ejercicio

Justifique cada paso realizado en la demostración anterior usando las **Propiedades** 1, 2, 3 y 4.

Veamos algunos ejemplos de sumas y restas que cubren las distintas posibilidades que pueden tener los números involucrados.

Ejemplo

Calculemos las siguientes sumas y restas:

a) $-5 + (-8)$

b) $-\frac{5}{4} + \frac{4}{3}$

c) $9 + (-10)$

d) $0{,}1 - 0{,}3$

e) $\frac{1}{2} - (-3)$

f) $-\frac{7}{4} - 3$

Vemos que en la suma de la parte a) ambos sumandos son negativos. Para encontrar la suma usamos la parte a) del **Teorema X.2**:

$$-5 + (-8) = -(5 + 8) = -13$$

La suma en b) se puede escribir como una resta en donde el minuendo es mayor que el sustraendo:

$$\frac{4}{3} + \quad -\frac{5}{4} \quad = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}$$

La suma de la parte c) también se puede expresar como una resta, pero en ella el minuendo es menor que el sustraendo:

$$9 + (-10) = 9 - 10$$

Usando la parte b) del **Teorema X.2**, obtenemos que $9 - 10 = -(10 - 9) = -1$.

En d) tenemos una resta en donde el minuendo es menor al sustraendo, así que procedemos como en c) y obtenemos $0{,}1 - 0{,}3 = -(0{,}3 - 0{,}1) = -0{,}2$.

El minuendo en la parte e) es positivo y el sustraendo es negativo. En este caso, nos conviene expresar esta resta como una suma $\frac{1}{2} - \left(-3\right) = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$.

Finalmente, en f) tenemos una resta donde tanto el minuendo como el sustraendo son negativos. En este caso, podemos escribir la resta como una suma y luego aplicar la parte a) del **Teorema X.2**, para obtener que $-\frac{7}{4} - 3 = -\frac{7}{4} + \left(-3\right) = - \quad \frac{7}{4} + 3 \quad = -\frac{19}{4}$.

Ejercicio

Calcule las siguientes sumas indicando las propiedades de la suma y resta que utilice.

a. $-0{,}04 + 0{,}005$

b. $-\frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \quad -\frac{2}{3}$

c. $(-1 - 5) + 9$

d. $-1{,}02 - (0{,}03 - 0{,}5)$

A continuación, vamos a representar la suma de dos números reales a y b, en la recta numérica. Notamos que si $b = 0$, entonces $a + b = a$; si $b = -a$, tenemos que $a + b = 0$; y si $a = 0$, tenemos $a + b = b$. Por lo tanto, basta considerar que $b \neq 0$ y $b \neq -a$. Supongamos ahora que $a > 0$. Vamos a distinguir tres casos:

Caso 1: $b > 0$.

Caso 2: $b < 0$ y $a > -b$.

Caso 3: $b < 0$ y $a < -b$.

Analizamos, a continuación, cada uno de estos casos:

Caso 1: cuando $a > 0$ y $b > 0$ estamos en la situación usual. En este caso, la suma $a + b$ se identifica con la yuxtaposición de los segmentos de largo a y b, tal como se muestra en la siguiente figura:

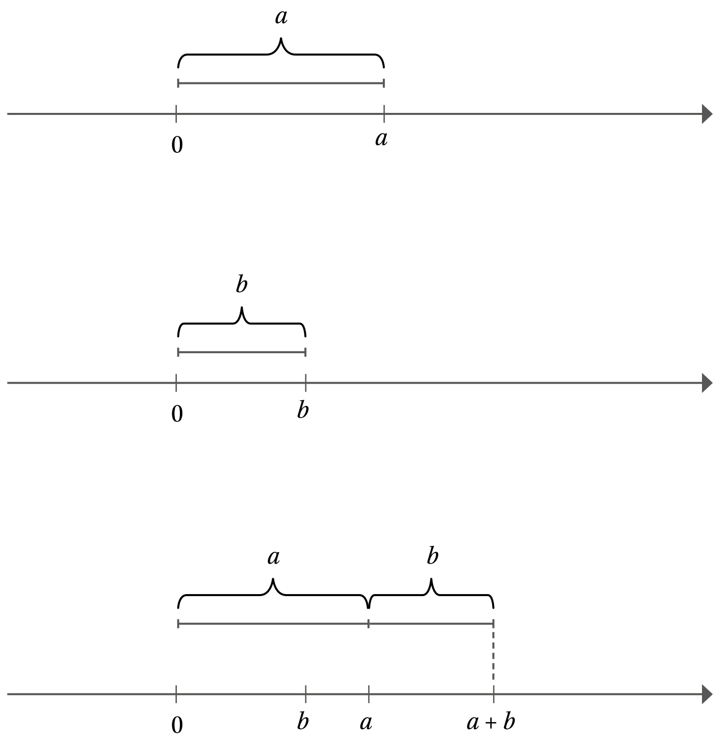


Figura X.13.

Vemos que para encontrar $a + b$ en este caso, partimos de a y nos movemos b unidades hacia la derecha.

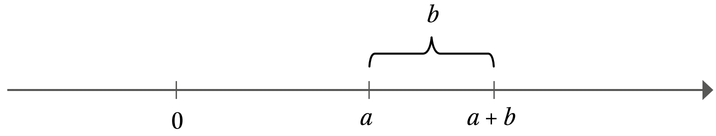


Figura X.14.

Caso 2: si $a > 0$ y $b < 0$ con $a > -b$, entonces nos conviene escribir $a + b = a - (-b)$, es decir, la resta entre a y $-b$. Observamos que en este caso el largo del segmento entre 0 y b es $-b$.

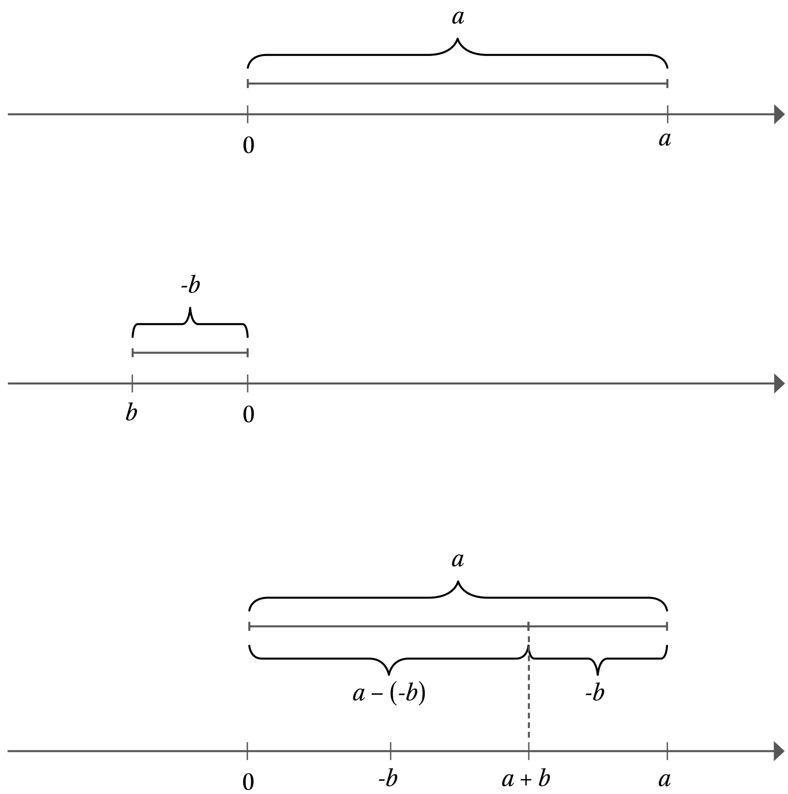


Figura X.15.

Para ubicar $a + b$ cuando b es negativo, partimos de a y nos movernos $-b$ unidades hacia la izquierda.

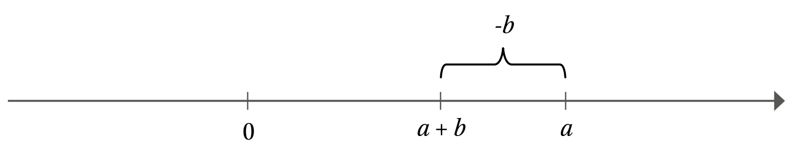


Figura X.16.

Caso 3: si $a > b$, $b < 0$ y $a < -b$, nos conviene escribir $a + b = -(-b - a)$. Observamos que $a + b$ es negativo y su valor absoluto es $-b - a$.

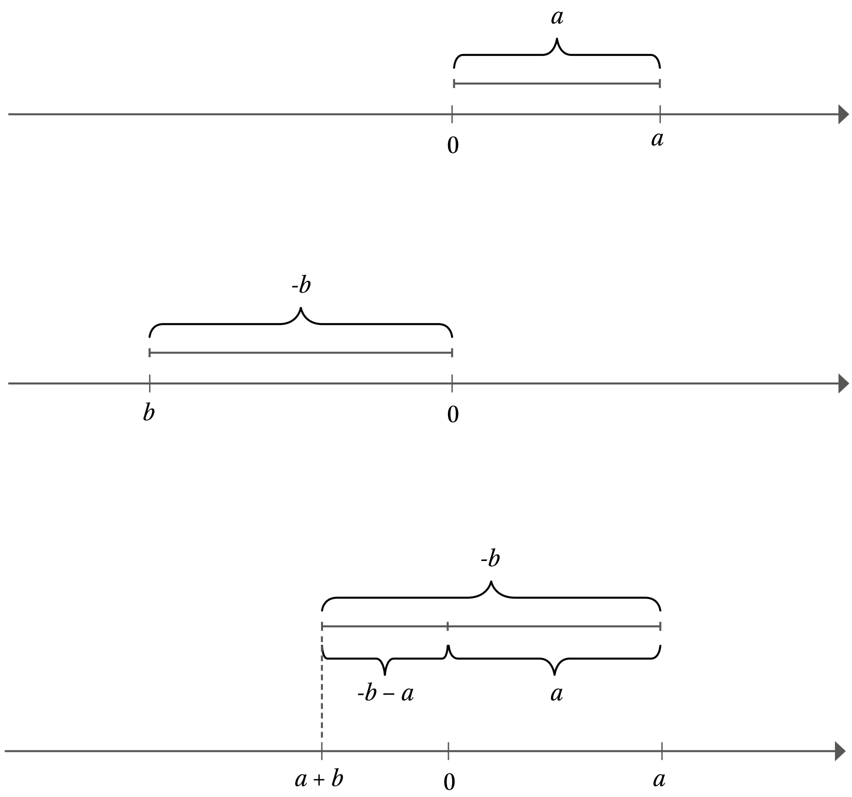


Figura X.17.

Al igual que en el caso anterior, para ubicar $a + b$ partimos de a y nos movernos $-b$ unidades hacia la izquierda.

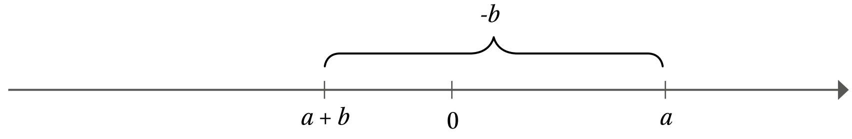


Figura X.18.

Resumiendo, para ubicar la suma $a + b$ en la recta numérica debemos:

- Partir de a y movernos b unidades hacia la derecha, si $b > 0$.
- Partir de a y movernos $-b$ unidades hacia la izquierda, si $b < 0$.

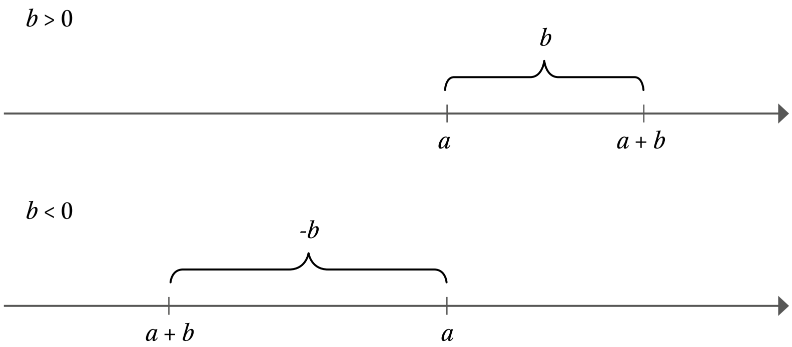


Figura X.19.

Esto lo justificamos solamente para el caso en que a sea positivo. Queda como ejercicio para el lector verificar que este procedimiento entrega la ubicación de $a + b$ también en el caso en que $a < 0$.

Para ubicar $a - b$ en la recta numérica, basta con usar que $a - b = a + (-b)$. Así, para ubicar $a - b$ debemos:

- Partir de a y movernos b unidades hacia la izquierda, si $b > 0$.
- Partir de a y movernos $-b$ unidades hacia la derecha, si $b < 0$.

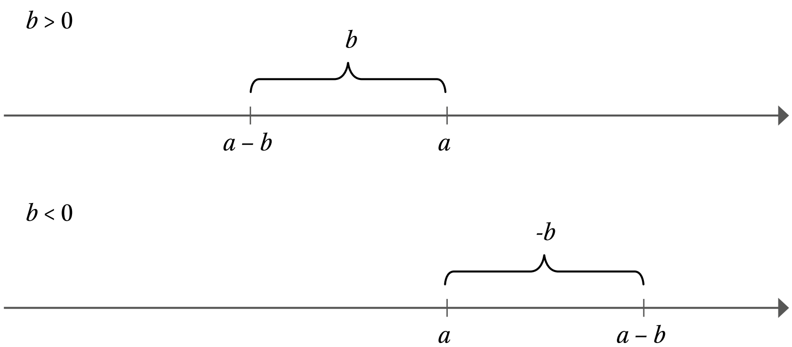


Figura X.20

Para pensar

También se pueden interpretar los números reales como segmentos que tienen un sentido. Esto usualmente se anota como una flecha cuyo largo es el valor absoluto del número, la cual apunta a la derecha, si el número es positivo, y a la izquierda, si el número es negativo. Explique cómo visualizar la suma y la resta de números reales usando esta interpretación.

Al igual que con números naturales, al sumar un número a ambos lados de una desigualdad esta se mantiene. Es decir, si a, b y c son números reales, entonces:

Si $a < b$ se tiene que $a + c < b + c$.

Esta propiedad se cumple, pues de la discusión anterior vimos que si sumamos c a ambos números, nos movemos $|c|$ unidades hacia la derecha o la izquierda partiendo de a o de b. Por lo tanto, si a está a la izquierda de b, se tendrá que $a + c$ estará a la izquierda de $b + c$.

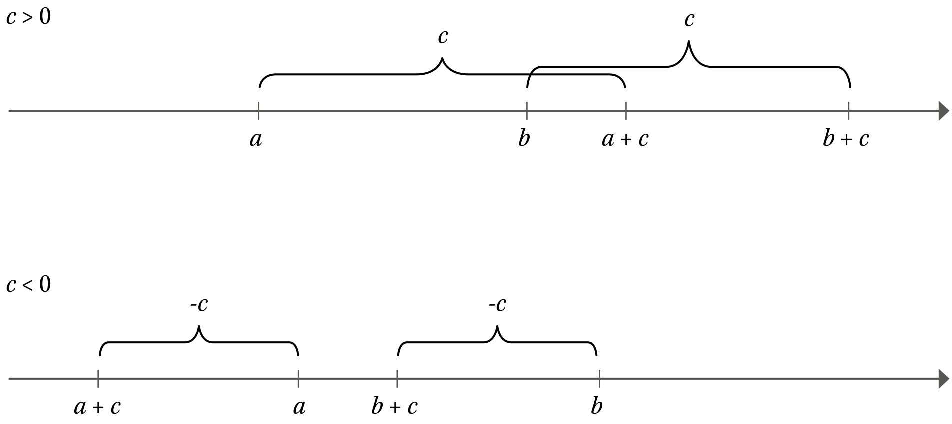


Figura X.21.

En resumen

- La suma de números reales satisface las siguientes propiedades básicas:
  1. Si a y b son dos números reales, entonces $a + b = b + a$.
  2. Si a, b y c son números reales, entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$.
  3. Si a es cualquier número real, entonces $a + 0 = a$.
  4. Para cualquier número real a, se tiene que $a + (-a) = 0$.
- La resta de dos números $a - b$ se define como $a + (-b)$.
- Usando las propiedades básicas, se puede expresar la suma y la resta de números racionales, (enteros) en términos de la suma y la resta de fracciones (naturales) y sus opuestos.
- Sumar un número c a ambos lados de la desigualdad $a < b$ la preserva. Es decir, $a + c < b + c$.

Ejercicios de la sección

1. En el caso en que $a < 0$, explique por qué para ubicar la suma $a + b$ en la recta numérica debemos:
   - Partir de a y movernos b unidades hacia la derecha si, $b > 0$.
   - Partir de a y movernos $-b$ unidades hacia la izquierda si, $b < 0$.
2. Explique por qué para ubicar $a - b$ en la recta numérica debemos:
   - Partir de a y movernos b unidades hacia la izquierda, si $b > 0$.
   - Partir de a y movernos $-b$ unidades hacia la derecha, si $b < 0$.
3. Usando la recta numérica, explique el procedimiento para calcular las siguientes operaciones:
   a. $-10 + 9$
   b. $-(0{,}6 - 0{,}2)$
   c. $-9 - 7$
   d. $4 - (-8)$
4. Calcule mentalmente las siguientes operaciones, justificando el procedimiento realizado:
   a. $-(-31 + 6)$
   b. $24 - 19 - 32$
   c. $(5 + (-18)) + (27 - 12)$
   d. $0{,}1 - (1{,}1 - 0{,}87)$
5. Pruebe algebraicamente las Propiedades de la 1 a la 12 del **Capítulo II** en la **Sección 2.1**, para la resta de números reales.
6. Explique por qué si $a < b$, entonces $a - b < 0$ y recíprocamente, si $a - b < 0$, entonces $a < b$.
7. Interprete:
   a. $8.000 - 12.000$ en el contexto de una situación financiera.
   b. $8 - 14$ en relación a temperatura.
   c. $3 - (-4)$ en el contexto de la trayectoria de un ciclista.
8. En cada caso, determine el valor de x para que la igualdad sea cierta:
   a. $5 - x = -2$
   b. $-x - 4 = 8$
   c. $x + (12 - x) = x - 5$
   d. $3 - x - (15 - x) = 3 - x$
9. Identifique en la recta numérica los números reales que satisfacen las siguientes desigualdades:
   a. $-x + 5 < 0$
   b. $3 - x > 0$
   c. $6 - x < 7$
   d. $6 - x < 3 - x$
   e. $x + 2 < x + 5 - (x - 8)$

3. La multiplicación de números reales

Interpretar qué significa multiplicar números con signo no es sencillo. Podemos definir la multiplicación $4 \cdot (-5)$ en términos de la suma iterada:

$$4 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20$$

E, incluso, dar sentido a la multiplicación $\frac{1}{3} \cdot (-5)$, como aquel número que si se multiplica por 3 (es decir, se suma tres veces) da como resultado -5, o sea $-\frac{5}{3}$. Sin embargo, no es claro como dar un sentido a $(-5) \cdot \ -\frac{2}{3}$ en términos de las interpretaciones usuales para la multiplicación que conocemos.

Para tratar la multiplicación de números enteros, racionales y reales, procederemos de manera similar a con la suma, es decir, supondremos que está definida y que satisface ciertas propiedades básicas. A partir de estas propiedades, deduciremos reglas que nos permitirán multiplicar dos números enteros o racionales en términos de la multiplicación de dos números naturales o fracciones.

Vamos a suponer que la multiplicación de números reales está definida y satisface las siguientes propiedades básicas:

Propiedad 1: (Conmutatividad) si a y b son dos números reales, entonces $a \cdot b = b \cdot a$.
Propiedad 2: (Asociatividad) si a, b y c son números reales, entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
Propiedad 3: (Distributividad con respecto a la suma) si a, b y c son números reales, entonces:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Propiedad 4: (Elemento neutro) Si a es un número real, entonces $a \cdot 1 = a$.

Propiedad 5: (Elemento inverso para la multiplicación) si a es un número real distinto de 0, entonces existe otro número real, que llamaremos *inverso multiplicativo* de a y que denotaremos como $\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Al igual que para la suma, también supondremos que si a y b son dos números naturales o fracciones, entonces $a \cdot b$ coincide con la multiplicación ya definida. Es decir, estamos extendiendo a los reales la multiplicación que ya conocemos. En particular, notamos que al elemento inverso de a, lo hemos expresado como $\frac{1}{a}$, para que coincida con el inverso ya definido en el caso en que a es una fracción.

Recordamos que si multiplicamos por 0 un número natural o una fracción, el resultado es 0. Esta propiedad se conoce como propiedad absorbente del 0. La multiplicación de números reales también tiene la esta propiedad.

Propiedad 6: (propiedad absorbente del 0) si a es un número real, entonces $0 \cdot a = 0$.

Para demostrar esta propiedad, notamos primero que por ser 0 neutro de la suma, $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a$. Ahora, usando la propiedad distributiva se obtiene que $0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Finalmente, restando $0 \cdot a$ a ambos lados de la igualdad tenemos que $0 = 0 \cdot a$.

Ejemplo

Probemos que $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Usando la propiedad absorbente del 0 y la propiedad distributiva obtenemos que

$$0 = (-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (1).$$

Por lo tanto, $(-1) \cdot (-1) = -((-1) \cdot 1) = -(-1) = 1$.

Para calcular el producto de dos números racionales cualesquiera, vamos a proceder tal como en el caso de la suma, expresándolo en términos de multiplicación de fracciones y sus opuestos. En el caso de la multiplicación, esto sé logrará probando lo que se denomina usualmente como la regla de los signos.

Teorema X.3

Sean a y b dos números reales. Entonces:

a) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Demostración

Usando la propiedad absorbente del 0 y la propiedad distributiva, tenemos que:

$$0 = (-a + a) \cdot b = (-a) \cdot b + a \cdot b$$

Por lo tanto, $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, lo que prueba a).

Procediendo de igual manera, se tiene que:

$$0 = (-a) \cdot (-b + b) = (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b$$

De donde obtenemos que $(-a) \cdot b = - (-a) \cdot (-b)$. Usando la parte a. deducimos que $-(a \cdot b) = -(-a) \cdot (-b)$, y tomando opuesto a ambos lados concluimos b).

La regla de los signos nos permite calcular el producto de cualquier par de números racionales en términos del producto de dos fracciones. En particular, vemos que $a \cdot b > 0$ si a y b tienen el mismo signo y que $a \cdot b < 0$ si a y b tienen distinto signo.

Ejercicios

1. Verifique que para todo número real a se tiene que $(-1) \cdot a = -a$.
2. Calcule los siguientes productos indicando cómo utiliza la regla de los signos.

   a. $-\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{9}{15}$

   b. $-(8 \cdot (-0{,}9))$

   c. $(-0{,}4) \cdot (-1{,}2)$

   d. $-0{,}2 \cdot -\dfrac{3}{5}$

Respecto del orden de dos números, vemos que este se mantiene si multiplicamos por un número positivo, y se invierte si multiplicamos por un número negativo. Para verificar esto, observamos que $a < b$, si y solamente si $a - b < 0$ (ver ejercicio 6 de la **Sección 2**). Si $c > 0$, tendremos que $c \cdot (a - b) < 0$, de donde se obtiene que $c \cdot a - c \cdot b < 0$, es decir, $c \cdot a < c \cdot b$. Por otra parte, si $c < 0$, se tiene que $c \cdot (a - b) > 0$ y son por tanto, $c \cdot a > c \cdot b$.

Las propiedades de orden son abordadas en detalle en el **Capítulo II** del texto *Álgebra* de esta colección.

Ejercicio

Si sabe que $a > b$ y $c > d$. ¿Qué puede decir de $a \cdot c$ y $b \cdot d$?

En esta sección, al igual que en la anterior, no discutimos el tema del cálculo de operaciones con números reales que no sean racionales. El problema no radica en el signo de estos números, sino en el hecho que no tenemos algoritmos para hacer el cálculo de sumas y productos con números positivos que no sean fracciones, tal como discutimos en el apartado **VIII.3.3**.

Como vimos en ese capítulo, cualquier número real positivo tiene una expansión decimal. Truncando esta expansión obtenemos una aproximación de este número real, que puede ser tan precisa como uno desee. Una manera de aproximar una suma o producto de números reales es truncando los números involucrados y luego calcular la suma o producto de las fracciones decimales correspondientes a los truncamientos. Al ir aumentando el número de cifras decimales del truncamiento de cada número, se va mejorando la aproximación de la suma o el producto deseado.

En resumen

- La multiplicación de números reales satisface las siguientes propiedades básicas:
  1. Si a y b son dos números reales, entonces $a \cdot b = b \cdot a$.
  2. Si a, b, c son números reales, entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
  3. Si a, b, c son números reales, entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
  4. Si a es un número real, entonces $a \cdot 1 = a$.
  5. Si a es un número real distinto de 0, existe otro número real que denotamos $\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.
- A partir de estas propiedades, se puede probar que:
  6. Para todo número real a, se tiene $a \cdot 0 = 0$.
  7. Si a y b son números reales, $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ y $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.
- Usando las propiedades anteriores, se puede expresar la multiplicación de números racionales (enteros) en términos de la suma y la resta de fracciones (naturales) y sus opuestos.
- Al multiplicar una desigualdad $a < b$ por $c > 0$, esta se mantiene, es decir, $a \cdot c < b \cdot c$.
- Al multiplicar una desigualdad $a < b$ por $c < 0$, esta se invierte, es decir, $a \cdot c > b \cdot c$.

Ejercicios de la sección

1. Suponga que $a < b$. En cada caso, si es que se puede, ordene los números. Justifique sus respuestas.
   a. $5 \cdot a - 7$ y $5 \cdot b - 7$.
   b. $2 - a$ y $2 - b$.
   c. $4 - 3 \cdot a$ y $4 - 3 \cdot b$.
   d. $a + 8$ y $b + 7$.
   e. $5 \cdot a$ y $3 \cdot b$.
   f. $-2 \cdot a$ y $-b$.

2. Calcule mentalmente y justifique el procedimiento utilizado:
   a. $(50 - 79) \cdot 3$
   b. $-(45 - 15) \cdot (-0{,}1)$
   c. $2 \cdot (-17 - 23) \cdot (-0{,}5)$
   d. $(43 - 48) \cdot (2 - (13 - 22) \cdot (-5))$

3. Para cada caso, encuentre todos los números reales x que satisfacen la desigualdad:
   a. $x^2 > 0$
   b. $x^3 > 0$
   c. $x \cdot (x - 1) < 0$
   d. $x \cdot (x + 1) > 0$

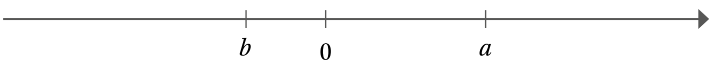
4. Para a y b números reales, con $b \neq 0$, se define la división de a por b, la cual anotaremos como $\frac{a}{b}$, como el único número que multiplicado por b es igual a a.
   a. Demuestre las siguientes propiedades:
      - $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$
      - $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$
      - $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
   b. Explique por qué se cumple la regla de los signos para la división:
      - $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
      - $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
      - $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

Ejercicios del capítulo

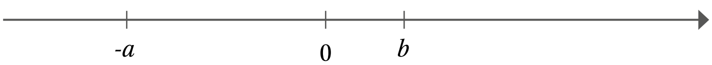
1. Compare $|a + b|$ y $|a| + |b|$. Determine en qué casos se cumple que $|a + b|$ y $|a| + |b|$. ¿Puede pasar que $|a + b| > |a| + |b|$?

2. En cada caso, explique cómo encontrar en la recta numérica $a - b$, $-(a + b)$, $-(a - b)$ y $a + b$.

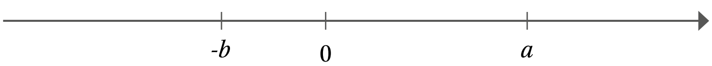
   a.



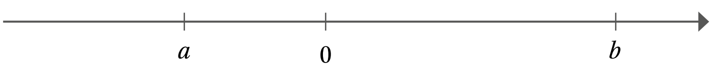
   b.



   c.



   d.



3. Para cada caso, encuentre todos los números reales x que satisfacen la igualdad:

   a. $|x - 5| = 7$
   b. $|5 \cdot x - 3| = 1$
   c. $2 \cdot |x| + 3 = 10$
   d. $x + |x| = 0$
   e. $x - |x| = 0$
   f. $x + 2 \cdot |x| = 3$
   g. $2 \cdot x - |x| = 3$

4. Determine todos los números enteros que están entre:

   a. -1,01 y 5.
   b. -105 y -20.
   c. -34 y 23.

FECHA:_____/_______/_____

BIBLIOGRAFÍA

Aharoni, R. *Aritmética para padres y madres: un libro para adultos sobre la Matemática escolar*. Academia Chilena de Ciencias. Santiago, Chile. 2012.

Beckmann, S. *Mathematics for elementary teachers* (2ª Edición). Editorial Pearson Education. USA. 2008.

Broitman, C. (Compiladora). *Matemáticas en la Escuela Primaria. (I) Números naturales y decimales con niños y adultos*. Editorial Paidós. Argentina. 2013.

Broitman, C. (Compiladora). *Matemáticas en la Escuela Primaria. (II) Saberes y conocimientos de niños y docentes*. Editorial Paidós. Argentina. 2013.

Castro, E. (Editor). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Editorial Síntesis Educación. España. 2005.

Chamorro, M. *Didáctica de las Matemáticas. (Infantil)*. Editorial Pearson, Prentice Hall. España. 2005.

Chamorro, M. (Coordinadora). *Didáctica de las Matemáticas. (Primaria)*. Editorial Pearson, Prentice Hall. España. 2003.

Dehaene, S. *The number sense*. Editorial Oxford University Press. Nueva York, USA. 1997.

Fiol, M. y Fortuny, J. *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Editorial Síntesis. España. 1999.

Godino, J. (Director). *Matemáticas para maestros*. Proyecto Edumat – Maestros. Granada, España. 2004. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/

Ifrah, G. *From one to zero. A universal history of numbers.* Editorial Viking Penguin Inc. Nueva York, USA. 1985.

Lerner, D., Saiz, I., Malet, O., Porras, M. y otros. *El lugar de los problemas en la clase de Matemática.* Ediciones Novedades Educativas. Argentina. 2011.

Linares, S. y Sánchez, M.V. *Fracciones*. Editorial Síntesis. España. 1988.

Ma, L. *Conocimiento y enseñanza de las Matemáticas elementales. La comprensión de las Matemáticas fundamentales que tienen los profesores de China y los EEUU*. Academia Chilena de Ciencias. Santiago, Chile. 2010.

Martínez, S. y Varas, M. *Álgebra. Colección ReFIP: Recursos para la Formación de Profesores de Educación Básica*. Ediciones SM Chile. Santiago, Chile. 2014.

Menninger, K. *Number words and number symbols*. Editorial The M.I.T. Press. Cambridge. USA. 1969.

Ministerio de Educación. Gobierno de Chile. *Bases curriculares de 1º a 6º Básico.* 2013. Disponible en: http://www.mineduc.cl/index5_int.php?id_portal=47&id_contenido=17116&id_seccion=3264&c=1

Ministerio de Educación. Gobierno de Chile. *Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica*. 2011. Disponible en: http://www.mineduc.cl/usuarios/cpeip/File/2012/librobasicaokdos.pdf

Parker, P. y Baldridge, S. *Elementary Mathematics for teachers*. Editorial Sefton-Ash Publishing. USA. 2003.

Reyes, C., Dissett, L. y Gormaz, R. *Geometría. Colección ReFIP: Recursos para la Formación de Profesores de Educación Básica.* Ediciones SM Chile. Santiago, Chile. 2014.

Riveros, M. y Zanocco, P. *¿Cómo aprenden Matemática los niños?* Ediciones Nueva Universidad/Colección Teleduc. Santiago, Chile. 1981.

Riveros, M., Zanocco, P., Cnudde, V. y León, I. *Resolver problemas matemáticos: una tarea de profesores y alumnos*. Ediciones Pontificia Universidad Católica de Chile. Santiago, Chile. 2002.

Rouche, N. *Du quotidien aux mathématiques: nombres, grandeurs, proportions*. Editorial Ellipses. París. 2006.

Segovia, I., Castro, E. Castro, E. y Rico, L. *Estimación en cálculo y medida*. Editorial Síntesis. España. 1999.

Segovia, I. y Rico, L. (Coordinadores). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria.* Editorial Pirámide. España. 2011.

Sowder, J., Sowder, L. y Nickerson, S. *Reconceptualizing Mathematics for elementary school teachers: instructor's edition*. Editorial W. H. Freeman and Company. Nueva York. USA. 2009.

Yee, L.-P. y Lee, N.-H. (Eds.). *Teaching Primary School Mathematics. A resource book.* (2ª Edición). Editorial Mc Graw Hill Education. Asia. 2009.

FECHA:_____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

La colección ReFIP es una serie de cuatro textos: Números, Geometría, Álgebra y Datos y azar, enfocados en la matemática para enseñar que requieren los profesores de Educación Básica.

Esta colección fue desarrollada en el proyecto FONDEF-D09I1023 “Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica en Matemática”, por un equipo de expertos disciplinarios y en educación de distintas universidades, liderados desde el Laboratorio de Educación del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile.

El proceso de elaboración de estos textos se llevó a cabo durante tres años y contempló el pilotaje de versiones preliminares en cursos de carreras de Pedagogía en Educación Básica de 16 universidades, en el que participaron alrededor de 5.000 estudiantes de Pedagogía de todo el país. Esto permitió hacer los cambios y ajustes necesarios para producir las versiones finales, y hacer que estos textos se constituyan en herramientas de gran utilidad en la formación docente.

Los textos promueven la reflexión acerca de la matemática escolar y su enseñanza, contribuyen a integrar conocimientos disciplinarios y pedagógicos, y tienen su foco en la matemática específica de la tarea de enseñar.

Más información acerca de la colección y el proyecto se encuentra en:
http://refip.cmm.uchile.cl/

Álgebra
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Geometría
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Números
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Datos y azar
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA