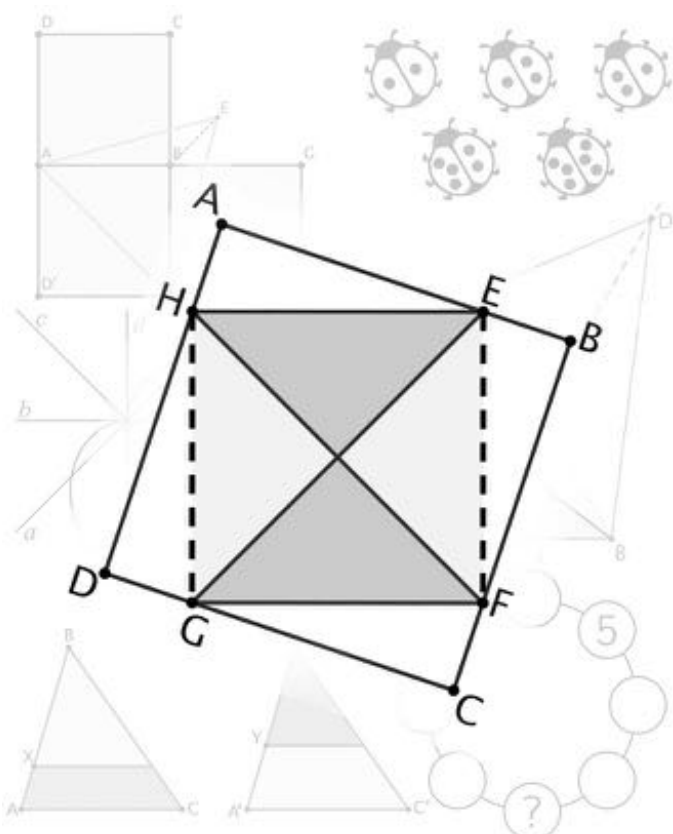
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

8° Campeonato de Matemática
Universidad de La Frontera



Hernán Burgos Vega
Director Académico Campeonato de Matemática

Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera

El objetivo principal del matemático
consiste en formular y resolver problemas

"La resolución de problemas
es el corazón de la Matemática"

Soluciones de los Problemas a cargo del
Comité Académico del Campeonato Conformado por:

Hernán Burgos Vega
José Labrin Parra
Eduardo Milman Aguilar
Joan Molina Sandoval

Introducción

Este pequeño libro contiene los problemas del 8° Campeonato de Matemática de la Universidad de La Frontera año 2015, junto a sus soluciones, material que ponemos a disposición de cada uno de los colegas con la íntima esperanza y pretensión de que les sirvan de ayuda y motivación en sus clases de matemática.

Estamos convencidos de que estudiantes entusiasmados y motivados tendrán mayor éxito, como también, pensamos que problemas no triviales y que desafían el intelecto del estudiante lo ayudan a organizar, contar, razonar, encontrar secuencias y algoritmos que le permiten entender los problemas y resolverlos, y al final del proceso sentir el placer de haber resuelto un problema novedoso, que inicialmente era un desafío.

Este libro está dirigido especialmente a los colegas profesores de matemática de enseñanza básica y media de la región de La Araucanía, con el propósito de despertar el interés por la resolución y creación de problemas lúdicos y bonitos que motivan a nuestros estudiantes.

Quiero agradecer el importante aporte del comité académico del campeonato, en la resolución de los problemas seleccionados, debemos reconocer también el trabajo desarrollado por el profesor José Labrin en la escritura del texto en LaTeX.

Finalmente, es necesario destacar y reconocer el importante y decidido apoyo que nos entrega la dirección de nuestra Universidad, sin el cual no podríamos desarrollar este Campeonato.

Reiteramos nuestro íntimo deseo de que este material sea un pequeño aporte a los colegas en su práctica diaria.

Hernán Burgos Vega

Temuco, Marzo 2016

1

Problemas

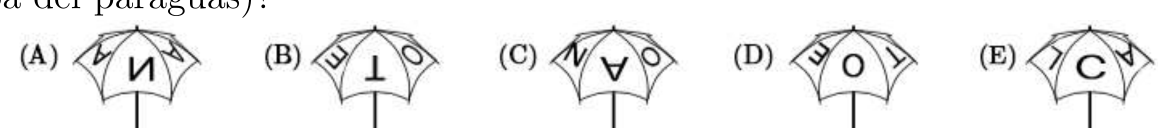
Estos problemas están ordenados en orden de dificultad. Los problemas del 1 al 66 están orientados a enseñanza básica y los problemas del 67 al 135 a enseñanza media.

Problema 1. Marcos tiene 9 dulces y Benjamín tiene 17 dulces. ¿Cuántos dulces necesita regalarle Benjamín a Marcos para que cada uno tenga el mismo número de dulces?

Problema 2. La mamá de Verónica compró 2 pizzas para el cumpleaños de su hija. La mamá cortó cada pizza en 8 partes, si en el cumpleaños había 14 niñas incluyendo a Verónica. ¿Cuántas rebanadas de pizza sobran si la madre le da un trozo de pizza a cada niña?

Problema 3. Hay 11 banderas ubicadas en línea recta a lo largo de una pista de carrera. La primera bandera está en la partida y la última en la meta. La distancia entre cada bandera es de 8 metros. ¿Cuál es la medida de la pista?

Problema 4. Mi paraguas tiene la palabra ANACLETO escrita en la parte interior como se muestra en la imagen (mirando desde abajo del paraguas). ¿Cuál de las siguientes imágenes muestra la parte exterior de mi paraguas (mirado desde arriba del paraguas)?



Problema 5. Un barco fue atacado por piratas. Los piratas se formaron en fila y uno por uno fueron ingresando al barco por una cuerda. El capitán

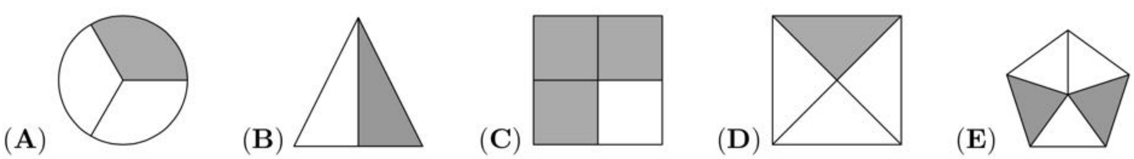
pirata estaba en el medio de la fila y en el octavo lugar desde el principio de la fila. ¿Cuántos piratas estaban en la fila?

Problema 6. Durante 3 días Tom, el gato, estuvo cazando ratones. Cada día Tom cazaba 2 ratones más de los que había cazado en el día anterior. En el tercer día Tom cazó el doble de ratones de los que cazó el primer día. ¿Cuántos ratones cazó en total Tom durante los 3 días?

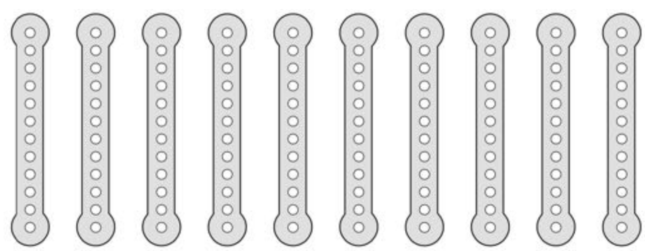
Problema 7. Ricardo y Sebastián están construyendo un iglú. Por cada hora que pasa, Ricardo hace 8 ladrillos de hielo y Sebastián hace dos ladrillos menos que Ricardo. ¿Cuántos ladrillos hacen juntos en tres horas?

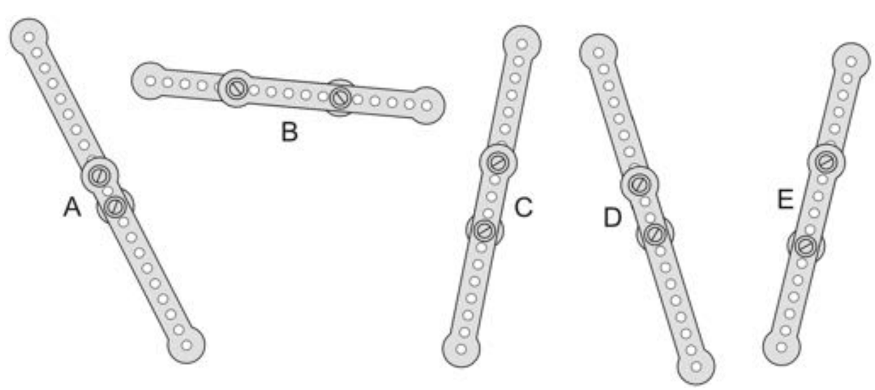
Problema 8. Nos fuimos a un campamento de verano ayer a las 4:32 PM y llegamos a nuestro destino de hoy a las 6:11 AM. ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

Problema 9. ¿En cuál de las siguientes figuras se ha sombreado la mitad?



Problema 10. Hernán tenía 10 tiras de metal iguales. Él ha formado pares de tiras, creando cinco tiras largas. ¿Qué tira es la más larga?



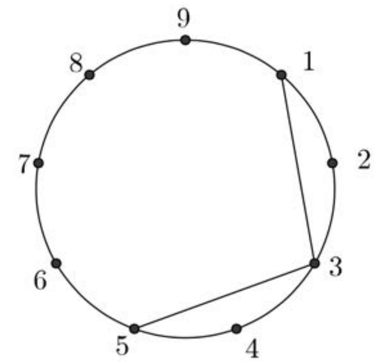


Problema 11. Si cada figura oculta un número y figuras iguales ocultan números iguales ¿Qué número se oculta detrás de cada figura?

$$\triangle + 4 = 7$$

$$\square + \triangle = 9$$

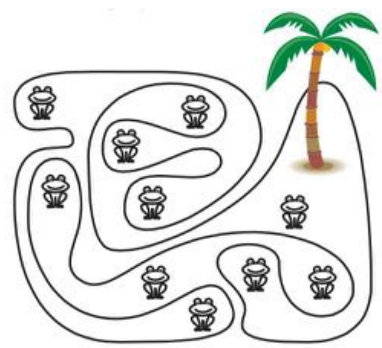
Problema 12. Dados 9 puntos en un círculo, se trazan segmentos a partir del punto 1 siempre saltando el punto vecino. Si realizamos este procedimiento hasta volver al primer punto, determine por cuántos puntos pasamos incluyendo el punto inicial.



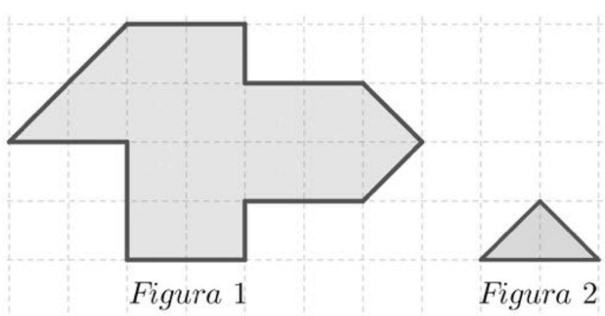
Problema 13. Lucas tenía 7 cangumonedas de \$1, 9 cangumonedas de \$2 y 3 cangubilletes de \$10. Él fue a una tienda en la que compró una pelota que costó \$37. ¿Cuánto dinero tiene Lucas al salir de la tienda?

Problema 14. Un número entero tiene dos dígitos. El producto de los dígitos de este número es 15, ¿Cuál es la suma de los dígitos de este número?

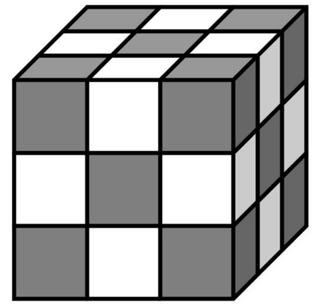
Problema 15. En la figura, vemos una isla con una costa muy extraña y varias ranas, ¿Cuántas ranas están en la isla?



Problema 16. Alonso ha recortado a partir de un papel cuadriculado la forma que se muestra en la Figura 1. Ahora él quiere recortar esta forma en triángulos idénticos como los de la Figura 2. ¿Cuántos triángulos podrá conseguir?



Problema 17. Luis tiene 7 manzanas y 2 plátanos. Él regala 2 manzanas a Mónica y Mónica le da a cambio algunos plátanos a Luis. Ahora Luis tiene la misma cantidad de manzanas que de plátanos. ¿Cuántos plátanos le dio Mónica a Luis?

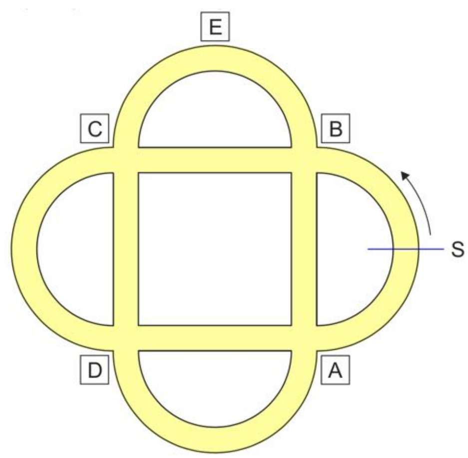


Problema 18. Juan construyó el cubo de la figura usando 27 pequeños cubos que son de color blanco o negro, de modo que siempre dos cubos pequeños que comparten una cara tienen distinto color. ¿Cuántos cubos blancos usó Juan?

Problema 19. En una carrera de velocidad,10 participantes llegaron a la final. Tomás superó a 3 corredores más de los que no lo alcanzó. ¿En qué lugar terminó Tomás?

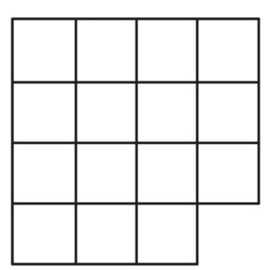
Problema 20. Silvana tiene 4 juguetes: un autito, una muñeca, una pelota y un barco. Silvana dejará sus juguetes en una repisa, de modo que el autito siempre esté entre el barco y el muñeco. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los juguetes en la repisa?

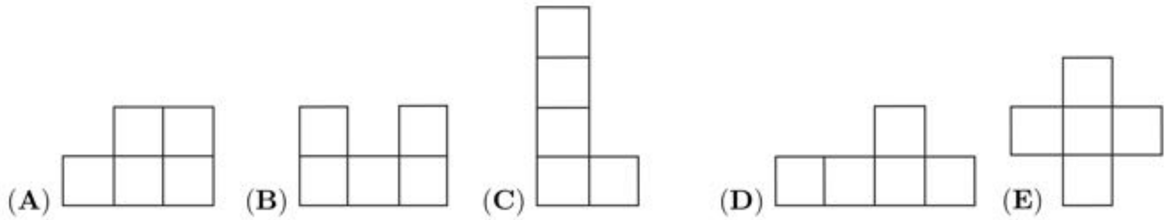
Problema 21. Pedro pasea por el parque en su bicicleta como muestra la figura, iniciando el recorrido en el punto S y siguiendo la dirección de la flecha. En el primer cruce se gira a la derecha; luego, en el siguiente cruce, se gira a la izquierda; luego, a la derecha; luego, a la izquierda otra vez y así sucesivamente en ese orden, ¿Por cuál de las letras del recorrido nunca va a pasar?



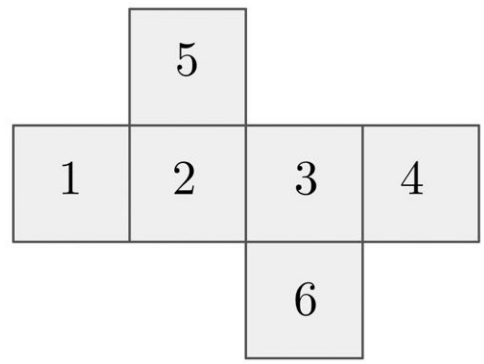
Problema 22. Hay 5 chinitas. Dos chinitas son amigas si el número de manchas que tienen difiere exactamente en una mancha. En el Día Canguro, cada una de las chinitas envía a cada una de sus amigas un saludo por SMS. ¿Cuántos saludos SMS fueron enviados?

Problema 23. La siguiente figura fue armada con tres piezas idénticas. ¿Cuál de las siguientes piezas permite esto?





Problema 24. En la figura se muestra la red de un cubo con caras numeradas, Sofía suma las parejas de números ubicados en las caras opuestas de este cubo . ¿Cuáles son los tres resultados obtenidos por Sofía?

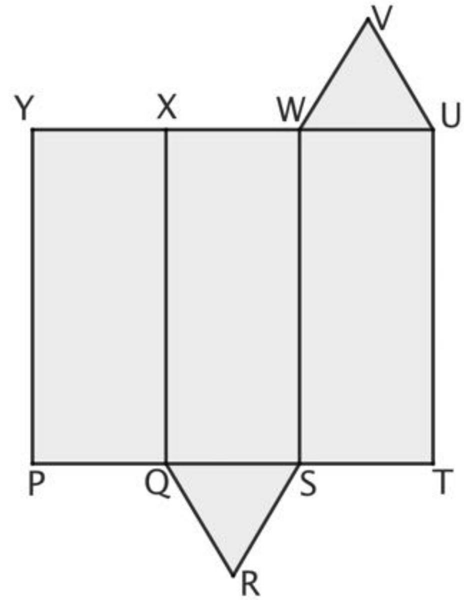


Problema 25. ¿Cuál de los siguientes números no es un número entero ?

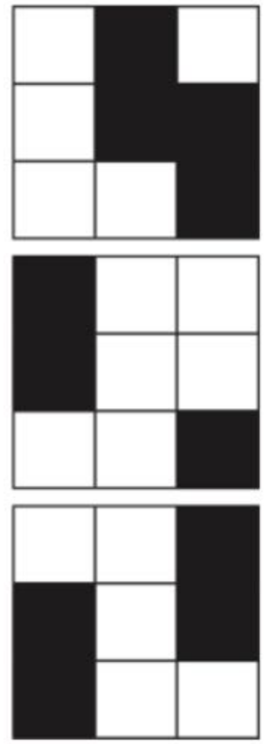
(A) $\frac{2012}{2}$ (B) $\frac{2013}{3}$ (C) $\frac{2014}{4}$ (D) $\frac{2015}{5}$ (E) $\frac{2016}{6}$

Problema 26. Un viaje desde Temuco a Valdivia pasando por la casa del abuelo Anacleto dura 130 minutos . La parte del viaje desde Temuco a la casa del abuelo dura 35 minutos. ¿Cuánto tiempo dura la parte del viaje desde la casa del abuelo hasta Valdivia?

Problema 27. El diagrama muestra la red de un prisma triangular. Al armar el prisma, ¿Qué arista coincide con la arista UV?

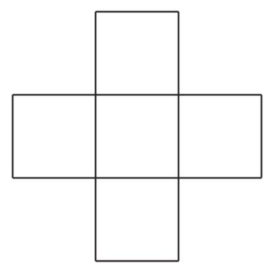


Problema 28. Un triángulo tiene lados de longitudes de 6, 10 y 11. Un triángulo equilátero tiene el mismo perímetro. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo equilátero?



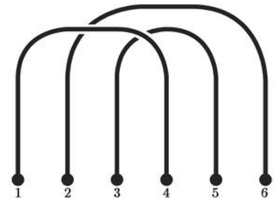
Problema 29. Tenemos tres hojas transparentes con los patrones mostrados en la figura. Estas solamente se pueden rotar, por lo que no se pueden voltear. Si ponemos exactamente una encima de la otra y miramos el montón desde arriba. ¿Cuál es el máximo número posible de casillas negras visto en el el montón?

Problema 30. Los números $2, 3, 5, 6$ y 7 se escriben en los casilleros de la cruz (ver figura), de modo que la suma de los números de la fila es igual a la suma de los números de la columna. ¿Cuál de estos números puede escribirse en el casillero del centro de la cruz?

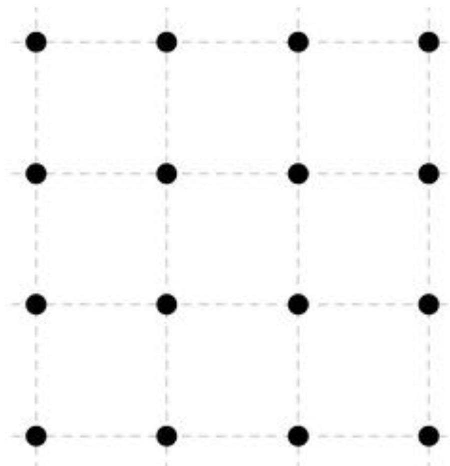


Problema 31. Raúl tiene diez cartas numeradas del 0 al 9. Él distribuyó estas cartas entre tres amigos: Fernando sacó 3 cartas, Gregorio, 4 cartas y Andrés, 3 cartas. Luego, Raúl multiplicó los números de las cartas que consiguió cada uno de los amigos y los resultados fueron: 0 para Fernando, 72 para Gregorio y 90 para Andrés. ¿Cuál es la suma de los números en las cartas que Fernando recibió?.

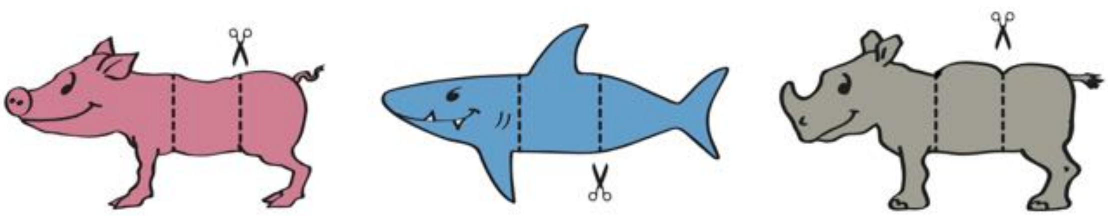
Problema 32. Tres cuerdas se ponen en el suelo como se muestra en la figura, quedando los extremos de las cuerdas alineados. Usted puede hacer una cuerda más grande agregando otros tres trozos de cuerda y uniendo los extremos de estos trozos a los trozos anteriores. ¿Cuál de las cuerdas que se muestran a continuación le dará una cuerda más grande?



Problema 33. Se tienen 16 puntos en una hoja cuadriculada. Si de estos puntos se eligen 4 puntos que formen un cuadrado. ¿Cuántos cuadrados de distintas áreas es posible hacer?

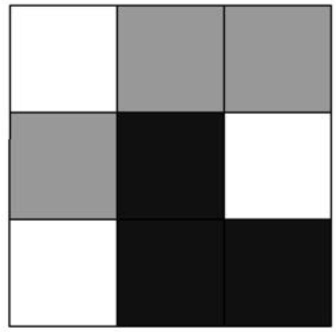


Problema 34. Simón dibuja un tiburón, un cerdo y un rinoceronte ,y los corta en tres piezas cada uno como se muestra en la figura. Entonces él puede hacer distintos animales mediante la combinación de una cabeza, un tronco y una parte inferior. ¿Cuántos animales distintos, reales o de fantasía puede crear Simón?



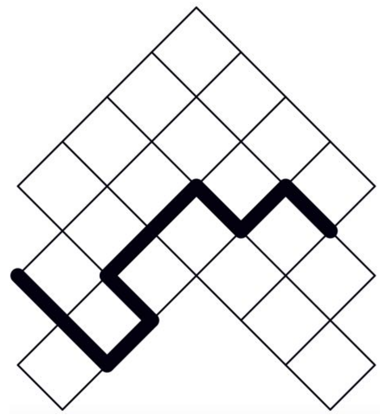
Problema 35. Ana, Beto, Carlos, David y Elisa cocinan galletas durante todo el fin de semana. Ana hizo 24 galletas; Beto, 25. Carlos, 26. David, 27; y Elisa, 28. Al terminar el fin de semana uno de ellos tenía el doble de las galletas que tenía el día sábado, uno 3 veces, uno 4 veces, uno 5 veces y uno 6 veces las galletas que tenía el día sábado. ¿Quién cocinó más galletas el día sábado?

Problema 36. Samuel pintó los 9 cuadrados con los colores negro, blanco y gris, como se muestra en la figura. Samuel quiere volver a pintar de manera que no queden dos cuadrados de un mismo color con un lado común, ¿Cuál es la mínima cantidad de cuadrados que se deben repintar?



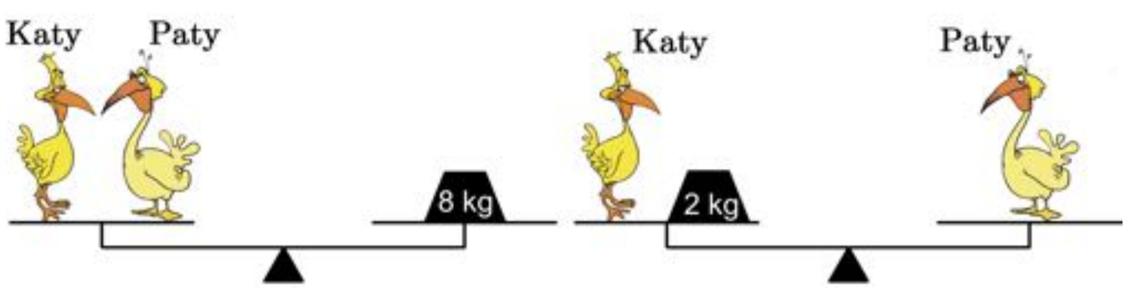
Problema 37. Hay 10 patas. 5 de estas patas ponen un huevo cada día, mientras que las otras 5 ponen un huevo día por medio. ¿Cuántos huevos ponen las 10 patas en un plazo de 10 días?

Problema 38. La figura muestra una tabla en la que cada cuadrado pequeño tiene un área de 4 cm^2. ¿Cuál es la longitud de la línea gruesa?

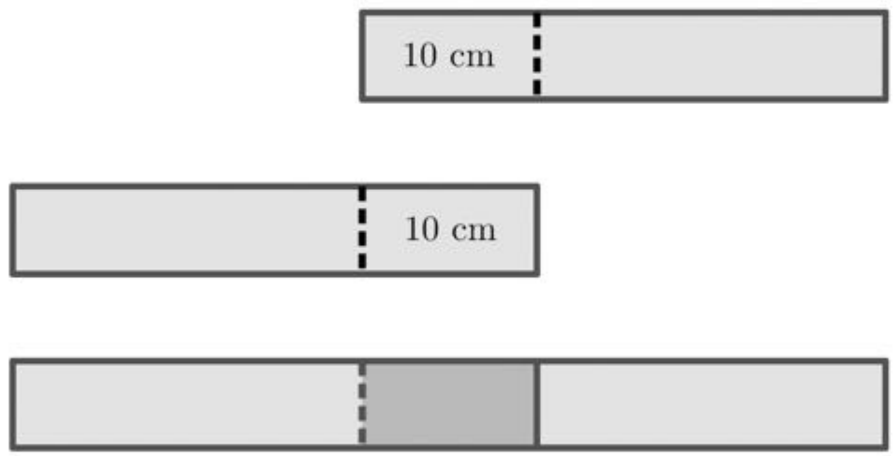


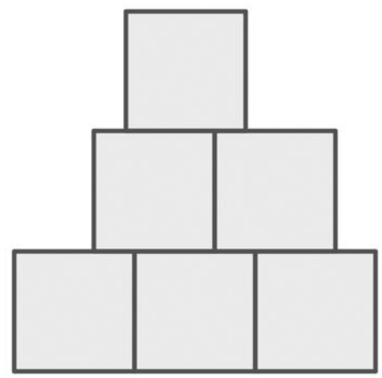
Problema 39. ¿Cuál de las siguientes fracciones es menor que 2? (A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{20}{9}$ (C) $\frac{21}{10}$ (D) $\frac{22}{11}$ (E) $\frac{23}{12}$

Problema 40. ¿Cuánto pesa Paty?



Problema 41. Alicia tiene 4 tiras de papel de la misma longitud, cada una con una solapa de 10 cm. Ella encola 2 de estas solapas y forma una tira de 50 cm de largo (pegando las solapas). Con las otras dos tiras de papel, ella quiere hacer una tira de 56 cm de largo. ¿Cuál debería ser el tamaño de la solapa que Alicia debe encolar?





Problema 42. Tomás utiliza 6 cuadrados del lado 1 y forma la figura de la imagen. ¿Cuál es el perímetro de esta figura?

Problema 43. Todos los días, Sofía anota la fecha y calcula la suma de los dígitos escritos. Por ejemplo, el 19 de marzo, lo escribe como 19/03 y calcula $1 + 9 + 0 + 3 = 13$. ¿Cuál es la suma más grande que ella calcula durante el año?

Problema 44. En la calle Anacleto, hay 9 casas en una fila y al menos una persona vive en cada casa. Cada vez que sumamos los habitantes de dos casas vecinas obtenemos un máximo de 6 personas. ¿Cuál es el mayor número de personas que podrían estar viviendo en la calle Anacleto?

Problema 45. Lucía y su madre nacieron en enero. El día 19 de marzo de 2015, Lucía suma el año de su nacimiento con el año de nacimiento de su madre, con su edad y con la edad de su madre. ¿Qué resultado obtiene Lucía?

Problema 46. El área de un rectángulo es 12 cm^2. Las longitudes de sus lados son números naturales. Entonces, el perímetro de este rectángulo podría ser: (A) 20 cm (B) 26 cm (C) 28 cm (D) 32 cm (E) 48 cm

Problema 47. En una bolsa hay 3 manzanas verdes, 5 manzanas amarillas, 7 peras verdes y 2 peras amarillas. Simón saca al azar frutas de la bolsa una por una. ¿Cuántas frutas debe sacar con el fin de estar seguro de que tiene al menos una manzana y una pera del mismo color?

Problema 48. En la siguiente suma, incógnitas iguales representan dígitos iguales e incógnitas distintas representan dígitos distintos. ¿Cuál es el dígito que está representado por la letra X?

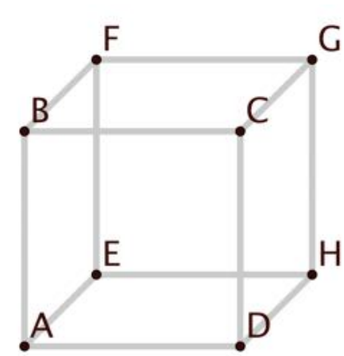
$$\begin{array}{rrr} & & X \\ & & X \\ + & Y & Y \\ \hline Z & Z & Z \end{array}$$

Problema 49. Marcela compró 3 juguetes. El primer juguete lo compró con la mitad de su dinero y \$1 más. Para el segundo juguete Marcela pagó la mitad del dinero restante y \$2 más. Por último, para el tercer juguete Marcela pagó la mitad del dinero restante y \$3 más. Si con este tercer juguete gastó todo su dinero, determine cuanto dinero tenía inicialmente.

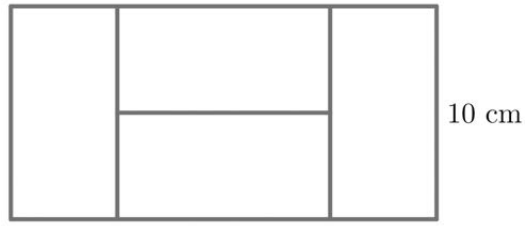
Problema 50. El número 100 se multiplica o bien por 2 o bien por 3, entonces al resultado le suma 1 o 2, y luego el nuevo resultado se divide ya sea por 3 o por 4 y el resultado final es un número natural. ¿Cuál es el resultado final?

Problema 51. En un número de 4 dígitos $ABCD$, los dígitos A, B, C, y D están en orden estrictamente creciente de izquierda a derecha. Con los dígitos B y D se forma un número de dos dígitos y con los dígitos A y C se forma un otro número de dos dígitos. ¿Cuál es la mayor diferencia posible entre el número de dos dígitos BD y el número de dos dígitos AC?

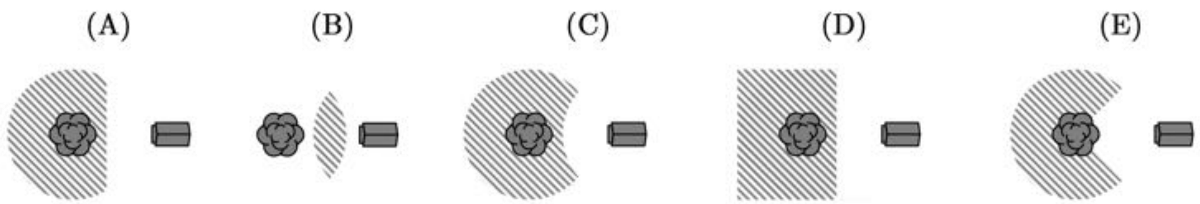
Problema 52. Catalina escribe algunos números entre 1 y 9 en cada cara de un cubo. Entonces, para cada vértice, suma los números de las tres caras que comparten ese vértice (por ejemplo, para el vértice B, suma los números de las caras $BCDA$, $BAEF$ y $BFGC$). Las cifras calculadas por María para los vértices C, D y E son 14, 16 y 24, respectivamente. ¿Qué número se agregará al vértice F?.



Problema 53. Con 4 rectángulos congruentes se forma un nuevo rectángulo como el que muestra la figura. Si la longitud del lado más corto de este nuevo rectángulo es 10 cm. Calcular el perímetro de dicho rectángulo.



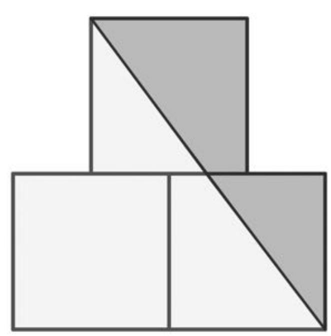
Problema 54. Cuando Simón, la ardilla, llega hasta el suelo, nunca va más allá de 5 metros desde el tronco de su árbol. Sin embargo, también se mantiene al menos a 5 metros de la casa del perro. ¿Cuál de las siguientes imágenes muestra con mayor precisión la forma del terreno donde Simón podría ir?



Problema 55. Un ciclista va a 5 metros por segundo. Las ruedas tienen un perímetro de 125 cm. ¿Cuántas vueltas completas hace cada rueda en 5 segundos?

Problema 56. En una clase, no hay dos niños que nacieron el mismo día de la semana y no hay dos niñas que nacieron en el mismo mes. Hoy, un niño nuevo o una niña nueva se unirá a esta clase, y una de estas dos condiciones dejará de ser cierta. A lo más, ¿Cuántos estudiantes (niños y niñas) había inicialmente en la clase?

Problema 57. En la figura, el centro del cuadrado superior está encima del borde común de los cuadrados inferiores. Cada cuadrado tiene lados de longitud 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Problema 58. Al interior de cada corchete de la siguiente igualdad

$$2\ [\ \ ]\ 0\ [\ \ ]\ 1\ [\ \ ]\ 5\ [\ \ ]\ 2\ [\ \ ]\ 0\ [\ \ ]\ 1\ [\ \ ]\ 5\ [\ \ ]\ 2\ [\ \ ]\ 0\ [\ \ ]\ 1\ [\ \ ]\ 5 = 0$$

se deben anotar signos $+$ o $-$ de modo que la igualdad se cumpla. ¿Cuál es el menor número de signos $+$ que se pueden anotar?

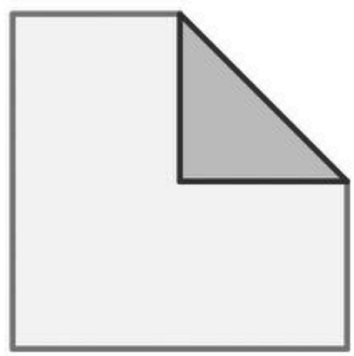
Problema 59. Durante una tormenta cayeron 15 litros de agua por metro cuadrado cayeron. ¿Cuánto aumentó el nivel del agua en una piscina al aire libre?

Problema 60. Un arbusto tiene 10 ramas. Cada rama tiene 5 hojas, o bien, tiene sólo 2 hojas y 1 flor. ¿Cuál de los siguientes números podría ser el número total de hojas que tiene el arbusto ?

(A) 45 (B) 39 (C) 37 (D) 31 (E) Ninguna de las anteriores.

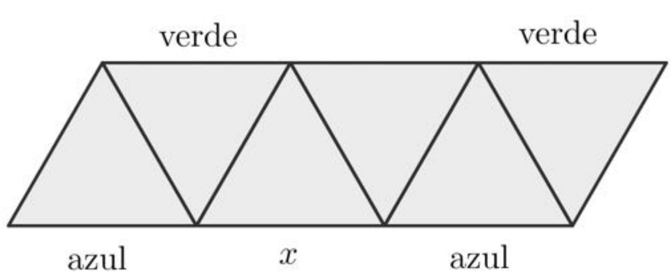
Problema 61. El puntaje promedio de los estudiantes que rindieron un examen de matemática fue de 6. Exactamente, el 60 % de los alumnos aprobó el examen. El puntaje promedio de los estudiantes que aprobaron el examen fue 8. ¿Cuál es el puntaje promedio de los estudiantes que reprobaron?

Problema 62. Una de las esquinas de un cuadrado se pliega a su centro para formar un pentágono irregular. Las áreas del pentágono y del cuadrado son enteros consecutivos. ¿Cuál es el área del cuadrado?



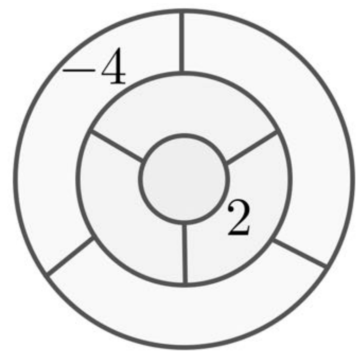
Problema 63. Raquel sumó las longitudes de tres de los lados de un rectángulo y obtuvo 44 cm. También Lidia sumó las longitudes de tres de los lados del mismo rectángulo y obtuvo 40 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

Problema 64. El diagrama muestra una secuencia de triángulos, e indica los colores de algunos segmentos. Cada triángulo debe estar formado por tres colores distintos, rojo, azul y verde. ¿De qué color se debe pintar el segmento x?



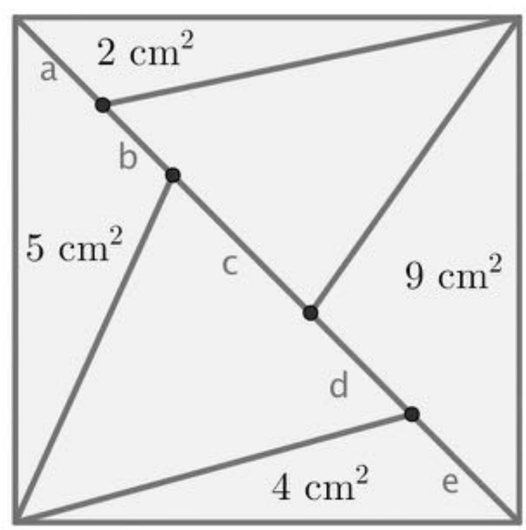
Problema 65. La profesora preguntó a cinco de sus alumnos, ¿cuántos de los cinco había realizado su tarea? Álvaro dijo que ninguno, Berta dijo que solo una, Camilo dijo exactamente dos, Daniela dijo exactamente tres y Eugenia dijo exactamente cuatro. La profesora sabía que aquellos estudiantes que no habían hecho su tarea no estaban diciendo la verdad, pero los que habían hecho su tarea estaban diciendo la verdad. ¿Cuántos de estos estudiantes habían hecho su tarea?

Problema 66. Romina quiere escribir un número en cada una de las siete regiones delimitadas en el diagrama. Dos regiones son vecinas si comparten parte de su límite. El número en cada región corresponde a la suma de los números de sus vecinos. Romina ya ha escrito los números en dos de las regiones. ¿Qué número debe que escribir en la región central?



Problema 67. Cinco enteros positivos (no necesariamente todos distintos) están escritos en cinco cartas. Pedro calcula la suma de los números en cada par de cartas. Obtiene solo tres diferentes totales, 57, 70, y 83. ¿Cuál es el mayor entero en alguna de estas cartas?

Problema 68. Un cuadrado de área 30 cm^2 está dividido en dos por una diagonal, sobre esta diagonal marcamos 4 puntos generando 5 segmentos en la diagonal, a, b, c, d, e. Luego, construimos triángulos, como se muestra en la figura. ¿Qué segmento de la diagonal es el más largo?



Problema 69. En un grupo de canguros, los dos canguros más livianos pesan el 25 % del peso total del grupo. Los tres canguros más pesados pesan el 60 % del peso total. ¿Cuántos canguros están en el grupo?

Problema 70. Camila puede utilizar algunos trozos de alambre de medida 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm y 7cm para hacer un cubo de alambre con aristas de longitud 1 cm sin solapamientos. ¿Cuál es el menor número de estas piezas que puede usar?

Problema 71. En $PQRS$ trapecio, los lados PQ y SR son paralelos el ángulo $PSR = 120°$ y $RS = SP = \frac{1}{3}PQ$. ¿Cuál es la medida del ángulo PQR?

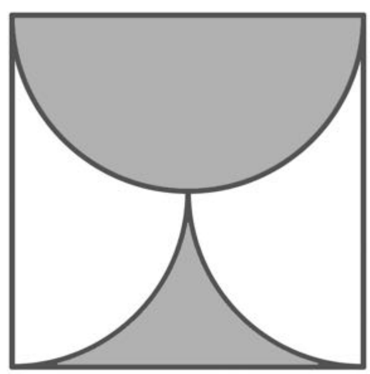
Problema 72. Cinco puntos se encuentran en una línea. Alex encuentra las distancias entre cada posible par de puntos, obteniendo las medidas 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 y 22, en ese orden. ¿Cuál es el valor de k?

Problema 73. Ayer anoté el número de teléfono de Eduardo. El número de teléfono en mi nota tiene seis dígitos, pero recuerdo que Eduardo, dijo que el número tenía siete dígitos. ¿Hasta cuántos números diferentes de teléfono puedo llegar a marcar hasta lograr comunicarme con Eduardo? (Tenga en cuenta que un número de teléfono puede comenzar con cualquier dígito, incluyendo 0.)

Problema 74. María divide 2015 por 1, por 2, por 3 y así sucesivamente, hasta dividirlo por 1000. Ella escribe abajo el resto para cada división. ¿Cuál es el más grande de estos restos?

Problema 75. Una madre lavaba la ropa y colgaba camisetas en línea en un cordel para tender ropa. Luego le pidió a sus hijos que colgaran un solo calcetín entre dos camisetas. Ahora hay 29 prendas de ropa en el cordel. ¿Cuántas camisetas hay?

Problema 76. La parte sombreada del cuadrado de lado a está delimitada por un semicírculo y dos arcos congruentes de círculo. Calcular el área sombreada.



Problema 77. Tres hermanas, Ana, Berta y Cindy compraron una bolsa de 30 galletas. Ana aportó con \$80 , Berta con \$50 y Cindy con \$20 y se repartieron las galletas en partes iguales, 10 para cada una. ¿Cuántas galletas más debería haber recibido Ana si se hubiera repartido las galletas proporcionalmente al dinero que cada una aportó?

Problema 78. ¿Cuál es el último dígito del número $2015^2+2015^0+2015^1+2015^5$?

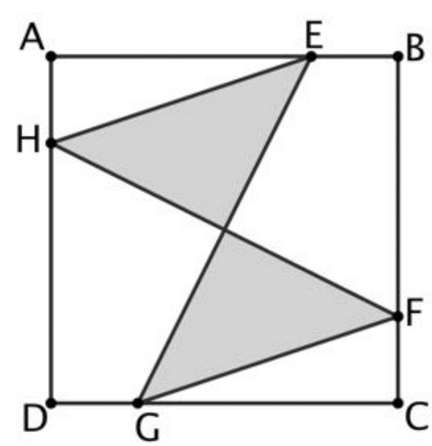
Problema 79. Hay 33 niños en una clase. Sus asignaturas favoritas son informática o educación física. Tres de los niños prefieren ambas asignaturas. El número de niños que prefieren solo la asignatura de informática es el doble de los que prefieren solo educación física. ¿Cuántos niños prefieren informática?

Problema 80. El Sr. Vela compró 100 velas. El enciende una vela cada día hasta que se quema, el Sr. Vela siempre hace una nueva vela con la cera de siete velas quemadas. ¿Durante cuántos días el Sr. Vela encenderá una vela completa (entera)?

Problema 81. Cada habitante del planeta Alero tiene al menos dos orejas. Tres habitantes nombrados Imi, Dimi y Trimi se reunieron en un cráter. Imi dijo: "Puedo ver 8 orejas". Dimi: "Veo 7 orejas". Trimi: "Puedo ver sólo 5 orejas". Si ninguno de ellos podía ver a sus propias orejas. ¿Cuántas orejas tiene Trimi?

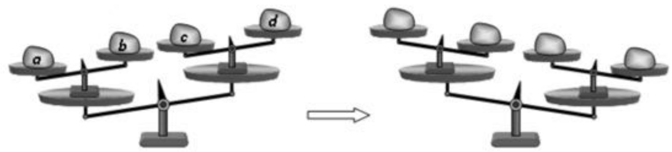
Problema 82. Un recipiente con la forma de un prisma rectangular y cuya base es un cuadrado de lado 10 cm, se llena con agua hasta una altura de h cm. Un cubo sólido de 2 cm de lado se pone en el recipiente. ¿Cuál es el mínimo valor de h cuando el cubo es completamente sumergido en el agua?

Problema 83. El cuadrado $ABCD$ tiene área 80. Los puntos E, F, G y H están en los lados del cuadrado de modo que $AE = BF = CG = DH$. Si $AE = 3EB$, cual es el área de la figura sombreada?



Problema 84. El producto de las edades (en números enteros) de un padre y un hijo es de 2015. ¿Cuál es la diferencia de sus edades?

Problema 85. Cuatro pesos a, b, c, d se colocan en una balanza (ver la figura). Cuando dos de las cargas fueron intercambiadas, la balanza cambia su posición como se muestra en la figura. ¿Qué cargas fueron intercambiadas?



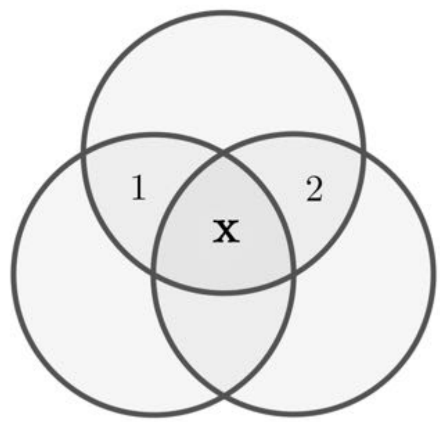
Problema 86. Si las dos raíces de la ecuación $x^2 - 85x + c = 0$ son números primos. ¿Cuál es el valor de la suma de los dígitos de c?

Problema 87. ¿Cuántos números enteros positivos de tres dígitos existen de modo que cualquiera de dos dígitos adyacentes difieran en 3 unidades?

Problema 88. ¿Cuál de los siguientes es un contraejemplo de la proposición "Si n es primo, entonces entre los números $n-2$ y $n+2$ sólo uno es primo"?

(A) $n = 11$ (B) $n = 19$ (C) $n = 21$ (D) $n = 29$ (E) $n = 37$

Problema 89. La figura muestra siete regiones delimitadas por tres círculos. En cada región se escribe un número. Se sabe que el número en cualquier región es igual a la suma de los números de todas sus regiones vecinas (dos regiones son vecinas si sus fronteras tienen más de un punto común). Dos de los números son conocidos (ver la figura). ¿Qué número está escrito en la región central?



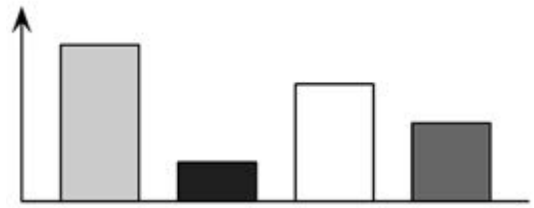
Problema 90. Juan tiene 3 diccionarios diferentes y dos novelas diferentes en un estante. ¿Cuántas maneras hay para organizar los diccionarios y las novelas si se quiere mantener los diccionarios juntos y las novelas juntas?

Problema 91. ¿Cuántos números de 2 dígitos se pueden escribir como la suma de exactamente seis diferentes potencias de 2 incluyendo 2^0?

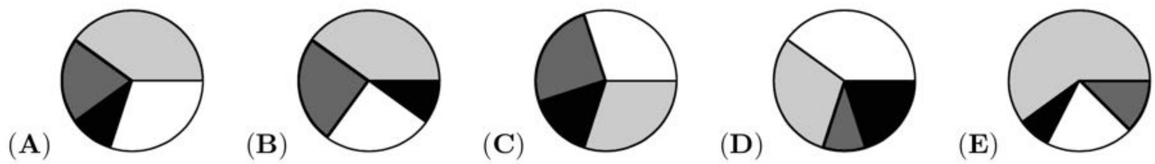
Problema 92. Andrea nació en 1997, su hermana menor Carla, en el año 2001. La diferencia de edad de las dos hermanas, en cualquier caso, es: (A) menos de 4 años (B) al menos 4 años (C) exactamente 4 años (E) no menos de 3 años (D) más de 4 años

Problema 93. Reduzca la expresión $(a-b)^5 + (b-a)^5$.

Problema 94. Daniela dibujó un gráfico de barras que representa la cantidad de las cuatro especies de árboles registradas durante una excursión de biología.



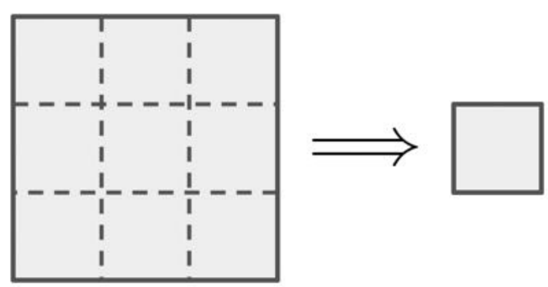
Juan piensa que un gráfico circular podría representar mejor las proporciones de las diferentes especies de árboles. ¿Cuál es el gráfico circular más pertinente?



Problema 95. Qué resultado obtenemos al dividir por 31 la suma de los 31 enteros del 2001 hasta el 2031.

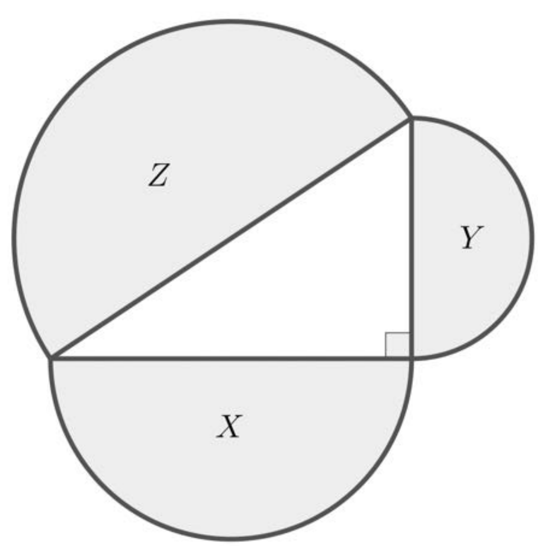
Problema 96. ¿Cuántas de las siguientes figuras se pueden trazar con una línea continua sin dibujar un segmento dos veces?

Problema 97. Un pedazo cuadrado de papel se dobla a lo largo de las líneas de puntos, una tras otra, en cualquier orden o dirección. Desde la pieza resultante se corta una esquina . Ahora el papel es desplegado. ¿Cuántos orificios hay en el papel?



Problema 98. Tres semicírculos tienen diámetros que son los lados de un triángulo rectángulo. Sus áreas son X cm^2, Y cm^2 y Z cm^2 ¿Cuál de los siguientes proposiciones es verdadera?

(A) $X + Y < Z$
(B) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$
(C) $X + Y = Z$
(D) $X^2 + Y^2 = Z^2$
(E) $X^2 + Y^2 = Z$



Problema 99. ¿Cuál de las siguientes es la lista completa del número de ángulos agudos que un cuadrilátero convexo puede tener?

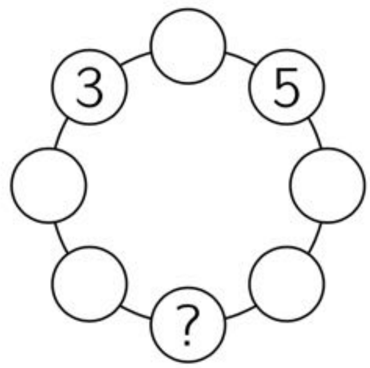
(A) $0, 1, 2$ (B) $0, 1, 2, 3$ (C) $0, 1, 2, 3, 4$ (D) $0, 1, 3$ (E) $1, 2, 3$

Problema 100. Calcular el valor de:

$$\sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \cdot 2015) + (2015 \div 2015)}$$

Problema 101. Determine en cuantas regiones queda dividido el plano cartesiano al trazar el eje x y las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 1$.

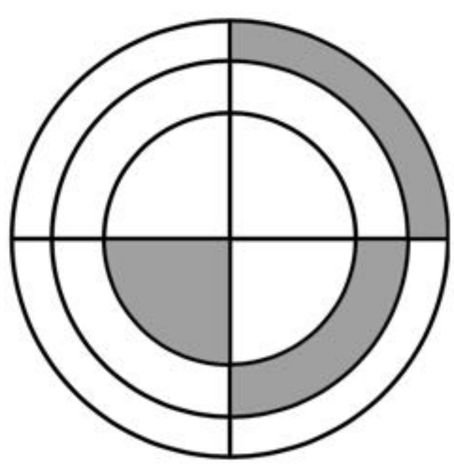
Problema 102. Elsa quiere escribir un número en cada círculo de la imagen de tal manera que cada número es la suma de sus dos vecinos. ¿Qué número debe escribir Elsa en el círculo con el signo de interrogación?



Problema 103. Dados cinco números enteros positivos distintos a, b, c, d, e, sabemos que $c \div e = b$, $a + b = d$ y $e - d = a$. ¿Cuál de los números a, b, c, d, e es el más grande?

Problema 104. La media geométrica de un conjunto de n números positivos se define como la raíz n-ésima del producto de esos números. La media geométrica de un conjunto de tres números es 3 y la media geométrica de otro conjunto de tres números es 12. ¿Cuál es la media geométrica del conjunto combinado de seis números?

Problema 105. En la figura que se muestra hay tres círculos concéntricos y dos diámetros perpendiculares. Si las tres figuras sombreadas tienen igual área y el radio del círculo pequeño es uno, ¿Cuál es el producto de los tres radios?

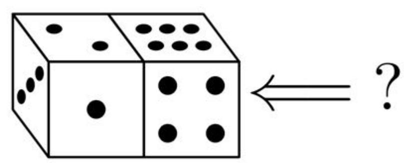


Problema 106. Un concesionario de automóviles compró dos autos. Vendió el primero obteniendo una ganancia del 40 % y el segundo obteniendo una ganancia del 60 %. La ganancia obtenida por los dos coches fue del 54 %. ¿Cuál es la razón de los precios pagados por el primer y el segundo auto?

Problema 107. Vivi tiene un dado con los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$ en sus caras. Tere tiene un dado especial con los números $2, 2, 2, 5, 5, 5$ en sus caras. Cuando Vivi y Tere lanzan los dados el que tiene el número más grande gana. Si los dos números son iguales es un empate. ¿Cuál es la probabilidad de que Tere gane?

Problema 108. Hay 2015 bolitas en un cajón. Las bolitas son numeradas del 1 al 2015. Se suman los dígitos de los números escritos en cada bolita. Las bolitas en que esta suma sea la misma se pintan del mismo color y bolitas con sumas diferentes, tienen diferentes colores. ¿Cuántos colores diferentes de bolitas hay en el cajón?

Problema 109. Para los dados estándar la suma de los números en las caras opuestas es 7. Hay dos dados idénticos como se muestran en la figura. ¿Qué número puede estar en el lado no visible?



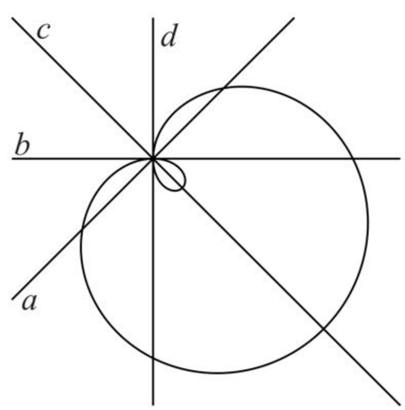
Problema 110. La siguiente es la tabla de multiplicar de los números del 1 al 10. ¿Cuál es la suma de los 100 productos presentes en la tabla?

$\times$	1	2	3	$\ldots$	10
1	1	2	3	$\ldots$	10
2	2	4	6	$\ldots$	20
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
10	10	20	30	$\ldots$	100

Problema 111. La curva en la figura está descrita por la ecuación:

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

¿Cuál de las líneas a, b, c, d representa el eje y?



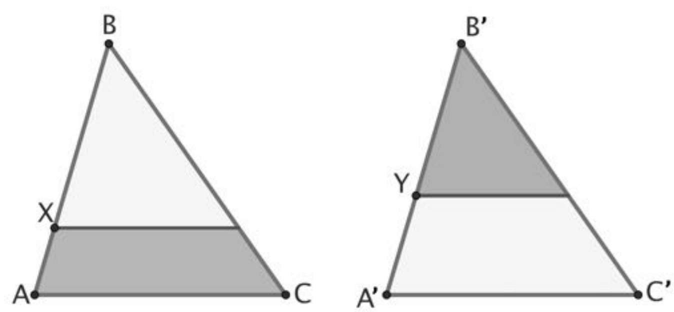
Problema 112. Al leer las siguientes cinco declaraciones de izquierda a derecha. ¿Cuál es la primera declaración verdadera?

(A): (C) es verdadero. (B): (A) es verdadera. (C): (E) es falsa. (D): (B) es falsa. (E): $1+1=2$

Problema 113. ¿Cuántos polígonos regulares existen tal que sus ángulos (en grados) son números enteros?

Problema 114. ¿Cuántos números enteros de 3 dígitos positivos pueden ser representados como la suma de exactamente nueve potencias diferentes de 2?

Problema 115. Dados los triángulos ABC y $A'B'C'$ congruentes, se traza un segmento paralelo a la base AC que pasa por X y un segmento paralelo a la base $A'C'$ que pasa por Y. Si las áreas de las regiones sombreadas son las mismas y los segmentos BX y XA están en la razón $4:1$. ¿En qué razón están los segmentos $B'Y$ y YA'?



Problema 116. En un triángulo rectángulo, la bisectriz de un ángulo agudo divide el lado opuesto en segmentos de longitud 1 y 2. ¿Cuál es la longitud de la bisectriz?

Problema 117. Determine de cuántas maneras se pueden elegir los dígitos a, b, c tal que $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$, donde $\overline{xy}$ representa un número de decena x y unidad y.

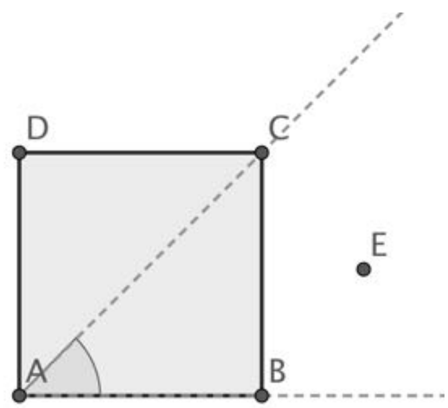
Problema 118. Cuando uno de los números $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ fue eliminado, la media de los números restantes fue 4,75. ¿Qué número fue eliminado?

Problema 119. Se escriben diez números distintos en una pizarra. Cualquier número que sea igual al producto de los otros nueve números, se subraya. ¿Cuántos números se pueden subrayar como máximo?.

Problema 120. Varios puntos se marcan en una línea, y se trazan todos los segmentos posibles entre parejas de estos puntos. Uno de los puntos se encuentra en 80 de estos segmentos (no como extremo); otro punto se encuentra en 90 de estos segmentos (no como extremo). ¿Cuántos puntos fueron marcados en la línea?.

Problema 121. ¿Cuántos números de dos dígitos xy existen tal que al sumarle el número de dos dígitos yx se obtiene un múltiplo de 7?

Problema 122. Dado un cuadrado $ABCD$ y un punto E al interior del ángulo CAB, se tiene que $AE = BD$ y que BE es perpendicular a BD. Determina la medida del ángulo BAE.



Problema 123. Dado un cuadrilátero $ABCD$ con $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $AB = BC$ y $AD + DC = 20$: Calcule su área.

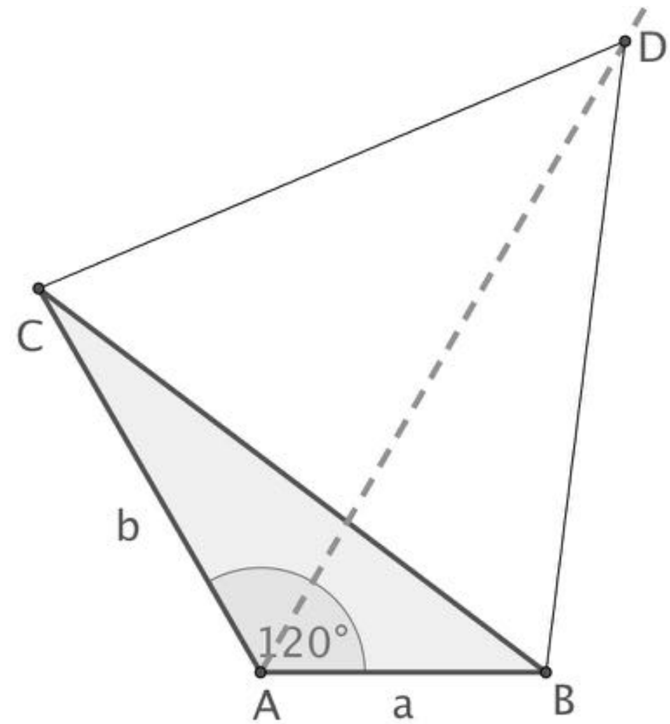
Problema 124. De los números naturales del 1 al 9 uno de ellos es borrado. De los 8 que quedan, 2 se multiplican y los restantes 6 se suman, resultando el producto igual a la suma. ¿De cuántas maneras se puede elegir el número que se borra al inicio?.

Problema 125. ¿Cuantos prismas rectos con dimensiones enteras x, y, z $(x \leq y \leq z)$ existen, tal que el área total es el doble de su volumen, ignorando la unidad de medida?

Problema 126. En un cuadrilátero convexo, 3 de sus lados y la diagonal miden 5 unidades. ¿Cuántos valores enteros puede tomar el cuarto lado?

Problema 127. 51 cuervos se sientan en fila en la rama de un árbol. Cuando un cuervo grazna su vecino de la derecha y su vecino de la izquierda salen volando. Cualquier cuervo que vuela regresa en 1 minuto a su lugar anterior y grazna de inmediato. Si el cuervo del extremo izquierdo de la rama es el primero que grazna. ¿Cuántas veces graznó el cuervo del extremo derecho durante los primeros 60 minutos?.

Problema 128. En un Triángulo ABC, donde $\angle BAC = 120°$, el punto D está ubicado en la bisectriz de $\angle BAC$, tal que $AD = AB + AC$. ¿Cuál es la medida del ángulo BDC?.



Problema 129. Cuatro personas A, B, C, D participan en una carrera. Después de la carrera se afirmó lo siguiente: A llegó primero, B llegó último, C no llegó último y D no llegó ni primero ni último. Si exactamente una de estas afirmaciones es falsa. ¿Quién llegó primero en la carrera?.

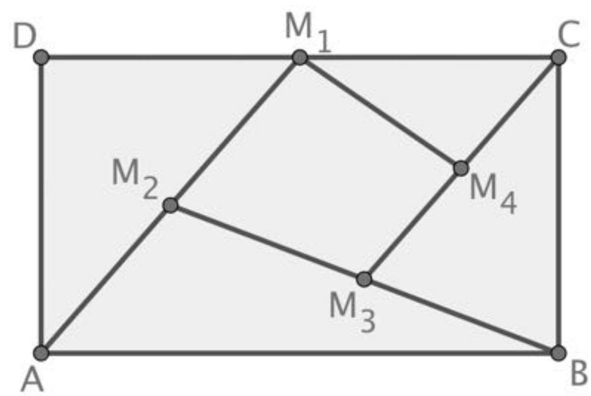
Problema 130. Mi mamá plantó cinco claveles de cinco colores distintos en cinco maceteros de la terraza, y los dejó en el siguiente orden de izquierda a derecha: rojo, morado, blanco, amarillo y naranjo. Aparentemente, alguien desordenó los maceteros, pues a la izquierda floreció el clavel blanco y en el centro está comenzando a florecer el clavel naranjo. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un clavel florezca en el lugar donde fue plantado?.

Problema 131. Dos amigos trotan a una velocidad constante y en línea recta entre los puntos A y B. Ellos comenzaron a trotar al mismo tiempo, uno desde A hasta B y el otro desde B hasta A. Ellos se cruzan por primera vez a 500 metros de distancia de A. Cuando uno de ellos llega al otro extremo, inmediatamente regresa trotando hacia su punto de partida, encontrándose por segunda vez a 250 metros de B. ¿Cuántos metros de distancia hay entre A y B?.

Problema 132. Un peón está en un tablero de ajedrez ilimitado en todas sus direcciones. En cada paso se mueve a una celda adyacente (no se mueve en diagonal). ¿Cuál es la probabilidad de que el peón después de 4 pasos realizados al azar caiga de nuevo en la celda inicial?.

Problema 133. 51 cuervos se sientan en fila en la rama de un árbol. Cuando un cuervo grazna su vecino de la derecha y su vecino de la izquierda salen volando. Cualquier cuervo que vuela regresa en 1 minuto a su lugar anterior y grazna de inmediato. Si el cuervo del extremo izquierdo de la rama graznó primero. ¿Cuántas veces en total los cuervos graznaron durante la hora transcurrida después de que graznó el cuervo del extremo izquierdo?.

Problema 134. En el rectángulo $ABCD$ que se muestra en la figura, M_1 es el punto medio de DC, M_2 es el punto medio de AM_1, M_3 es el punto medio de BM_2 y M_4 es el punto medio de CM_3. Encontrar la razón entre el área del cuadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ y el área del rectángulo $ABCD$.



Problema 135. 96 miembros de un club están de pie en un círculo grande. Empiezan diciendo los números $1, 2, 3$, etc., y a la vez, van dando vueltas al círculo. Cada miembro que dice un número par se sale del círculo y el resto continúa. Siguen de este modo hasta que queda sólo uno de los miembros. ¿Qué número dijo a este miembro en la primera ronda?

2

Soluciones

Problema 1. Marcos tiene 9 dulces y Benjamín tiene 17 dulces. ¿Cuántos dulces necesita regalarle Benjamín a Marcos para que cada uno tenga el mismo número de dulces?

Solución:

Esto equivale a juntar los $9 + 17 = 26$ dulces y repartirlos en partes iguales, es decir, 13 dulces para cada uno, por lo tanto, Benjamín necesita regalarle $17 - 13 = 4$ dulces a Marcos.

Problema 2. La mamá de Verónica compró 2 pizzas para el cumpleaños de su hija. La mamá cortó cada pizza en 8 partes, si en el cumpleaños había 14 niñas incluyendo a Verónica. ¿Cuántas rebanadas de pizza sobran si la madre le da un trozo de pizza a cada niña?

Solución:

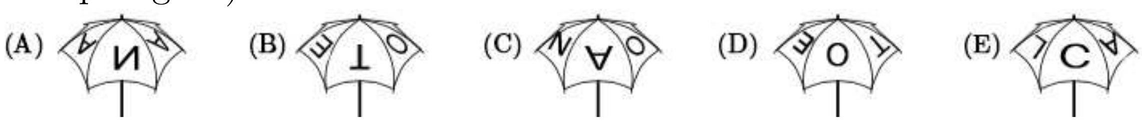
Como la madre de Verónica obtuvo 8 trozos de cada una de los pizzas, en total obtuvo $8 \cdot 2 = 16$ pedazos de pizzas. Como dichos trozos los repartió entre 14 niñas, entonces sobraron 2 trozos.

Problema 3. Hay 11 banderas ubicadas en línea recta a lo largo de una pista de carrera. La primera bandera está en la partida y la última en la meta. La distancia entre cada bandera es de 8 metros. ¿Cuál es la medida de la pista?

Solución:

Notemos que 11 banderas dividen la pista en 10 intervalos, por lo tanto, la pista mide $10 \cdot 8 = 80$ metros.

Problema 4. Mi paraguas tiene la palabra ANACLETO escrita en la parte interior como se muestra en la imagen (mirando desde abajo del paraguas). ¿Cuál de las siguientes imágenes muestra la parte exterior de mi paraguas (mirado desde arriba del paraguas)?



Solución:

Notemos que al ver el paraguas desde arriba, este tendrá la apariencia que muestra la figura, donde claramente la única alternativa verdadera es la (C).

Problema 5. Un barco fue atacado por piratas. Los piratas se formaron en fila y uno por uno fueron ingresando al barco por una cuerda. El capitán pirata estaba en el medio de la fila y en el octavo lugar desde el principio de la fila. ¿Cuántos piratas estaban en la fila?

Solución:

Si el capitán está en el octavo lugar, entonces hay 7 piratas delante de él, y como además está en el centro de la fila, se sabe que también hay 7 piratas detrás de él, por lo tanto, en la fila hay $7 + 1 + 7 = 15$ piratas.

Problema 6. Durante 3 días Tom, el gato, estuvo cazando ratones. Cada día Tom cazaba 2 ratones más de los que había cazado en el día anterior. En el tercer día Tom cazó el doble de ratones de los que cazó el primer día. ¿Cuántos ratones cazó en total Tom durante los 3 días?

$\boxed{\text{Solución:}}$

Como cada día Tom suma dos ratones más a su cacería, en el tercer día Tom capturó $2 + 2 = 4$ ratones más de los que había capturado en el primer día; Y como Tom el tercer día ha cazado el doble de ratones de los que cazó el primer día, se deduce que el primer día capturó 4, pues si r es el número de ratones que cazó el primer día, se tiene que $r+2+2 = 2r \Rightarrow r = 4$.

Finalmente el primer día cazó 4 ratones, el segundo día cazó $4 + 2 = 6$ ratones y el tercer día cazó $6 + 2 = 8$ ratones, por lo tanto, Tom cazó $4 + 6 + 8 = 18$ ratones durante los 3 días.

Problema 7. Ricardo y Sebastián están construyendo un iglú. Por cada hora que pasa, Ricardo hace 8 ladrillos de hielo y Sebastián hace dos ladrillos menos que Ricardo. ¿Cuántos ladrillos hacen juntos en tres horas?

$\boxed{\text{Solución:}}$

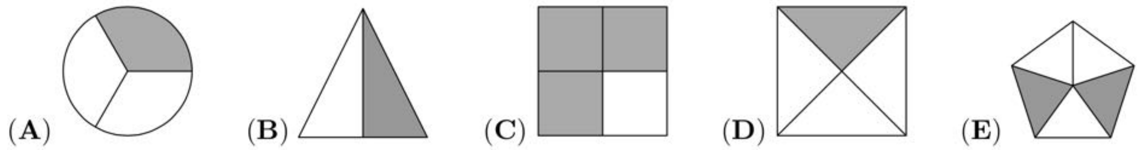
Ricardo en una hora hace 8 ladrillos, por lo tanto, en 3 horas hace $3 \cdot 8 = 24$ ladrillos. Seba en una hora hace $8 - 2 = 6$ ladrillos, por lo tanto, en 3 horas hace $3 \cdot 6 = 18$ ladrillos. Luego en tres horas hacen $24 + 18 = 42$ ladrillos.

Problema 8. Nos fuimos a un campamento de verano ayer a las 4:32 PM y llegamos a nuestro destino de hoy a las 6:11 AM. ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

$\boxed{\text{Solución:}}$

Desde las 4:32PM hasta las 5:00PM han transcurrido 28 minutos, desde las 5:00PM hasta las 00:00 AM han transcurrido 7 horas, desde las 00:00 AM hasta las 6:11AM, han transcurrido 6 horas 11 minutos; Por lo tanto, han transcurrido $7 + 6 = 13$ horas con $28 + 11 = 39$ minutos.

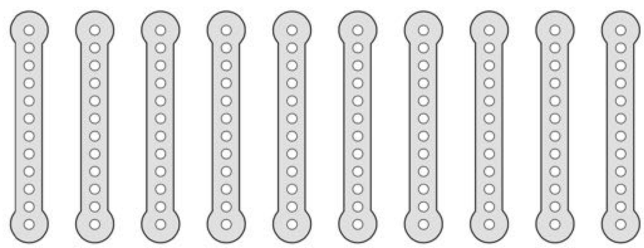
Problema 9. ¿En cuál de las siguientes figuras se ha sombreado la mitad?

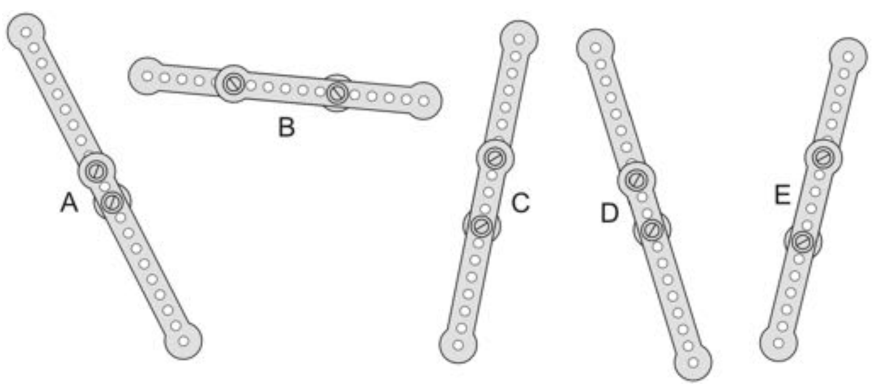


Solución:

Solo en la figura B se ha sombreado la mitad, en la figura A se ha sombreado $\frac{1}{3}$, en la figura C se han sombreado $\frac{3}{4}$, en la figura D se ha sombreado $\frac{1}{4}$ y en la figura E se han sombreado $\frac{2}{5}$.

Problema 10. Hernán tenía 10 tiras de metal iguales. Él ha formado pares de tiras, creando cinco tiras largas. ¿Qué tira es la más larga?





Solución:

La tira más larga será aquella en la cuál queden menos orificios sobrepuestos, es decir, la tira A.

Problema 11. Si cada figura oculta un número y figuras iguales ocultan números iguales ¿Qué número se oculta detrás de cada figura?

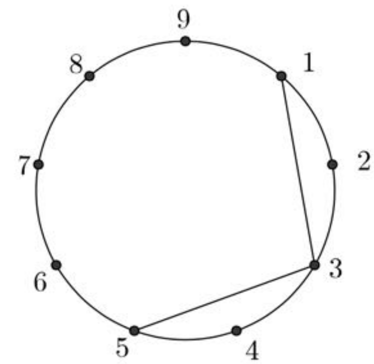
$$\triangle + 4 = 7$$

$$\square + \triangle = 9$$

Solución:

Como $\triangle + 4 = 7$, entonces $\triangle = 3$. Si $\triangle = 3$, tenemos en la segunda igualdad que $\square + 3 = 9$, entonces $\square = 6$.

Problema 12. Dados 9 puntos en un círculo, se trazan segmentos a partir del punto 1 siempre saltando el punto vecino. Si realizamos este procedimiento hasta volver al primer punto, determine por cuántos puntos pasamos incluyendo el punto inicial.



Solución:

Como se trata de saltarnos un punto, si comenzamos por el punto 1, trazamos el segmento hasta el punto 3, luego, hasta el punto 5; luego, al 7 y al 9; pero de este modo no hemos llegado hasta el punto 1, por lo tanto, seguimos el trazado hasta el punto 2, luego, hasta el punto 4; luego, al 6 y al 8, terminando el trazado en el punto 1. Es decir, pasamos por los 9 puntos del círculo.

Problema 13. Lucas tenía 7 cangumonedas de \$1, 9 cangumonedas de \$2 y 3 cangubilletes de \$10. Él fue a una tienda en la que compró una pelota que costó \$37. ¿Cuánto dinero tiene Lucas al salir de la tienda?

Solución:

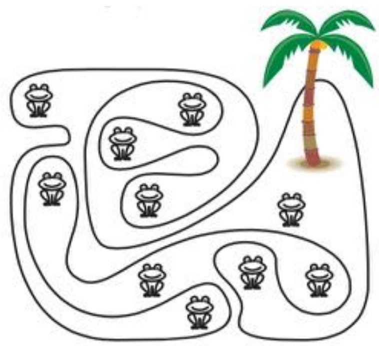
Como tenía 7 cangumonedas de \$1, 9 cangumonedas de \$2 y 3 cangubilletes de \$10, Lucas tenía $7 + 18 + 30 = 55$ pesos. Como él compro una pelota en \$37, entonces al salir de la tienda Lucas tiene $55 - 37 = 18$ pesos.

Problema 14. Un número entero tiene dos dígitos. El producto de los dígitos de este número es 15, ¿Cuál es la suma de los dígitos de este número?

Solución:

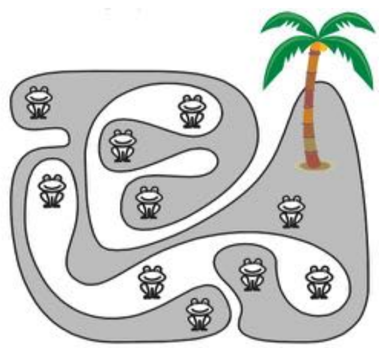
Notemos que la descomposición 15 es $15 = 5 \cdot 3$, o $15 = 15 \cdot 1$, por lo tanto, los dígitos de dicho número son 5 y 3 cuya suma es 8.

Problema 15. En la figura, vemos una isla con una costa muy extraña y varias ranas, ¿Cuántas ranas están en la isla?



Solución:

Para visualizar de mejor manera cuántas ranas hay en la isla, vamos a sombrear la isla. De este modo, nos damos cuenta que hay 6 ranas en la isla.



Problema 16. Alonso ha recortado a partir de un papel cuadriculado la forma que se muestra en la Figura 1. Ahora él quiere recortar esta forma en triángulos idénticos como los de la Figura 2. ¿Cuántos triángulos podrá conseguir?

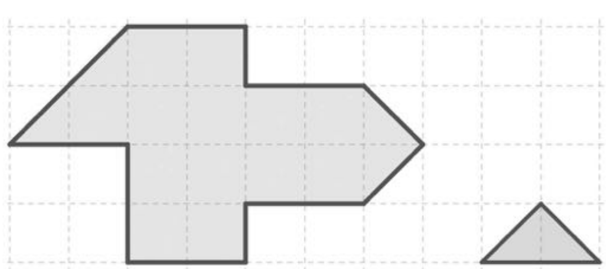
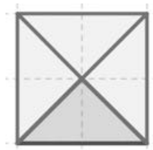
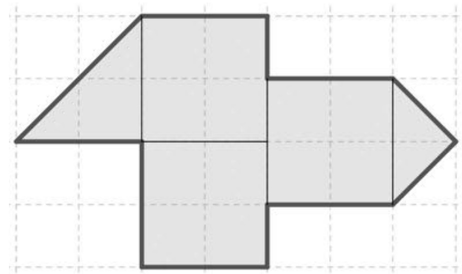


Figura 1 *Figura 2*

Solución:



Observemos que el tríangulo de la Figura 2 es la cuarta parte de cuadrado de lado 2, el cual nos ayuda a completar la figura.

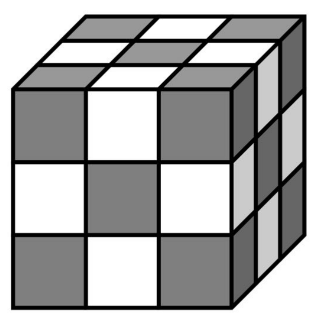


Luego podemos rellenar la figura con tres cuadrados que equivalen a $3 \cdot 4 = 12$ triángulos, pudiendo aún rellenar la figura con dos triángulos a la izquierda y un triángulo a la derecha. Finalmente, a partir de la figura se pueden obtener $12 + 2 + 1 = 15$ triángulos como los de la Figura 2.

Problema 17. Luis tiene 7 manzanas y 2 plátanos. Él regala 2 manzanas a Mónica y Mónica le da a cambio algunos plátanos a Luis. Ahora Luis tiene la misma cantidad de manzanas que de plátanos. ¿Cuántos plátanos le dio Mónica a Luis?

Solución:

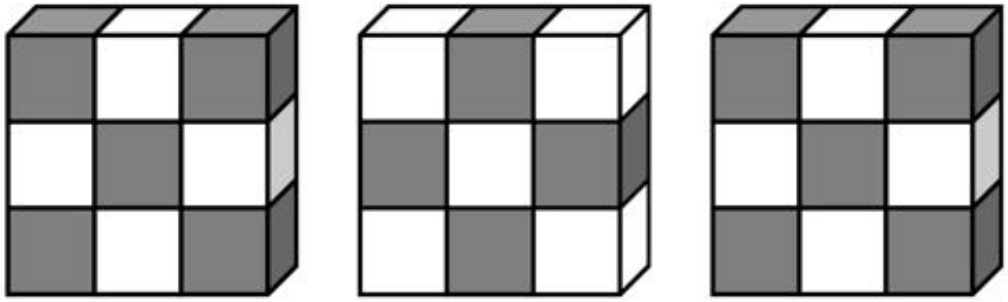
Luis tiene 7 manzanas y 2 plátanos. Cuando le da 2 manzanas a Mónica, queda con 5 manzanas y 2 plátanos. Como Luis ahora tiene la misma cantidad de manzanas que de plátanos, entonces tiene 5 plátanos, por consiguiente, Mónica le dio $5 - 2 = 3$ plátanos.



Problema 18. Juan construyó el cubo de la figura usando 27 pequeños cubos que son de color blanco o negro, de modo que siempre dos cubos pequeños que comparten una cara tienen distinto color. ¿Cuántos cubos blancos usó Juan?

Solución:

Para contar de la cantidad de cubos blancos que usó Juan dibujaremos la sección frontal, media y trasera del cubo, obteniendo $4 + 5 + 4 = 13$ cubos blancos.



Problema 19. En una carrera de velocidad,10 participantes llegaron a la final. Tomás superó a 3 corredores más de los que no lo alcanzó. ¿En qué lugar terminó Tomás?

Solución:

Notemos que los corredores que Tomás no alcanzó y los corredores que Tomás sí alcanzó suman un total de 9 corredores, pues él no cuenta. Como Tomás superó a 3 corredores más de los que no lo alcanzó, entonces Tomás superó a 6 corredores y no pudo alcanzar a 3 corredores, terminando en cuarto lugar.

Usando ecuaciones se tiene: Sea x la cantidad de corredores a los que Tomás no pudo alcanzar, como Tomás superó a 3 corredores más de los que no lo alcanzó, entonces Tomás superó a $x + 3$ participantes, luego:

$$x + x + 3 = 9 \Longrightarrow 2x = 6 \Longrightarrow x = 3$$

Problema 20. Silvana tiene 4 juguetes: un autito, una muñeca, una pelota y un barco. Silvana dejará sus juguetes en una repisa, de modo que el autito siempre esté entre el barco y el muñeco. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los juguetes en la repisa?

Solución:

Como Silvana quiere que el autito (A) siempre esté entre el barco (B) y el muñeco (M), entonces, las únicas dos posibles posiciones para ellos tres son:

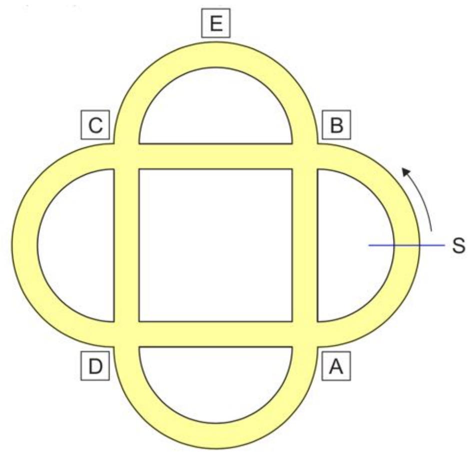
$$BAM \qquad MAB$$

Por lo tanto, en cada uno de estos casos la pelota (P) puede ubicarse o a la izquierda o a la derecha. Luego, las posibles posiciones son:

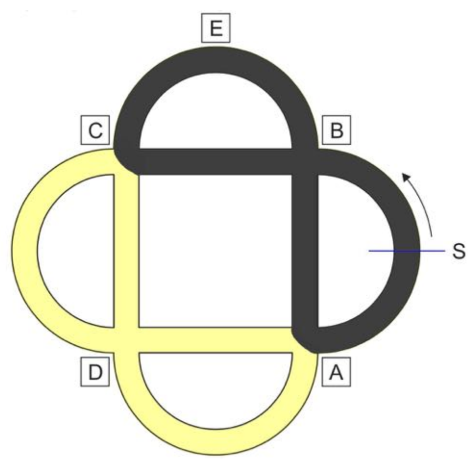
$$BAM - P \qquad P - BAM \qquad MAB - P \qquad P - MAB$$

Finalmente, hemos encontrado 4 formas de ordenar los juguetes en la repisa.

Problema 21. Pedro pasea por el parque en su bicicleta como muestra la figura, iniciando el recorrido en el punto S y siguiendo la dirección de la flecha. En el primer cruce se gira a la derecha; luego, en el siguiente cruce, se gira a la izquierda; luego, a la derecha; luego, a la izquierda otra vez y así sucesivamente en ese orden, ¿Por cuál de las letras del recorrido nunca va a pasar?

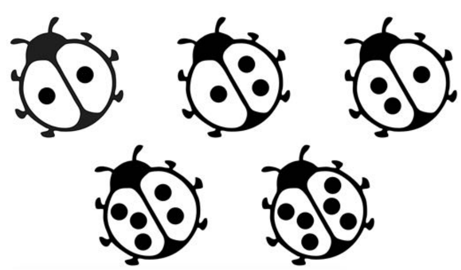


Solución:



Siguiendo el recorrido enunciado, Pedro siempre pasará solo por el camino sombreado, por lo tanto, Pedro nunca pasará por la letra D.

Problema 22. Hay 5 chinitas. Dos chinitas son amigas si el número de manchas que tienen difiere exactamente en una mancha. En el Día Canguro, cada una de las chinitas envía a cada una de sus amigas un saludo por SMS. ¿Cuántos saludos SMS fueron enviados?

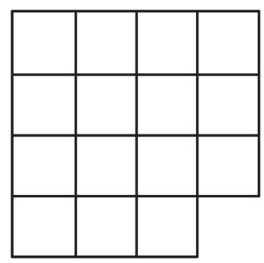


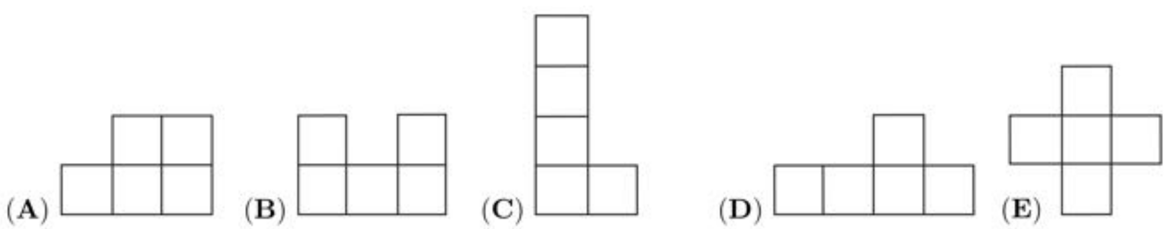
Solución:

- La chinita de 2 manchas envía 2 SMS, uno a cada chinita de 3 manchas.
- Las chinitas de 3 manchas envían 1 SMS cada una, a la chinita de 2 manchas.
- La chinitas de 5 manchas envía 1 SMS, a la chinita de 6 manchas.
- La chinitas de 6 manchas envía 1 SMS, a la chinita de 5 manchas.

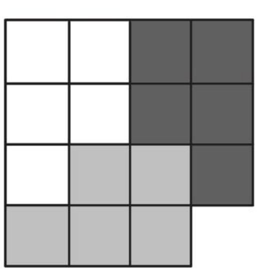
En total se envían $2+2+1+1=6$ sms.

Problema 23. La siguiente figura fue armada con tres piezas idénticas. ¿Cuál de las siguientes piezas permite esto?



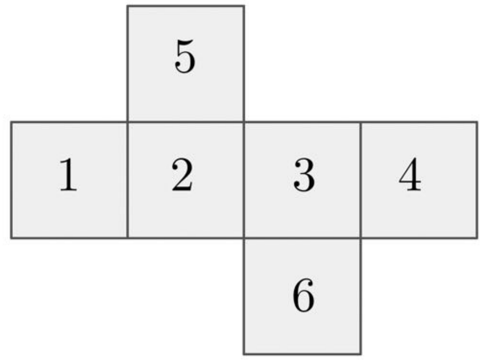


Solución:

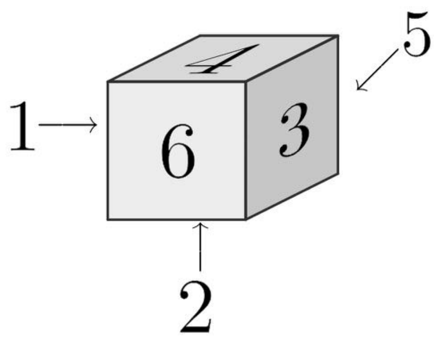


Solo la pieza A permite armar la figura, como se muestra a continuación. Se deja abierto al lector el comprobar que las otras piezas no permiten armar la figura.

Problema 24. En la figura se muestra la red de un cubo con caras numeradas, Sofía suma las parejas de números ubicados en las caras opuestas de este cubo . ¿Cuáles son los tres resultados obtenidos por Sofía?



Solución:



Al armar el cubo las caras que quedan opuestas son las caras 1 y 3, 2 y 4, 5 y 6, donde $1+3=4$, $2+4=6$, $5+6=11$. Finalmente los tres resultados obtenidos por Sofía son 4, 6 y 11.

Problema 25. ¿Cuál de los siguientes números no es un número entero ?

(A) $\dfrac{2012}{2}$ (B) $\dfrac{2013}{3}$ (C) $\dfrac{2014}{4}$ (D) $\dfrac{2015}{5}$ (E) $\dfrac{2016}{6}$

Solución:

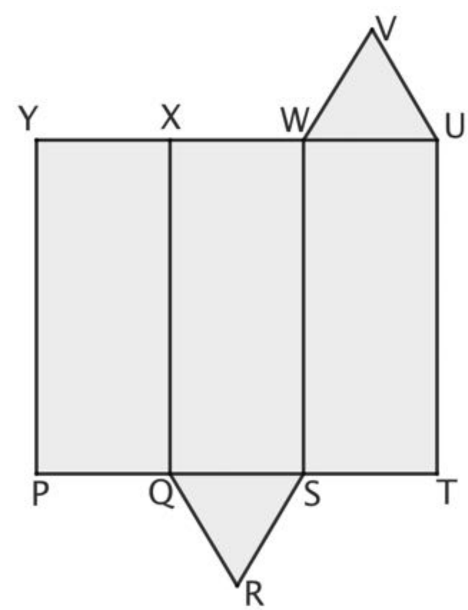
Notemos que 2012 es par, por lo tanto, es divisible por 2, luego $\dfrac{2012}{2}$ es entero. Los dígitos de 2013 suman 6, por lo tanto, es divisible por 3, luego $\dfrac{2013}{3}$ es entero. El número 2015 termina en 5, por lo tanto, es divisible por 5, luego $\dfrac{2015}{5}$ es entero. Los dígitos de 2016 suman 9 (múltiplo de 3), además, es par, por consiguiente, es divisible por 6; luego, $\dfrac{2016}{6}$ es entero. Por último, $2014 \div 4 = 1007 \div 2$ y 1007 no es par, luego, $\dfrac{2014}{4}$ no es entero.

Problema 26. Un viaje desde Temuco a Valdivia pasando por la casa del abuelo Anacleto dura 130 minutos . La parte del viaje desde Temuco a la casa del abuelo dura 35 minutos. ¿Cuánto tiempo dura la parte del viaje desde la casa del abuelo hasta Valdivia?

Solución:

Claramente, el tiempo que dura la parte del viaje desde la casa del abuelo hasta Valdivia, es la diferencia entre el tiempo total y el tiempo que ya recorrió, es decir $130 - 35 = 95$ minutos.

Problema 27. El diagrama muestra la red de un prisma triangular. Al armar el prisma, ¿Qué arista coincide con la arista UV?



Solución:

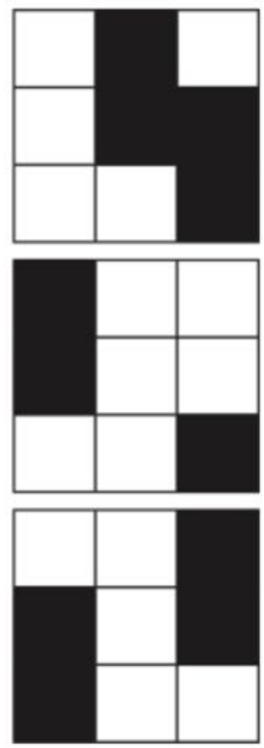
Al plegar la red, comenzamos uniendo el lado UT con YP; luego, en la parte superior se une el punto V con el punto X, obligando a que coincidan los lados XW con WV y los lados YX con VU.

Problema 28. Un triángulo tiene lados de longitudes de 6, 10 y 11. Un triángulo equilátero tiene el mismo perímetro. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo equilátero?

Solución:

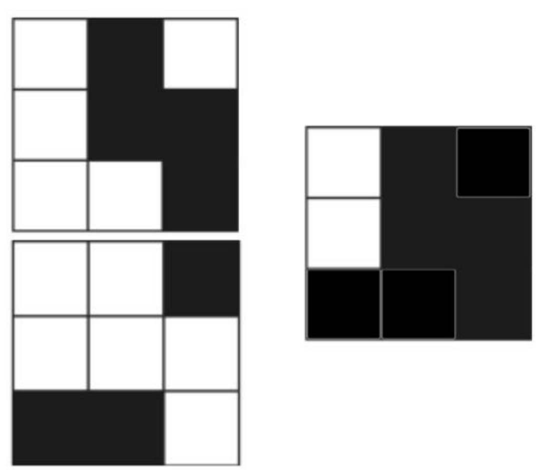
El perímetro del triangulo dado es $6 + 10 + 11 = 27$, por lo que el perímetro del triángulo equilátero también es 27. Luego, como este tiene todos sus lados iguales, la longitud del lado es $27 \div 3 = 9$ unidades.

Problema 29. Tenemos tres hojas transparentes con los patrones mostrados en la figura. Estas solamente se pueden rotar, por lo que no se pueden voltear. Si ponemos exactamente una encima de la otra y miramos el montón desde arriba. ¿Cuál es el máximo número posible de casillas negras visto en el el montón?

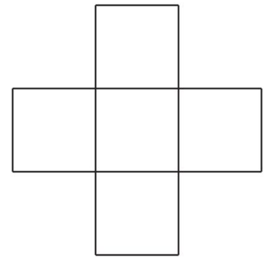


Solución:

Utilizando las dos primeras hojas, el arreglo óptimo sería girar en sentido antihorario la segunda figura en 90° y superponer estas dos hojas, de modo que se vean 7 casillas negras tal como se muestra en la figura. Ahora, con la tercera hoja intentaremos llenar las casillas que aún siguen transparentes, pero, solo se puede cubrir una de ellas, alcanzando un máximo de 8 casillas negras.



Problema 30. Los números $2, 3, 5, 6$ y 7 se escriben en los casilleros de la cruz (ver figura), de modo que la suma de los números de la fila es igual a la suma de los números de la columna. ¿Cuál de estos números puede escribirse en el casillero del centro de la cruz?



Solución:

Notemos que $2+3+5+6+7 = 23$, y 23 es impar. Sea S la suma de los números de la columna, la que es igual la suma de los números de la fila, por lo tanto, al sumar el resultado de la columna con el resultado de la fila obtenemos $2S$. Notemos que en $2S$ uno de estos números aparece 2 veces en la suma. Como 23 es impar, y $2S$ es par, necesariamente el número del centro debe ser impar para que al sumarse dos veces el resultado sea par.

Por otra parte, el número 3 no puede estar en el centro, de ser así la fila debería sumar $(23+3) \div 2 = 13$ y la columna debería sumar 13, lo que es imposible con los números dados. Si el número del centro fuera el 5, la fila debería sumar $(23+5) \div 2 = 14$ y la columna debería sumar 14, lo cual es posible $2+5+7$ y $3+5+6$. Si el número del centro fuera el 7, la fila debería sumar $(23+7) \div 2 = 15$ y la columna debería sumar 15, lo cual es posible $3+7+5 = 15$ y $2+7+6 = 15$. Luego en el centro puede estar el 5 o el 7.

Problema 31. Raúl tiene diez cartas numeradas del 0 al 9. Él distribuyó estas cartas entre tres amigos: Fernando sacó 3 cartas, Gregorio, 4 cartas y Andrés, 3 cartas. Luego, Raúl multiplicó los números de las cartas que consiguió cada uno de los amigos y los resultados fueron: 0 para Fernando, 72 para Gregorio y 90 para Andrés. ¿Cuál es la suma de los números en las cartas que Fernando recibió?.

Solución:

Claramente Fernando tiene la carta 0, pues el producto de los números de sus cartas es cero. Como Gregorio sacó 4 cartas, entonces factorizamos 72 en 4 números menores o iguales que 9 y distintos:

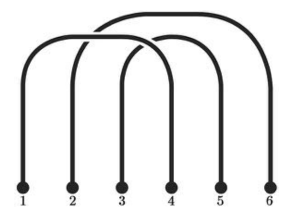
$$72 = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 \text{ o bien } 72 = 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 1$$

Como Andrés sacó 3 cartas, entonces factorizamos 90 en 3 números distintos menores o iguales que 9:

$$90 = 5 \cdot 2 \cdot 9 \text{ o bien } 90 = 3 \cdot 5 \cdot 6$$

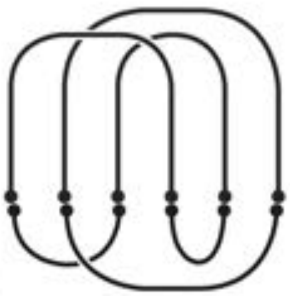
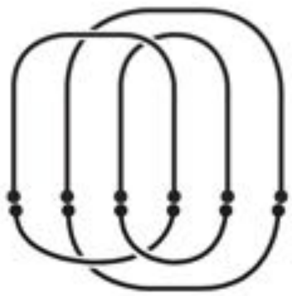
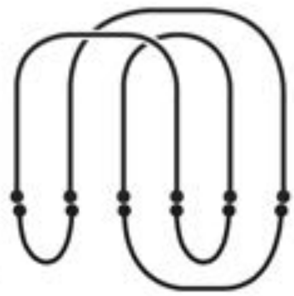
Si Gregorio sacó las cartas $3, 4, 6, 1$, entonces, Andrés sacó las cartas $9, 5, 2$, dejandole a Fernando las cartas $0, 7$ y 8. Del mismo modo si Gregorio sacó las cartas $2, 4, 9, 1$, entonces, Andrés sacó las cartas $3, 5, 6$, dejandole a Fernando las cartas $0, 7$ y 8. Por lo tanto, de cualquier manera, la suma de las cartas de Fernando es 15.

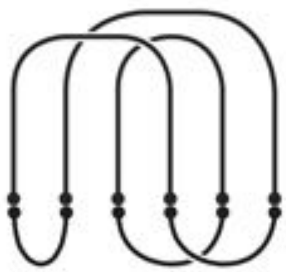
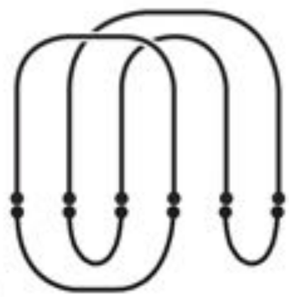
Problema 32. Tres cuerdas se ponen en el suelo como se muestra en la figura, quedando los extremos de las cuerdas alineados. Usted puede hacer una cuerda más grande agregando otros tres trozos de cuerda y uniendo los extremos de estos trozos a los trozos anteriores. ¿Cuál de las cuerdas que se muestran a continuación le dará una cuerda más grande?

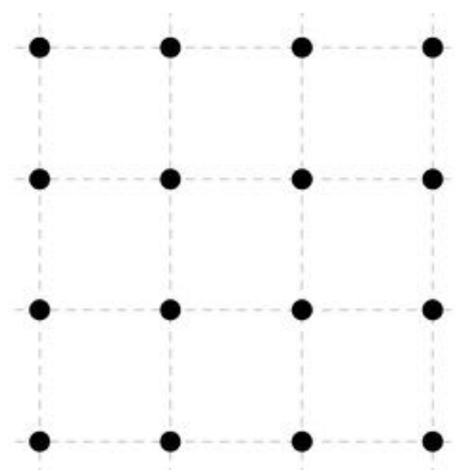


Solución:

Lo más directo es dibujar cada uno de los 6 posibles lazos y recorrerlos completamente, dándonos cuenta que la alternativa que deja solo un lazo y por lo tanto el más grande es la alternativa C.

(A)  (B)  (C) 

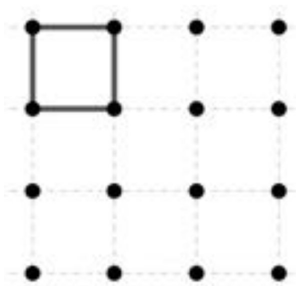
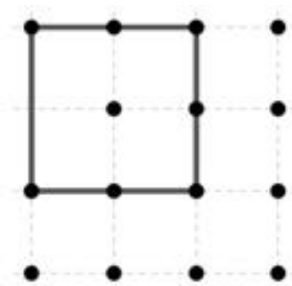
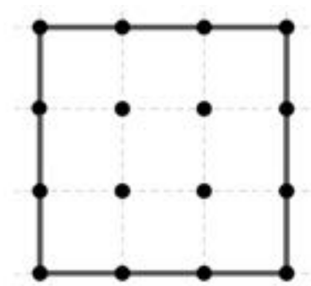
(D)  (E) 



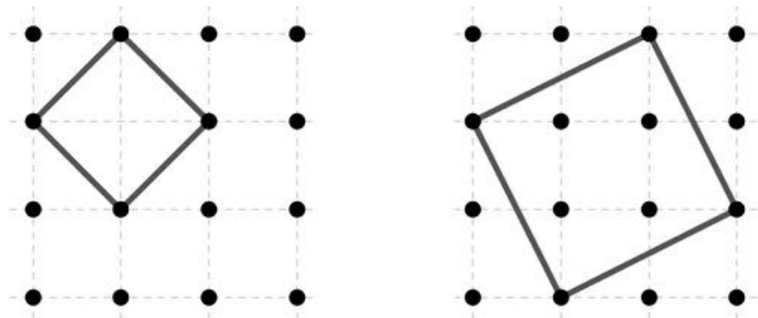
Problema 33. Se tienen 16 puntos en una hoja cuadriculada. Si de estos puntos se eligen 4 puntos que formen un cuadrado. ¿Cuántos cuadrados de distintas áreas es posible hacer?

Solución:

Es natural construir cuadrados utilizando las lineas del cuadriculado como referencia para los lados, de este modo podemos construir los 3 cuadrados que se muestran a continuación:

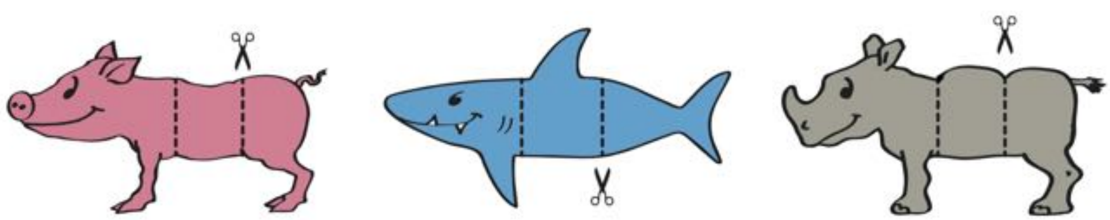
  

Cuyos lados miden 1, 2 y 3 unidades respectivamente. Ahora usando puntos que estén en distintas lineas del cuadriculado, podemos hacer solo 2 cuadrados, los cuales se muestran a continuación:



Estos tienen lado de medida $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ unidades respectivamente.

Problema 34. Simón dibuja un tiburón, un cerdo y un rinoceronte ,y los corta en tres piezas cada uno como se muestra en la figura. Entonces él puede hacer distintos animales mediante la combinación de una cabeza, un tronco y una parte inferior. ¿Cuántos animales distintos, reales o de fantasía puede crear Simón?



Solución:

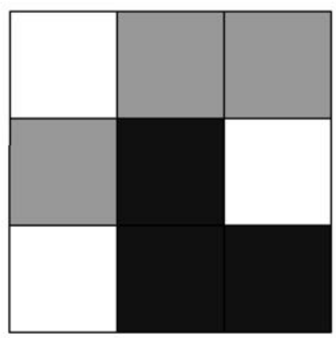
Para hacer un animal elegiremos primero la cabeza, teniendo 3 maneras de hacerlo, luego, por cada una de las cabezas que elijamos podemos elegir entre tres posibles troncos, es decir, llevamos $3 \cdot 3 = 9$ animales distintos solo uniendo cabezas con troncos, luego, para cada uno de estos animales podemos elegir 3 partes inferiores, es decir, se pueden formar $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ animales.

Problema 35. Ana, Beto, Carlos, David y Elisa cocinan galletas durante todo el fin de semana. Ana hizo 24 galletas; Beto, 25. Carlos, 26. David, 27; y Elisa, 28. Al terminar el fin de semana uno de ellos tenía el doble de las galletas que tenía el día sábado, uno 3 veces, uno 4 veces, uno 5 veces y uno 6 veces las galletas que tenía el día sábado. ¿Quién cocinó más galletas el día sábado?

Solución:

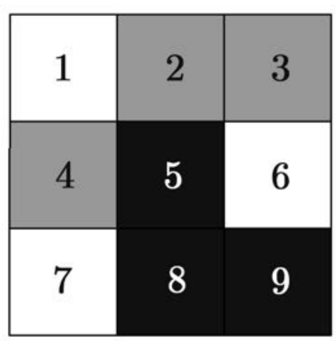
Notemos que entre los números $24, 25, 26, 27$ y 28, solo el 25 es múltiplo de 5, luego, Beto Cocinó $25 \div 5 = 5$ galletas el día sábado. Además, 27 es múltiplo de 3, y como no es múltiplo de 2, ni de 4, ni de 6, entonces, necesariamente David cocinó $27 \div 3 = 9$ galletas el día sábado. El número 26 es múltiplo de 2 no es múltiplo de 4 ni de 6, por lo tanto, es el múltiplo de 2, luego Carlos cocinó $26 \div 2 = 13$ galletas. El número 28 es múltiplo de 4 y no es múltiplo de 6, luego Elisa cocinó $28 \div 4 = 7$ galletas. Por último, como 24 es múltiplo de 6, Ana hizo $24 \div 6 = 4$ galletas. Por lo tanto, la persona que cocinó más galletas el día sábado fue Carlos.

Problema 36. Samuel pintó los 9 cuadrados con los colores negro, blanco y gris, como se muestra en la figura. Samuel quiere volver a pintar de manera que no queden dos cuadrados de un mismo color con un lado común, ¿Cuál es la mínima cantidad de cuadrados que se deben repintar?



Solución:

Notemos que necesitamos cambiar el color o de la casilla 2 o de la casilla 3, siendo conveniente repintar la casilla 3 de color negro, además necesitamos cambiar de color de la casilla 5 o de la 8 o de la 9, siendo conveniente repintar la casilla 8 de color gris. De este modo como mínimo debemos repintar 2 casillas.

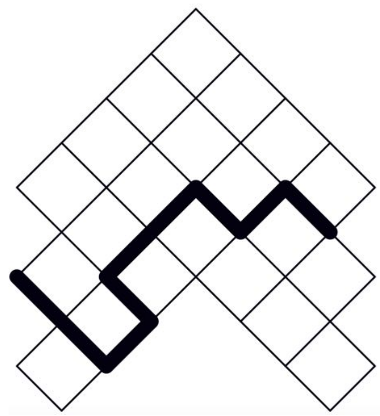


Problema 37. Hay 10 patas. 5 de estas patas ponen un huevo cada día, mientras que las otras 5 ponen un huevo día por medio. ¿Cuántos huevos ponen las 10 patas en un plazo de 10 días?

Solución:

Como 5 de estas patas ponen un huevo cada día, entonces en 10 días estas patas ponen $5 \cdot 10 = 50$ huevos en total. Como las otras 5 patas ponen un huevo día por medio, entonces en 10 días ponen 5 huevos cada una, luego ellas ponen $5 \cdot 5 = 25$ huevos en total. Finalmente, las 10 patas en un plazo de 10 días ponen 75 huevos.

Problema 38. La figura muestra una tabla en la que cada cuadrado pequeño tiene un área de 4 cm^2. ¿Cuál es la longitud de la línea gruesa?



Solución:

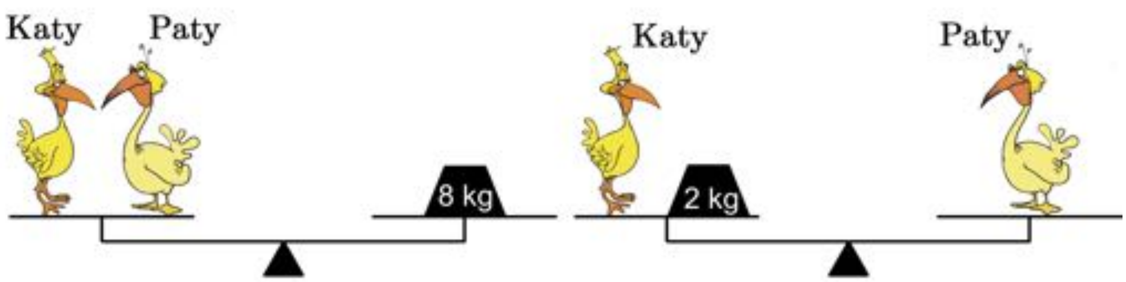
Recordemos que para un cuadrado de lado a, su área es a^2, por lo tanto si cada cuadrado pequeño tiene un área de 4 cm^2, la medida de su lado es 2 cm. Como la linea gruesa recorre 9 lados de los cuadrados pequeños, se tiene que la longitud de la linea gruesa es $9 \cdot 2 = 18$ cm.

Problema 39. ¿Cuál de las siguientes fracciones es menor que 2? (A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{20}{9}$ (C) $\frac{21}{10}$ (D) $\frac{22}{11}$ (E) $\frac{23}{12}$

Solución:

Notemos que, exceptuando la fracción E, en todas las fracciones el numerador es mayor al doble del denominador, luego, la única fracción menor que 2 es $\frac{23}{12}$.

Problema 40. ¿Cuánto pesa Paty?



Solución:

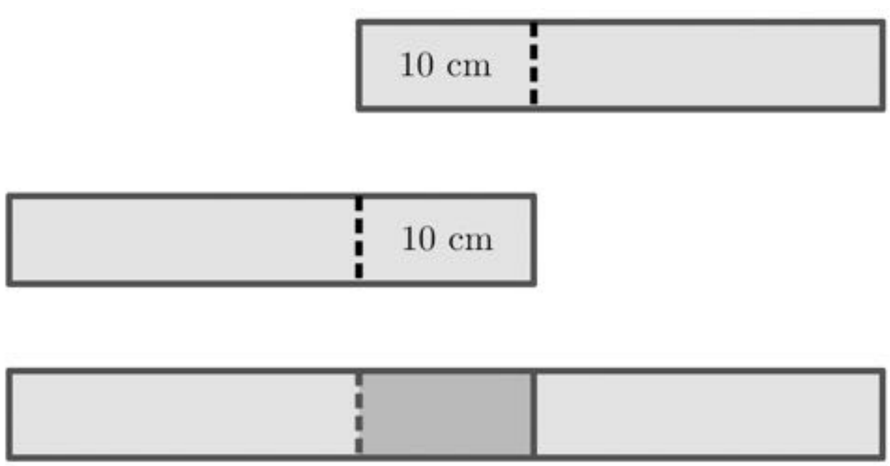
Katy y Paty juntas pesan 8 kilos. El segundo gráfico nos indica que Paty es dos kilos más pesada que Katy, es decir, Paty pesa 5 kilos y Katy pesa 3 kilos. También podriamos habernos planteado las siguientes ecuaciones:

$$K + P = 8$$
$$K + 2 = P$$

Restando ambas ecuaciones se tiene que:

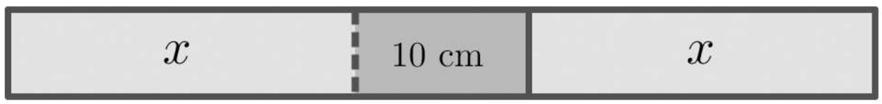
$$K - K + P - 2 = 8 - P \Rightarrow 2P = 10 \Rightarrow P = 5.$$

Problema 41. Alicia tiene 4 tiras de papel de la misma longitud, cada una con una solapa de 10 cm. Ella encola 2 de estas solapas y forma una tira de 50 cm de largo (pegando las solapas). Con las otras dos tiras de papel, ella quiere hacer una tira de 56 cm de largo. ¿Cuál debería ser el tamaño de la solapa que Alicia debe encolar?

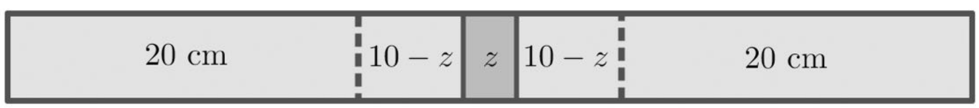


Solución:

Sea x la medida del trozo de tira sin contar la solapa, como la solapa mide 10 cm y las dos tiras al solaparse forman una nueva tira de 50 cm de largo, se tiene que $x + 10 + x = 50$:

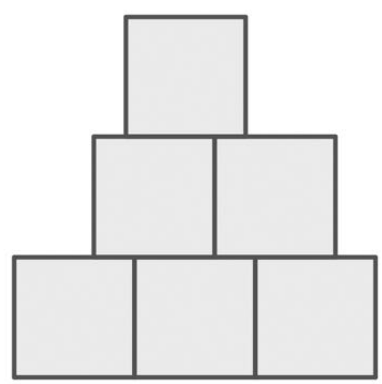


Luego, $2x = 40 \Rightarrow x = 20$. Como ahora queremos formar una nueva tira de 56 cm, debemos formar con las solapas un trozo de $56 - 40 = 16$ cm. Sea z el trozo de tira que queremos encolar, se tiene que, $10 - z$ es el trozo de tira que no queremos encolar, ahora se debe cumplir que $10 - z + z + 10 - z = 16 \Rightarrow z = 4$:



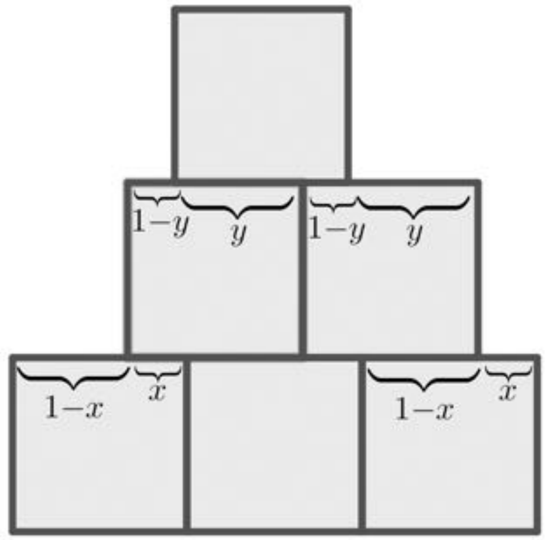
Por lo que debemos encolar un trozo de $z = 4$ cm para hacer una tira de 56 cm de largo.

Problema 42. Tomás utiliza 6 cuadrados del lado 1 y forma la figura de la imagen. ¿Cuál es el perímetro de esta figura?

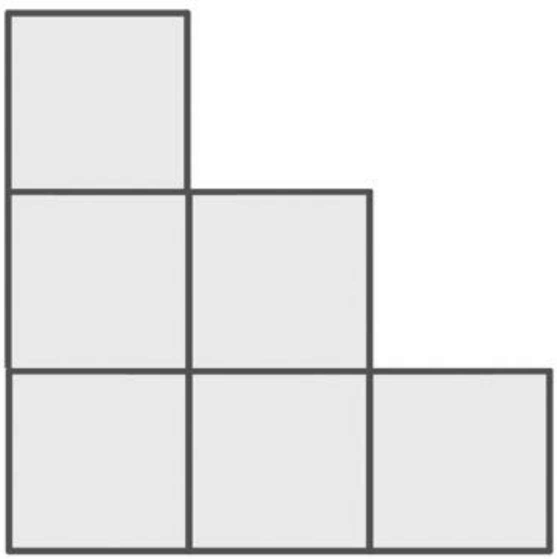


Solución:

Notemos que al apilar los cuadrados existen algunas medidas que se repiten, tal como muestra la figura. Viendo esto, podemos concluir que el perímetro de la figura es:



$$(1-x)+1+1+1+1+1+x+1+y+1+1+1+(1-y)+1=12$$



De otra manera, podemos notar que no importa la manera en que se dispongan los cuadrados de los niveles 2 y 3 de la torre, por lo tanto, la siguiente figura tiene el mismo perímetro que la figura original, luego, es facíl ver que el perímetro es 12 unidades.

Problema 43. Todos los días, Sofía anota la fecha y calcula la suma de los dígitos escritos. Por ejemplo, el 19 de marzo, lo escribe como 19/03 y calcula $1+9+0+3=13$. ¿Cuál es la suma más grande que ella calcula durante el año?

Solución:

Para la fecha pedida nos interesa ocupar los dígitos más grandes posibles, por lo tanto intentamos ocupar el 9. En el caso de los días nos conviene el 29 y para el caso de los meses nos conviene el 09, luego, la suma más grande que ella calcula durante el año es $2+9+0+9=20$.

Problema 44. En la calle Anacleto, hay 9 casas en una fila y al menos una persona vive en cada casa. Cada vez que sumamos los habitantes de dos casas vecinas obtenemos un máximo de 6 personas. ¿Cuál es el mayor número de personas que podrían estar viviendo en la calle Anacleto?

Solución:

Como queremos saber cual es el mayor número de personas que podrían estar viviendo en la calle, nos interesa que en cada par casas vecinas vivan el mayor número de personas posibles, es decir, 6 personas. Claramente, en una casa no pueden vivir 6 personas, pues, al menos una persona vive en cada casa, entonces, los pares posibles son: $3+3=6, 4+2=6$ y $5+1=6$. Como en la calle hay un número impar de casas, debemos comenzar y terminar con el mayor número posible, por lo tanto, los habitantes por cada casa en la calle deberían ser:

$$5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5$$

Luego, en toda la calle viven a lo más $5+1+5+1+5+1+5+1+5=29$ personas.

Problema 45. Lucía y su madre nacieron en enero. El día 19 de marzo de 2015, Lucía suma el año de su nacimiento con el año de nacimiento de su madre, con su edad y con la edad de su madre. ¿Qué resultado obtiene Lucía?

Solución:

Sea x el año de nacimiento de Lucía, entonces Lucía tiene $2015-x$ años cumplidos. Sea y el año de nacimiento de su madre, entonces su madre tiene $2015-y$ años cumplidos. Por lo tanto, al sumar el año de nacimiento de Lucía con el año de nacimiento de su madre, con su edad y con la edad de su madre, se obtiene:

$$x+y+(2015-x)+(2015-y)=2\cdot 2015=4030$$

De otro modo, notemos que si el día 19 de marzo de 2015 sumamos el año de nacimiento de una persona con su edad, el resultado es 2015, por lo que la suma pedida es $2 \cdot 2015 = 4030$.

Problema 46. El área de un rectángulo es 12 cm^2. Las longitudes de sus lados son números naturales. Entonces, el perímetro de este rectángulo podría ser: (A) 20 cm (B) 26 cm (C) 28 cm (D) 32 cm (E) 48 cm

Solución:

Si el área de un rectángulo es 12 cm^2 y las longitudes de sus lados son números naturales, entonces sus lados pueden ser 12 y 1, pues $12 \cdot 1 = 12$, o bien 6 y 2, pues $6 \cdot 2 = 12$, o bien 3 y 4, pues $3 \cdot 4 = 12$.

En el primer caso, el perímetro sería $2 \cdot 12 + 2 \cdot 1 = 26$ cm. En el segundo caso, el perímetro sería $2 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 16$ cm. En el tercer caso el perímetro sería $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 14$ cm. Por lo tanto, de entre las alternativas sólo podría ser la (B).

Problema 47. En una bolsa hay 3 manzanas verdes, 5 manzanas amarillas, 7 peras verdes y 2 peras amarillas. Simón saca al azar frutas de la bolsa una por una. ¿Cuántas frutas debe sacar con el fin de estar seguro de que tiene al menos una manzana y una pera del mismo color?

Solución:

En el peor de los casos, Simón podría sacar las 7 peras verdes y las 5 manzanas amarillas, acumulando 12 sacadas. De ser así, la décimo tercera vez que saca una fruta estará obligado a tomar o una manzana verde (pues ya sacó todas las manzanas amarillas), o bien una pera amarilla (pues ya saco todas las peras verdes), entonces Simón debe sacar 13 frutas con el fin de estar seguro de que tiene al menos una manzana y una pera del mismo color.

Problema 48. En la siguiente suma, incógnitas iguales representan dígitos iguales e incógnitas distintas representan dígitos distintos. ¿Cuál es el dígito que está representado por la letra X?

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & X \\ + & Y & Y \\ \hline Z & Z & Z \end{array}$$

Solución:

Notemos que estamos sumando 2 números de 1 dígito con 1 número de 2 dígitos, obteniendo así un número de 3 dígitos iguales, por lo tanto, el único número de 3 dígitos que puede resultar de esta manera es el 111, luego:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & X \\ + & Y & Y \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Por otra parte la suma $X + X + Y$ termina en 1, y esa suma a lo mas es 26 $(9 + 9 + 8)$, por lo tanto, $X + X + Y$ es 11 o es 21, pero no puede ser 11, ya que de ser así al sumar la penúltima columna Y valdría 0 lo cual no es posible, concluyendo que $X + X + Y = 21$. Además, se tiene que $Y = 9$ (pues la reserva 2 sumada con Y debe ser 11). Como Y es 9, entonces $X + X + 9 = 21 \Rightarrow 2X = 12 \Rightarrow X = 6$.

Problema 49. Marcela compró 3 juguetes. El primer juguete lo compró con la mitad de su dinero y \$1 más. Para el segundo juguete Marcela pagó la mitad del dinero restante y \$2 más. Por último, para el tercer juguete Marcela pagó la mitad del dinero restante y \$3 más. Si con este tercer juguete gastó todo su dinero, determine cuanto dinero tenía inicialmente.

Solución:

Sea $8x$ el dinero que tenía Marcela inicialmente, entonces el primer juguete lo compró por $4x+1$ pesos, quedandole $4x-1$ pesos. Para el segundo juguete Marcela pagó $2x - \frac{1}{2} + 2$ pesos quedándole $2x - \frac{1}{2} - 2 = 2x - \frac{5}{2}$. pesos Para el tercer juguete Marcela pagó $x - \frac{5}{4} + 3$ pesos quedándole $x - \frac{5}{4} - 3 = x - \frac{17}{4}$ pesos, y como Marcela quedo sin dinero, entonces

$x - \frac{17}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{17}{4} \Rightarrow 8x = 34$. Finalmente, Marcela tenía \$34 inicialmente.

Comprobemos que 34 cumple lo pedido, de ser así, Marcela compró el primer juguete a $17+1=18$ pesos, quedandole $17-1=16$ pesos. Para el segundo juguete Marcela pagó $8+2=10$ pesos quedándole $8-2=6$ pesos. Para el tercer juguete Marcela pagó $3+3=6$ pesos quedando Marcela sin dinero.

Problema 50. El número 100 se multiplica o bien por 2 o bien por 3, entonces al resultado le suma 1 o 2, y luego el nuevo resultado se divide ya sea por 3 o por 4 y el resultado final es un número natural. ¿Cuál es el resultado final?

Solución:

- Cuando 100 se multiplica 2 se obtiene $100 \cdot 2 = 200$.
- Cuando 100 se multiplica 3 se obtiene $100 \cdot 3 = 300$.
- Cuando a 200 le sumamos 1 obtenemos $200 + 1 = 201$ que es divisible por 3 y no por 4.
- Cuando a 200 le sumamos 2 obtenemos $200 + 2 = 202$ que no es divisible por 3 ni por 4.
- Cuando a 300 le sumamos 1 obtenemos $300 + 1 = 301$ que no es divisible por 3 ni por 4.
- Cuando a 300 le sumamos 2 obtenemos $300 + 2 = 302$ que no es divisible por 3 ni por 4.

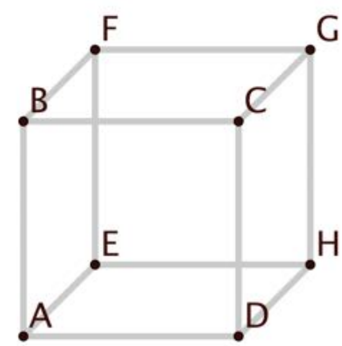
Como el resultado final es un número natural, este es $201 \div 3 = 67$.

Problema 51. En un número de 4 dígitos $ABCD$, los dígitos A, B, C, y D están en orden estrictamente creciente de izquierda a derecha. Con los dígitos B y D se forma un número de dos dígitos y con los dígitos A y C se forma un otro número de dos dígitos. ¿Cuál es la mayor diferencia posible entre el número de dos dígitos BD y el número de dos dígitos AC?

Solución:

No interesa que el número AC sea lo menor posible y que el número BD sea lo mayor posible, sabiendo que $A < B < C < D$, entonces tomamos $A = 1$, además B a lo más puede ser 7, para que $C = 8$ y $D = 9$. De este modo el número de 4 dígitos que hace mayor la diferencia posible entre el número BD y el número AC es el 1789, donde $79 - 18 = 61$.

Problema 52. Catalina escribe algunos números entre 1 y 9 en cada cara de un cubo. Entonces, para cada vértice, suma los números de las tres caras que comparten ese vértice (por ejemplo, para el vértice B, suma los números de las caras $BCDA$, $BAEF$ y $BFGC$). Las cifras calculadas por María para los vértices C, D y E son 14, 16 y 24, respectivamente. ¿Qué número se agregará al vértice F?.

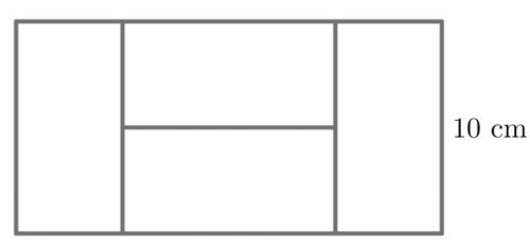


Solución:

Notemos que C y E no tienen caras compartidas comunes, por lo que 14 y 24 no deben compartir sumandos, además, el número 24 ubicado en el vértice E se descompone en tres sumandos de un dígito de manera única, $24 = 9 + 8 + 7$. Con los dígitos que quedan podemos formar el número 14 ubicado en el vértice C de una única manera $14 = 6 + 5 + 3$, y el 16 en D de dos maneras $16 = 6 + 3 + 7$ o $16 = 5 + 3 + 8$.

Como $16 = 6 + 3 + 7$, $14 = 6 + 5 + 3$, y además, D y C comparten dos caras, entonces comparten el 6 y el 3, por lo tanto, $ADHE = 7$ y $BCGF = 5$. Si $ADHE = 7$ y $E = 24 = 9 + 8 + 7$, se tiene que 9 y 8 son caras que comparten el vértice F. Por lo tanto, $F = 5 + 8 + 9 = 22$.

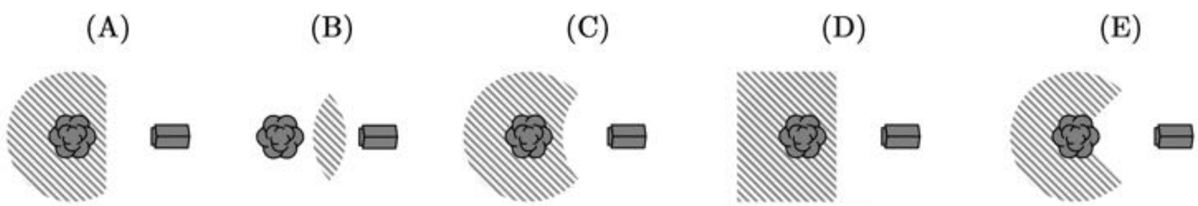
Problema 53. Con 4 rectángulos congruentes se forma un nuevo rectángulo como el que muestra la figura. Si la longitud del lado más corto de este nuevo rectángulo es 10 cm. Calcular el perímetro de dicho rectángulo.



Solución:

Observemos que el lado más corto del rectángulo grande es 10, que corresponde, según el dibujo, a dos veces el lado más corto del rectángulo pequeño, por consiguiente el lado mayor del rectángulo grande mide $5+10+5=20$ cm. Finalmente, el perímetro del rectángulo grande es $2\cdot 10+2\cdot 20=60$.

Problema 54. Cuando Simón, la ardilla, llega hasta el suelo, nunca va más allá de 5 metros desde el tronco de su árbol. Sin embargo, también se mantiene al menos a 5 metros de la casa del perro. ¿Cuál de las siguientes imágenes muestra con mayor precisión la forma del terreno donde Simón podría ir?



Solución:

Como Simón a lo más se aleja 5 metros de los pies de su árbol, este debe estar dentro de un círculo con centro en el tronco del árbol y radio 5 metros, pero como además debe mantenerse al menos a 5 metros de la casa del perro, debe estar fuera de un círculo con centro en la caseta del perro y radio 5 metros, por lo que la imagen que muestra con mayor precisión la forma del terreno donde Simón podría ir es la C.

Problema 55. Un ciclista va a 5 metros por segundo. Las ruedas tienen un perímetro de 125 cm. ¿Cuántas vueltas completas hace cada rueda en 5 segundos?

Solución:

Que el ciclista avance 5 metros por segundo, es equivalente a decir que avanza 500 centímetros por segundo o bien que avanza de 2500 cm por cada

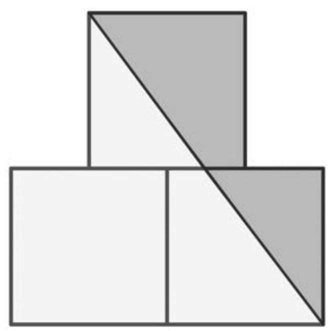
5 segundos, y como las ruedas de su bicicleta tienen una circunferencia de 125 cm, entonces en 5 segundos la rueda dará $2500 \div 125 = 200$ vueltas.

Problema 56. En una clase, no hay dos niños que nacieron el mismo día de la semana y no hay dos niñas que nacieron en el mismo mes. Hoy, un niño nuevo o una niña nueva se unirá a esta clase, y una de estas dos condiciones dejará de ser cierta. A lo más, ¿Cuántos estudiantes (niños y niñas) había inicialmente en la clase?

Solución:

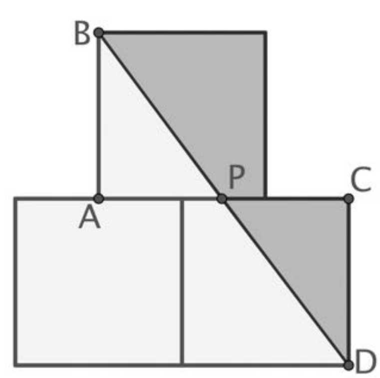
A lo más hay 7 niños pues la semana tiene 7 días, a lo más hay 12 niñas, pues el año tiene 12 meses. Si entra un nuevo niño la condición inicial fallará de forma segura si había 7 niños y 12 niñas. Luego, en la clase había $7 + 12 = 19$ estudiantes inicialmente.

Problema 57. En la figura, el centro del cuadrado superior está encima del borde común de los cuadrados inferiores. Cada cuadrado tiene lados de longitud 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Solución:

Observemos que en la figura los triángulos APB y CPD son congruentes, pues los ángulos en A y en C son rectos, además, $AB = CD = 1$, pues son lados de algún cuadrado, y $\angle APB = \angle CPD$, pues, son opuestos por el vértice. De este modo se deduce que ambos triángulos tienen la misma área, luego el área sombreada es igual al área del cuadrado de lado 1, es decir 1 u^2.



Problema 58. Al interior de cada corchete de la siguiente igualdad

$$2\ [\ \ ]\ 0\ [\ \ ]\ 1\ [\ \ ]\ 5\ [\ \ ]\ 2\ [\ \ ]\ 0\ [\ \ ]\ 1\ [\ \ ]\ 5\ [\ \ ]\ 2\ [\ \ ]\ 0\ [\ \ ]\ 1\ [\ \ ]\ 5 = 0$$

se deben anotar signos $+$ o $-$ de modo que la igualdad se cumpla. ¿Cuál es el menor número de signos $+$ que se pueden anotar?

Solución:

Notemos que la suma de todos los números en la lista es 24, por lo tanto, debemos tener dos grupos que sumen 12 y -12, y como queremos agregar la menor cantidad de signos $+$, debemos anteponer un $+$ a dos de los 5 presentes en la lista, de modo que utilizando el 2 del inicio de la lista tendremos un grupo que sume 12, así, el resto de los números deben ser negativos y sumen -12, luego, el menor número de signos $+$ que se pueden anotar es 2.

Problema 59. Durante una tormenta cayeron 15 litros de agua por metro cuadrado cayeron. ¿Cuánto aumentó el nivel del agua en una piscina al aire libre?

Solución:

Como 1 litro equivale a 1000 cm^3, 15 litros equivalen a 15000 cm^3. Por otra parte, 1 m^2 equivale $100 \times 100 = 10000$ cm^2. Por lo tanto, la piscina aumentó su nivel $15000 \div 10000 = 1,5$ cm^2.

Problema 60. Un arbusto tiene 10 ramas. Cada rama tiene 5 hojas, o bien, tiene sólo 2 hojas y 1 flor. ¿Cuál de los siguientes números podría ser el número total de hojas que tiene el arbusto ?

(A) 45 (B) 39 (C) 37 (D) 31 (E) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Tenemos las siguientes posibilidades:

- 10 ramas con 5 hojas y 0 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 10 \cdot 5 = 50$ hojas.

- 9 ramas con 5 hojas y 1 rama con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 9 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 47$ hojas.
- 8 ramas con 5 hojas y 2 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 8 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 44$ hojas.
- 7 ramas con 5 hojas y 3 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 7 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 41$ hojas.
- 6 ramas con 5 hojas y 4 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 38$ hojas.
- 5 ramas con 5 hojas y 5 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 5 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 35$ hojas.
- 4 ramas con 5 hojas y 6 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 4 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 32$ hojas.
- 3 ramas con 5 hojas y 7 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 3 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 29$ hojas.
- 2 ramas con 5 hojas y 8 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 2 \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 26$ hojas.
- 1 rama con 5 hojas y 9 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 1 \cdot 5 + 9 \cdot 2 = 23$ hojas.
- 0 ramas con 5 hojas y 10 ramas con 2 hojas y 1 flor $\Rightarrow 0 \cdot 5 + 10 \cdot 2 = 20$ hojas.

Luego, ninguna de las alternativas nos da un número posible de hojas en el árbol.

De otra manera, observemos que cada vez que descontamos una rama de 5 hojas y agregamos una rama de 2 hojas y una flor estamos descontando 3 hojas del árbol, es decir, el número de hojas que hay en el árbol es $50 - 3k$, donde k es el número de ramas con 2 hojas y 1 flor que tiene el árbol. Luego, ninguna de las alternativas es de esta forma.

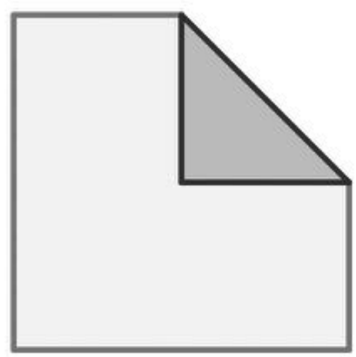
Problema 61. El puntaje promedio de los estudiantes que rindieron un examen de matemática fue de 6. Exactamente, el 60 % de los alumnos aprobó el examen. El puntaje promedio de los estudiantes que aprobaron el examen fue 8. ¿Cuál es el puntaje promedio de los estudiantes que reprobaron?

Solución:

Sea R puntaje promedio de los estudiantes que reprobaron el examen. Sabemos que el 60 % aprobó, entonces, el 40 % reprobó. Luego, como el puntaje promedio total fue 6, tenemos que:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 0,6 + R \cdot 0,4 &= 6 \\ 4,8 + R \cdot 0,4 &= 6 \\ R \cdot 0,4 &= 1,2 \\ R &= 3 \end{aligned}$$

Problema 62. Una de las esquinas de un cuadrado se pliega a su centro para formar un pentágono irregular. Las áreas del pentágono y del cuadrado son enteros consecutivos. ¿Cuál es el área del cuadrado?



Solución:

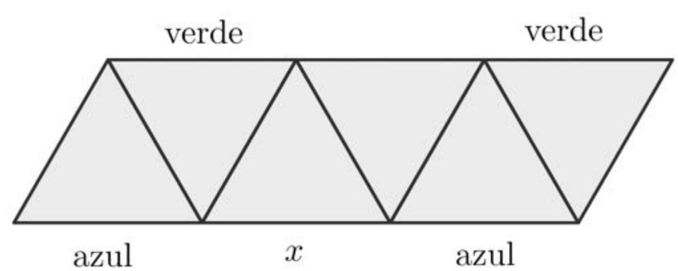
Notemos que el área que pierde el cuadrado al doblar la esquina para obtener un pentágono irregular es $\frac{1}{8}$ del área del cuadrado, pues la esquina del cuadrado es llevada al centro del cuadrado, es decir, el cuadrado puede ser dividido en 8 triángulos congruentes al triángulo formado en la esquina, y como las áreas del pentágono y del cuadrado son números naturales consecutivos, el cuadrado tiene área 8 y el pentágono tiene área 7. Finalmente, el área del cuadrado es 8 u^2.

Problema 63. Raquel sumó las longitudes de tres de los lados de un rectángulo y obtuvo 44 cm. También Lidia sumó las longitudes de tres de los lados del mismo rectángulo y obtuvo 40 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

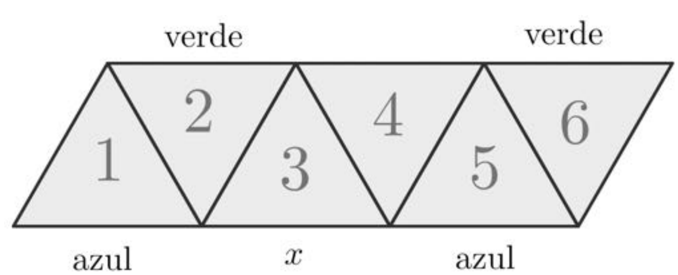
Solución:

Sean x e y los lados de los rectángulos, las suma de Raquel es $2x+y=44$ y la suma de Lidia es $x+2y=40$, de donde obtenemos que $3x+3y=84 \Rightarrow x+y=28 \Rightarrow 2x+2y=56$.

Problema 64. El diagrama muestra una secuencia de triángulos, e indica los colores de algunos segmentos. Cada triángulo debe estar formado por tres colores distintos, rojo, azul y verde. ¿De qué color se debe pintar el segmento x?



Solución:



Notemos que necesariamente el lado compartido por el triángulo 1 y 2 es rojo, al igual que el lado compartido por el triángulo 5 y 6. Luego, el lado compartido por el triángulo 2 y 3 es azul, y el lado compartido por el triángulo 4 y 5 es verde. Ahora, el lado no compartido del triangulo 4 puede ser rojo o azul. Si es rojo, el lado compartido por el triángulo 3 y

4 sería azul, pero es imposible puesto que el triángulo 3 ya tiene un lado azul. Por consiguiente, el lado no compartido del triángulo 4 es azul y el lado compartido por el triángulo 3 y 4 es rojo y el lado x es verde.

Problema 65. La profesora preguntó a cinco de sus alumnos, ¿cuántos de los cinco había realizado su tarea? Álvaro dijo que ninguno, Berta dijo que solo una, Camilo dijo exactamente dos, Daniela dijo exactamente tres y Eugenia dijo exactamente cuatro. La profesora sabía que aquellos estudiantes que no habían hecho su tarea no estaban diciendo la verdad, pero los que habían hecho su tarea estaban diciendo la verdad. ¿Cuántos de estos estudiantes habían hecho su tarea?

Solución:

Supongamos que 5 estudiantes hicieron la tarea. Como Álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, entonces miente, como Camilo dijo que 2, entonces miente. Como Daniela dijo que 3, entonces miente. Como Eugenia dijo que 4, entonces miente. Luego, como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, nadie hizo su tarea, contradicción.

Supongamos que 4 estudiantes hicieron la tarea. Como Álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, entonces miente, como Camilo dijo que 2, entonces miente. Como Daniela dijo que 3, entonces miente. Como Eugenia dijo que 4, dice la verdad. Luego como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, solo Eugenia hizo su tarea, contradicción.

Supongamos que 3 estudiantes hicieron la tarea. Como Álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, entonces miente, como Camilo dijo que 2, entonces miente. Como Daniela dijo que 3, dice la verdad. Como Eugenia dijo que 4, entonces miente. Luego como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, Daniela hizo su tarea, contradicción.

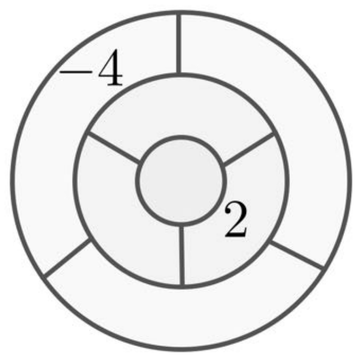
Supongamos que 2 estudiantes hicieron la tarea. Como Álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, entonces miente, como Camilo dijo que 2, dice la verdad. Como Daniela dijo que 3, entonces miente. Como Eugenia dijo que 4, entonces miente. Luego como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, Camilo hizo su tarea, contradicción.

Supongamos que 1 estudiante hizo la tarea. Como Álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, dice la verdad, como Camilo dijo que 2, entonces miente. Como Daniela dijo que 3, entonces miente. Como Eugenia dijo que 4, entonces miente. Luego como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, Berta hizo su tarea, verdadero.

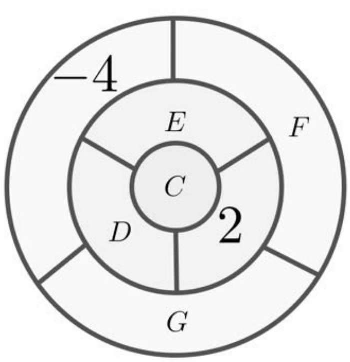
Supongamos que 0 estudiantes hicieron la tarea. Como Álvaro dijo que 0, entonces miente. Como Berta dijo que 1, entonces miente, como Camilo dijo que 2, entonces miente. Como Daniela dijo que 3, entonces miente. Como Eugenia dijo que 4, entonces miente. Luego como los que hacen su tarea dicen la verdad, entonces, Álvaro hizo su tarea, contradicción.

Luego solo un estudiante hizo su tarea.

Problema 66. Romina quiere escribir un número en cada una de las siete regiones delimitadas en el diagrama. Dos regiones son vecinas si comparten parte de su límite. El número en cada región corresponde a la suma de los números de sus vecinos. Romina ya ha escrito los números en dos de las regiones. ¿Qué número debe que escribir en la región central?



Solución:



Observemos que los vecinos de -4 también son vecinos de 2, pero el número 2 tiene un vecino más que es C, luego, tenemos las ecuaciones $E+D+F+G=-4$ y $E+D+F+G+C=2$ por lo que $-4+C=2 \Rightarrow C=6$. Luego, el número que se debe escribir en la región central es 6.

Problema 67. Cinco enteros positivos (no necesariamente todos distintos) están escritos en cinco cartas. Pedro calcula la suma de los números en cada par de cartas. Obtiene solo tres diferentes totales, 57, 70, y 83. ¿Cuál es el mayor entero en alguna de estas cartas?

Solución:

Notemos que con 5 números distintos en las cartas, a, b, c, d, e obtenemos 10 sumas distintas, $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+c$, $b+d$, $b+e$, $c+d$, $c+e$, $d+e$, y Pedro en el problema solo obtiene 3 sumas distintas, por lo tanto, entre los números de las 5 cartas debe haber pares de números repetidos.

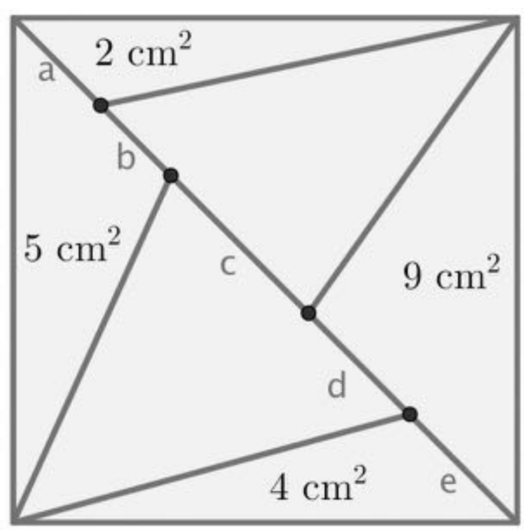
Observemos que si los 5 números son de la forma a, a, b, b, b, obtenemos solo 3 sumas distintas $a+a$, $a+b$, $b+b$, pero con estas sumas es imposible obtener como totales el 57, 70, y el 83, pues $a+a$ y $b+b$ son pares y Pedro tiene una sola suma par, esto nos indica que solo es posible repetir uno de los números de la lista para obtener solo un resultado par.

Luego, la lista debe ser de la forma a, b, b, b, c, la cual genera las sumas $a+b$, $a+c$, $b+b$, $b+c$, donde, $b+b$ es par, concluyendo que $b+b=70 \Rightarrow b=35$. Obteniendo las siguientes sumas: $a+35$, $a+c$, $35+35$, $35+c$.

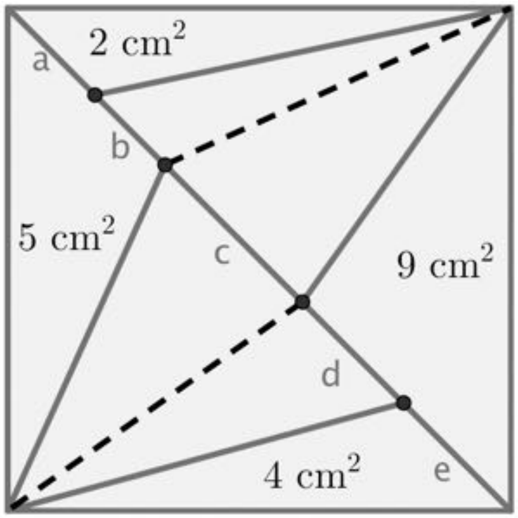
Además, entre las sumas $a+35$, $a+c$, $35+35$, $35+c$. deben haber 2 sumas iguales, y como $a \neq b \neq c$ se concluye que $a+c=70$. Luego, $a+35=57$ y $35+c=83$, obteniendo que $a=22$ y que $c=48$, coincidiendo que $a+c=b+b=70$.

Por lo tanto, el mayor entero que aparece en la lista es el 48.

Problema 68. Un cuadrado de área 30 cm^2 está dividido en dos por una diagonal, sobre esta diagonal marcamos 4 puntos generando 5 segmentos en la diagonal, a, b, c, d, e. Luego, construimos triángulos, como se muestra en la figura. ¿Qué segmento de la diagonal es el más largo?



Solución:



El área de un triángulo depende de su altura y su base, como todos los triángulos que se forman en la figura tienen la misma altura (la mitad de la diagonal), entonces, el triángulo con mayor área será el triangulo con mayor base. Como el triángulo con base a tiene un área de 2 cm^2 y el triángulo con base $a+b$ tiene un área de 5 cm^2, entonces el triángulo con base b tiene un área de 3 cm^2.

Como el triángulo con base e tiene un área de 4 cm^2 y el triángulo con base $d+e$ tiene un área de 9 cm^2 entonces el triángulo con base d tiene un área de 5 cm^2. Por lo tanto, al comparar los triángulos con base a, base b, base c, base d y base e, el triángulo con base d es el triángulo con área mayor, por lo tanto, tiene la mayor base, luego, el segmento d es el mayor.

Problema 69. En un grupo de canguros, los dos canguros más livianos pesan el 25 % del peso total del grupo. Los tres canguros más pesados pesan el 60 % del peso total. ¿Cuántos canguros están en el grupo?

Solución:

Como los dos canguros más livianos pesan el 25 % del peso total del grupo, entonces, en promedio pesan el 12,5 % del peso total del grupo. Como los tres canguros más pesados pesan el 60 % del peso total, entonces, en promedio pesan el 20 % del peso total del grupo. Por lo tanto, los canguros que quedan, que no son ni los más pesados ni los más livianos pesan en total el $100 - 25 - 60 = 15$ % del peso total del grupo. Luego, queda solo un canguro, pues si hubiera 2 o más pesarían en promedio el 7,5 % o menos del total del peso del grupo, y serian canguros livianos. Finalmente, son 6 los canguros que están en el grupo.

Problema 70. Camila puede utilizar algunos trozos de alambre de medida 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm y 7cm para hacer un cubo de alambre con aristas de longitud 1 cm sin solapamientos. ¿Cuál es el menor número de estas piezas que puede usar?

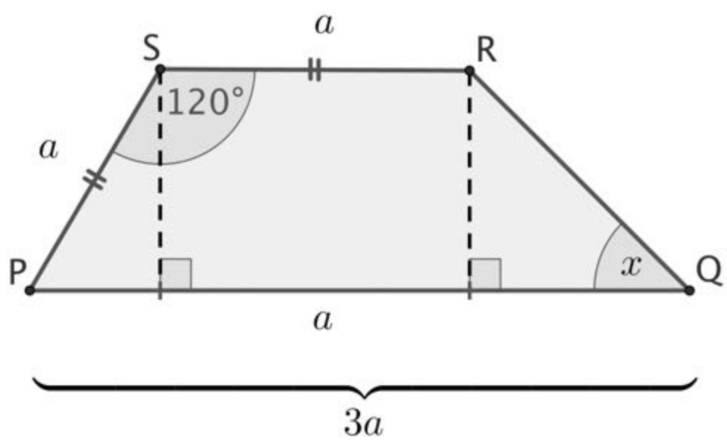
Solución:

Como en cada vértice de un cubo concurren 3 aristas, por cada vértice del cubo deben pasar al menos 2 trozos de alambre de modo que no existan solapamientos. Además, cuando un trozo de alambre pasa por un vértice cubriendo 2 artistas, necesariamente la tercera arista debe ser un extremos de alambre, por lo tanto, cada vértice del cubo requiere al menos un extremo de un trozo de alambre.

Como un cubo tiene ocho vértices y cada trozo de cable tiene dos extremos, se tiene que el número mínimo de trozos de alambre es $8 \div 2 = 4$ trozos. Esta solución es posible, por ejemplo, con cables de longitud de 1 cm, 2 cm, 4 cm y 5 cm.

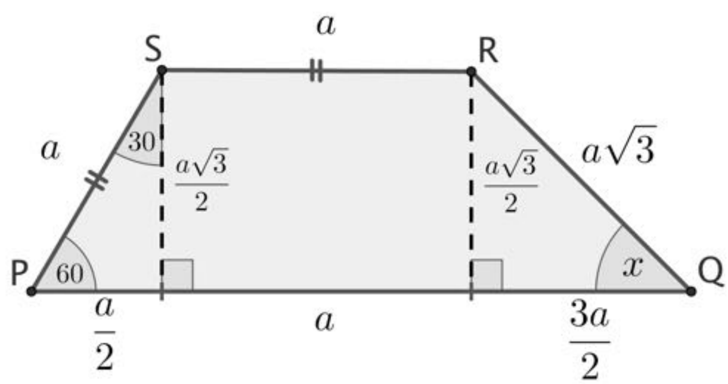
Problema 71. En $PQRS$ trapecio, los lados PQ y SR son paralelos el ángulo $PSR = 120°$ y $RS = SP = \dfrac{1}{3}PQ$. ¿Cuál es la medida del ángulo PQR?

Solución:



Sea $RS = SP = a$, luego, $PQ = 3a$, notemos que al trazar las perpendiculares desde S y desde R hasta la base PQ del trapecio, se proyecta la longitud a de SR sobre la base.

Por otra parte, al trazar las perpendiculares se forma a la izquierda de la figura un triángulo de ángulos $30°, 60°, 90°$.



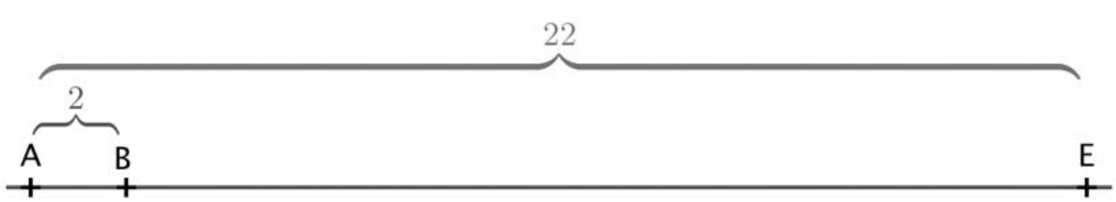
Como $PS = a$, la proyección de PS sobre la base del trapecio (base del triángulo) es igual a $\frac{a}{2}$ y la altura del trapecio (altura del triángulo) es $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Además, como la base del trapecio mide $3a$, se tiene que la proyección de QR sobre la base mide $3a - a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$, por lo que el triángulo formado a la derecha de la figura tiene base $\frac{3a}{2}$ y altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, siendo este semejante al triángulo anterior en razón $1 : \sqrt{3}$, por lo tanto el ángulo $PQR = 30°$.

Problema 72. Cinco puntos se encuentran en una línea. Alex encuentra las distancias entre cada posible par de puntos, obteniendo las medidas 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 y 22, en ese orden. ¿Cuál es el valor de k?

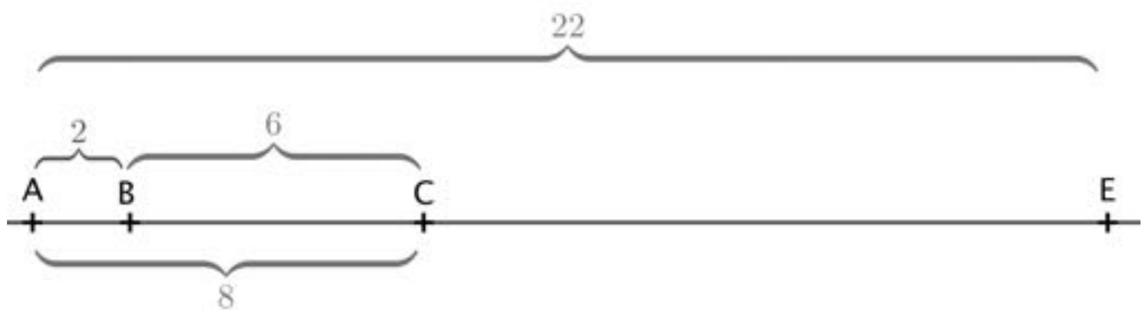
Solución:

Claramente los dos puntos más cercanos deben a estar a distancia 2 y los dos puntos más lejanos deben estar a distancia 22, por lo tanto, podemos ubicar los primeros 3 puntos de la manera que muestra la figura, donde $AB = 2$, $BE = 20$, $AE = 22$ (~~2~~, 5, 6, 8, 9, 15, 17, ~~20~~ y ~~22~~).

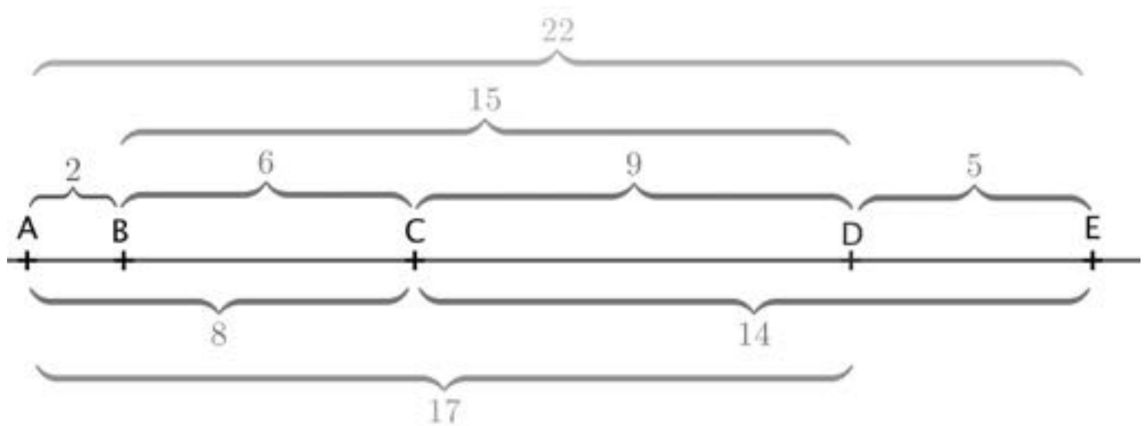


Ahora como dejamos los A y E ubicados en los extremos, los puntos restantes debemos ubicarlos entre A y E, por lo que las 4 medidas (AB, BC, CD, DE) deben sumar 22, y de la lista de medidas que se tienen $2, 5, 6, 9$ suman 22.

Como tenemos que el primer segmento mide 2, el segundo segmento podría medir 5 lo que es imposible pues $2 + 5 = 7$ y 7 no es una medida posible, luego, el segundo segmento debe medir 6, pues $2 + 6 = 8$ y 8 si es una medida posible (~~2~~, 5, ~~6~~, ~~8~~, 9, 15, 17, ~~20~~ y ~~22~~).



Como hemos ocupado los números 2, 6 y 8, agreguemos ahora la medida $CD = 9$, obteniendo con esto los segmentos $BD = 15$, $AD = 17$ y $DE = 5$ (~~2~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~8~~, ~~9~~, ~~15~~, ~~17~~, ~~20~~ y ~~22~~). Finalmente, solo nos falta ubicar el segmento CE, el cual debe medir 14, por lo que $k = 14$.



Problema 73. Ayer anoté el número de teléfono de Eduardo. El número de teléfono en mi nota tiene seis dígitos, pero recuerdo que Eduardo, dijo que el número tenía siete dígitos. ¿Hasta cuántos números diferentes de teléfono puedo llegar a marcar hasta lograr comunicarme con Eduardo? (Tenga en

cuenta que un número de teléfono puede comenzar con cualquier dígito, incluyendo 0.)

Solución:

Supongamos que el número telefónico que anoté es el 924561, entonces, el problema se trata de introducir todos los números posibles entre los dígitos del número telefónico de modo que se generen números telefónicos distintos.

En la primera casilla podemos ubicar cualquiera de los números del 0 al 9, es decir, tenemos 10 maneras de elegir un número para la primera casilla.

$\boxed{}\,924561$

$\boxed{0}\ 924561$	$\boxed{5}\ 924561$
$\boxed{1}\ 924561$	$\boxed{6}\ 924561$
$\boxed{2}\ 924561$	$\boxed{7}\ 924561$
$\boxed{3}\ 924561$	$\boxed{8}\ 924561$
$\boxed{4}\ 924561$	$\boxed{9}\ 924561$

Analicemos ahora de cuantas maneras se puede ingresar un dígito en el segundo casillero.

$9\ \boxed{0}\ 24561$	$9\ \boxed{5}\ 24561$
$9\ \boxed{1}\ 24561$	$9\ \boxed{6}\ 24561$
$9\ \boxed{2}\ 24561$	$9\ \boxed{7}\ 24561$
$9\ \boxed{3}\ 24561$	$9\ \boxed{8}\ 24561$
$9\ \boxed{4}\ 24561$	$9\ \boxed{9}\ 24561$

Pero esta última combinación de números $9\ \boxed{9}\ 24561$ ya la habíamos encontrado en un principio $\boxed{9}\ 924561$, pues en el par 9 9 no importa si el primer o el segundo 9 es el faltante. Luego, para llenar la segunda casilla tenemos 9 posibilidades.

Análogamente, podemos ver que para las 6 casillas restantes tenemos 9 posibilidades por cada una. Finalmente, se pueden hacer hasta $10+9+9+9+9+9+9 = 64$ combinaciones para lograr comunicarme con Eduardo.

Problema 74. María divide 2015 por 1, por 2, por 3 y así sucesivamente, hasta dividirlo por 1000. Ella escribe abajo el resto para cada división. ¿Cuál es el más grande de estos restos?

Solución:

Se trata de descomponer el número $2015 = nk + r$, de modo que r sea lo más grande posible

- $2015 = 1 \cdot 1008 + 1007$, es decir, $2015 \div 1008 = 1$ con resto 1007, pero el 2015 solo se puede dividir hasta por 1000.
- $2015 = 2 \cdot 672 + 671$, es decir, $2015 \div 672 = 2$ con resto 671, luego este es el resto más grande posible.

Observemos que en cualquier otro caso el resto es menor.

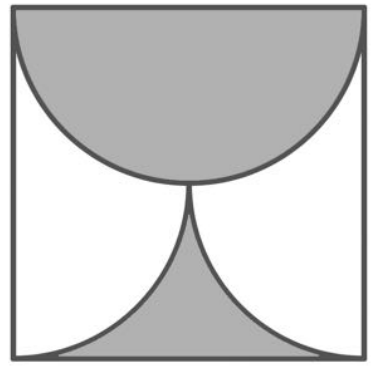
- $2015 = 3 \cdot 504 + 503$
- $\vdots$

Problema 75. Una madre lavaba la ropa y colgaba camisetas en línea en un cordel para tender ropa. Luego le pidió a sus hijos que colgaran un solo calcetín entre dos camisetas. Ahora hay 29 prendas de ropa en el cordel. ¿Cuántas camisetas hay?

Solución:

Como los hijos colgaron un calcetín entre dos camisetas, entonces en el cordel la primera y la última prenda deben ser camiseta, y como en total hay 29 prendas, entonces necesariamente hay 15 camisetas y 14 calcetines.

Problema 76. La parte sombreada del cuadrado de lado a está delimitada por un semicírculo y dos arcos congruentes de círculo. Calcular el área sombreada.

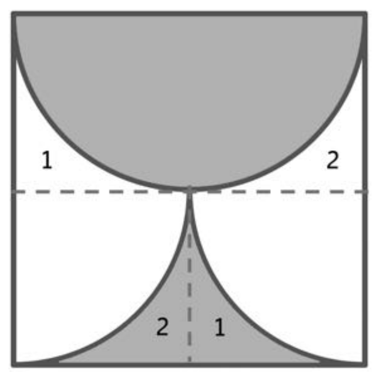


Solución:

Como el lado del cuadrado mide a, el radio del semicírculo mide $\dfrac{a}{2}$, luego su área es $\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$. Además el área inferior de la figura corresponde a la mitad del área del cuadrado de lado a menos el área de un semicírculo de radio $\dfrac{a}{2}$, esto es, $\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$, luego, la suma de dichas áreas es:

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

Además, podemos ver que cuando la figura es dividida por la mitad, se generan areas congruentes como se muestra en la figura, por lo que claramente el área achurada es la mitad del cuadrado, es decir, $\dfrac{a^2}{2}$.



Problema 77. Tres hermanas, Ana, Berta y Cindy compraron una bolsa de 30 galletas. Ana aportó con \$80 , Berta con \$50 y Cindy con \$20 y se repartieron las galletas en partes iguales, 10 para cada una. ¿Cuántas galletas más debería haber recibido Ana si se hubiera repartido las galletas proporcionalmente al dinero que cada una aportó?

Solución:

Notemos que la bolsa de galletas cuesta $80 + 50 + 20 = 150$ pesos, por lo que cada galleta costaría $150 \div 30 = 5$ pesos, por lo tanto, como Ana aportó con 80 pesos debería recibir $80 \div 5 = 16$ galletas, como Berta aportó con 50 pesos debería recibir $50 \div 5 = 10$ galletas y como Cindy aportó con 20 pesos debería recibir $20 \div 5 = 4$ galletas.

Como inicialmente había recibido 10 galletas, entonces, si se hubiera repartido las galletas proporcionalmente al dinero que cada una aportó, Ana debería haber recibido 6 galletas más.

Problema 78. ¿Cuál es el último dígito del número $2015^2+2015^0+2015^1+2015^5$?

Solución:

Observemos que $2015^2, 2015^1$ y 2015^5 terminan en 5 y que $2015^0 = 1$, por lo que el último dígito de la suma será el último dígito de $5+5+5+1 = 16$, es decir 6.

Problema 79. Hay 33 niños en una clase. Sus asignaturas favoritas son informática o educación física. Tres de los niños prefieren ambas asignaturas. El número de niños que prefieren solo la asignatura de informática es el doble de los que prefieren solo educación física. ¿Cuántos niños prefieren informática?

Solución:

Si hay 33 estudiantes, y 3 de ellos prefieren ambas asignaturas, entonces los otros 30 estudiantes prefieren **solo** una de las dos asignaturas. Como el número de niños que prefieren solo la asignatura de informática es el doble de los que prefieren solo educación física, es claro que 10 prefieres educación física y 20 niños (el doble) prefieren informática, si a esto agregamos los 3 estudiantes que prefieren informática junto a educación física, nos da un total de 23 niños que prefieren informática.

Problema 80. El Sr. Vela compró 100 velas. El enciende una vela cada día hasta que se quema, el Sr. Vela siempre hace una nueva vela con la cera de siete velas quemadas. ¿Durante cuántos días el Sr. Vela encenderá una vela completa (entera)?

Solución:

Claramente las 100 velas alcanzan para 100 días, sobrando 100 porciones de cera. Como $100 = 7 \cdot 14 + 2$, se tiene que con esas 100 porciones de cera puede armar 14 nuevas velas quedando 2 porciones sin utilizar. Luego, esas 14 velas alcanzan para 14 días, sobrando 14 porciones de cera. Como $14 = 7 \cdot 2$, se tiene que con esas 14 porciones de cera puede armar 2 nuevas velas. Finalmente las velas durarán $100 + 14 + 2 = 116$ días.

Problema 81. Cada habitante del planeta Alero tiene al menos dos orejas. Tres habitantes nombrados Imi, Dimi y Trimi se reunieron en un cráter. Imi dijo: "Puedo ver 8 orejas". Dimi: "Veo 7 orejas". Trimi: "Puedo ver sólo 5 orejas". Si ninguno de ellos podía ver a sus propias orejas. ¿Cuántas orejas tiene Trimi?

Solución:

Sea I el número de orejas de Imi, D el número de orejas de Dimi y T el número de orejas de Trimi, como Imi ve 8 orejas, $T + D = 8$, como Dimi ve 7 orejas, $I + T = 7$ y como Trimi ve 5 orejas, $I + D = 5$. Luego, $2I + 2D + 2T = 20$ por lo que en total las orejas de los habitantes suman 10. Como Imi ve 8 orejas, el tiene 2, como Dimi ve 7 orejas el tiene 3 y como Trimi ve 5 orejas, entonces el tiene 5 orejas.

Problema 82. Un recipiente con la forma de un prisma rectangular y cuya base es un cuadrado de lado 10 cm, se llena con agua hasta una altura de h cm. Un cubo sólido de 2 cm de lado se pone en el recipiente. ¿Cuál es el mínimo valor de h cuando el cubo es completamente sumergido en el agua?

Solución:

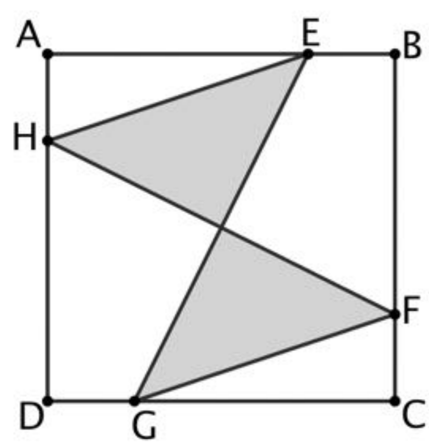
Si h es la altura del agua contenida en el prisma rectangular, entonces, el volumen de agua contenida es $10 \cdot 10 \cdot h = 100h$ cm^3. Como el cubo que introducimos es de lado 2 su volumen es $2^3 = 8$ cm^3, por lo tanto, el volumen ocupado por el agua y el cubo en el recipiente es:

$$100h + 8 = 100\left(h + \frac{8}{100}\right)$$

Como queremos encontrar el mínimo valor de h cuando el cubo está completamente sumergido en el agua, necesitamos que el cubo llegue al fondo del recipiente y la altura del cubo coincida con la altura del agua, es decir que:

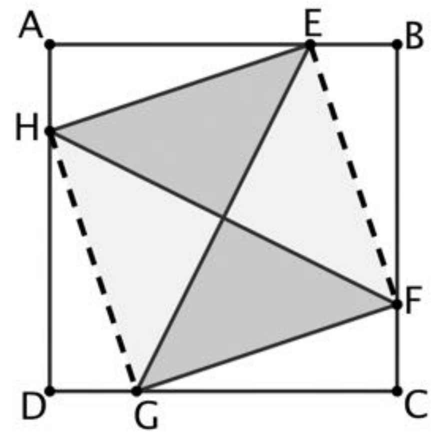
$$h + \frac{8}{100} = 2 \Rightarrow h = 2 - \frac{8}{100} \Rightarrow h = 1{,}92 \text{ cm.}$$

Problema 83. El cuadrado $ABCD$ tiene área 80. Los puntos E, F, G y H están en los lados del cuadrado de modo que $AE = BF = CG = DH$. Si $AE = 3EB$, cual es el área de la figura sombreada?



Solución:

Notemos que al trazar los segmentos EF y GH, se genera el cuadrado $EFGH$ cuya área es el doble del área sombreada. Además, el área de cada uno de los triángulos exteriores a este cuadrado es:



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{80}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{80}}{4}=\frac{3\cdot 80}{32}=\frac{15}{2}$$

Luego, el área del cuadrado pequeño es

$$80-4\cdot\frac{15}{2}=80-30=50\text{u}^2$$

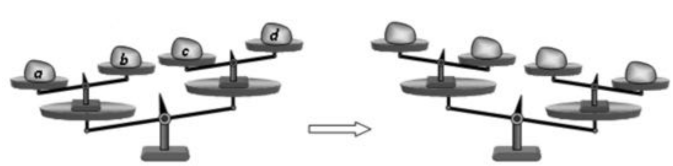
Finalmente, el área sombreada es de 25u^2

Problema 84. El producto de las edades (en números enteros) de un padre y un hijo es de 2015. ¿Cuál es la diferencia de sus edades?

Solución:

Notemos que $2015=5\cdot 403=5\cdot 13\cdot 31$, donde este producto es la descomposición prima de 2015, por lo tanto las posibles edades son $5\cdot 13=65$ y 31, $5\cdot 31=155$ y 13, $13\cdot 31=403$ y 5. Luego, es imposible que alguno de ellos tenga 155 o 403 años, por lo tanto, las edades del padre y el hijo son 65 y 31, donde la diferencia $65-31=34$

Problema 85. Cuatro pesos a,b,c,d se colocan en una balanza (ver la figura). Cuando dos de las cargas fueron intercambiadas, la balanza cambia su posición como se muestra en la figura. ¿Qué cargas fueron intercambiadas?



Solución:

La primera balanza muestra que $a>b$, $c>d$ y que $a+b>c+d$, como debemos hacer solo un intercambio para obtener la segunda balanza, entonces, es claro que el peso más pesado a debe intercambiarse con el peso más liviano d.

Problema 86. Si las dos raíces de la ecuación $x^2-85x+c=0$ son números primos. ¿Cuál es el valor de la suma de los dígitos de c?

Solución:

Sabemos que el producto de dos binomios de la forma $(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+a\cdot b$ con a y b positivos, en este caso $a+b=85$ y $a\cdot b=c$. Además, si dos primos suman 85, entonces uno es par y otro es impar, pero el único primo par es 2, por lo que el otro primo es 83. Por lo tanto, $c=2\cdot 83=166$ y la suma de sus dígitos es $1+6+6=13$.

Problema 87. ¿Cuántos números enteros positivos de tres dígitos existen de modo que cualquiera de dos dígitos adyacentes difieran en 3 unidades?

Solución:

Si estos números enteros tienen dígitos distintos, podemos encontrar los números $147, 258$ y 369, si invertimos sus dígitos encontramos otros tres números que también cumplen la condición $741, 852$ y 963.

Si estos números enteros tienen dígitos repetidos, podemos encontrar los números 141 y 414, 252 y 525, 363 y 636, 474 y 747, 585 y 858, 696 y 969.

Por último nos falta contar los números que contienen el 0, estos son 303 y 630.

Finalmente, 20 números cumplen la condición.

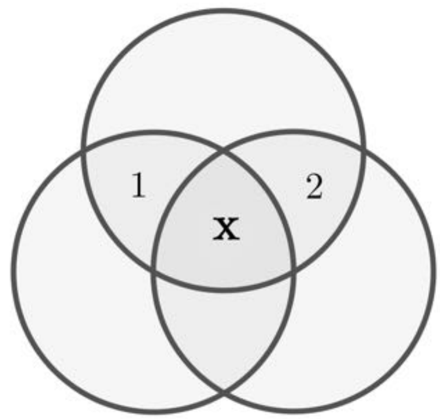
Problema 88. ¿Cuál de los siguientes es un contraejemplo de la proposición "Si n es primo, entonces entre los números $n-2$ y $n+2$ sólo uno es primo"?

(A) $n=11$ (B) $n=19$ (C) $n=21$ (D) $n=29$ (E) $n=37$

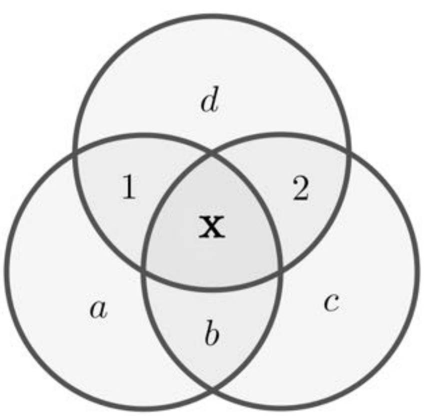
Solución:

Si $n = 11$, $n-2 = 9$ y $n+2 = 13$, se cumple la proposición, pues solo uno de ellos (13) es primo. Si $n = 19$, $n-2 = 17$ y $n+2 = 21$, se cumple la proposición, pues solo uno de ellos (17) es primo. El $n = 21$ no sirve como contra ejemplo pues no es primo. Si $n = 29$, $n-2 = 27$ y $n+2 = 31$, se cumple la proposición, pues solo uno de ellos (31) es primo. Si $n = 37$ se contradice la proposición, pues $n-2 = 35$ y $n+2 = 39$, y ninguno de ellos es primo.

Problema 89. La figura muestra siete regiones delimitadas por tres círculos. En cada región se escribe un número. Se sabe que el número en cualquier región es igual a la suma de los números de todas sus regiones vecinas (dos regiones son vecinas si sus fronteras tienen más de un punto común). Dos de los números son conocidos (ver la figura). ¿Qué número está escrito en la región central?



Solución:



De acuerdo al enunciado se tiene que:

(1) $x = b + 1 + 2$

(2) $1 = a + d + x$

(3) $2 = c + d + x$

(4) $b = a + c + x$

(5) $a = b + 1$

(6) $d = 3$

(7) $c = b + 2$

De la ecuación (6) se tiene que (2) $1 = a + 3 + x \Rightarrow a + x = -2$ y (3) $2 = c + 3 + x \Rightarrow c + x = -1$. Sumando las ecuaciones (2) y (3) se tiene que $a + c + 2x = -3$. Como en la ecuación (4) $a + c = b - x$, se tiene que

$b - x + 2x = -3 \Rightarrow b + x = -3$. Como en la ecuación (1) $b - x = -3$, se tiene que $b + x = b - x \Rightarrow x = 0$.

Problema 90. Juan tiene 3 diccionarios diferentes y dos novelas diferentes en un estante. ¿Cuántas maneras hay para organizar los diccionarios y las novelas si se quiere mantener los diccionarios juntos y las novelas juntas?

Solución:

Notemos que por el principio de la multiplicación Juan tiene $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneras de ordenar solo los diccionarios, y $2 \cdot 1 = 2$ maneras de ordenar solo las novelas, por lo tanto, cuando Juan junta diccionarios con novelas, cada ordenación de diccionarios se duplica, por ejemplo $D_1D_2D_3N_1N_2$, genera la ordenación $D_1D_2D_3N_2N_1$.

De este modo si ubicamos primero los diccionarios tenemos $6 \cdot 2 = 12$ ordenaciones, del mismo modo si ubicamos primeros las novelas tenemos $2 \cdot 6 = 12$ ordenaciones, luego Juan puede hacer 24 ordenaciones manteniendo los diccionarios juntos y las novelas juntas.

Problema 91. ¿Cuántos números de 2 dígitos se pueden escribir como la suma de exactamente seis diferentes potencias de 2 incluyendo 2^0?

Solución:

Como queremos escribir un número de dos dígitos como la suma de seis diferentes potencias de 2, necesariamente estas potencias deben tener 2 o menos dígitos, por lo tanto, nos sirven las potencias $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64$, donde las únicas sumas que suman menos que 100 son $1+2+4+8+16+32 = 64$ y $1+2+4+8+16+64 = 95$, luego, se pueden escribir solo estos 2 números.

Problema 92. Andrea nació en 1997, su hermana menor Carla, en el año 2001. La diferencia de edad de las dos hermanas, en cualquier caso, es: (A) menos de 4 años (B) al menos 4 años (C) exactamente 4 años (E) no menos de 3 años (D) más de 4 años

Solución:

Andrea y Carla tendrían una diferencia de edades máxima si Andrea hubiera nacido el 1 de enero de 1997 y Carla el 31 de diciembre de 2001, es decir, 4 años y 364 días.

Andrea y Carla tendría una diferencia de edades mínima si Andrea hubiera nacido el 31 de diciembre de 1997 y Carla el 1 de enero de 2001, es decir, 3 años y 1 día.

Luego, la diferencia de sus edades será no menos de 3 años y no más de 5 años. Por lo tanto, siempre se cumple E.

Problema 93. Reduzca la expresión $(a-b)^5 + (b-a)^5$.

Solución:

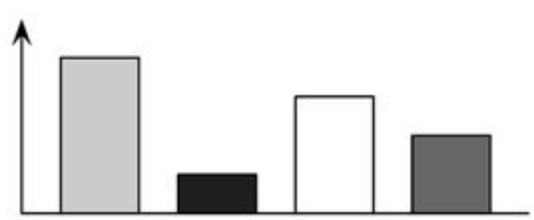
Como $(a-b)^5$ es una potencia impar tenemos que $(a-b)^5$ y $(b-a)^5$, solo difieren en el signo, es decir:

$$(b-a)^5 = (-a+b)^5 = (-(a-b))^5 = -(a-b)^5$$

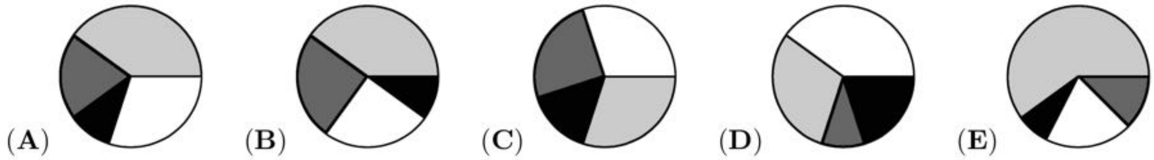
De este modo:

$$(a-b)^5 + (b-a)^5 = (a-b)^5 - (a-b)^5 = 0.$$

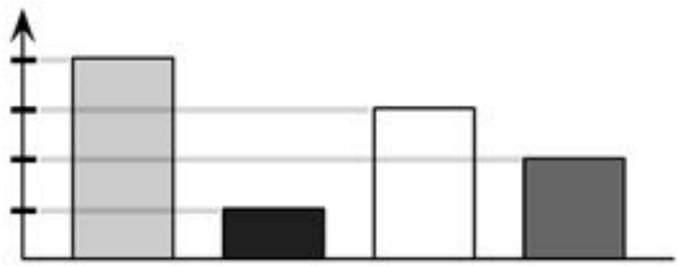
Problema 94. Daniela dibujó un gráfico de barras que representa la cantidad de las cuatro especies de árboles registradas durante una excursión de biología.



Juan piensa que un gráfico circular podría representar mejor las proporciones de las diferentes especies de árboles. ¿Cuál es el gráfico circular más pertinente?



Solución:



Notemos que en el dibujo los 4 sectores están aproximadamente en la razón $1 : 2 : 3 : 4$, por lo que la torta debemos dividirla en $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ partes.

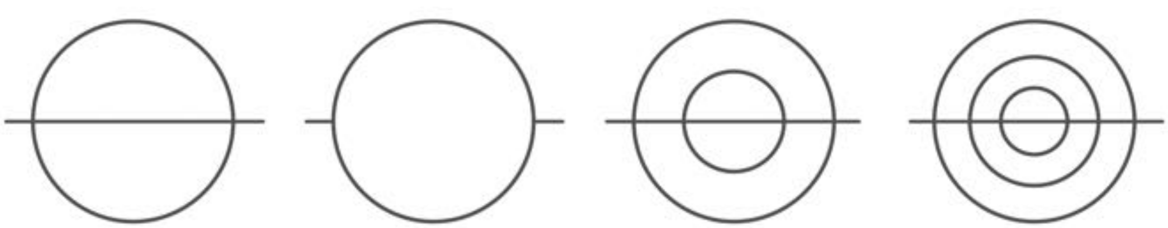
De este modo tenemos, 1 parte para el negro, 2 partes para el gris oscuro, 3 partes para el blanco y 4 partes para el gris claro, por lo que el gráfico que más se acerca es el (A).

Problema 95. Qué resultado obtenemos al dividir por 31 la suma de los 31 enteros del 2001 hasta el 2031.

Solución:

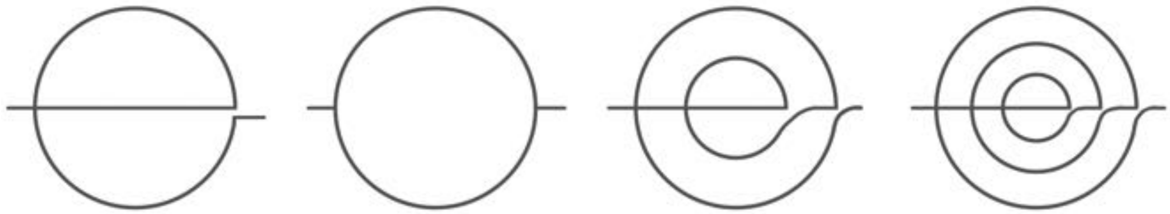
Notemos que debemos calcular la media aritmética de los números $2001, 2002, \ldots, 2031$, y la media aritmética de estos números enteros consecutivos será el número central, que en este caso es el 2016.

Problema 96. ¿Cuántas de las siguientes figuras se pueden trazar con una línea continua sin dibujar un segmento dos veces?



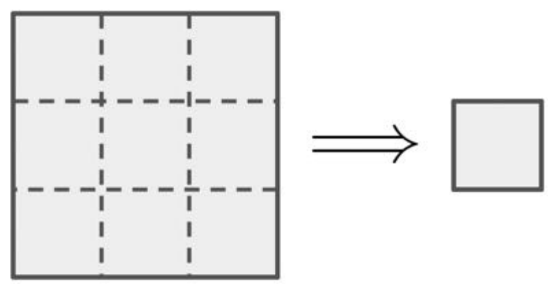
Solución:

Como se trata de trazar las figuras con una linea continua sin pasar dos veces por el mismo segmento, podemos hacerlo del siguiente modo:



Por lo tanto, en 3 de estas formas se puede hacer dicho trazado.

Problema 97. Un pedazo cuadrado de papel se dobla a lo largo de las líneas de puntos, una tras otra, en cualquier orden o dirección. Desde la pieza resultante se corta una esquina . Ahora el papel es desplegado. ¿Cuántos orificios hay en el papel?

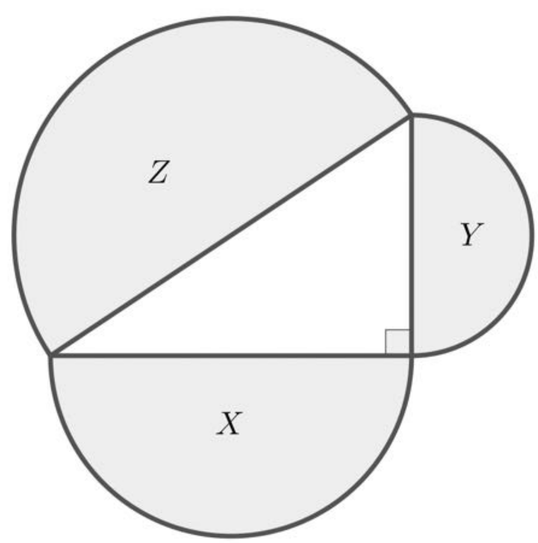


Solución:

Observemos que al doblar el papel, siempre los ocho cuadrados pequeños del borde quedan sobre el cuadrado central, por lo que al cortal una esquina del papel plegado se cortará solo una esquina del cuadrado central, generando solamente un orificio.

Problema 98. Tres semicírculos tienen diámetros que son los lados de un triángulo rectángulo. Sus áreas son X cm^2, Y cm^2 y Z cm^2 ¿Cuál de los siguientes proposiciones es verdadera?

(A) $X + Y < Z$
(B) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$
(C) $X + Y = Z$
(D) $X^2 + Y^2 = Z^2$
(E) $X^2 + Y^2 = Z$



Solución:

Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo y c la hipotenusa, por el teorema de p Pitágoras se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$, si multiplicamos a ambos lados de esta igualdad por $\frac{\pi}{8}$, obtenemos:

$$\frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8} = \frac{c^2\pi}{8}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \pi$$

$$X + Y = Z$$

Donde, $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ son radios de las semicircunferencias.

Problema 99. ¿Cuál de las siguientes es la lista completa del número de ángulos agudos que un cuadrilátero convexo puede tener?

(A) $0, 1, 2$ (B) $0, 1, 2, 3$ (C) $0, 1, 2, 3, 4$ (D) $0, 1, 3$ (E) $1, 2, 3$

Solución:

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo es $360°$. Si los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero son de $90°$, el cuadrilátero no tiene ángulos agudos. Si tres de los ángulos interiores del cuadrilátero son mayores o iguales a $90°$, el cuadrilátero tiene un ángulo agudo. Si dos de los ángulos interiores del cuadrilátero son mayores o iguales a $90°$, el cuadrilátero puede tener dos ángulos agudos. Si uno de los ángulos interiores del cuadrilátero es mayor a $90°$, el cuadrilátero puede tener tres ángulos agudos.

Además, un cuadrilátero convexo no puede tener 4 ángulos agudos, de ser así, la suma de sus ángulos interiores sería menor de $360°$.

Problema 100. Calcular el valor de:

$$\sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \cdot 2015) + (2015 \div 2015)}$$

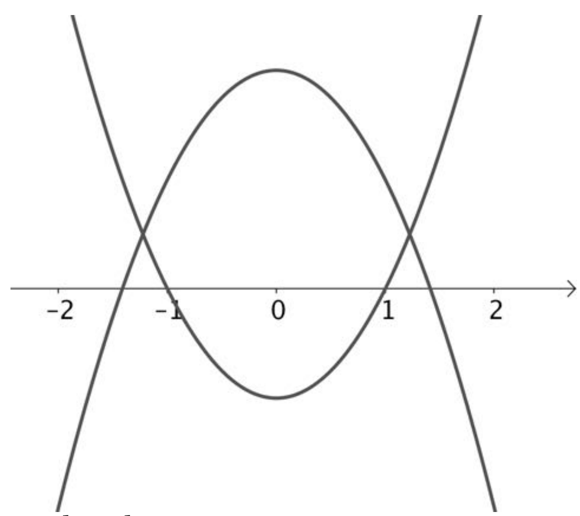
Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{(2\cdot 2015)+(0)+(2015^2)+(1)} &= \sqrt{(2015^2+2\cdot 2015+1} \\ &= \sqrt{(2015+1)^2} \\ &= \sqrt{(2016)^2} \\ &= 2016\end{aligned}$$

Problema 101. Determine en cuantas regiones queda dividido el plano cartesiano al trazar el eje x y las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 1$.

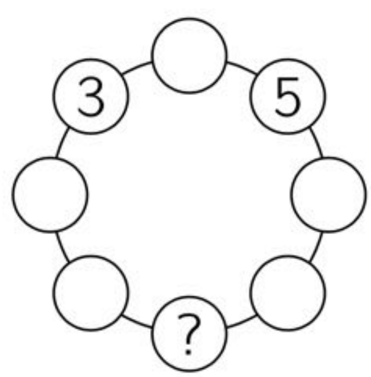
Solución:

Debemos graficar estas curvas para poder contar las regiones, la curva $f(x) = 2 - x^2$, es una parábola que se abre hacia abajo y corta al eje x en $\pm\sqrt{2}$, la curva $g(x) = x^2 - 1$, es una parábola que se abre hacia arriba y corta al eje x en ± 1, luego la gráfica la esbozamos de la siguiente manera.



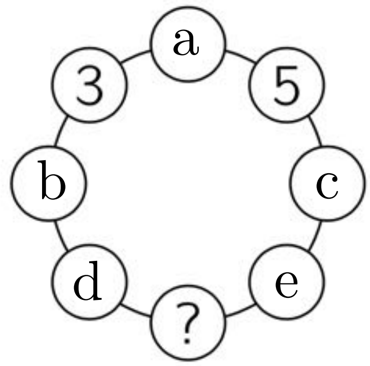
De este modo el plano cartesiano se divide en 10 regiones.

Problema 102. Elsa quiere escribir un número en cada círculo de la imagen de tal manera que cada número es la suma de sus dos vecinos. ¿Qué número debe escribir Elsa en el círculo con el signo de interrogación?



Solución:

Notemos que $a = 3 + 5 = 8$, luego, $8 + b = 3 \Rightarrow b = -5$ y $8 + c = 5 \Rightarrow c = -3$. Además, $3 + d = -5 \Rightarrow d = -8$ y $5 + e = -3 \Rightarrow e = -8$. De este modo se tiene que $?+b = -8$ y que $?+c = -8$, pero como b y c son distintos, concluimos que en este diagrama no se cumple la condición de que cada número es la suma de sus dos vecinos.



Problema 103. Dados cinco números enteros positivos distintos a, b, c, d, e, sabemos que $c \div e = b$, $a+b = d$ y $e-d = a$. ¿Cuál de los números a, b, c, d, e es el más grande?

Solución:

Como $c \div e = b \Rightarrow c = b \cdot e$, además, como $e - d = a \Rightarrow e = a + d$, se tiene que $c = b(a + d)$, luego c es el número mayor.

Problema 104. La media geométrica de un conjunto de n números positivos se define como la raíz n-ésima del producto de esos números. La media geométrica de un conjunto de tres números es 3 y la media geométrica de otro conjunto de tres números es 12. ¿Cuál es la media geométrica del conjunto combinado de seis números?

Solución:

El enunciado nos indica que

$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} = 3 \text{ y } \sqrt[3]{d \cdot e \cdot f} = 12.$$

Como queremos calcular $\sqrt[6]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f}$, multiplicamos ambas igualdades, luego:

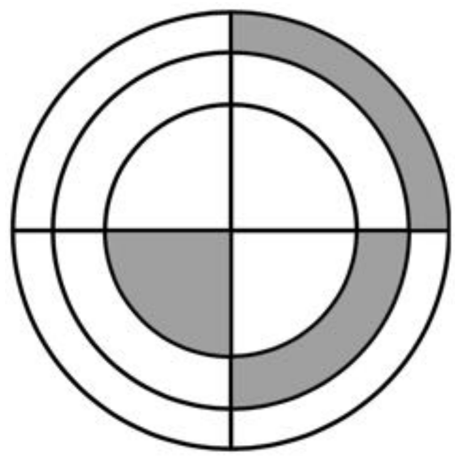
$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \cdot \sqrt[3]{d \cdot e \cdot f} = 3 \cdot 12$$
$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f} = 36.$$

Aplicando raiz cuadrada a ambos lados de la igualdad, obtemos lo pedido:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f}} = \sqrt{36}$$
$$\sqrt[6]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f} = 6.$$

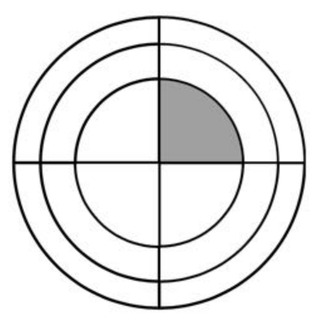
Finalmente, 6 es la media geométrica del conjunto combinado de seis números.

Problema 105. En la figura que se muestra hay tres círculos concéntricos y dos diámetros perpendiculares. Si las tres figuras sombreadas tienen igual área y el radio del círculo pequeño es uno, ¿Cuál es el producto de los tres radios?

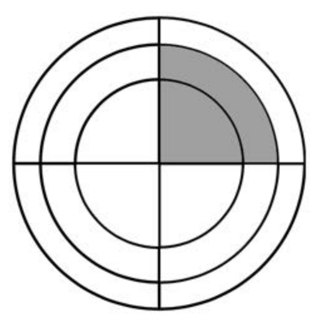


Solución:

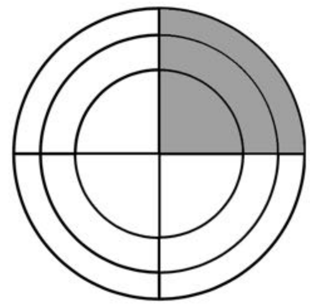
Como el círculo pequeño tiene radio $r_1 = 1$ su área es π, entonces el área de la figura sombreada es $\frac{\pi}{4}$



Como todas las áreas sombreadas son iguales, el área de las dos partes que se muestran en esta figura es $2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto el radio del círculo mediano es $r_2 = \sqrt{2}$, pues:



$$\frac{1}{4} \cdot \pi r_2^2 = \frac{\pi}{2}$$



Como todas las áreas sombreadas son iguales, el área de las tres partes que se muestran en esta figura es $3\frac{\pi}{4}$, por lo tanto el radio del círculo grande es $r_3 = \sqrt{3}$, pues:

$$\frac{1}{4} \cdot \pi r_3^2 = 3 \cdot \frac{\pi}{4}$$

Finalmente el producto de los tres radios es $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

Problema 106. Un concesionario de automóviles compró dos autos. Vendió el primero obteniendo una ganancia del 40 % y el segundo obteniendo una ganancia del 60 %. La ganancia obtenida por los dos coches fue del 54 %. ¿Cuál es la razón de los precios pagados por el primer y el segundo auto?

Solución:

Sea x el precio de compra del primer automóvil e y el precio de compra del segundo automóvil, entonces:

$$\begin{aligned} 1{,}4x + 1{,}6y &= 1{,}54(x+y) \\ 1{,}4x + 1{,}6y &= 1{,}54x + 1{,}54y \\ 0{,}06y &= 0{,}14x \\ \frac{x}{y} &= \frac{0{,}06}{0{,}14} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Problema 107. Vivi tiene un dado con los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$ en sus caras. Tere tiene un dado especial con los números $2, 2, 2, 5, 5, 5$ en sus caras. Cuando Vivi y Tere lanzan los dados el que tiene el número más grande gana. Si los dos números son iguales es un empate. ¿Cuál es la probabilidad de que Tere gane?

Solución:

Notemos si Vivi lanza su dado y obtiene un 1, Tere tiene 6 maneras de ganarle. Si Vivi obtiene un 2, Tere tiene 3 maneras de ganarle. Si Vivi obtiene un 3, Tere tiene 3 maneras de ganarle. Si Vivi obtiene un 4, Tere tiene 3 maneras de ganarle. Si Vivi obtiene un 5 o un 6, Tere no puede ganarle.

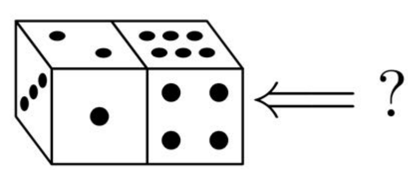
De este modo existen $6+3+3+3=15$ casos favorables donde Tere gana, como en total hay $6 \cdot 6 = 36$ casos posibles, la probabilidad de que Tere gane es $\dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$.

Problema 108. Hay 2015 bolitas en un cajón. Las bolitas son numeradas del 1 al 2015. Se suman los dígitos de los números escritos en cada bolita. Las bolitas en que esta suma sea la misma se pintan del mismo color y bolitas con sumas diferentes, tienen diferentes colores. ¿Cuántos colores diferentes de bolitas hay en el cajón?

Solución:

Notemos que 1999 es el número entre 1 y 2015, en el que al sumar sus dígitos se obtiene el mayor resultado $1+9+9+9=28$. Resulta evidente que para el antecesor de 1999 (1998) la suma de los dígitos será $1+9+9+8=27$, y para 1997 la suma será $1+9+9+7=26$, y así sucesivamente, pudiendo obtener como resultados todos los números del 1 al 28. Por lo tanto, hay bolitas de 28 colores distintos en el cajón.

Problema 109. Para los dados estándar la suma de los números en las caras opuestas es 7. Hay dos dados idénticos como se muestran en la figura. ¿Qué número puede estar en el lado no visible?



Solución:

Como la suma de los números en las caras opuestas es 7, atrás de 4 está el número 3 y abajo de 6 esta el número 1, entonces en la cara indicada con la flecha está el 2 o el 5. Pero 2 no puede ser, pues si pusiéramos el dado izquierdo en la posición del dado derecho, en lugar de 6 arriba veríamos el 1, luego el número que indica la flecha es 5.

Problema 110. La siguiente es la tabla de multiplicar de los números del 1 al 10. ¿Cuál es la suma de los 100 productos presentes en la tabla?

$\times$	1	2	3	$\ldots$	10
1	1	2	3	$\ldots$	10
2	2	4	6	$\ldots$	20
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
10	10	20	30	$\ldots$	100

Solución:

Notemos que la primera columna suma $1+2+3+\ldots+10 = 55$, la segunda columna suma $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\ldots+2\cdot10 = 2(1+2+3+\ldots+10) = 2\cdot55$, de este modo la siguiente columna sumara $3\cdot55$, hasta llegar a la última columna que sumará $10\cdot55$.

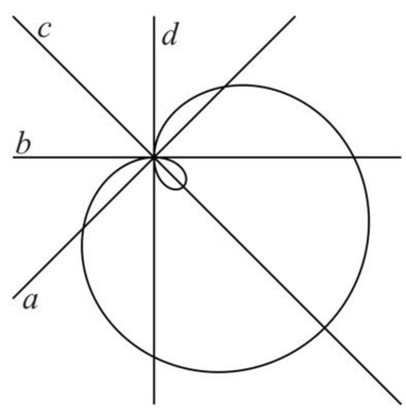
Por lo tanto, la suma de los 100 productos presentes en la tabla completa es:

$$55+2\cdot55+3\cdot55+\ldots+10\cdot55 = 55\cdot(1+2+3+\ldots+10) = 55\cdot55 = 3025$$

Problema 111. La curva en la figura está descrita por la ecuación:

$$(x^2+y^2-2x)^2 = 2(x^2+y^2).$$

¿Cuál de las líneas a, b, c, d representa el eje y?



Solución:

Si hacemos $x = 0$ veremos los cortes de la curva en el eje y:

$$(y^2)^2 = 2(y^2)$$
$$y^4 - 2y^2 = 0$$
$$y^2(y^2 - 2) = 0$$

De este modo $y^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 0$ e $y^2 = 2 \Rightarrow y_3 = \sqrt{2}, y_4 = -\sqrt{2}$. Por lo tanto , la curva corta al eje y en $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ y es tangente en $y = 0$. Luego, la recta a corresponde al eje y.

Problema 112. Al leer las siguientes cinco declaraciones de izquierda a derecha. ¿Cuál es la primera declaración verdadera?

(A): (C) es verdadero. (B): (A) es verdadera. (C): (E) es falsa. (D): (B) es falsa. (E): $1 + 1 = 2$

Solución:

- (A) dice que (C) es verdadero y (C) dice que (E) es falsa, pero (E) no es falsa pues $1 + 1 = 2$. Luego, (A) es falsa.
- (B) dice que (A) es verdadera, pero acabamos de demostrar en el punto anterior que (A) es falsa. Luego, (B) es falsa.
- (C) dice que (E) es falsa, pero como $1+1 = 2$ (E) es verdadera. Luego, (C) es falsa.
- (D) dice que (B) es falsa, lo que en el punto 2 está demostrado. Luego, (D) es la primera declaración verdadera.

Problema 113. ¿Cuántos polígonos regulares existen tal que sus ángulos (en grados) son números enteros?

Solución:

Sabemos que la medida de un ángulo interior de un polígono regular de n lados es:

$$\frac{180(n-2)}{n} = \frac{180n - 360}{n} = \frac{180n}{n} - \frac{360}{n} = 180 - \frac{360}{n}$$

Por lo tanto, debemos determinar los valores de n para los cuales $\dfrac{360}{n}$ es entero, es decir debemos determinar la cantidad de divisores de 360, para ello obtenemos la descomposición prima de $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, vemos que cualquier combinación de productos entre estos factores será un divisor de 360, por ejemplo 2 divide a 360, $1 \cdot 3$ divide a 360, $2 \cdot 3$ divide a 360, $3 \cdot 5$ divide a 360, $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ divide a 360, etc. Entonces debemos encontrar cuántas combinaciones son formadas con dichos factores.

- 2^3 aporta 4 factores, 2^0, 2^1, 2^2 y 2^3 ($3 + 1$ factores, donde 3 es el exponente de 2).
- 3^2 aporta 3 factores, 3^0, 3^1 y 3^2 ($2+1$ factores, donde 2 es el exponente de 3) .
- 5^1 aporta 2 factores, 5^0 y 5^1 ($1 + 1$ factores, donde 1 es el exponente de 5) .

Por lo tanto, todas las combinaciones posibles entre estos factores son $(3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ combinaciones, es decir, 360 tiene 24 divisores.

Pero como n es el número de lados del polígono buscado, $n \neq 1$ y $n \neq 2$, luego existen 22 polígonos regulares donde sus ángulos (en grados) son números enteros.

Existe un resultado que relaciona el teorema de la descomposición prima de un número compuesto con su número de divisores, el cual indica que si n es un número compuesto se puede escribir de la siguiente manera:

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$$

Donde $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ son primos, y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ son naturales. Luego la cantidad de divisores de n está dada por:

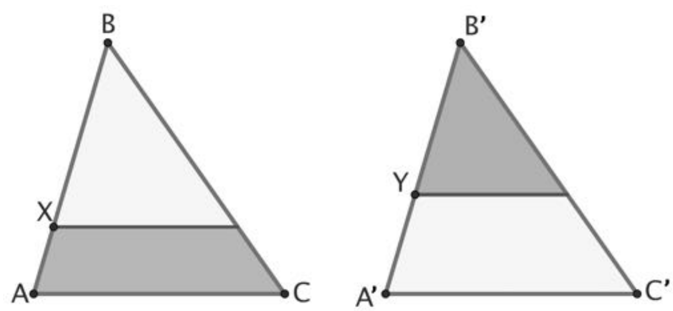
$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot (a_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1)$$

Problema 114. ¿Cuántos números enteros de 3 dígitos positivos pueden ser representados como la suma de exactamente nueve potencias diferentes de 2?

Solución:

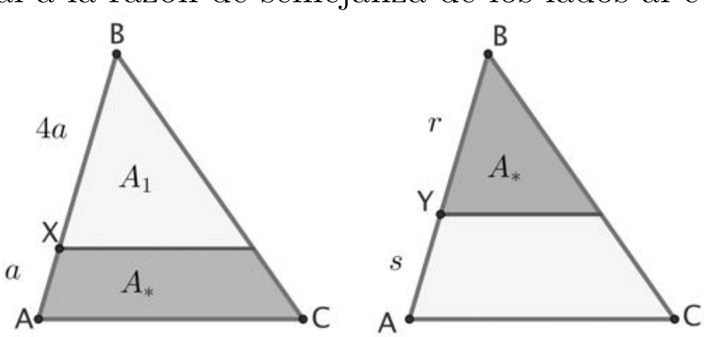
Como queremos escribir un número de 3 dígitos como la suma de 9 diferentes potencias de 2, necesariamente estas potencias deben tener 3 o menos dígitos, por lo tanto, nos sirven las potencias $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512$, o sea solo 10 potencias de 2 que suman 1023, y como necesitamos 9 distintas debemos excluir solo una. Cuando excluimos al 512 obtenemos un número menor que mil (con tres dígitos), lo mismo ocurre si excluimos solo el 256, o solo el 128, o solo el 64, o solo el 32, el 16 no lo podemos excluir, pues la suma sería mayor que, luego se pueden escribir solo 5 números.

Problema 115. Dados los triángulos ABC y $A'B'C'$ congruentes, se traza un segmento paralelo a la base AC que pasa por X y un segmento paralelo a la base $A'C'$ que pasa por Y. Si las áreas de las regiones sombreadas son las mismas y los segmentos BX y XA están en la razón $4 : 1$. ¿En qué razón están los segmentos $B'Y$ y YA'?



Solución:

Como las líneas trazadas en ambos casos son paralelas a las bases, esto determina que los triángulos interiores son semejantes al triángulo mayor. Como en dos triángulos semejantes la razón de semejanza de las áreas es igual a la razón de semejanza de los lados al cuadrado se tiene que:



$$\frac{A_1}{A_{ABC}} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\frac{A_1}{A_{ABC}} = \frac{16}{25}$$

$$A_1 = \frac{16}{25}A_{ABC}$$

Luego $A_* = A_{ABC} - A_1 = A_{ABC} - \dfrac{16}{25}A_{ABC} = \dfrac{9}{25}A_{ABC}$

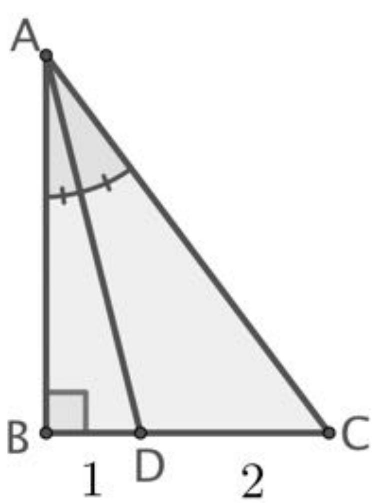
Supongamos que los segmentos BY y YA están en la razón $\dfrac{r}{s}$, entonces:

$$\frac{A_*}{A_{ABC}} = \left(\frac{r}{s+r}\right)^2$$
$$A_* = \frac{r^2}{(s+r)^2} \cdot A_{ABC}.$$

Por lo tanto $\dfrac{r^2}{(s+r)^2} \cdot A_{ABC} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \dfrac{r}{s+r} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{r}{s} = \dfrac{3}{2}$.

Problema 116. En un triángulo rectángulo, la bisectriz de un ángulo agudo divide el lado opuesto en segmentos de longitud 1 y 2. ¿Cuál es la longitud de la bisectriz?

Solución:



Una vez dibujado el triángulo con las condiciones del enunciado, podemos utilizar el teorema de la bisectriz, donde:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{AC}$$

Luego $AC = 2AB$, utilizando el teorema de Pitágoras se tiene que $AB^2 + 3^3 = (2AB)^2 \Rightarrow 9 = 3AB^2 \Rightarrow AB^2 = 3$. Además, $AB^2 + 1^2 = AD^2 \Rightarrow 3 + 1 = AD^2 \Rightarrow AD = 2$.

Problema 117. Determine de cuántas maneras se pueden elegir los dígitos a, b, c tal que $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$, donde $\overline{xy}$ representa un número de decena x y unidad y.

Solución:

Como $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ entonces $a < b < c$, es decir, las decenas de los números siempre serán crecientes. Analicemos, la forma de las tripletas abc que cumplen la condición cuando el primer dígito es 1:

$$123, 124, 125, 126, 127, 128, 129 \text{ (7 números)}$$

$$134, 135, 136, 137, 138, 139 \text{ (6 números)}$$

$$145, 146, 147, 149 \text{ (5 números)}$$

$$\vdots$$

$$178, 179 \text{ (2 números)}$$

$$189 \text{ (1 número)}$$

En total $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ números.

Analicemos la forma del número de tres dígitos que cumple la condición cuando el primer dígito es 2:

$$234, 235, 236, 237, 238, 239 \text{ (6 números)}$$

$$245, 246, 247, 248, 249 \text{ (5 números)}$$

$$\vdots$$

$$278, 279 \text{ (2 números)}$$

$$289 \text{ (1 número)}$$

En total $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ números.

De este modo cuando el número comience con 3 habrá $5+4+3+2+1 = 15$ números y así sucesivamente.

Finalmente, en total habrá:

$$\begin{aligned}&(7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) + (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) + (5 + 4 + 3 + 2 + 1)\\&+(4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1\\&=7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1\\&=7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7\\&=84 \text{ números.}\end{aligned}$$

Problema 118. Cuando uno de los números $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ fue eliminado, la media de los números restantes fue 4,75. ¿Qué número fue eliminado?

$\boxed{\text{Solución:}}$

Observemos que la media de los números enteros desde 1 hasta n es:

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}.$$

Notemos que al quitar el número más grande de esta lista, es decir n, obtenemos la media más pequeña, es decir:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}-n}{n-1} = \frac{\frac{n^2-n}{2}}{n-1} = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n}{2}.$$

Por otra parte, al quitar el número más pequeño de esta lista, es decir 1, obtenemos la media más grande, es decir:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}-1}{n-1} = \frac{\frac{n^2+n-2}{2}}{n-1} = \frac{(n+2)(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n+2}{2}.$$

En particular, el promedio $\frac{19}{4}$ debe estar entre $\frac{n}{2}$ y $\frac{n+2}{2}$, es decir:

- $\frac{19}{4} \geq \frac{n}{2} \Rightarrow n \leq \frac{19}{2}$, pero como n es entero, se tiene que $n \leq 9$.
- $\frac{19}{4} \leq \frac{n+2}{2} \Rightarrow n+2 \geq \frac{19}{2} \Rightarrow n \geq \frac{15}{2}$, pero como n es entero, se tiene que $n \geq 8$.

Luego, $n = 8$ o $n = 9$, Pero si $n = 8$ al eliminar uno de los números, el promedio de los restantes debería ser $\frac{19}{4}$, y por lo tanto la suma de los 7 números debería ser $\frac{19}{4} \cdot 7$ lo que es imposible pues la suma de enteros es entera y $\frac{19}{4} \cdot 7$ no es entero, de modo que $n = 9$.

Por último, si $n = 9$ al eliminar un k de entre ellos, el promedio de los restantes debería ser $\frac{19}{4}$, es decir:

$$\frac{\frac{9(9+1)}{2} - k}{9 - 1} = \frac{19}{4} \Rightarrow k = 7$$

Problema 119. Se escriben diez números distintos en una pizarra. Cualquier número que sea igual al producto de los otros nueve números, se subraya. ¿Cuántos números se pueden subrayar como máximo?.

Solución

Sea $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{10} = P$, supongamos que existe a_k entre a_1 y a_10, de modo que si subraya el producto de los otros nueve números es igual a a_k, es decir, $\frac{P}{a_k} = a_k$, entonces $P = a_k^2$, por lo tanto hay solo dos valores para a_k, que son, $\sqrt{P}$ y $-\sqrt{P}$.

Podemos ver que este caso ocurre cuando 8 de estos números son racionales y al multiplicarlos se obtiene -1, otro número es -1 y el otro número es 1. De este modo se puede subrayar el -1, pues al multiplicar los 8 números por 1 el resultado es -1, y también se puede subrayar el 1, pues al multiplicar los 8 números por -1 el resultado es 1.

Problema 120. Varios puntos se marcan en una línea, y se trazan todos los segmentos posibles entre parejas de estos puntos. Uno de los puntos se encuentra en 80 de estos segmentos (no como extremo); otro punto se encuentra en 90 de estos segmentos (no como extremo). ¿Cuántos puntos fueron marcados en la línea?.

Solución

Notemos que si tenemos 8 puntos en una recta y se trazan todos los segmentos posibles entre parejas de estos puntos, entonces el segundo punto tiene 1 punto a su izquierda y 6 puntos a su derecha, por lo tanto, dicho punto se encuentra en $1 \cdot 6 = 6$ de los segmentos trazados, el tercer punto tiene 2 puntos a su izquierda y 5 puntos a su derecha, por lo tanto, dicho punto se encuentra en $2 \cdot 5 = 10$ de los segmentos trazados. Por otra parte, si un punto se encuentra en 12 de los segmentos trazados, puede que tenga 3 puntos a su izquierda y 4 puntos a su derecha, pues $3 \cdot 4 = 12$, o 4 puntos a su izquierda y 3 puntos a su derecha, pues $4 \cdot 3 = 12$, o 2 puntos a su izquierda y 6 puntos a su derecha, pues $2 \cdot 6 = 12$, o 6 puntos a su izquierda y 2 puntos a su derecha, pues $6 \cdot 2 = 12$, o 1 punto a su izquierda y 12 puntos a su derecha, pues $1 \cdot 12 = 12$, o 12 puntos a su izquierda y 1 punto a su derecha, pues $12 \cdot 1 = 12$.

Como:

- $80 = 1 \cdot 80$, un punto se encuentra en 80 de los segmentos trazados, si hubiera $80 + 1 + 1 = 82$ puntos, contándolo a él.
- $80 = 2 \cdot 40$, un punto se encuentra en 80 de los segmentos trazados, si hubiera $40 + 2 + 1 = 43$ puntos, contándolo a él.
- $80 = 4 \cdot 20$, un punto se encuentra en 80 de los segmentos trazados, si hubiera $20 + 4 + 1 = 25$ puntos, contándolo a él.
- $80 = 5 \cdot 16$, un punto se encuentra en 80 de los segmentos trazados, si hubiera $16 + 5 + 1 = 22$ puntos, contándolo a él.
- $80 = 8 \cdot 10$, un punto se encuentra en 80 de los segmentos trazados, si hubiera $10 + 8 + 1 = 19$ puntos, contándolo a él.

Como:

- $90 = 1 \cdot 90$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $90 + 1 + 1 = 92$ puntos, contándolo a el.
- $90 = 2 \cdot 45$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $45 + 2 + 1 = 48$ puntos, contándolo a el.
- $90 = 3 \cdot 30$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $30 + 3 + 1 = 33$ puntos, contándolo a el.
- $90 = 5 \cdot 18$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $18 + 5 + 1 = 24$ puntos, contándolo a el.

- $90 = 6 \cdot 15$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $15 + 6 + 1 = 22$ puntos, contándolo a el.
- $90 = 9 \cdot 10$, un punto se encuentra en 90 de los segmentos trazados, si hubiera $10 + 9 + 1 = 20$ puntos, contándolo a el.

Por lo tanto, si uno de los puntos se encuentra en 80 de los segmentos (no como extremo) y otro punto se encuentra en 90 de los segmentos (no como extremo), fueron marcados 22 puntos en la línea.

Problema 121. ¿Cuántos números de dos dígitos xy existen tal que al sumarle el número de dos dígitos yx se obtiene un múltiplo de 7?

Solución:

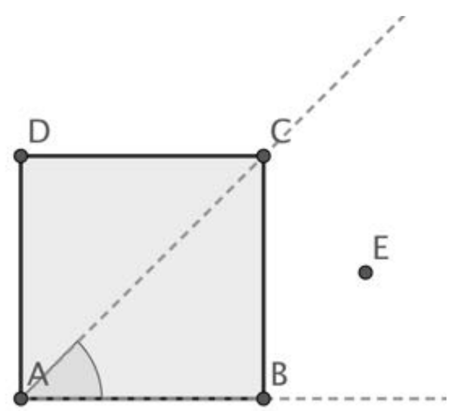
Notemos que sumar los números xy e yx es equivalente a sumar $10x + y + 10y + x = 11x + 11y = 11(x + y)$ y como queremos que la suma sea múltiplo de 7, necesariamente $x + y$ es múltiplo de 7, y necesariamente $x + y$ es menor que 18, pues x, y son dígitos Por lo tanto, $x + y$ es 7 o 14, así los posibles números son:

- $16 + 61 = 77$
- $61 + 16 = 77$
- $25 + 52 = 77$
- $52 + 25 = 77$
- $43 + 34 = 77$
- $34 + 43 = 77$
- $59 + 95 = 154$
- $95 + 59 = 154$
- $68 + 86 = 154$
- $86 + 68 = 154$

- $77 + 77 = 154$

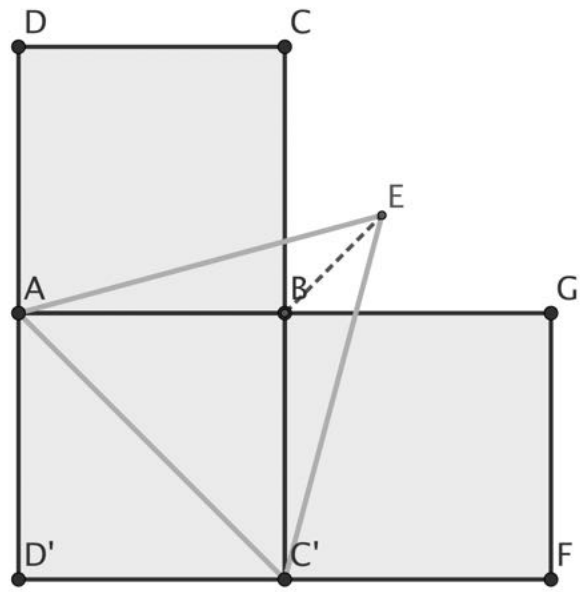
Por lo tanto existen 11 números.

Problema 122. Dado un cuadrado $ABCD$ y un punto E al interior del ángulo CAB, se tiene que $AE = BD$ y que BE es perpendicular a BD. Determina la medida del ángulo BAE.



Solución:

Dado el cuadrado $ABCD$ construimos el cuadrado $ABC'D'$ simétrico con respecto al lado AB y el cuadrado $BC'FG$ simétrico con respescto al punto B, también trazamos la diagonal AC' (simétrica de AC con respecto a AB). Recordemos que BE es perpendicular a la diagonal BD, por lo tanto, también es perpendicular a la diagonal BF, por lo tanto $C'E = BF$, luego el triángulo $AC'E$ es equilátero, por lo que $\angle EAC' = 60° = \angle EAB + 45°$, entonces $\angle EAB = 15$.



Problema 123. Dado un cuadrilátero $ABCD$ con $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $AB = BC$ y $AD + DC = 20$: Calcule su área.

Solución:

Sea $DC = x$, como $AD + DC = 20$, entonces $AD = 20 - x$, por lo tanto, el área del triángulo ADC es:

$$\frac{x(20-x)}{2} = \frac{20x - x^2}{2}.$$

Por otra parte, podemos calcular AC utilizando teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = x^2 + (20-x)^2 \Rightarrow AC = \sqrt{400 - 40x + 2x^2}$$

Como el triángulo ABC se puede inscribir en una circunferencia, se tiene que $OA = OB = OC = \dfrac{\sqrt{400-40x+2x^2}}{2}$ pues son radios, además, como el triángulo ABC es isósceles se tiene que OB es altura. Luego, el área del triángulo ABC es:

$$\frac{\sqrt{400-40x+2x^2} \cdot \dfrac{\sqrt{400-40x+2x^2}}{2}}{2} = \frac{400-40x+2x^2}{4}$$

Finalmente, el área total es:

$$\frac{20x - x^2}{2} + \frac{400 - 40x + 2x^2}{4} = \frac{40x - 2x^2 + 400 - 40x + 2x^2}{4} = 100$$

Problema 124. De los números naturales del 1 al 9 uno de ellos es borrado. De los 8 que quedan, 2 se multiplican y los restantes 6 se suman, resultando el producto igual a la suma. ¿De cuántas maneras se puede elegir el número que se borra al inicio?.

Solución:

Notemos que los números naturales del 1 al 9 suman 45, sea k el número que es borrado, por lo tanto:

$$36 \leq 45 - k \leq 44$$

Supongamos que de los números que quedan se multiplican los números a y b, por lo tanto:

$$\begin{aligned} a \cdot b = 45 - k - a - b \Rightarrow a \cdot b + a + b = 45 - k \\ \Rightarrow (a+1)(b+1) - 1 = 45 - k. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Y como $36 \leq 45 - k \leq 44$ entonces:

$$36 \leq (a+1)(b+1) - 1 \leq 44 \Rightarrow 37 \leq (a+1)(b+1) \leq 45$$

Por lo que la condición la cumplen los pares $(3, 9)$, $(4, 8)$, $(4, 7)$ y $(5, 6)$.

- Para el par $(a, b) = (3, 9) \overset{(1)}{\Longrightarrow} k = 45 - 4 \cdot 10 + 1 = 6$, así de la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, eliminamos el 6 y obtenemos que $3 \cdot 9 = 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$.

- Para el par $(a, b) = (4, 8) \overset{(1)}{\Longrightarrow} k = 45 - 5 \cdot 9 + 1 = 1$, así de la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, eliminamos el 1 y obtenemos que $4 \cdot 8 = 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 32$.

- Para el par $(a, b) = (4, 7) \overset{(1)}{\Longrightarrow} k = 45 - 5 \cdot 8 + 1 = 6$, así de la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, eliminamos el 6 y obtenemos que $4 \cdot 7 = 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 9 = 28$.
- Para el par $(a, b) = (5, 6) \overset{(1)}{\Longrightarrow} k = 45 - 6 \cdot 7 + 1 = 4$, así de la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, eliminamos el 4 y obtenemos que $5 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 9 = 30$.

Finalmente, el número que se borra al inicio, se puede borrar de 4 maneras.

Problema 125. ¿Cuantos prismas rectos con dimensiones enteras x, y, z $(x \leq y \leq z)$ existen, tal que el área total es el doble de su volumen, ignorando la unidad de medida?

Solución:

Como el área total es el doble de su volumen, entonces:

$$2xy + 2xz + 2yz = 2xyz / \div 2xyz$$
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$$

Notemos que los enteros buscados no pueden ser igual a 1, comencemos probando $x = 2$ e $y = 3$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto $z = 6$.

Probemos ahora con $x = 2$ e $y = 4$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto $z = 4$.

Probemos ahora con $x = 2$ e $y = 5$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\frac{1}{z} = \frac{3}{10}$$

Lo que no es posible, observemos que con $x = 2$ ya no podemos probar con un $y > 5$, pues z sería menor que y.

Probemos ahora con $x = 3$ e $y = 3$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto $z = 3$.

Probemos ahora con $x = 3$ e $y = 4$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1$$
$$\frac{1}{z} = \frac{5}{12}$$

Lo que no es posible, observemos que con $x = 3$ ya no podemos probar con un $y > 4$, pues z sería menor que y.

Probemos ahora con $x = 4$ e $y = 4$ entonces:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

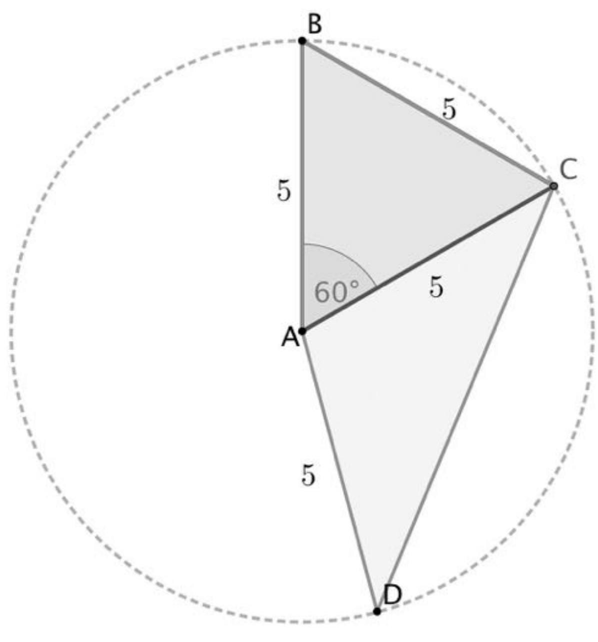
Lo que no es posible, pues $z > y$, observemos que con $x = 4$ ya no podemos probar con un $y > 4$, pues z sería menor que y.

Luego las dimensiones pueden ser: $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 3)$.

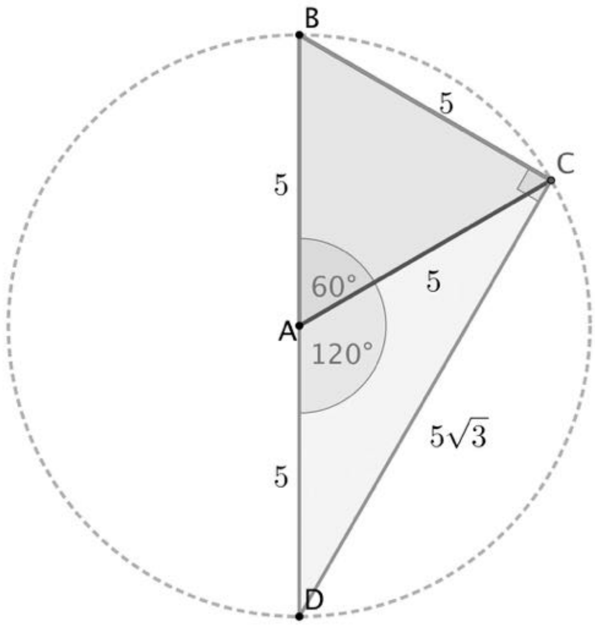
Problema 126. En un cuadrilátero convexo, 3 de sus lados y la diagonal miden 5 unidades. ¿Cuántos valores enteros puede tomar el cuarto lado?

Solución:

Trazamos a partir de A los lados AB y AD de longitud 5 y la diagonal AC también de longitud 5, entonces podemos ubicar el punto A en el centro de una circunferencia de radio 5 de modo que los lados y la diagonal sean radios. Con el tercer lado BC de longitud 5 se forma un triángulo equilátero ABC como muestra la figura, por lo tanto, para que $ABCD$ sea un cuadrilatero convexo, $\angle CAD$ debe ser menor que $180 - 60 = 120°$.



Notemos que cuando $\angle CAD = 120°$ el $\angle BCD = 90°$ y utilizando pitágoras se tiene que $DC = 5 \cdot \sqrt{3}$, luego como el $\angle CAD$ es menor que 120°, el lado DC será menor que $5\sqrt{3}$, finalmente, el cuarto lado puede tomar 8 valores enteros $(8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1)$.



Problema 127. 51 cuervos se sientan en fila en la rama de un árbol. Cuando un cuervo grazna su vecino de la derecha y su vecino de la izquierda salen volando. Cualquier cuervo que vuela regresa en 1 minuto a su lugar anterior y grazna de inmediato. Si el cuervo del extremo izquierdo de la rama es el primero que grazna. ¿Cuántas veces graznó el cuervo del extremo derecho durante los primeros 60 minutos?.

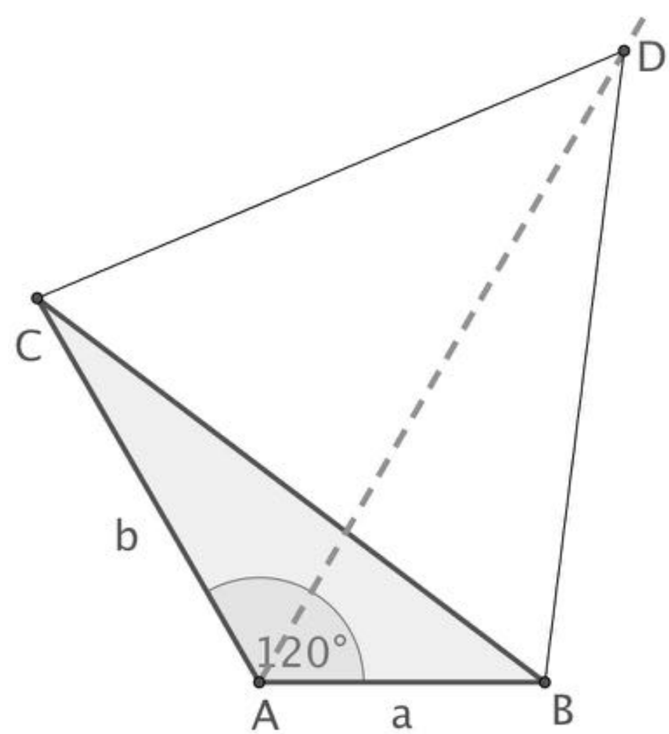
Solución

Contemos el número de graznidos utilizando la siguiente tabla, donde en la primera fila enumeramos los cuervos del 1 al 51 y en la primera columna enumeramos los minutos del 0 al 60. Diremos que $G = grazna$ y $V = vuela$.

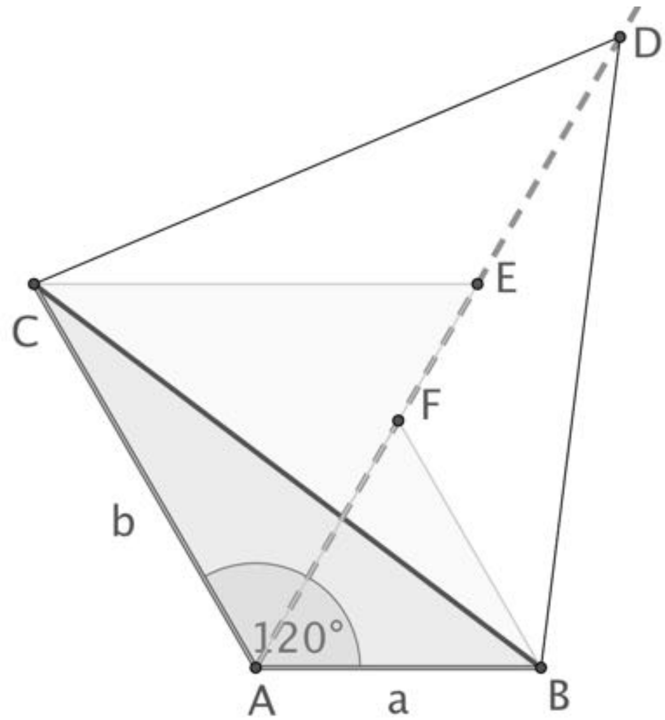
	1	2	3	4	5	...	50	51
0	G	V						
1	V	G	V					
2	G	V	G	V				
3	V	G	V	G	V			
$\vdots$								
48	G	V	G	V	G	...	V	
49	V	G	V	G	V	...	G	V
50	G	V	G	V	G	...	V	G
51	V	G	V	G	V	...	G	V
52	G	V	G	V	G		V	G
$\vdots$								
60	G	V	G	V	G		V	G

Notemos que en el minuto 0 comienza graznando el cuervo 1, en el minuto 1 el cuervo 2 da su primer graznido, en el minuto 2 el cuervo 3 da su primer graznido, siguiendo la recurrencia observamos que el primer graznido del cuervo 51 será en el minuto 50, y desde ese minuto, graznará solamente en los minutos pares, luego, el cuervo 51 del extremo derecho graznará 6 veces.

Problema 128. En un Triángulo ABC, donde $\angle BAC = 120°$, el punto D está ubicado en la bisectriz de $\angle BAC$, tal que $AD = AB + AC$. ¿Cuál es la medida del ángulo BDC?.



Solución



Sea $AB = a$ y $AC = b$, marcamos en la bisectriz los puntos F y E, tal que $AF = a$ y $AE = b$. Como $AD = a + b$, se tiene que $ED = a$ y $FD = b$. Como la bisectriz de $\angle BAC = 120°$ lo divide en dos ángulos de $60°$ y como $AC = AE = b$, entonces, el $\triangle ACE$ es equilátero, análogamente, como $AB = AF = a$, implica que $\triangle ABF$ es equilátero. Luego $\angle CED = \angle DFB = 120°$

Como $\angle CED = \angle DFB = \angle CAB = 120°$ y $AB = BF = ED = a$ y $AC = CE = FD = b$, se tiene que los triángulos CBA, CDE y DBF son congruentes, por lo tanto, el triángulo BDC es equilátero, concluyendo que $\angle BDC = 60°$

Problema 129. Cuatro personas A, B, C, D participan en una carrera. Después de la carrera se afirmó lo siguiente: A llegó primero, B llegó último, C no llegó último y D no llegó ni primero ni último. Si exactamente una de estas afirmaciones es falsa. ¿Quién llegó primero en la carrera?.

Solución:

Notemos que si la primera afirmación es falsa, entonces A no llego primero, B llegó último, C no llegó último y D no llegó ni primero ni último, por lo que las posibles llegadas son $CADB$ y $CDAB$.

Si la segunda afirmación es falsa, entonces A llegó primero, B no llegó último, C no llegó último y D no llegó ni primero ni último, lo que es imposible, pues nadie llegó último.

Si la tercera afirmación es falsa, entonces A llegó primero, B llegó último, C llegó último y D no llegó ni primero ni último, lo que es imposible pues B y C habrían llegado último.

Si la cuarta afirmación es falsa, entonces A llegó primero, B llegó último, C no llegó último y D llegó primero o llegó último, lo que es imposible pues si A llegó primero y B llegó último, D no puede haber llegado en ninguno de esos dos lugares.

Luego, sólo la primera afirmación puede ser falsa, por lo tanto C llegó primero en la carrera. En el caso de que consideremos que algunos participantes podrían haber empatado, entonces A y C podrían haber llegado primero.

Problema 130. Mi mamá plantó cinco claveles de cinco colores distintos en cinco maceteros de la terraza, y los dejó en el siguiente orden de izquierda a derecha: rojo, morado, blanco, amarillo y naranjo. Aparentemente, alguien desordenó los maceteros, pues a la izquierda floreció el clavel blanco y en el centro está comenzando a florecer el clavel naranjo. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un clavel florezca en el lugar donde fue plantado?.

Solución:

Siendo rojo=R, morado=M, blanco=B, amarillo=A y naranjo=N, los claveles deberían haber nacido en el siguiente orden:

R	M	B	A	N

Pero ya florecieron dos del siguiente modo:

R	M	B	A	N
B	•	N	•	•

Por lo que en los tres espacios que quedan, los tres claveles restantes pueden florecer de las siguientes maneras:

R	**M**	**B**	**A**	**N**
B	$\bullet$	N	$\bullet$	$\bullet$
B	R	N	M	A
B	R	N	**A**	M
B	**M**	N	**A**	R
B	**M**	N	R	A
B	A	N	R	M
B	A	N	M	R

Como en estos 6 casos posibles hay 3 casos favorables, donde al menos un clavel florece en el lugar donde fue plantado, entonces la probabilidad pedida es:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Problema 131. Dos amigos trotan a una velocidad constante y en línea recta entre los puntos A y B. Ellos comenzaron a trotar al mismo tiempo, uno desde A hasta B y el otro desde B hasta A. Ellos se cruzan por primera vez a 500 metros de distancia de A. Cuando uno de ellos llega al otro extremo, inmediatamente regresa trotando hacia su punto de partida, encontrándose por segunda vez a 250 metros de B. ¿Cuántos metros de distancia hay entre A y B?.

Solución:

Notemos que en el primer intervalo de tiempo, el corredor ubicado en el punto A avanza 500 metros y el corredor ubicado en el punto B avanza $AB - 500$ metros. En el segundo intervalo de tiempo, el corredor que partió en el punto A a recorrido $AB + 250$ metros desde el inicio y el corredor que partió en el punto B a recorrido $2AB - 250$ metros.

Como las distancias recorridas en cada intervalo de tiempo son proporcionales se tiene que:

$$\frac{500}{AB + 250} = \frac{AB - 500}{2AB - 250} \Rightarrow x = 1250$$

Luego la distancia entre A y B es 1250 metros.

En este problema se espera que un niño por tanteo se dé cuenta que por cada 2 metros que avanza el corredor ubicado en el punto A, el corredor ubicado en el punto B avanza 3 metros, de este modo cuando el primer corredor avanza 500 metros el otro avanza 750 metros, cumpliéndose la condición de encontrarse por segunda vez a 250 metros de B.

Problema 132. Un peón está en un tablero de ajedrez ilimitado en todas sus direcciones. En cada paso se mueve a una celda adyacente (no se mueve en diagonal). ¿Cuál es la probabilidad de que el peón después de 4 pasos realizados al azar caiga de nuevo en la celda inicial?.

Solución:

Utilizando el principio de la multiplicación calculamos el número de casos posibles, pues en el primer paso el peón tiene 4 opciones (A=arriba, B=abajo, I=izquierda, D=derecha), en el segundo paso también tiene 4 movimientos posibles, al igual que en el tercer y cuarto paso, luego el peón al dar 4 pasos puede tomar $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ caminos posibles.

Para contar los caminos favorables (aquellos que llevan al peón al lugar de origen en 4 pasos), contaremos primero aquellos donde el peón da su primer movimiento hacia arriba, y regresa por arriba, siendo estos $AABB$, $AIDB$, $ADIB$, $ABAB$. Contaremos ahora cuando el peón da su primer movimiento hacia arriba, y regresa por la izquierda, siendo estos $AIBD$, $ABID$. Contaremos ahora cuando el peón da su primer movimiento hacia arriba, y regresa por la derecha, siendo estos $ADBI$, $ABDI$. Por último contaremos cuando el peón da su primer movimiento hacia arriba, y regresa por abajo, encontrando solo el camino $ABBA$. En total son $4+2+2+1 = 9$ caminos favorables cuando el peón sale hacia arriba, análogamente se encuentran 9 caminos al salir hacia la izquierda, 9 al salir hacia la derecha y 9 al salir hacia abajo. Luego el peón al dar 4 pasos puede tomar $4 \cdot 9$ caminos posibles.

Finalmente la probabilidad de que el peón después de 4 pasos realizados al azar caiga de nuevo en la celda inicial es $\dfrac{4 \cdot 9}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \dfrac{9}{64}$.

Problema 133. 51 cuervos se sientan en fila en la rama de un árbol. Cuando un cuervo grazna su vecino de la derecha y su vecino de la izquierda salen volando. Cualquier cuervo que vuela regresa en 1 minuto a su lugar anterior y grazna de inmediato. Si el cuervo del extremo izquierdo de la rama graznó primero. ¿Cuántas veces en total los cuervos graznaron durante la hora transcurrida después de que graznó el cuervo del extremo izquierdo?.

Solución

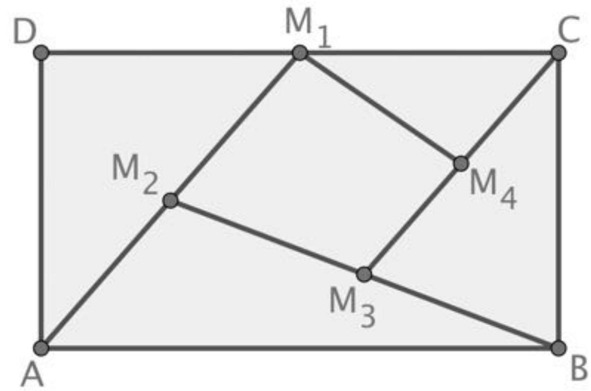
Contemos el número de graznidos utilizando la siguiente tabla, donde en la primera fila enumeraremos los cuervos del 1 al 51 y en la primera columna enumeraremos los minutos del 0 al 60:

	1	2	3	4	5	...	50	51
0	G	V						
1	V	G	V					
2	G	V	G	V				
3	V	G	V	G	V			
$\vdots$								
48	G	V	G	V	G	...	V	
49	V	G	V	G	V	...	G	V
50	G	V	G	V	G	...	V	G
51	V	G	V	G	V	...	G	V
52	G	V	G	V	G		V	G
$\vdots$								
60	G	V	G	V	G		V	G

Notemos que el primer cuervo grazna por primera en el minuto 0 y luego grazna sólo en los minutos pares, es decir, grazna 31 veces, el cuervo 2 grazna 30 veces, el cuervo 3 también grazna 30 veces, el cuervo 4 grazna 29 veces, el cuervo 5 también grazna 29 veces, y asi sucesivamente, es decir los que están en posición impar graznan $31, 30, 29, 28, \ldots 6$ veces respectivamente, y los que están en posición par graznan $30, 29, 28, \ldots 7$, luego en total han graznado:

$$\left(2 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} + 31\right) - \left(2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 6\right) = 925 \text{ veces.}$$

Problema 134. En el rectángulo $ABCD$ que se muestra en la figura, M_1 es el punto medio de DC, M_2 es el punto medio de AM_1, M_3 es el punto medio de BM_2 y M_4 es el punto medio de CM_3. Encontrar la razón entre el área del cuadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ y el área del rectángulo $ABCD$.



Solución

Sea a la base del rectángulo y b su altura, por lo tanto $a \cdot b$ es su área. Notemos que en el triángulo DAM_1, $AD = b$ es la base y $DM_1 = \dfrac{a}{2}$ su altura, luego, el área de $\triangle DAM_1 = \dfrac{ab}{4}$.

Además, en el triángulo ABM_2, $AB = a$ es la base y $\dfrac{b}{2}$, que es la distancia entre AB y M_2 es su altura, luego, el área de $\triangle ABM_2 = \dfrac{ab}{4}$.

Notemos que la distancia entre AD y M_1 es $\dfrac{a}{2}$, por lo que la distancia entre AD y M_2 es $\dfrac{a}{4}$, entonces la distancia entre BC y M_2 es $\dfrac{3a}{4}$ y la distancia entre BC y M_3 es $\dfrac{3a}{8}$. Luego, la base del triángulo BCM_3 es $BC = b$ y su altura es $\dfrac{3a}{8}$. Por lo tanto, su área es $\dfrac{3ab}{16}$.

De manera análoga, observemos que la distancia entre AB y M_2 es $\dfrac{b}{2}$, por lo que la distancia entre AB y M_3 es $\dfrac{b}{4}$, entonces la distancia entre DC y M_3 es $\dfrac{3b}{4}$ y la distancia entre DC y M_4 es $\dfrac{3b}{8}$, luego la base del triángulo CM_1M_4 es $CM_1 = \dfrac{a}{2}$ y su altura es $\dfrac{3b}{8}$, por lo tanto, su área es $\dfrac{3ab}{32}$.

Luego el área del cuadrilátero es:

$$ab - \left(\frac{ab}{2} + \frac{3ab}{16} + \frac{3ab}{32}\right)$$
$$ab - \frac{25ab}{32}$$
$$\frac{7ab}{32}$$

Finalmente la razón entre el área del cuadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ y el rectángulo $ABCD$ es:

$$\frac{M_1M_2M_3M_4}{ABCD} = \frac{\frac{7ab}{32}}{ab} = \frac{7}{32}$$

Problema 135. 96 miembros de un club están de pie en un círculo grande. Empiezan diciendo los números $1, 2, 3$, etc., y a la vez, van dando vueltas al círculo. Cada miembro que dice un número par se sale del círculo y el resto continúa. Siguen de este modo hasta que queda sólo uno de los miembros. ¿Qué número dijo a este miembro en la primera ronda?

Solución:

Los 96 miembros dicen números del 1 al 96, al retirarse los 48 miembros que dicen números pares, el miembro número 1 dice un impar (el 97), hasta que el miembro número 95 dice el $96 + 48 = 144$, al retirarse los 24 miembros que dicen números pares, el miembro número 1 dice un impar (el 145), hasta que el miembro número 93 dice el $144 + 24 = 168$, al retirarse los 12 miembros que dicen números pares, el miembro número 1 dice un impar (el 167), hasta que el miembro número 89 dice el $168 + 12 = 180$, al retirarse los 6 miembros que dicen números pares, el miembro número 1 dice un impar (el 181), hasta que el último miembro dice el $180 + 6 = 186$, al retirarse los 3 miembros que dicen números pares, el miembro número 1 dice un impar (el 187), hasta que el último miembro dice el $186 + 3 = 189$, en este momento solo quedan dos miembros, el que dijo 187 y el que dijo 189, pero el que dijo 187 se debe retirar pues en la siguiente ronda debe decir 190, por lo tanto el miembro que queda es el que dijo 189, explicamos esto con la idea de mostrar que el miembro número 1 queda en todas las rondas, hasta el final.

Para resolver el problema tomemos un caso más pequeño con un divisor de 96, por ejemplo 12, de modo que se cumpla que el miembro 1 quede hasta el final, y ejemplificaremos el retiro de los miembros por medio de la siguiente tabla:

Miembro N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ronda 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ronda 2	13	•	14	•	15	•	16	•	17	•	18	•
Ronda 3	19	•	•	•	20	•	•	•	21	•	•	•
Ronda 4	22	•	•	•	•	•	•	•	23	•	•	•

Notemos que el miembro número 1 es el último que se vá, y en la ronda 4 solo queda el miembro 1 y el 9. Por otra parte al retirarse los primeros 6 miembros, queda el miembro 1 y a su lado el $1 + 2 = 3$, al retirarse los 3 siguientes, queda el miembro 1 y a su lado el $1 + 2^2 = 5$, al retirarse los siguientes, queda el miembro 1 y a su lado el $1 + 2^3 = 9$, es aquí donde el miembro debe retirarse y quedar solo el miembro 9.

Volviendo al caso original, Los 96 miembros dicen números del 1 al 96, al retirarse los 48 miembros que dicen números pares, queda el miembro número 1 y a su lado el $1 + 2 = 3$, al retirarse los siguientes 24 miembros, queda el miembro número 1 y a su lado el $1 + 2^2 = 5$, al retirarse los siguientes 12 miembros, queda el miembro número 1 y a su lado el $1+2^3 = 9$, al retirarse los siguientes 6 miembros, queda el miembro número 1 y a su lado el $1+2^4 = 17$, al retirarse los siguientes 3 miembros, queda el miembro número 1 y a su lado el $1 + 2^5 = 33$, hasta que sólo quedan 2 miembros, el miembro número 1 y a su lado el $1 + 2^6 = 65$, es aquí donde se retira el miembro número 1, quedando sólo el número 65.