ReFIP Matemática

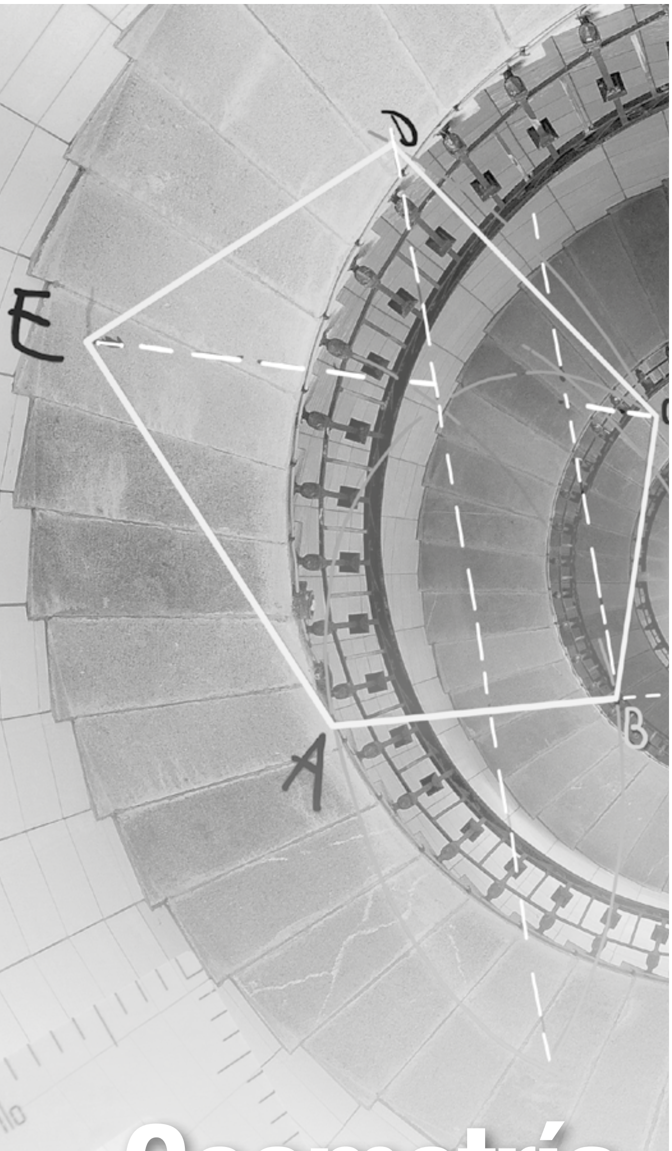
RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Geometría

PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

ReFIP Matemática

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL
DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA



Geometría

PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

AUTORES:

Cristián Reyes,
Universidad de Chile

Luis Dissett,
Pontificia Universidad Católica de Chile

Raúl Gormaz,
Universidad de Chile

COAUTORES:

Andrés Ortiz,
Universidad Católica de la Santísima Concepción

Macarena Larraín,
Universidad del Desarrollo

Pierina Zanocco,
Universidad Santo Tomás

Proyecto FONDEF – CONICYT D09 I1023 (2011 – 2014)
Directora de proyecto: Salomé Martínez
Autores: Cristián Reyes
Luis Dissett
Raúl Gormaz
Coautores: Andrés Ortiz
Macarena Larraín
Pierina Zanocco

Registro de propiedad intelectual:
ISBN: 978-956-349-655-0
Depósito legal: 238239

Dirección editorial: Arlette Sandoval Espinoza
Corrección de estilo: María Paz Contreras Aguirre
Dirección de arte: Carmen Gloria Robles Sepúlveda
Coordinación diseño: Vinka Guzmán Tacla
Diseño Portada: José Luis Jorquera Dölz
Diagramación: María Carolina Alvarez Concha,
Karina Riquelme Riquelme
Ilustración: Carlos Valentino Romero Cáceres
Producción: Andrea Carrasco Zavala

Primera edición: diciembre 2013

Coyancura 2283, oficina 2013,
Providencia. Santiago de Chile.

www.ediciones-sm.cl
Atención al cliente: 600 381 13 12

Impreso en Chile/ Printed in Chile

ReFIP Matemática

Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica en Matemática

Proyecto FONDEF - CONICYT D09 I1023 (2011 - 2014)

Directora:	Salomé Martínez, Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Director alterno:	Héctor Ramírez, Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Institución beneficiaria principal:	Centro de Modelamiento Matemático, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
Institución beneficiaria asociada:	Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituciones asociadas:	Ediciones SM Chile Ministerio de Educación Fundación Luksic Academia Chilena de Ciencias

Cuando se incuba un sueño y nace una idea, el mundo se ensancha, se ponen en juego los recursos y se inicia un camino donde los obstáculos se presentan uno a uno. Cuando la idea es buena y el sueño es grande, nada detiene el ímpetu desatado.

La colección de libros que tengo el honor de presentar es el fruto de un sueño grande y del trabajo persistente de un equipo formado por matemáticos y educadores matemáticos, quienes, liderados por su directora, se abocaron a la tarea de escribir cuatro libros de matemática, sobre los temas centrales del currículo escolar: Números, Geometría, Álgebra y Datos y Azar.

Estos cuatro libros representan la culminación de un proceso de aprendizaje, reflexión y maduración que se inicia muy atrás, con las primeras iniciativas en educación en el Centro de Modelamiento Matemático, cuando se vislumbraba que era posible hacer un aporte a la educación desde la perspectiva de los matemáticos, pero no se sabía muy bien cómo. Fueron muchos los proyectos que se sucedieron y que fueron ayudando a comprender mejor el problema que se enfrentaba y ayudaron a apuntar con mayor precisión a una de nuestras principales debilidades en matemática escolar: las escasas oportunidades que nuestro sistema de formación de profesores brinda a los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica de conocer la matemática escolar. Esta colección de libros apunta, con una potente fuerza de saber, al corazón del sistema formativo, proveyendo matemática en sus contenidos y la manera de enseñarlos.

Si estos libros representan la culminación de un proceso, también son solo un hito en el camino que se abre hacia el futuro con inmensos desafíos, algunos de los cuales son desatados por estos mismos. La incorporación en las aulas universitarias de la matemática escolar, con toda la potencialidad y riqueza que estos libros proponen, requiere de grandes esfuerzos de parte de las propias unidades formadoras, de los formadores de profesores y ciertamente de los estudiantes de pedagogía que sueñan con un aula escolar viva y ávida de conocimiento. Estos libros ponen de manifiesto la necesidad de formación académica de los formadores de profesores y llaman a la creación de material de apoyo complementario en otros formatos. Con una mirada de largo plazo, estos libros también muestran la necesidad de contar con académicos de alto nivel, conocedores de la matemática escolar, de su enseñanza y de su aprendizaje, en todas las unidades de formación de profesores.

El proceso que da vida a esta colección de libros, desde su concepción hasta la impresión final de sus páginas, tiene numerosos rasgos originales que quisiera destacar. Este es un proyecto que convoca a matemáticos interesados por la educación, expresando una realidad creciente en todo el mundo y también en nuestro país, que mueve a científicos investigadores de sus propias disciplinas a abordar problemas de la educación, con espíritu abierto y con el respeto que merecen. Expresiones de esta tendencia van en la línea de un cambio de parte de los científicos, que han ido comprendiendo la complejidad de los problemas de la educación, de la formación de profesores, de la escuela y la sala de clases. Pero este proyecto también convoca a educadores matemáticos que, por la naturaleza de su disciplina científica, tienen a la educación en toda su complejidad en el centro de su quehacer, pero que en muchas ocasiones han caminado por una vía paralela a los científicos. El proyecto que da origen a los libros que aquí presento es una muestra más de la importancia de acercar estos mundos y de la tendencia nacional a comprender que en la educación hay espacio para todos, que la incorporación de actores enriquece la discusión y mejora la calidad de los resultados. Estos libros son el fruto del trabajo conjunto de matemáticos y educadores matemáticos.

Estos libros no nacen del trabajo aislado de los expertos convocados, sino que en todo momento se ha tenido presente la realidad, expresada a través de la opinión de los actores que intervienen en la formación de los profesores de educación básica. Las necesidades, el sentir y las opiniones de los académicos formadores y de los estudiantes de pedagogía fueron recogidos en consultas y aplicaciones piloto a lo largo de todo el país. Esta es una experiencia inédita en Chile, que incorpora a los lectores en la redacción de libros de texto universitarios, basando las decisiones editoriales en la evidencia encontrada, sobre lo que es relevante para el profesor, y dando fuerza a las ideas que se presentan en sus páginas. Es interesante que en la búsqueda de información para apoyar la escritura de los libros, los autores tuvieron la oportunidad de dar una mirada nacional a la formación de los profesores de educación básica en cuanto a la matemática, la que les permitió levantar evidencia de investigación que resulta de extremo interés, más allá de su propósito original.

Estos libros sobre la matemática escolar son una herramienta poderosa para apoyar la formación de profesores, ya que enfocan los contenidos matemáticos conectados con su enseñanza y teniendo en cuenta el currículo nacional. Así como sus cuatro tomos van tomando uno a uno los temas centrales del currículo, con una mirada puesta en los contenidos escolares, proyectados en la sala de clases. Dan cuenta de la matemática escolar en todas sus dimensiones, las que muchas veces son minimizadas equivocadamente ignorando su complejidad. Una lectura de sus páginas nos lleva a comprender rápidamente que la tarea de enseñar matemática escolar es intelectualmente demandante y que requiere de una cuidadosa preparación, que va mucho más allá de unos cursos aislados. Estos libros muestran la importancia de la comprensión de los contenidos, teniendo presentes las diversas formas de enseñanza y de aprendizaje y el currículo escolar, y sugieren un cambio importante en el eje de las carreras de pedagogía, moviéndolo desde una mirada generalista desprovista de contenido a una mirada integradora del contenidos y su enseñanza.

En la línea de esta última reflexión, con la publicación de esta obra se plantean en forma concreta lineamientos respecto de cómo deberíamos formar a los profesores en Chile. Debemos transformar una cultura universitaria que considera que la disciplina que se enseña es secundaria frente a un saber pedagógico general y teórico, desde el cual sería posible deducir qué hay que hacer en el caso de cada disciplina. Debemos transformar una cultura universitaria que considera que en la formación de profesores, la preparación disciplinaria y pedagógica van en paralelo, dejando que el estudiante de pedagogía haga la integración. Es necesario movernos a una cultura de la integración entre las disciplinas y lo pedagógico, generando un compromiso de los formadores que abordan estos aspectos en forma coordinada e integrada. Ciertamente la formación de un profesor va más allá de lo disciplinario y lo pedagógico, pero si estos aspectos no están presentes con fuerza y en forma integrada, no tendremos un profesor o profesora con la potencialidad de proyectar el saber formador en su integridad.

Estos libros nacen en un contexto marcado por una creciente preocupación nacional por la educación, empujada por las demandas del movimiento estudiantil en sus múltiples expresiones. Esta preocupación pone énfasis en el acceso y la calidad de la educación, y demanda importantes recursos para la introducción de los cambios estructurales necesarios, que garanticen el acceso de todos los niños y niñas a la educación de calidad. Sin embargo, es necesario hacer notar que con una inyección importante de recursos y con una juiciosa reorganización administrativa, la calidad de la educación no queda garantizada. En este contexto, es importante mencionar que la colección de libros que presentamos nace en el seno del programa INICIA, lanzado en 2008 y que tiene como propósito el fortalecimiento de la formación inicial de los profesores. Estos libros nacen y se nutren de las experiencias adquiridas en la formulación de los estándares de matemática, que definen lo que como país esperamos que los futuros egresados de las carreras de pedagogía sepan y sepan hacer, y que se miden en la prueba INICIA. Los estándares y la prueba INICIA definen un marco de demandas para los formadores de profesores y para los estudiantes de pedagogía difíciles de lograr sin tener el apoyo del Estado, de las instituciones y de académicos preocupados por el avance de la calidad de la educación. Esta colección ofrece apoyo en el área de matemática e interpreta los estándares desde una perspectiva de la realidad nacional. Bienvenidos serán materiales complementarios que ayuden a formar mejores profesores y profesoras.

Me sumo con alegría a todos los que ven en estos libros una poderosa herramienta para seguir construyendo una mejor educación para todos nuestros niños y niñas, y a todos quienes levantan su voz para felicitar a la directora y a todos los autores de estos libros, quienes con su trabajo, talento y perseverancia nos ponen un desafío más en esta tarea de hacer de Chile un país con una educación justa y de calidad, donde todos los niños y niñas tengan acceso a una educación que les permita conocer las matemáticas, las ciencias, las humanidades, las artes y todas las expresiones de la cultura humana, para construir así un país mejor, un país desarrollado.

Patricio Felmer
Premio Nacional de Ciencias Exactas 2011
Académico de la Universidad de Chile

AGRADECIMIENTOS

La colección de textos ReFIP fue desarrollada como parte del proyecto FONDEF D09I1023 "Recursos pedagógicos para la implementación de los Estándares de Formación Inicial de profesores de Educación Básica en matemática" (ReFIP). Agradecemos el apoyo de Conicyt a través del programa FONDEF, el cual fue clave para la realización de esta colección. En particular, reconocemos el apoyo del Comité de Área de Educación de FONDEF, y muy especialmente la dedicación de Daniela Fuentes, ejecutiva a cargo del proyecto.

Expresamos también nuestra gratitud a la institución que albergó a este proyecto, el Centro de Modelamiento Matemático de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, en particular, al director del CMM, Alejandro Jofré, y a Francisco Brieva, decano de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, por proveernos el soporte que este proyecto necesitó. Asimismo, agradecemos todo el apoyo de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, y muy especialmente a su decano, Martin Chuaqui.

Las instituciones asociadas al proyecto han sido esenciales para su desarrollo, en particular, ellas apoyaron con decisión su presentación. Agradecemos a Ediciones SM, en particular a su gerente general, Francisco Tepper, y a su directora editorial, Arlette Sandoval. También queremos agradecer el patrocinio de Fundación Luksic, en especial a Monserrat Baranda, su gerente general. Agradecemos también a la directora del Centro de Perfeccionamiento e Investigaciones Pedagógicas del Ministerio de Educación (CPEIP), Paula Pinedo, y a Regina Silva, Coordinadora del Área de Educación Continua (CPEIP). Todo nuestro reconocimiento va también a la Academia Chilena de Ciencias y a su presidente, Juan Asenjo, por la permanente colaboración.

Un hito importante en el desarrollo de los textos fue la utilización de sus versiones preliminares en cursos de matemáticas de carreras de Pedagogía en Educación Básica. Estos pilotos se desarrollaron en 16 universidades: Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad Alberto Hurtado, Universidad Arturo Prat, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Universidad Católica de Temuco, Universidad de Concepción, Universidad de las Américas, Universidad del Bío-Bío, Universidad del Desarrollo, Universidad de Los Andes, Universidad de Magallanes, Universidad de Playa Ancha, Universidad de Viña del Mar, Universidad Diego Portales, Universidad Santo Tomás y Universidad San Sebastián. Estos pilotos no podrían haberse llevado a cabo sin el apoyo de las autoridades de estas universidades, quienes tuvieron una confianza enorme en nuestro equipo y nos apoyaron en todas las actividades de esta etapa. Agradecemos especialmente a sus académicos formadores y a los estudiantes de los cursos donde se probaron nuestros textos. Valoramos su generosidad y activa participación en las distintas actividades del proyecto.

Durante el desarrollo del proyecto contamos con la guía del Comité Asesor, conformado por Patricio Felmer, Miguel Díaz, Raimundo Olfos, María Aravena y Arturo Mena, quienes evaluaron versiones preliminares de los textos y orientaron nuestro trabajo. Valoramos sus aportes a lo largo del proyecto. En esta misma línea, agradecemos a Pablo Dartnell por sus valiosas contribuciones.

Agradecemos también a los estudiantes, académicos formadores y evaluadores nacionales e internacionales que nos entregaron sugerencias y comentarios, que ayudaron a enriquecer la colección de textos. También reconocemos el valioso trabajo del equipo editorial de Ediciones SM en la etapa final de producción de los textos.

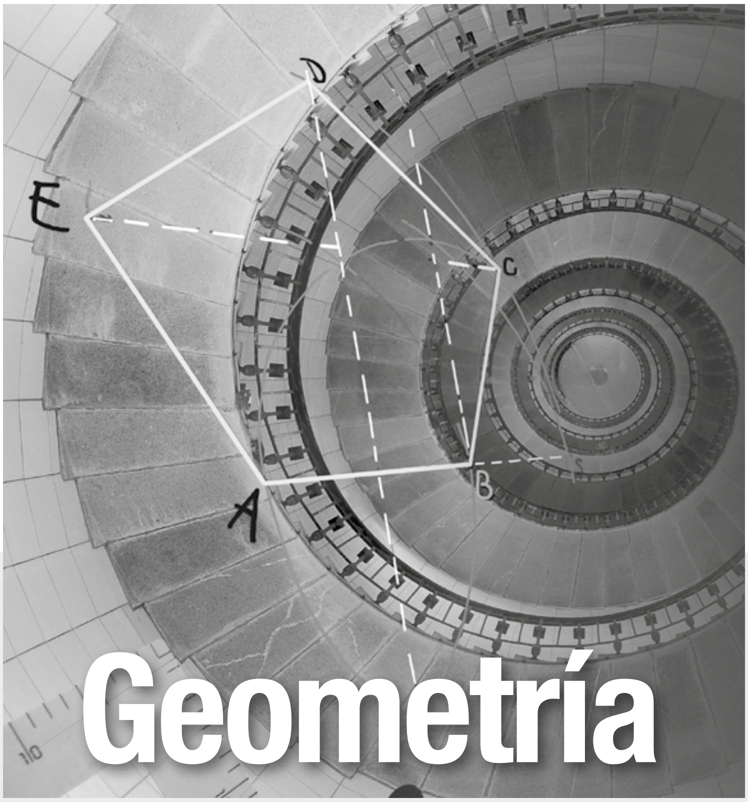
Queremos agradecer todo el apoyo en la gestión y administración del proyecto. Agradecemos a Erika Pino, Paulina Zavala y María Eugenia Heckmann de la Pontificia Universidad Católica de Chile, a Judith Figueroa, Eterin Jaña y Silvia Mariano de la Universidad de Chile, y muy especialmente a María Cecilia Cea de la Universidad de Chile. También agradecemos a Bárbara Salas por el apoyo en la difusión del proyecto.

Valoramos también la disposición de Carmen Montecinos y José Sánchez a ser parte del Comité Editorial de esta colección.

Finalmente, queremos expresar nuestra gratitud a dos connotados académicos que influyeron fuertemente en nuestro quehacer. A Sybilla Beckmann, académica de la Universidad de Georgia y autora de un reconocido libro de matemática para la formación de profesores en Estados Unidos, por sus valiosos consejos que fueron una guía durante todo el proyecto, y a Patricio Felmer, académico de la Universidad de Chile y referente nacional en temas relacionados con educación matemática, por su generosa ayuda.

Salomé Martínez
Directora del Proyecto
Fondef D09I1023

Héctor Ramírez
Director Alterno del Proyecto
Fondef D09I1023



Geometría

Parte I

Geometría intuitiva

CAPÍTULO 1 Medición en educación básica

CAPÍTULO 2 Nociones geométricas básicas

CAPÍTULO 3 Isometrías y construcciones

CAPÍTULO 4 Área y perímetro

CAPÍTULO 5 Cuerpos geométricos

ÍNDICE

PARTE I: GEOMETRÍA INTUITIVA 11

INTRODUCCIÓN 16

Capítulo I. Medición en educación básica 20

1. Significado y proceso de medir 21
   1.1 Conservación 26
2. Conceptos y habilidades de medición 28
3. Medición de distintas magnitudes 30
   3.1 Medición de longitud 31
      3.1.1 Medidas de longitud 32
      3.1.2 Unidades estandarizadas de longitud 33
      3.1.3 Errores que pueden surgir en el uso de instrumentos de medición de longitud 36
   3.2 Medición de área 37
      3.2.1 Idea intuitiva 37
      3.2.2 Medición de área con unidades informales 38
      3.2.3 Unidades estandarizadas de área 38
      3.2.4 Área de figuras geométricas abstractas 40
   3.3 Medición de volumen 43
      3.3.1 Medición de volumen con unidades informales 43
   3.4 Medición de masa y peso 44
      3.4.1 Medición de peso 45
   3.5 Medición de tiempo 47
      3.5.1 Unidades de medida de tiempo 50

Capítulo II. Nociones geométricas básicas 52

1. Nociones primitivas 53
2. Primeras definiciones 60
   2.1 La noción de “estar entre”, segmentos y rayos 60
   2.2 Ángulos 63
      2.2.1 Medida de ángulos 65
      2.2.2 Medición de ángulos 66
      2.2.3 Clasificación de los ángulos 68
      2.2.4 Perpendicularidad 71
      2.2.5 Paralelismo 72
3. Figuras planas 78
   3.1 Polígonos 78
   3.2 Clasificación de los polígonos 83
      3.2.1 Clasificación de los triángulos 83

3.2.2 Clasificación de los cuadriláteros 88
3.3 Circunferencia y círculo 91
3.4. Errores que pueden surgir en la representación de objetos geométricos 93

Capítulo III. Isometrías y construcciones 98

1. Isometrías 99
1.1 Traslaciones 99
1.2 Reflexiones 101
1.3 Rotaciones 110
1.4 Posibles errores en el estudio de las isometrías 112
2. Visualización 115
3. Construcciones geométricas 119
3.1 Uso de la regla, el compás y la escuadra 119
3.2 Ejemplos de construcciones con regla y compás 127

Capítulo IV. Área y perímetro 132

1. Área de figuras planas 133
1.1 Área del paralelogramo 140
1.2 Área del triángulo 143
1.3 Composición de figuras 151
1.4 Geoplano 156
2. Perímetro 159
2.1 Dificultades asociadas a la enseñanza de perímetro y área 164
3. Perímetro de la circunferencia y área del círculo 169

Capítulo V. Cuerpos geométricos 182

1. Posición relativa de elementos en el espacio 183
1.1 Rectas en el espacio 183
1.2 Posición relativa entre un plano y una recta 183
1.3 Intersecciones entre superficies 185
1.4 Intersección entre planos. Ángulos diedros 186
2. Cuerpos sólidos 190
2.1 Algunas clases de sólidos 191
2.2 Poliedros 193
2.2.1 Clasificación de poliedros 193
2.2.2 La Relación de Euler 198
2.3 Cilindros 208
2.4 Conos 210
2.5 Sólidos de revolución 211
2.6 Discusión sobre las clases de sólidos 213

3. Visualización 215
 3.1 Perspectiva 217
 3.2 Vistas 223
 3.3 Cortes de poliedros y otros cuerpos 225
 3.4 Redes 228
4. Volumen de cuerpos geométricos 233
 4.1 Volumen de un cilindro 236
 4.2 Volumen de una pirámide y del cono circular recto 239
 4.3 Principio de Cavalieri 242
5. Área superficial de cuerpos 251
6. Dificultades asociadas a la enseñanza de cuerpos geométricos 258

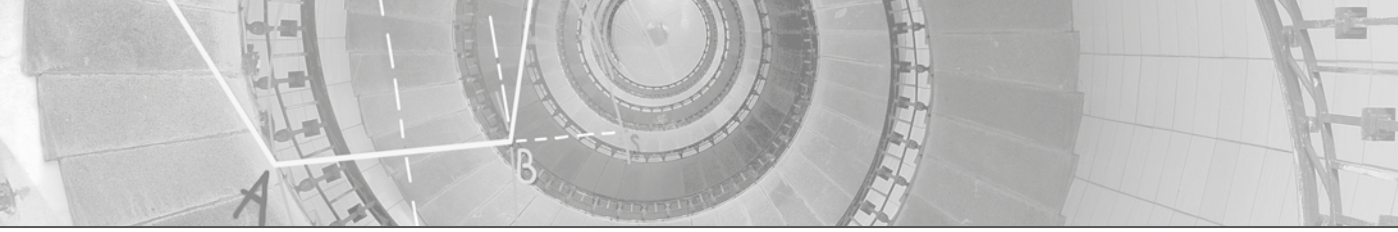
PARTE II: GEOMETRÍA DEDUCTIVA 263

Capítulo VI. Razonamiento en geometría 264

1. Razonamiento matemático 265
 1.1 El razonamiento inductivo y las generalizaciones 266
 1.2 El razonamiento deductivo y las demostraciones 268
 1.3 La deducción: de lo general a lo particular 270
 1.4 Proposiciones, implicaciones y deducciones 271
 1.5 Hay muchos tipos de proposiciones 272
  1.5.1 Recíproca de una proposición condicional 274
  1.5.2 Proposiciones equivalentes 274
  1.5.3 Contrarrecíproca de una proposición condicional 276
 1.6. Fundamentos de las demostraciones 277
  1.6.1 Definiciones y conceptos primitivos 278
  1.6.2 Teoremas y axiomas 278
2. Primeros conceptos primitivos, axiomas y definiciones 280
 2.1 Rectas y puntos 280
 2.2 Distancia entre puntos, "estar entre", segmentos y rayos 284
3. Construcciones con regla y compás 288
4. Separación del plano, ángulos y perpendicularidad 291

Capítulo VII. Triángulos 302

1. Definiciones 303
 1.1 Reflexiones sobre las definiciones 304
 1.2 Elementos secundarios de un triángulo 305



2. Concepto de congruencia. Criterios de congruencia de triángulos 307
   2.1 Definición de congruencia de triángulos 307
   2.2 Criterios de congruencia de triángulos 308
3. Propiedades básicas de los triángulos: el triángulo isósceles 317
   3.1 Pons Asinorum y sus consecuencias 317
   3.2 El recíproco del Teorema Pons Asinorum 320
4. Algunas construcciones geométricas 323
5. Desigualdades en el triángulo 336

Capítulo VIII. Paralelismo y cuadriláteros 344

1. Demostraciones por contradicción 345
2. Rectas intersecadas por una transversal 346
   2.1 Condiciones suficientes para que las rectas sean paralelas 348
   2.2 El postulado de las paralelas 351
   2.3 Condiciones necesarias para que las rectas sean paralelas 352
3. Consecuencias del postulado de las paralelas 356
4. Paralelogramos 362
   4.1 Clasificación de los cuadriláteros 362
   4.2 Propiedades de paralelogramos 363
      4.2.1 Condiciones necesarias para que un cuadrilátero sea un paralelogramo 364
      4.2.2 Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea un paralelogramo 365
   4.3 Tipos especiales de paralelogramos 369
5. Teoremas de concurrencia en triángulos 374

Capítulo IX. Proporcionalidad en geometría 382

1. El Teorema de Pitágoras y su recíproco 383
   1.1 El recíproco del Teorema de Pitágoras 393
2. Teorema de Tales y semejanza de triángulos 395
   2.1 ¿Quién fue Tales? 402
   2.2 El recíproco del Teorema de Tales 403
3. Semejanza de triángulos 405
4. Aplicaciones del Teorema de Pitágoras y del Teorema de Tales 416
   4.1 Congruencia y proporcionalidad en la circunferencia 416
      4.1.1 Ángulos y arcos 419
   4.2 Volumen y superficie de la esfera 424
   4.3 Isometrías 427

Bibliografía 435

INTRODUCCIÓN

Siempre la matemática, y en particular la geometría, ha constituido un saber extraordinariamente polivalente. En Mesopotamia, los astrónomos la usaron como un proceso racional para el estudio del movimiento de los astros. En Egipto supieron aprovecharla para resolver cómo cobrar impuestos a los terrenos, si el Nilo cada temporada borraba los límites de los terrenos a gravar. Los pitagóricos vieron en la aritmética y la geometría la llave que permite conocer profundamente el universo, así como también preparar el espíritu para la unión con la divinidad.

La visión de la matemática como un camino hacia la divinidad prevaleció a través de la concepción platónica del mundo en la antigüedad y en la edad media, llegando los matemáticos incluso a despreciar el posible interés práctico de sus elucubraciones. En la edad clásica y media, se siguió con el ideal platónico y pitagórico que buscaba, sobre todo, la disciplina del pensamiento y el fomento del espíritu contemplativo, los temas de estudio eran: aritmética, geometría, música y astronomía.

La geometría vuelve a recuperar su aspecto práctico, con el nacimiento de la ciencia moderna, en los trabajos de Galileo, primero, y Newton, después. En los siglos XVIII, XIX y XX, la geometría de nuevo se dedica a asuntos más propios, más internos, sin intentar resolver problemas prácticos; en esa época pretende solidificar los fundamentos de su propia teoría, lo cual ocurre al unísono en toda la matemática.

Todos estos aspectos de la geometría han teñido siempre su enseñanza. *Los elementos* de Euclides, era el texto obligado para su estudio, hasta bien avanzado el siglo XIX. En la edad media, se llegó publicar el libro *Los elementos,* exclusivamente los teoremas, suprimiendo las demostraciones, quitando del libro toda argumentación y fijándose solo en las aplicaciones. Aun con demostraciones *Los elementos* no constituyen más que el esqueleto de unas cuantas secciones interesantes de la matemática, que podría servir como guía del profesor.

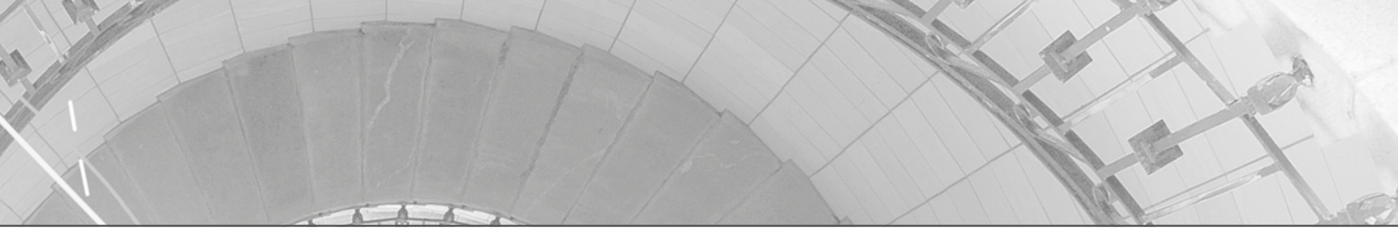
La actitud formalista, la inversa de la anterior, apareció en la segunda mitad del siglo XX, cuando muchos matemáticos que fueron educados en el formalismo, en la primera mitad del siglo pasado, llegaron a pensar que aquello que había servido para resolver los problemas referidos a los fundamentos era lo adecuado, *mutatis mutandis*, para la introducción en la matemática de los más jóvenes; esto resultó un fracaso espantoso.

Actualmente, aún se conserva una prevalencia de la enseñanza de la geometría en el currículo escolar. Junto al eje de Números, constituyen gran parte de los contenidos de enseñanza básica. La inclusión de los ejes de Probabilidades y Estadística, y Álgebra al currículo es bastante reciente y ha ocurrido en forma modesta.

Los "Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica", en lo que a matemática se refiere, tienen indicadores divididos en 2 grandes bloques; el primero es lo que en aquel documento se llama "saber la matemática para enseñar" y el segundo, "saber enseñar la matemática". El libro que tiene en sus manos se ha dedicado solo al primero de esos aspectos, saber la matemática para enseñar, que se refiere al conocimiento disciplinario. Esto significa conocer los conceptos, los procedimientos, aspectos de resolución de problemas, el razonamiento y el lenguaje matemático, pero en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Es por esto que el futuro profesor podrá reflexionar sobre las definiciones en geometría, las representaciones de los objetos y la forma en que se relacionan los diferentes elementos, de acuerdo a la labor de aula que tendrá que realizar en su futura práctica.

Este libro está dividido en dos partes, la primera llamada "Geometría intuitiva" y la segunda, "Geometría deductiva". En la primera parte, los primeros cinco capítulos, desplegamos todas las ideas básicas de la geometría plana y del espacio. Discutimos acerca de los conceptos primitivos y de las ideas que contienen, damos las primeras definiciones y relaciones entre los objetos. También damos argumentos informales de algunos resultados geométricos, que salvo una presentación axiomática de los contenidos, serían demostraciones correctas. La segunda parte del libro presenta la geometría desde un punto de vista más formal. Varios de los contenidos del libro están abordados en ambas partes, por ejemplo, la definición de triángulo y sus clasificaciones, paralelismo y perpendicularidad, construcciones con regla y compás, entre otros. En la primera parte se muestran materiales para entender los conceptos, se usan varias representaciones y se estudian posibles dificultades de los alumnos, en cambio, en la segunda parte se presenta formalmente el por qué de los resultados que se obtienen con los objetos geométricos estudiados.

La primera parte del libro se organiza en cinco capítulos. El primero de ellos aborda el tema de medición. Si bien este no es un tema propio de la geometría, tal cual la conocemos hoy, introduce ideas importantes, como unidades no estandarizadas y estandarizadas de longitud, área y volumen. El segundo capítulo, llamado "Nociones geométricas básicas", introduce los conceptos básicos de geometría, como son punto, recta, plano, superficie, ángulo, polígonos en general, triángulos y cuadriláteros en particular, círculo y circunferencia. Las isometrías y construcciones se abordan en el capítulo tercero; ahí se introducen las traslaciones, reflexiones y rotaciones, se reflexiona respecto de las diferentes representaciones de ellas. También hay una sección completa dedicada a la visualización en dos dimensiones y se introducen los instrumentos propios de la geometría, como son, el compás, la regla y la escuadra. En este capítulo se hacen las primeras construcciones con regla y compás, aunque la justificación de por qué son correctas se estudia en la segunda parte del libro. El cuarto capítulo, dedicado al "Área y perímetro" de figuras planas, no hace un estudio axiomático del asunto, sino que intenta mostrar por qué es razonable pensar que el área del rectángulo es el producto de la medida de sus dimensiones lineales, para luego mostrar cómo, a partir de esto, se puede deducir el área de otras figuras. Un caso particularmente importante es el estudio del perímetro de la circunferencia y el área del círculo, lo cual se hace en forma aproximada, sin llegar a usar nociones de límite. El último capítulo de esa primera parte se refiere al estudio de cuerpos en tres dimensiones; ahí se introducen las primeras definiciones e ideas, y hay una sección completa dedicada a la visualización y representaciones planas de cuerpos. Al final de ese capítulo, se calcula el volumen y el área de algunos cuerpos geométricos.



La segunda parte del libro presenta la geometría desde un punto de vista deductivo y está ordenada en cuatro capítulos. El capítulo seis, "Razonamiento en geometría", introduce el pensamiento deductivo en contraposición con el pensamiento inductivo. Se presenta la idea de demostración en matemática, sin adentrarse en lógica formal, y se dan las primeras ideas de la construcción formal de la geometría. El capítulo siete está dedicado a la congruencia de triángulos, principalmente; ahí se hacen las primeras demostraciones basadas en axiomas, conceptos primitivos y definiciones. En el octavo capítulo, "Paralelismo y cuadriláteros", se hace una muy breve discusión acerca del postulado de las paralelas, o Quinto Postulado de Euclides, para luego pasar a estudiar sus consecuencias, como son que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y distintas propiedades de paralelogramos. Para finalizar, en el último capítulo del libro, el noveno, llamado "Proporcionalidad en geometría", se estudian dos importantes teoremas, el de Pitágoras y el de Tales, se introduce la idea de triángulos semejantes y se aplican estos resultados al cálculo de volúmenes de cuerpos, a la verificación de que las traslaciones, rotaciones y reflexiones efectivamente preservan distancias y ángulos, y además se obtienen resultados de proporcionalidad entre elementos de la circunferencia.

Tanto en la primera como en la segunda parte, en cada caso que lo amerite, nos hemos detenido en aspectos importantes relativos a la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Por ejemplo, se analizan dificultades que pueden tener los alumnos respecto de definiciones inclusivas y excluyentes, representaciones y metáforas para comprender las isometrías, explicaciones intuitivas de congruencia y semejanza de triángulos, casos particulares de Teoremas, como el de Pitágoras, etc.

Además en ambas partes se ha intentado abordar las diferentes visiones de la matemática, esto es, como un área del conocimiento que tiene sus propios cuestionamientos y afanes, como una disciplina que provee de herramientas para resolver problemas de diferentes índoles y, por sobre todo, como una vía para acceder al conocimiento.

Este libro, fue realizado por mucha gente. En primer lugar, es parte de una colección, ReFIP "Recursos para la formación inicial de profesores de educación básica", la cual aparte del libro de *Geometría*, contempla uno de *Números*, uno de *Datos y Azar* y otro de *Álgebra*. Esta colección fue dirigida por Salomé Martínez, a quien va todo nuestro agradecimiento por confiar en nosotros y guiar a buen puerto este proyecto.

Todos los autores de estos libros trabajamos en coordinación, para que las ideas, intenciones y motivaciones caminaran cercanamente en los diferentes textos. Todos los autores nos reunimos continuamente para discutir los avances de cada uno de los libros, para criticar y "copiar" ideas. A todos ellos va nuestro más sincero agradecimiento.

Algunos de los capítulos de este libro fueron piloteados con estudiantes de Pedagogía en varias ocasiones, y los autores que prepararon esa versión preliminar fueron Pierina Zanocco, Macarena Larraín, Andrés Ortiz, Luis Dissett y Cristián Reyes. La versión definitiva que usted tiene en sus manos fue elaborada por un equipo más reducido, quienes son los responsables de los desaciertos que usted pueda encontrar.

Queremos agradecer a todos los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica que pilotearon este libro, o parte de él, y tuvieron la generosidad de responder encuestas y hacer sugerencias para mejorarlo. A los académicos que tuvieron a bien utilizar este libro en sus cursos, completar encuestas y entrevistarse con los autores para entregarnos sus sugerencias de modificaciones, a todos ellos, nuestra más honesta gratitud.

Hubo un grupo de especialistas que revisó una versión preliminar de este libro, que nos entregaron detallados informes, en donde nos mostraron nuestros errores y nos dieron sugerencias de mejoras. Entre ellos se destacan Miguel Díaz y Dinko Mitrovich. Quisiéramos dedicar una líneas para agradecer muy especialmente a Pablo Dartnell, académico de la Universidad de Chile, quien con un celo y rigurosidad notable pudo encontrar en nuestro libro una infinidad de maneras de mejorarlo. En gran medida, que este texto sea mucho mejor que la versión preliminar se debe a Pablo Dartnell. Las partes que aún no están muy bien logradas, son responsabilidad exclusiva de los autores, que no pudimos dar forma eficiente a las sugerencias de Pablo.

Un agradecimiento especial queremos ofrecer a todo el equipo de SM, a sus diagramadores, correctores, diseñadores, dibujantes, coordinadores y directivos, que constantemente estuvieron dispuestos a darle forma a nuestros manuscritos, que no siempre fueron todo lo claros y ordenados que se ameritaba.

Finalmente, queremos agradecer a Salomé Martínez, a Anita Araneda, a Eugenio Chandía y a Daniela Rojas, por sus importantes sugerencias en partes claves de la última versión del libro. También agradecer a Benjamín Bossi quien nos ayudó en la edición de una versión preliminar, y a Marcela Lizama quien nos ayudó a elaborar algunos problemas. Particularmente, queremos agradecer muy sinceramente a Héctor Ramírez, quien fue el único que revisó y corrigió el libro completo en varias ocasiones, y nos guió para lograr un texto útil para la formación inicial de profesores de matemática en educación básica.

Esperamos que el esfuerzo realizado se vea reflejado en este libro, que los estudiantes de Pedagogía encuentren en él una base sólida, en donde apoyar su propio conocimiento de la geometría y así poder desarrollar, en sus futuros alumnos de enseñanza básica, las habilidades necesarias que requiere nuestra sociedad. Confiamos que en el futuro se elaborarán más y mejores libros de geometría para la formación inicial de profesores de educación básica, con el objetivo que nuestras profesoras y nuestros profesores sean y se sientan mejor preparados para ejercer la desafiante labor de educar a nuestros niños y niñas.

Los autores.

Capítulo I

Medición en educación básica

> "No hay pie de rey que mida la Maravilla".
>
> M. Benedetti.

Introducción

Etimológicamente, *geometría* quiere decir "medida de la Tierra". El historiador Heródoto atribuye a los egipcios el origen de esta ciencia. Según él, el impuesto que pagaban los egipcios propietarios de tierras era directamente proporcional al área de cada pedazo de terreno. Las subidas del río Nilo hacían desaparecer parte de las tierras de los agricultores. Entonces, los cobradores de impuestos del faraón tenían que recalcular cada área con el fin de ajustar el monto que se debía cobrar. Descubrimientos posteriores revelaron que los pueblos que habitaron Mesopotamia, genéricamente denominados babilonios, tenían conocimientos más extensos y avanzados que los egipcios, pues además de poder calcular el área y volumen de figuras y cuerpos simples, conocían la relación que hoy conocemos como Teorema de Pitágoras, mil años antes que los pitagóricos.

Por lo visto, las medidas de longitudes, áreas y volúmenes han despertado el interés del hombre desde la antigüedad y son la idea inicial y fundante de la geometría.

Desde el prisma de la enseñanza, la medición también permite introducir a los niños y niñas al mundo de la geometría. Las mismas preguntas históricamente iniciales son las que ellos van respondiendo a medida que se avanza en el estudio de la geometría.

En este capítulo, desarrollaremos ideas de medición y del uso de instrumentos. También analizaremos el uso de unidades informales y cómo surge la necesidad de utilizar medidas estandarizadas. Más en detalle, queremos decir que la medición involucra la comparación de un atributo de un objeto con una unidad que tiene el mismo atributo que el objeto en cuestión. Por ejemplo, al medir el largo de la mesa con cuartas, estamos determinando cuántas veces cabe el largo de la cuarta en el largo de la mesa. O cuando medimos el área de una baldosa en cm^2, estamos determinando cuántas veces cabe el área de un cuadrado de lado $1\ \mathrm{cm}$ en el área de ella.

Por último y no menos importante, intentaremos dejar claro que los instrumentos de medición son dispositivos que reemplazan la necesidad de tener físicamente disponible la unidad de medida, que los atributos son independientes de las unidades y que las unidades estandarizadas surgen por la necesidad de comunicar información.

1. Significado y proceso de medir

Para responder algunas preguntas que surgen en la vida diaria, es necesario medir. Por ejemplo, si queremos saber si un lápiz cabe en un estuche que mide **20 cm** y no tenemos el estuche a mano, es necesario medir el lápiz o, al menos, saber si mide menos de **20 cm**. Si queremos saber si el jugo que prepararé en la juguera cabe en los 2 vasos que tengo, es necesario medir cuánto jugo cabe en los 2 vasos. Esas preguntas de medición nos dicen qué del objeto se requiere medir.

Supongamos que preguntamos a nuestros alumnos respecto de la medida de un recipiente cilíndrico vacío.

Figura I.1: ¿cuánto mide el recipiente?

Notemos que la petición está incompleta, es necesario decir qué del recipiente queremos que se mida. ¿La altura del recipiente?, ¿el diámetro del recipiente?, ¿el contorno circular?, ¿el volumen?, ¿el área? o ¿el peso? Cada uno de esos aspectos que pueden ser medidos son un *atributo* del recipiente.

Una vez que determinamos el atributo que queremos medir, necesitamos escoger la unidad (medida de referencia) a utilizar. En un primer nivel, una unidad es un objeto concreto que comparte con los objetos que queremos medir el atributo en cuestión. Así, por ejemplo, para medir la altura o la circunferencia del recipiente podemos, en principio, usar cuartas, cordones de zapato, el largo de un brazo, el ancho del dedo meñique, o cualquier otro objeto que tenga el atributo de longitud.

Cuáles de estas unidades serán adecuadas para medir el objeto en cuestión dependerá, entre otras cosas, de su tamaño (no es una buena idea medir la circunferencia de un tubo de ensayo en cuartas).

Note que al utilizar un objeto como unidad de medida para un cierto atributo, nos concentramos solo en ese atributo de la unidad, olvidándonos de todos los otros que pueda tener. Así, por ejemplo, al usar un cordón como unidad de medida de longitud, no nos interesa su peso, su volumen, su color o ningún otro atributo fuera de su longitud.

Figura I.2: midiendo la circunferencia de un jarro en cuartas.

Note que la medición sugerida en la **Figura I.2** anterior es directa, es decir, estamos comparando nuestra unidad (cordón, cuarta, etc.) con el objeto a medir, sin intermediarios.

¿Qué haríamos si quisiéramos usar como unidad de medida un lápiz? Una solución es enrollar un cordón alrededor del recipiente, luego estirar el cordón y, por último, contar cuántos lápices caben ahí.

Figura I.3: se enrolla el cordón alrededor del recipiente.

Figura I.4: ¿cuántos lápices caben en el cordón?

Este método de medición indirecta no solo puede ser aplicado cuando la unidad no se presta para una medición directa. Por ejemplo, también podríamos haber enrollado el cordón en el recipiente, haberlo estirado y medido cuántas cuartas caben en él.

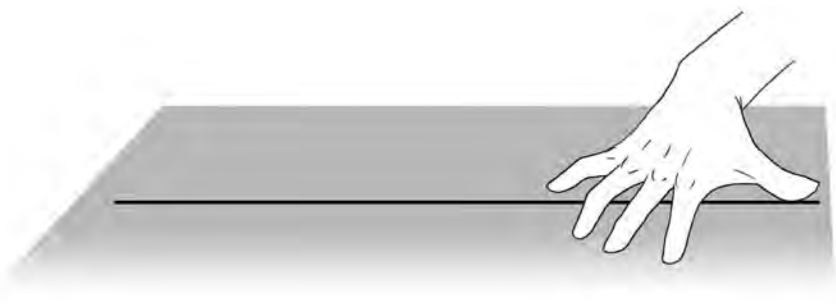


Figura I.5: ¿cuántas cuartas caben en el cordón?

Entonces, una idea de medición tiene que ver con determinar a cuántas unidades (respecto al atributo dado) es equivalente el objeto que estamos midiendo. Así, en el ejemplo del recipiente, podemos llegar a que la medida de su contorno es 5 cuartas, 3 cordones o 4 lápices.

Para que el proceso de medición sea útil, debemos tener una cierta familiaridad con la unidad de medida que estamos usando. Por lo tanto, para medir la masa del recipiente, debemos compararlo con objetos que tienen el atributo masa, por ejemplo, equilibrando una balanza (los platillos de la balanza sostienen la misma masa siempre y cuando la balanza está equilibrada); para eso, es necesario que tengamos una idea de la masa de lo que está en el otro platillo.

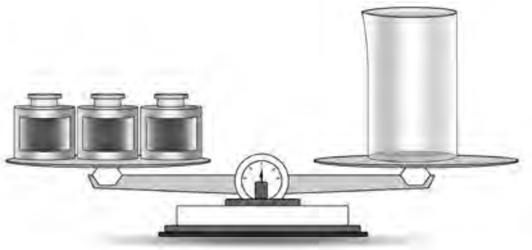


Figura I.6: una balanza en equilibrio.

En este caso, por lo que discutíamos antes, sabemos que la masa del recipiente es 3 veces la masa de uno de estos pesos.

Figura I.7.

Pero, para que esta medición tenga algún significado, necesitamos tener alguna familiaridad con la masa de ese objeto.

En resumen

Para medir algo, es necesario:

- Decidir el atributo a medir.
- Escoger la unidad que también tiene el atributo.
- Determinar, por llenado, por cubrimiento o por algún otro método directo o indirecto, a cuántas unidades equivale el objeto que quiere ser medido.

Cuando decimos "determinar a cuántas unidades equivale el objeto", se podría pensar que nos estamos refiriendo a números enteros positivos; es decir, "determinar a cuántas unidades enteras equivale el objeto", pero eso no es siempre así. Perfectamente podría ocurrir que el contenido de un vaso quepa 2 veces y media en una botella. También puede ocurrir que para cubrir una región sea necesario "recortar" la unidad, y que la medición no resulte una cantidad entera.

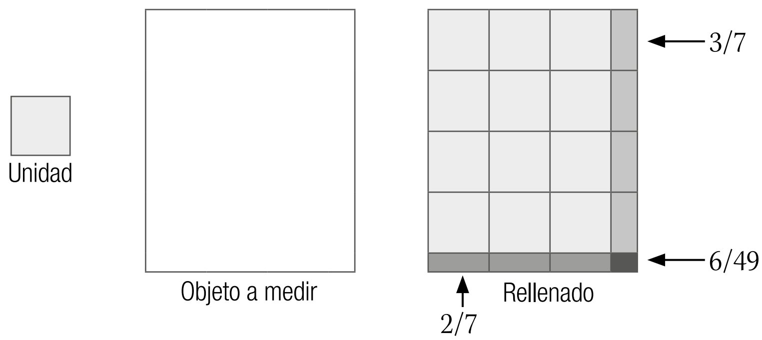


Figura I.8: la unidad de medida cabe "un número fraccionario de veces"

Por ejemplo, en la figura anterior, la unidad en el objeto a medir cabe:

$$12 + 4 \;\; \frac{3}{7} \;\; + 3 \;\; \frac{2}{7} \;\; + \frac{6}{49}$$

Es decir, 14 unidades y $\frac{34}{49}$ partes de unidad.

Honestamente, "¿cuántas veces cabe?" es bastante ambiguo, uno podría pensar en todas las fracciones positivas o, lo que es lo mismo, en todos los números decimales finitos o periódicos y es una buena idea para cuantificar las medidas. Sin embargo, esto esconde algo más profundo: que estamos asumiendo que el "¿cuántas veces cabe la unidad en el objeto a medir?" siempre tiene respuesta. ¿Será eso cierto? Es decir, dada una unidad, mediante un número finito de cortes y pegados, ¿se puede cubrir un objeto? Por ejemplo, ¿cuántas veces cabe el área del cuadrado en el área del círculo?

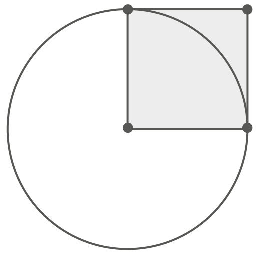


Figura I.9: el cuadrado y el círculo.

La verdad es que no existe una fracción de números enteros que responda a esa pregunta. Del mismo modo que no existe una fracción que permita responder a la pregunta: ¿cuántas veces cabe el lado de un cuadrado en su diagonal?

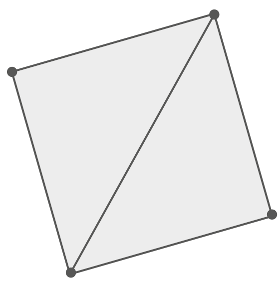


Figura I.10: el lado y la diagonal del cuadrado.

Esa discusión es antigua en matemática y fue una pregunta que apasionó a matemáticos desde la antigua Grecia. Por ejemplo, recién en 1770 el matemático alemán Johann Heinrich Lambert mostró que la pregunta ¿cuántas veces cabe el diámetro de una circunferencia en el contorno de la circunferencia? tiene como respuesta un número que no es la fracción de 2 números enteros. Para los griegos, los números eran medidas y decían que dos medidas (números) son conmensurables si existe una medida común que pueda medir un número entero de veces a cada una de las medidas iniciales. En el lenguaje de hoy, para decir que 2 números son conmensurables, decimos que el cociente entre ellos tiene el mismo valor que una fracción de números enteros. Entonces en lenguaje de los griegos, el diámetro de una circunferencia no es conmensurable con el contorno de la misma circunferencia, como del mismo modo el lado de un cuadrado no es conmensurable con la diagonal del mismo cuadrado.

Recordemos que la matemática estudia objetos ideales, que no existen en el mundo físico. Así que la discusión anterior es puramente matemática. Es posible aproximar tanto como se quiera cualquier medida, con números decimales finitos o fracciones de números enteros. Sin embargo, la aproximación propone otro problema: ¿cuán preciso quiero y puedo ser? Si se nos pregunta ¿cuánto mide el lápiz?, lo que hacemos es poner un extremo del lápiz en la marca 0 y vemos la marca de la regla que coincide con el otro extremo del lápiz. Pero ¿cómo podemos estar seguros de que pusimos exactamente un extremo en la marca 0?

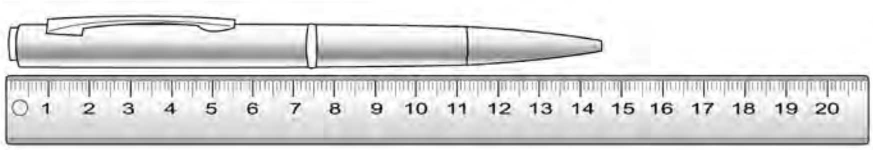


Figura I.11: ¿dónde están exactamente los extremos del lápiz?

¿Cómo podemos convencernos de que la marca que nosotros vemos como la que coincide con el extremo del lápiz es efectivamente esa? Puede ser que estemos seguros de que está entre 14,5 cm y 14,6 cm, pero exactamente ¿cuánto mide? Entonces, tendríamos que hacer marcas más pequeñas, digamos marcas correspondientes a las décimas de milímetro, pero de nuevo no tendríamos absoluta certeza sobre cuál es la medida exacta. Además, cuando tengamos marcas muy pequeñas, nuestro ojo no será capaz de discriminar entre una marca y otra. Y aun más, a medida que aumentemos la precisión del instrumento, más difícil será determinar cuál es exactamente el extremo del lápiz. Es decir, toda medición tiene intrínsecamente un error. *Toda medición es una aproximación.*

Ya que toda medición es una aproximación, cuando decimos que un lápiz mide 14,5 cm, esa información tiene algún grado de error. Pero ese error no es tan grande como para decir, tal vez, mide 7 cm. Existe un convenio respecto a comunicar información usando decimales. Cuando decimos que un lápiz mide 14,5 cm, queremos significar que el lápiz mide alguna longitud x y que x está entre 14,45 y 14,55, es decir:

$$14{,}45 < x < 14{,}55$$

Pues cualquiera de esas medidas se aproximaría a 14,5. Entonces, cuando usemos decimales para denotar medidas, usaremos ese convenio. Por lo tanto, si decimos que una medida es a, entonces queremos significar que la medida del objeto, puede ser una medida que cuya aproximación es a. Por ejemplo, si decimos que un clip mide 2,34 cm, queremos significar que la medida del clip está entre 2,335 cm y 2,345 cm, es decir:

$$2{,}335 \text{ cm} < \text{medida del clip} < 2{,}345$$

Por lo mismo, 1,2 cm significaría una medida que está entre 1,15 cm y 1,25 cm. En cambio, 1,30 cm significaría una medida que está entre 1,295 cm y 1,305 cm.

1.1 Conservación

En el proceso de medir en forma directa, podemos comparar el objeto a medir con la unidad de medida sin intermediarios. Sin embargo, al medir en forma indirecta es necesario hacer algunas transformaciones. Por ejemplo, cuando enrollamos un cordón alrededor de un frasco y luego lo estiramos y medimos el cordón estirado, estamos asumiendo que el cordón estirado o enrollado mide lo mismo, es decir, que al enrollar un cordón no cambia su longitud. Al realizar transformaciones en los objetos, algunos atributos del mismo pueden cambiar; por ejemplo, si tenemos una bolita de plastilina y la aplastamos, su masa no cambia y, por tanto, su peso tampoco cambia, pero el área superficie exterior cambia. Si tenemos un cuadrado de cartón y lo cortamos por una de sus diagonales, la suma de las áreas de los triángulos resultantes es la misma que el área del cuadrado inicial.

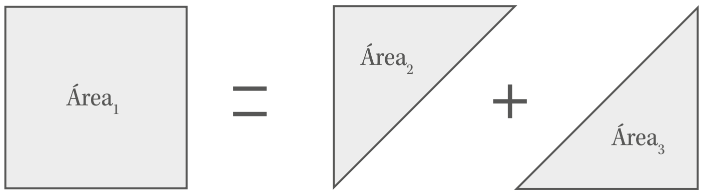


Figura I.12: el principio de conservación en acción.

> *Para pensar*
>
> En la **Figura I.12**, respecto a los perímetros, ¿se cumple el principio de conservación?

Esta propiedad de que el área se preserva después de “cortar y pegar” es muy útil en geometría. Por ejemplo, haciendo recortes y pegando podemos ver que el área de la figura **A**, que es un paralelogramo, es la misma que el área de la figura **B**, que es un rectángulo.

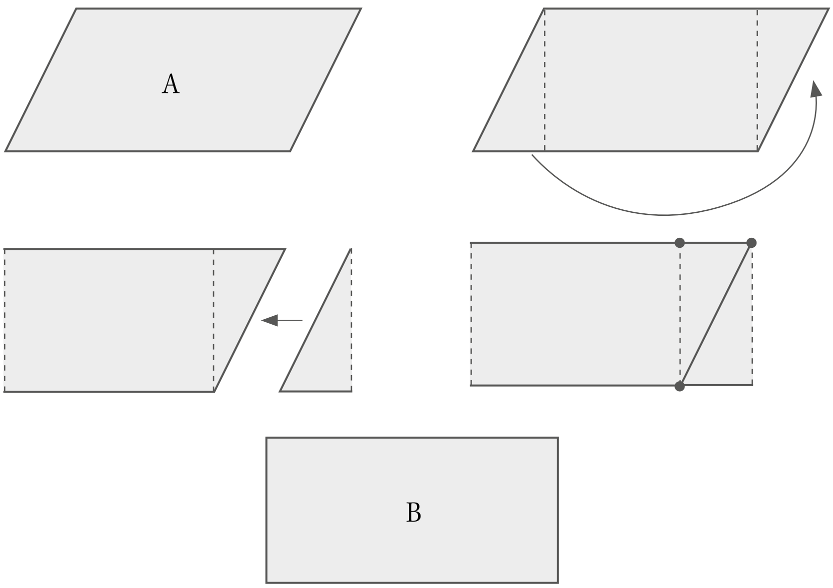


Figura I.13: dos figuras de igual área: cortando y pegando.

El área de la figura B es fácil de determinar conociendo algunos datos básicos; entonces, también podemos determinar el área de la figura A, pues ambas tienen la misma área.

Otro ejemplo donde aparece el principio de conservación es el siguiente: si consideramos un puñado de granos de maíz y los molemos en un mortero, la masa del puñado de granos y la masa de los granos pulverizados es la misma, si asumimos idealmente que nada de los granos de maíz se quedó en el mortero.

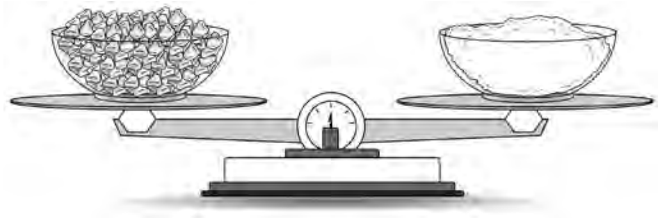


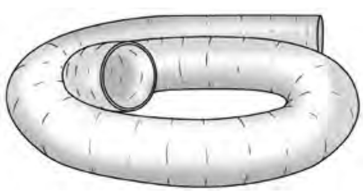
Figura I.14.

Ejercicios de la sección

1. Para mostrar que el área de un triángulo rectángulo es la mitad del área de un rectángulo cuyos lados miden lo mismo que los catetos del triángulo, ¿cuál propiedad del área se está usando?

2. Cuando un recién nacido es muy inquieto y no es posible pesarlo, los pediatras pesan al padre con el bebé y luego pesan al padre solo, así el peso del niño es la resta de la primera medición con la segunda medición, ¿cuál propiedad del peso se está usando?

3. Si se tiene un tubo como el de la imagen y luego se enrolla para formar un neumático, ¿es cierto que el volumen de líquido que cabe en el tubo estirado y el volumen de líquido que cabe en el neumático es el mismo? ¿El tubo estirado y enrollado tiene el mismo peso?



4. En una sala de clases se plantea el siguiente problema:

   Usted corta con un serrucho una tabla y obtiene dos tablas, ¿es cierto que el largo de la tabla original es igual a la suma de los largos de las tablas resultantes?

   Discuta las posibles respuestas a las que pueden llegar los alumnos y especifique los supuestos detrás de cada una de ellas.

5. Si cambia el volumen de un objeto, ¿cambia necesariamente su peso?

6. Busque un ejemplo de una transformación de un objeto que cambie su masa, pero no su volumen.

2. Conceptos y habilidades de medición

Como hemos dicho, la medición es una comparación, pero no es cualquier comparación, sino que es una comparación con referente fijo y, además, es bastante precisa, ya que se requiere decir ¿cuántas veces cabe la unidad en el objeto a medir? Por lo tanto, para medir se deben desarrollar previamente habilidades de comparación, y luego pasar a la medición propiamente tal. A continuación, presentamos etapas que están presentes en el aprendizaje de la medición.

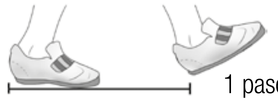
- **Etapa 1; reconocimiento del atributo:** en esta etapa, es necesario identificar la pregunta que se quiere responder, para así reconocer el atributo que se quiere medir. En los primeros años de escolaridad, es importante que los niños y niñas reconozcan el atributo que desean comparar y no confundan estos atributos. Por ejemplo, si se desea comparar el volumen que encierran 2 botellas, no es correcto comparar las alturas de ellas; los niños y niñas pueden decir frases como "esta botella encierra más volumen que esta otra, porque es más larga", confundiendo así los atributos de volumen y longitud.
- **Etapa 2; comparación directa:** una vez determinado claramente el atributo a medir, podemos comparar objetos con respecto a este, utilizando frases como: "es más grande", "es más pequeño", "miden lo mismo", "es más pesado", "es más liviano", "tienen la misma masa", etc. La literatura recomienda comenzar comparando directamente, es decir, para comparar el largo de 2 cordones, se sugiere "empatar" ambos cordones poniendo uno al lado del otro, hacer coincidir uno de los extremos de cada uno y ver cuál supera a cuál. También podemos comparar el volumen que encierran dos botellas trasvasijando el contenido de una en la otra.
- **Etapa 3; comparación indirecta:** en un tercer paso se puede comparar indirectamente usando alguna ley de transitividad. Por ejemplo, un cordón es "más corto" que el largo de una banca y el otro es más largo que la misma banca; por lo tanto, el primer cordón es más corto que el segundo.
- **Etapa 4; ¿cuántas veces cabe?:** las fases anteriores son precursoras de la medición. Recién en esta etapa se comienza con la medición propiamente tal. Aquí, cuando ya no hay confusión de atributos, se les pide a los niños y niñas que comparen 2 objetos, pero ahora "es más largo" o "más pesado" ya no basta, ahora es necesario cuantificar. ¿Cuántas veces cabe tu cuarta en el largo del cuaderno? o ¿cuántas veces cabe el largo de tu dedo gordo en el largo del lápiz?
- **Etapa 5; uso de unidades de medida:** una vez que no haya confusión respecto al atributo a medir, ya se hayan realizado comparaciones directas e indirectas y se haya calculado cuántas veces cabe un objeto en otro, es el momento de hablar de unidades de medida. Es decir, medir con una misma unidad varios objetos y así comparar objetos mediante la medida referida a una unidad fija.
- **Etapa 6; desarrollo de unidades estandarizadas de medida:** para finalizar, es necesario hacer surgir la necesidad de usar medidas estandarizadas, para comunicar información referida a mediciones. Preguntas del tipo: "María midió con su mano y dice que el ancho de la mesa mide 4 cuartas y media; por su parte, Claudia también midió con su mano y dice que el ancho de la puerta es 4 cuartas y media. ¿Es cierto que el ancho de la mesa y el ancho de la puerta miden lo mismo?" ayudan a reflexionar acerca de la necesidad de utilizar unidades estandarizadas.

Estas etapas sugieren un camino a seguir para desarrollar habilidades de medición, pero en ningún caso corresponde a un escalafón en el cual no se pueden saltar peldaños o unificar fases. La decisión la debe tomar el profesor, teniendo en mente los conocimientos y habilidades de los niños y niñas de su curso y el nivel de escolaridad. En algunos casos, por ejemplo, las etapas 2 y 3 se pueden desarrollar al mismo tiempo.

Ejercicio

1. Considere la siguiente actividad de un texto escolar y responda:

Con pasos



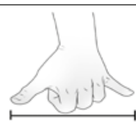
1 paso

4. Anota tu medida, la de un compañero/a y la del profesor/a.

	Tú	Compañero/a	Profesor/a
Largo de la sala	pasos	pasos	pasos
Ancho de la sala	pasos	pasos	pasos

¿Son iguales las medidas? ¿Por qué?

Con cuartas



1 cuarta

5. Anota tu medida, la de un compañero/a y la del profesor/a.

	Tú	Compañero/a	Profesor/a
Largo escritorio alumno	cuartas	cuartas	cuartas
Ancho escritorio alumno	cuartas	cuartas	cuartas
Alto escritorio alumno	cuartas	cuartas	cuartas

¿Son iguales las medidas? ¿Por qué?

¿A cuál etapa de las antes descritas corresponde esta actividad? Explique.

3. Medición de distintas magnitudes

Es común, en los primeros niveles de enseñanza básica, usar unidades no estandarizadas (informales) para medir longitud y a veces área, pues permite concentrarse en el proceso de medición. Sin embargo, si el sentido de medición ya está logrado en el niño, no es tan claro que sea necesario completar todo el proceso (comparación, unidades no estándar, unidades estandarizadas) para la medición de nuevos atributos. Esto también tiene que ver con las habilidades que poseen los niños y niñas. Si un niño observa cómo su padre mide en centímetros cuando trabaja en carpintería, él mismo utiliza huinchas y conoce perfectamente la unidad centímetro; la literatura afirma que no se gana nada haciendo pasar a ese niño por el uso de medidas no estandarizadas de longitud. A continuación, comentamos algunas de las ventajas del uso de medidas no estandarizadas en niños que recién son introducidos al proceso de medición.

- Las unidades no estandarizadas hacen más simple que el foco sea el atributo y no la unidad de medida. Por ejemplo, en la discusión acerca del área de una figura irregular, se pueden utilizar diferentes unidades informales y se obtendrán diferentes valores, lo que hace evidente que no es lo mismo el área que su medida. Entonces, la discusión se focaliza en qué significa medir el área. Además, aparece en forma más evidente que las mediciones son aproximaciones.
- Las discrepancias que aparecen al usar unidades no estandarizadas de medición muestran la necesidad de usar medidas estandarizadas para comunicar, de modo que todos entendamos lo mismo.

La iniciación de niños y niñas al proceso de medición debería ser, probablemente, con unidades informales y progresar a unidades e instrumentos estandarizados de medición. Los estudiantes de los primeros años de enseñanza básica requieren varias experiencias con una amplia variedad de unidades informales de medida de longitud, peso, volumen y otras. El uso de este tipo de unidades juega un rol clave en la adquisición de los conceptos y el desarrollo de las habilidades que son fundamentales para el proceso de medición; de esta forma, el aprendizaje de este contenido cobra mayor sentido para los alumnos.

Una vez establecidos los fundamentos del significado de la medición, al estudiar otras magnitudes, sobre todo en ciencias, no siempre es necesario pasar por todas las etapas enunciadas más arriba. Por ejemplo, al medir tiempo o temperatura, simplemente se podría comenzar utilizando unidades estandarizadas.

El uso de unidades estandarizadas debe contemplar numerosas y diversas experiencias que les permitan manipular y practicar el uso de reglas, huinchas, balanzas, pesas, etc. Esto permitirá que los niños y niñas se familiaricen con estas unidades de medida desde los primeros años de escolaridad, lo que les facilitará el trabajo de medición en cursos superiores y en la vida diaria.

Otro asunto importante a considerar en el uso de medidas informales es la elección de la unidad. La elección de la unidad puede estar condicionada por la exactitud y/o por la mejor comunicación. Por ejemplo, para medir el largo de un libro, las cuartas pueden ser unidades muy grandes; en ese caso, tal vez sea preferible usar el ancho de un dedo o el largo de un clip.

3.1 Medición de longitud

La longitud es, usualmente, el atributo que primero se aprende a medir. Sin embargo, se debe tener en cuenta que no es simple de entender para estudiantes pequeños. Una de las complicaciones de la longitud es que es una magnitud física fundamental que no puede ser definida a partir de otras. Pese a esto, los niños y niñas tienen una idea intuitiva de longitud, ellos y ellas se expresan comparando longitud: "yo soy más alto que Martina", "el lápiz es más largo que un palo de fósforo".

Si en la hoja de papel dibujamos un segmento y le llamamos u (de unidad), y luego tomamos otro segmento, diremos que la longitud de este es la cantidad de veces que cabe u en él.

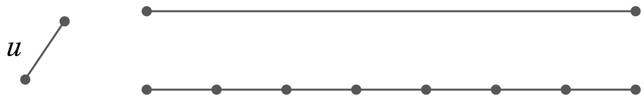


Figura I.15: en nuestro caso el segmento mide 7u.

Entonces, cuando consideramos una cuarta como unidad de longitud, no estamos pensando en todos los atributos de la mano, sino que solo en su largo; es decir, estamos considerando el extremo del pulgar y el extremo del meñique, y el segmento que está entre esos extremos.

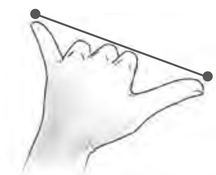


Figura I.16: una cuarta.

Ahora bien, si consideramos un alambre flexible, entonces su largo es el mismo cuando está estirado que cuando está enrollado, o cuando está en alguna forma curva. Entonces, para medir el largo de un alambre nos basta estirarlo y medirlo cuando está en una línea recta.

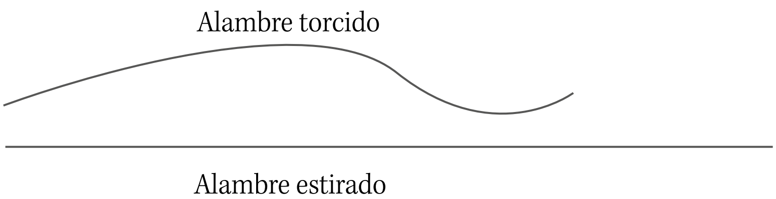


Figura I.17: un mismo alambre: torcido y estirado.

Cuando medimos el ancho de un libro, lo que hacemos es fijarnos en una recta que está paralela al borde del libro y medir el largo de este segmento de recta.

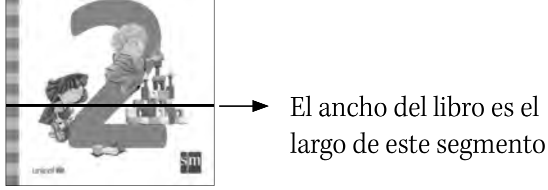


Figura I.18.

Las primeras actividades podrían estar destinadas a comparar longitudes, a usar palabras como "más largo", "más corto", "miden lo mismo". Para hacer esta comparación, la pueden hacer directamente: por ejemplo, poniendo un cordón al lado del otro para decidir cuál es más largo. O bien, que un niño se pare al lado de una niña y decida quién es más alto. También se puede comparar indirectamente: un niño se para de espaldas a la pared y marca el borde superior de su cabeza, y lo mismo hace la niña, el niño más alto es el dueño de la marca que está más arriba.

Luego, es necesario cuantificar cuántas veces cabe un objeto en otro, en cuanto a su longitud, para después pasar a unidades de medida, informales y formales. Es importante recordar que la medición es cuantificar cuántas veces cabe la unidad en el objeto a medir, la pura comparación de "más grande" o "más pequeño" no constituye una medición.

Es importante que se midan objetos que no son necesariamente líneas rectas. Un error que puede aparecer en niños pequeños es creer que la longitud es un atributo exclusivamente de objetos rectos. Para ello, es importante usar cordones, cintas o cuerdas que permitan medir objetos irregulares. Esto también da la idea de medición indirecta.

Ejercicio

Describa una estrategia para medir un alambre que no se puede estirar.

3.1.1 Medidas de longitud

Al utilizar medidas no estandarizadas, se centra el estudio en la habilidad de medir y no en las unidades. Además, ayuda a utilizar unidades adecuadas. Por ejemplo, para medir el largo de la sala, los niños no deberían utilizar como unidad un clip, sino que un paso, o un pie, etc.

Una vez que se ha comunicado información de longitudes utilizando unidades no estandarizadas, surge la necesidad de utilizar unidades estandarizadas. Si un estudiante dice que su cordón mide 3 cuartas y 2 dedos, y otro estudiante dice que su cordón mide 3 cuartas exactamente, ¿cómo decidir cuál es el cordón más largo? O si queremos comprar un vidrio para una ventana y necesitamos saber cuánto vale ¿cómo le damos por teléfono las dimensiones de la ventana al dependiente? Es por esto que necesitamos utilizar medidas estandarizadas, para comunicar información.

Ejercicio

Considere la siguiente situación:

Al pedirle a un niño que determine cuántas veces cabe un lápiz en el largo de la mesa, el niño dice que mide exactamente 5 lápices. Sin embargo, cuando explica su procedimiento, la profesora Hernández se da cuenta de que utilizó diferentes lápices de distinto largo, y de hecho, los escogió de tal forma que la respuesta fuera un número entero.

¿Qué actividad podría sugerirle usted a la profesora Hernández, para que se la asigne al niño, con el fin de que el estudiante se sienta en la necesidad de usar unidades del mismo tamaño?

3.1.2 Unidades estandarizadas de longitud

El conocimiento de unidades estandarizadas de longitud es un objetivo de cualquier currículo de matemáticas y ciencias. Estas surgen de la necesidad de comunicar información que sea universalmente comprendida. El Sistema Internacional (SI) de medidas tiene como *base* de unidad de longitud el metro. El metro es la distancia que recorre la luz en el vacío en $\frac{1}{299.792.458}$ partes de un segundo. En 1889 se materializó el *metro patrón* de platino e iridio depositado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en París. El símbolo del metro es **m**, no es una abreviatura, por lo tanto, no admite plural; es decir, para anotar cuatro metros en símbolos, escribimos **4 m** y no **4 ms** ni tampoco **4 mts**; como símbolo, tampoco admite mayúsculas. Aproximadamente, un metro es la medida de un paso de un adulto.

La palabra *metro* proviene del griego *metrón* que significa "medida". Del metro se desprenden subunidades de longitud, como el *centímetro* (una centésima de metro), el *milímetro* (una milésima de metro). Utilizando el metro como base, se describen unidades mayores que el metro, como el kilómetro (mil veces un metro). La siguiente tabla muestra algunas equivalencias:

Unidad	Símbolo	Correspondencia
Milímetro	**mm**	$1\text{ mm} = \frac{1}{1000}\text{ m} = \frac{1}{10}\text{ cm}$
Centímetro	**cm**	$1\text{ cm} = \frac{1}{100}\text{ m} = 10\text{ mm}$
Metro	**m**	**1 m = 100 cm = 1000 mm**
Kilómetro	**km**	**1 km = 1000 m**

Tabla I.1.

En general, el prefijo "mili" significará la milésima parte; por ejemplo, miligramo significará la milésima parte de un gramo. Del mismo modo, el prefijo "kilo" significará mil veces; por ejemplo, kilogramo significará mil veces un gramo. La siguiente tabla muestra algunos otros prefijos:

Prefijo	Símbolo
Nano	Mil millonésima parte
Micro	Millonésima parte
Mili	Milésima parte
Centi	Centésima parte
Deci	Décima parte
Deca	10 veces
Hecto	100 veces
Kilo	1.000 veces
Mega	1.000.000 veces
Giga	1.000.000.000 veces

Tabla I.2.

Por ejemplo, un micrómetro es la millonésima parte de un metro y su símbolo es **μm**. El diámetro de la tierra mide aproximadamente **12.700** kilómetros, es decir, **12.700.000** metros, es decir, 12,7 megametros. Así que, en términos prácticos, en medidas terrestres no utilizaremos los gigametros. Aparte del Sistema Internacional de medidas, existe otro sistema de unidades de longitud que se utiliza en Gran Bretaña y algunos países que fueron sus colonias, incluyendo a Estados Unidos. Este sistema contempla: la pulgada, el pie, la yarda y la milla.

Una pulgada es la medida de la primera falange del dedo pulgar (el dedo gordo), es por esto que a estas unidades se les llama *antropométricas*, pues son medidas del cuerpo humano. Como esa medida depende de cada persona, al momento de estandarizarla se decidió que sería la medida de la falange del rey de turno; el valor escogido equivale aproximadamente a 25,4 milímetros. El símbolo de la pulgada es in, que proviene de la palabra *inch* ("pulgada" en inglés).

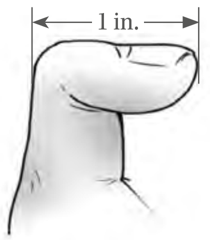


Figura I.19: una pulgada.

La unidad conocida como pie corresponde a 12 pulgadas, que en el Sistema Internacional equivale aproximadamente a $12 \cdot 2{,}54$ cm = 30,48 cm.

Ejercicios

1. Cuál unidad del SI usaría para describir:
   a. La altura de un edificio.
   b. El ancho de un libro.
   c. El grosor de una moneda.
   d. El contorno de una moneda.
   e. El contorno de la Tierra.
   f. El contorno de una cancha de fútbol.
   g. La altura del Volcán Villarrica.
   h. El ancho máximo de Chile continental.

2. Complete la siguiente tabla de equivalencias de unidades de medida:

Milímetros mm	Centímetros cm	Decímetros dm	Metro m	Decámetro[1] dam	Hectómetro hm	Kilómetro km
1.000.000	100.000	10.000	1000	100	10	1
					0,008	
					20	
				5		
						3,5
	600					
		8.700				

[1] Decámetro = 10 metros.

3. Realice las siguientes transformaciones:

a. 380 mm	=		m	f. 12 mm	=		cm	k. 83,2 km	=		dm
b. 25 cm	=		mm	g. 360 mm	=		dm	l. 327,6 m	=		km
c. 250 cm	=		dam	h. 0,5 km	=		dam	m. 4860 cm	=		dm
d. 678 cm	=		m	i. 2,34 dam	=		km	n. 0,0032 km	=		cm
e. 1.350 mm	=		dam	j. 0,204 km	=		m				

4. Roberto sale a trotar y recorre una distancia de 4,2 km a la ida. ¿Cuántos metros habrá recorrido en total, si se vuelve por el mismo camino?

5. Marcela compró 37 m de cinta y ya ha utilizado 2.340 cm. ¿Cuántos dm de cinta le quedan?

6. ¿Cuántos centímetros quedan de una tabla de 35 dm de largo si se corta un trozo de 1.570 mm?

7. En una urbanización, una calle mide 0,437 km de largo, ¿cuántos metros se deben añadir para que mida 1 km de largo?

8. Pedro está corriendo la maratón (42,2 km). Si luego de más de 3 horas de trote le dicen que solo le faltan 3.700 m, ¿cuántos kilómetros ha recorrido?

9. Dos estaciones de trenes están a una distancia de 720 km. En un dibujo a escala, estas estaciones distan 9 dm. Entonces, ¿cuál es la distancia real entre 2 ciudades que en el dibujo están a 25 cm?

10. La casa de Carolina está a 1,46 km de su colegio. Cada día ella va y regresa por el mismo camino. ¿Cuál es la distancia en metros que recorre diariamente?

11. Carlos recorre un quinto de la distancia entre 2 lugares en bicicleta, un cuarto a pie y los 33 km restantes en bus. ¿Cuál es la distancia en metros entre los 2 lugares?

12. El largo de una cancha de fútbol es de 100 m aproximadamente. ¿Cuántas veces el largo de una cancha de fútbol cabe en un kilómetro?

13. Si la velocidad de la luz (en el vacío) es aproximadamente $3 \cdot 10^8$ m/s, entonces ¿cuánto se demora un rayo del Sol a Mercurio en el momento en que están más alejados? (la distancia entre el Sol y Mercurio en el momento en que están más alejados es aproximadamente 70.000.000 km).

14. La distancia de la Tierra a la Luna es aproximadamente 353.680.000 m. ¿Cuánto tarda la luz que sale de la Tierra en llegar a la Luna?

15. Si existiera un puente de la Tierra a la Luna y se pudiera recorrer en un automóvil a 100 km/h, ¿cuánto tardaría el automóvil en ir de la Tierra a la Luna?

16. Si la luz se demora aproximadamente 8 minutos del Sol a la Tierra, ¿cuál es la distancia del Sol a la Tierra?

17. Si una yarda equivale a 3 pies, ¿a cuántos centímetros equivale una yarda?

18. Si una milla equivale a 5.280 pies, ¿a cuántos metros equivale una milla?

3.1.3 Errores que pueden surgir en el uso de instrumentos de medición de longitud

El manejo de instrumentos de medición es, muchas veces, difícil para los estudiantes. Por ello, su aprendizaje requiere de un trabajo sistemático que permita que los estudiantes comprendan cómo estos instrumentos han sido graduados y cómo funcionan.

Así, por ejemplo, en el caso de la regla graduada, es necesario que los profesores expliciten que en ella ha sido marcado un punto de origen, que una unidad de medida (por ejemplo, el centímetro) ha sido repetida una cierta cantidad de veces y que los números correlativos indican la cantidad de unidades de medida desde el origen. Explicitar estos conceptos, de la posición que debe ocupar el punto de origen (el 0) y de cómo se debe posicionar la regla en relación con el objeto a medir, contribuirá a evitar procedimientos incorrectos en el uso de la regla.

Algunos de los errores que podrían aparecer entre los estudiantes al momento de utilizar la regla graduada son:

- Cuando existe una distancia entre el 0 y el borde de la regla, algunos estudiantes utilizan el borde de la regla como punto de origen, lo que genera errores en la medición del objeto. Por ello, se requiere que el profesor muestre a los alumnos cómo debe alinearse el objeto con la marca del 0 en la regla y no con su borde.

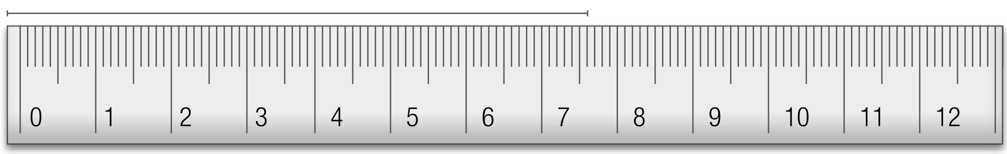


Figura I.20.

- Relacionado con el anterior, sucede cuando el estudiante, al medir un objeto, cuenta el número de marcas con que ha sido graduada la regla desde el 0 hasta el final del objeto, en lugar de contar las veces que la unidad de medida se repite. Es decir, cuenta las líneas y no los espacios entre ellas. Por ejemplo, si se quiere medir un segmento de **5 centímetros**, cuenta **6** marcas: las 2 de los extremos y las internas.

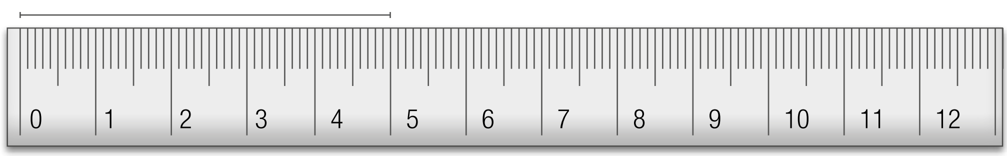


Figura I.21.

- Cuando el alumno utiliza el **1** como punto de origen para la medición en lugar del 0. De esta manera, la medición realizada es un centímetro menor a la medida real del objeto.

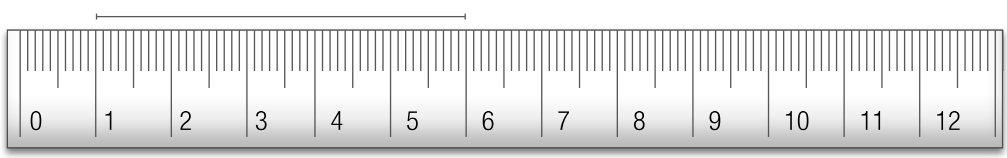


Figura I.22.

- Cuando se mide un objeto partiendo desde un punto diferente al 0, es común que los estudiantes olviden restar la distancia existente entre el punto de origen utilizado y el cero. Por ejemplo, un estudiante podría decir que el segmento de la figura mide 12 cm y no 12 – 4 = 8 cm.

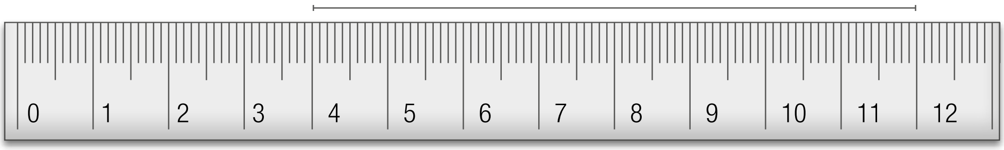


Figura I.23.

- Cuando se solicita a los estudiantes medir una línea curva, algunos señalan que esto no es posible de realizar, ya que desconocen la posibilidad de utilizar un elemento secundario, por ejemplo, una cuerda, que permita cubrir la línea curva, para luego estirar la cuerda y medirla con una regla.

En particular, el conocimiento y la práctica del uso de la regla graduada son fundamentales para el aprendizaje matemático futuro por diversas razones. Por ejemplo, se relacionan con el aprendizaje de la recta numérica y con la representación de operaciones aritméticas en ella; familiariza a los estudiantes con las unidades de medida estandarizadas de longitud; y construye una base de crucial importancia para el aprendizaje de otros tópicos en geometría.

3.2 Medición de área

3.2.1 Idea intuitiva

A cada figura que se encuentra en un plano (o en la superficie de un cuerpo sólido) le asociamos una magnitud llamada *área*, que corresponde intuitivamente a la “medida de la superficie” de la figura.

Al estudiar la medición de longitud, nuestros primeros pasos apuntaban a *comparar* las longitudes de 2 objetos (para determinar cuál era el más largo). ¿Qué ocurre si queremos comparar las áreas de 2 objetos, por ejemplo, un cuaderno y un libro? Si, por ejemplo, el libro es más largo y más ancho que el cuaderno, la respuesta es fácil de obtener (podemos poner el cuaderno sobre el libro, y vemos que el libro “sobra en todas las direcciones”).

¿Pero qué ocurre si, por ejemplo, el libro es más largo pero más angosto que el cuaderno? Ahí la respuesta de cuál de los 2 tiene mayor área no es tan evidente: note que la fórmula que tenemos aprendida (multipliquemos largo por ancho y comparemos los productos obtenidos), en realidad apunta a obtener la cuantificación de la magnitud del área de cada objeto, comparando las cantidades resultantes.

Asimismo, responder la pregunta de “cuántas veces cabe” el área de un objeto en la de otro (por ejemplo, un cuaderno en una mesa) presenta complicaciones, si se quiere hacer directamente: ¿qué pasa si el largo de la mesa equivale a 12 largos del cuaderno, y el ancho de la mesa a 8 anchos del cuaderno?

Por las razones anteriores, al desarrollar los conceptos y habilidades relativos a la medición de área puede ser conveniente llegar luego a la etapa de definir una unidad (informal o formal) de área, y *cuantificar* directamente (respondiéndonos: ¿cuántas veces cabe la unidad de área en el área del objeto medido?).

3.2.2 Medición de área con unidades informales

¿Qué objetos nos conviene usar como unidades de área? En principio, podríamos usar cualquier objeto con el atributo de área como unidad para medir esta. Sin embargo, entre otras razones, porque cuadrados (o rectángulos) del mismo tamaño "se pegan bien" entre ellos, tendemos a escoger como unidades de área objetos rectangulares. Así, las primeras actividades del tipo "cuántas veces cabe" el área de un objeto en otro pueden involucrar, por ejemplo, un cuaderno y el escritorio, o un trozo de papel lustre y un libro.

Si queremos medir el área de un objeto en papel lustre o en cuaderno, pondremos copias de estos objetos, una al lado de la otra, tratando de llenar el objeto a medir.

Recordemos que *toda medición es una aproximación*. Así, si nuestra unidad no cabe un número exacto de veces en el objeto a medir, la cantidad de veces que cabe entera es una primera aproximación a la respuesta buscada. ¿Qué hacer para mejorar esta aproximación?

Una idea simple es cortar copias de la unidad en pedazos y usarlos para rellenar lo que falta por cubrir. En principio, usando repetidamente este método – y cortando la unidad en trozos cada vez más pequeños– podríamos obtener mediciones del área tan aproximadas como quisiéramos.

Ejercicios

1. Usando como unidad de área un cuadrado (o rectángulo) de papel (por ejemplo, papel lustre, tarjetas de visita, Post-It), mida el área de una mesa encerrando estos rectángulos unitarios, para determinar cuántos caben en la mesa. Si es necesario, corte algunos de los cuadrados para obtener una mejor aproximación.

2. Repita el ejercicio anterior con rectángulos de papel de distintos tamaños (y midiendo la misma mesa).

3. Repita el ejercicio anterior midiendo la misma mesa, pero reemplazando los rectángulos de papel por triángulos o por círculos de un tamaño dado. Note que en este último caso es imprescindible cortar algunos círculos para rellenar partes de la mesa. ¿Qué complicación se presenta en este ejercicio?

4. Elija alguna figura de forma triangular y mida su área usando como unidad, primero, rectángulos, después triángulos y finalmente círculos.

3.2.3 Unidades estandarizadas de área

Si bien es cierto que podemos tomar cualquier figura plana como nuestra unidad de área, es costumbre elegir cuadrados para dicho rol. Los cuatro ejercicios anteriores muestran que cuadrados y rectángulos se prestan mejor para ser unidades de área.

Más aún, si un cuadrado tiene lados de longitud u (donde u es una unidad de longitud), decimos que el área del cuadrado es un u^2 (un u cuadrado). Así, por ejemplo, en el Sistema Imperial (EE. UU. e Inglaterra, entre otros) se habla de pulgadas cuadradas, pies cuadrados y millas cuadradas, entre otros; mientras que en el Sistema Internacional encontramos metros cuadrados, centímetros cuadrados y kilómetros cuadrados. Las unidades que más nos interesan corresponden al sistema métrico decimal, pero, ocasionalmente, aparecen situaciones en que es necesario recurrir al Sistema Imperial.

Ejercicios

1. Suponga que tiene 2 cuadrados y el lado de uno es 10 veces el lado del otro. ¿Cuántas copias del cuadrado más chico caben en el otro? En otras palabras, ¿cuántas veces cabe el área de un cuadrado, en otro de lado 10 veces mayor?
2. ¿Cuántos cuadrados de lado 1 cm caben en un cuadrado de 10 cm de lado?
3. ¿Cuántos cuadrados de lado 10 cm caben en un cuadrado de 1 m de lado?
4. ¿Cuántos cuadrados de lado 1 cm caben en un cuadrado de 1 m de lado? (Ayuda: la respuesta no es 100).
5. Averigüe, ¿a cuántos metros cuadrados equivale un acre?, ¿una hectárea? y ¿un pie cuadrado?
6. Indique 2 ejemplos en los que, para medir el área de una superficie, sea adecuado utilizar:
   a. Kilómetros cuadrados
   b. Metros cuadrados
   c. Milímetros cuadrados
   d. Hectáreas
   e. Centímetros cuadrados
7. Un rectángulo cuya área es $50.000\ m^2$, ¿tiene más o menos área que una cancha de fútbol?
8. Al estacionar un auto, ¿se cubre un área mayor o menor que $20\ m^2$?
9. Dibuje y recorte, en tamaño real, cuadrados con las siguientes áreas:
   a. 1 centímetro cuadrado
   b. 1 decímetro cuadrado
   c. 1 pulgada cuadrada
   d. 1 pie cuadrado
10. Compare las superficies de los cuadrados anteriores y responda:
    i. ¿Cuántos centímetros cuadrados hay en un decímetro cuadrado?
    ii. Aproximadamente, ¿cuántas pulgadas cuadradas se necesitan para cubrir un decímetro cuadrado?
    iii. ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en un pie cuadrado?
    iv. Aproximadamente, ¿cuántos decímetros cuadrados se necesitan para cubrir un pie cuadrado?
    v. ¿Por qué algunas comparaciones de las anteriores se pueden realizar en cantidades enteras y otras no? Explique.

3.2.4 Área de figuras geométricas abstractas

En la discusión anterior, así como en la mayor parte de la discusión sobre medición de longitud, nos referimos a mediciones de los respectivos atributos de objetos reales: cuerdas, cuadernos, puertas, recipientes, etc.

En geometría, estamos interesados también en el estudio de objetos ideales: segmentos de recta o trozos de curva que no tienen grosor, cuadrados perfectos, figuras planas cuyos bordes no ocupan área, y muchos otros.

Gran parte del estudio de área en el currículo escolar está dedicado precisamente a encontrar maneras de determinar el área de estas figuras planas ideales. Para algunos estudiantes, el contenido que mejor recuerdan de la geometría escolar son las fórmulas de área (de rectángulos, triángulos, trapecios, otros polígonos e incluso círculos).

¿Cuál es el origen de estas fórmulas de área que nos son tan familiares?

Muchas de ellas nacen de las dos propiedades siguientes:

- El área es invariante bajo movimientos rígidos: si trasladamos (movemos), rotamos (giramos) o reflejamos (damos vuelta) una figura, su área se mantiene.

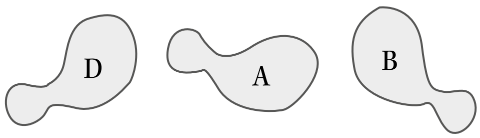


Figura I.24: las figuras B, C, y D resultan de reflejar, trasladar y rotar la figura A, respectivamente. El área de todas esas figuras es la misma.

- Si 2 figuras no se traslapan, entonces, el área de su unión es la suma de las áreas de las figuras consideradas por separado.

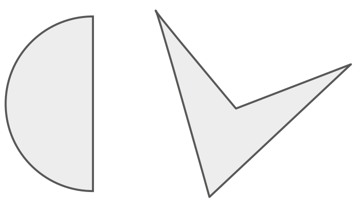


Figura I.25: las figuras que no se traslapan.

Note que si 2 figuras se traslapan, en general, el área de su unión es menor que la suma de sus áreas:

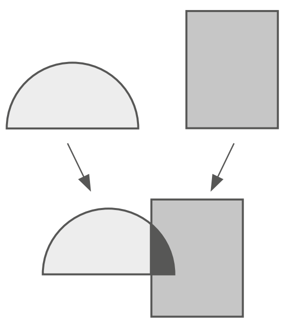


Figura I.26: 2 figuras que se traslapan.

Un caso crítico de la situación anterior ocurre cuando 2 figuras tienen puntos comunes, pero todos ellos están en sus bordes:

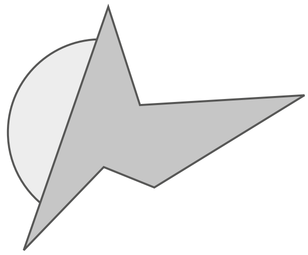


Figura I.27: 2 figuras que tienen en común un borde.

Una pregunta que aparece naturalmente relacionada con la de ¿cuál es el área de una unión de figuras que comparten el borde? es la siguiente: "¿cuál es el área de un trozo de línea (recta o curva)?"

Note que, si no estamos trabajando con objetos ideales, es perfectamente válido considerar el trozo de línea como un rectángulo muy delgado, en que el ancho corresponde a su grosor. Así, podríamos afirmar que el área de un trozo de cuerda de **0,5 m** de largo y **1 mm** de grosor es **500 mm^2**.

Sin embargo, si nos restringimos a objetos ideales (trozos de línea sin grosor), la respuesta a la pregunta de más arriba es: el área de un trozo de línea es 0.

En resumen

La discusión anterior nos lleva a concluir que, en realidad, para que las áreas de 2 figuras se sumen, basta que no tengan puntos comunes o que todos sus puntos comunes estén en sus bordes, es decir, que las figuras esten yuxtapuestas como en la **Figura I.27**.

Las dos propiedades mencionadas anteriormente no son suficientes para determinar el área de una figura; todavía es necesario fijar una unidad de área que determine la escala.

De manera similar a cuando se trataron las unidades estandarizadas de longitud, elegimos como unidad de área al cuadrado cuyo lado mide exactamente una unidad de longitud; desde este momento, las áreas de otras figuras pueden ser calculadas por aplicación reiterada de las 2 propiedades anteriores.

Ejemplo

El área de un rectángulo se obtiene multiplicando sus 2 dimensiones lineales (largo y ancho). Cuando ambas son números enteros es fácil justificar esta regla (y aquí nos aparece una conexión con el eje de *Números*); si las medidas del largo y ancho del rectángulo son fracciones la justificación es un poco más compleja, pero abordable (aquí no entraremos en los detalles, serán vistos en el **Capítulo IV**).

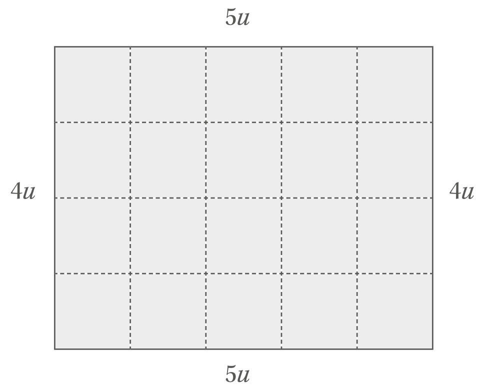


Figura I.28: el área del rectángulo es $4{\cdot}5\ u^2{=}20\ u^2$.

- Que el área de un paralelogramo se obtiene del producto entre las longitudes de su base y de su altura (o, abreviadamente, "su base por su altura") puede ser justificado cortando el paralelogramo en 2 piezas y rearmando un rectángulo de igual base e igual altura que el paralelogramo original.

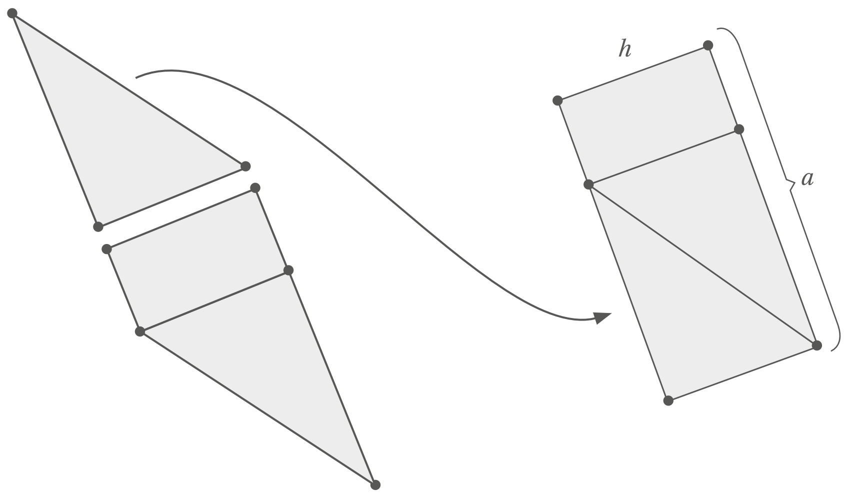


Figura 1.29: el área del rectángulo es igual al área del paralelogramo.

- La fórmula para calcular el área de un triángulo (la mitad de la base por la altura) se obtiene considerando un paralelogramo del cual el triángulo dado es la mitad.

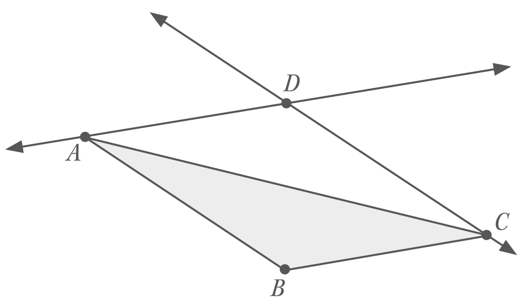


Figura I.30: el área del triángulo ΔABC es la mitad del área del paralelogramo ABCD.

Ejercicios

1. Suponga que tiene 2 triángulos, y que cada lado de uno de ellos es el doble de la longitud de un lado del otro triángulo. ¿Cuántas veces cabe el área del triángulo menor en la del triángulo mayor?

2. Repita el ejercicio anterior reemplazando "doble" por "triple".

3. ¿Se pueden extrapolar los resultados de los ejercicios anteriores a figuras que no sean triángulos? Si se tienen dos rectángulos y se sabe que cada lado de uno es el triple de la longitud de un lado del otro, ¿es posible determinar la razón entre las áreas de ambas figuras? ¿Qué se debe tener en cuenta, en general?

3.3 Medición de volumen

3.3.1 Medición de volumen con unidades informales

La medición de volumen es el paso natural que sigue a la medición de área: lo que se hace con un cuadrado (u otra figura plana: rectángulo, triángulo, trapecio) al medir el área, que sirve como unidad de área, al medir volumen se hace con un cubo (u otro cuerpo tridimensional, por ejemplo un paralelepípedo, un tetraedro o una esfera) que define la unidad de volumen. Al igual que en el caso del área (en que elegíamos un cuadrado como unidad por la comodidad de que varias copias de él "encajan bien" al momento de cubrir una porción del plano), para el caso del volumen se suele elegir como unidad un cubo, pero esto no es esencial.

El proceso de aproximación que se sugirió al calcular el área también puede ser utilizado para aproximar volumen, esta vez, rellenando las figuras con cubos unitarios o trozos de ellos. Por ejemplo, si es posible conseguir muchos dados iguales y declaramos como unidad de volumen el dado, podríamos medir el volumen de agua que cabe en un balde o en una taza, o el volumen que puede ser contenido en una caja de cartón. En lugar de dados, pueden servir los cubitos que forman las "serpientes de madera", juguetes que se enrollan hasta formar un cubo:

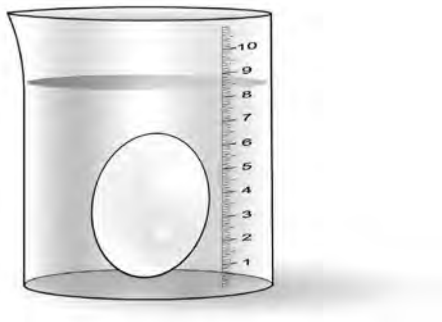
Figura I.31: una "serpiente de madera", estirada y enrollada.

Las unidades estandarizadas utilizadas para la medición de volumen son las unidades cúbicas: en el Sistema Internacional, metros cúbicos, centímetros cúbicos, kilómetros cúbicos; y en el Sistema Imperial, pulgadas cúbicas, pies cúbicos, millas cúbicas. Un nombre común para el decímetro cúbico es *litro*.

Ejemplo

¿Cómo medir el volumen de un huevo?

1) Primero ponga agua en un recipiente graduado. Mida el volumen de agua que puso en el recipiente.
2) Luego, sumerja un huevo en el recipiente y empújelo hasta que esté completamente cubierto por el agua.



3) Mida el volumen del contenido que marca el recipiente. Entonces, el volumen del huevo es la diferencia de las 2 mediciones de volumen en el recipiente.

3.4 Medición de masa y peso

La RAE define masa como la "magnitud física que expresa la cantidad de materia que contiene un cuerpo". No intentaremos dar una definición más precisa (esto correspondería más bien al área de ciencias). Mencionaremos solamente que, en lugar de medir la masa directamente, medimos sus efectos; por ejemplo, midiendo el peso de un cuerpo o su resistencia a cambiar de velocidad (su fuerza de inercia).

El peso de un cuerpo (en un punto dado fijo sobre la superficie terrestre) es la fuerza con la que el cuerpo es atraído por la Tierra. Esta fuerza es directamente proporcional a la masa del cuerpo, por lo que, al comparar los pesos de 2 cuerpos, dicha comparación se aplica a sus masas. Este es el principio detrás de la balanza:

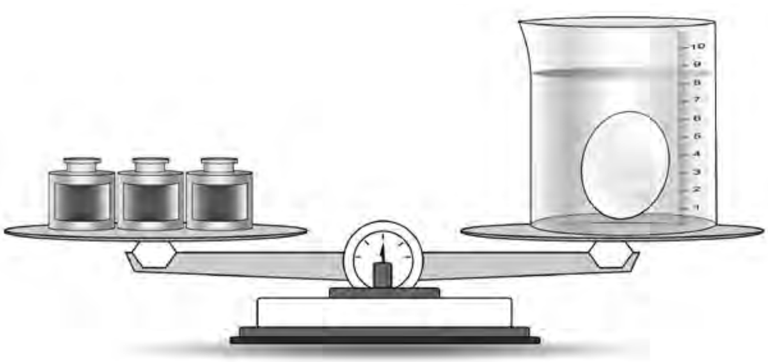


Figura I.32.

Para medir la masa de un cuerpo, comparamos su peso con el peso de una masa ya conocida. Si los pesos son iguales, también lo son las masas.

Esta idea de comparar pesos usando una balanza ya era conocida por los egipcios: la figura muestra a Anubis decidiendo si el corazón de un difunto es más pesado (en cuyo caso el alma era condenada a la muerte eterna) o más liviano que la "pluma de la verdad" (lo que le permitía al alma vivir eternamente).

Figura I.33: Anubis compara el corazón de un fallecido con la "pluma de la verdad".

Para completar el proceso de medir masa, sólo falta determinar una masa patrón que sea usada como unidad de medida. ¿Qué elegimos como unidad de masa? En el sistema métrico, la unidad básica de masa es el *kilogramo* (= 1.000 gramos), que queda definido a partir del kilogramo prototipo internacional. Denotamos el kilogramo como kg, la milésima parte de un kilogramo, se llama *gramo* y se anota g. La milésima parte del gramo se llama *miligramo* y se anota mg. Por otra parte 1.000 kilogramos corresponden a una *tonelada* y la denotamos por t.

3.4.1 Medición de peso

¿Qué ocurre si deseamos medir el peso de un cuerpo?

Como decíamos, el peso es una fuerza, por lo que debe ser medido como tal. Un instrumento que mide esta fuerza (basándose, por ejemplo, en el estiramiento de un resorte) es el dinamómetro; y uno similar es la pesa que se usa, por ejemplo, para pesar papas en la feria:

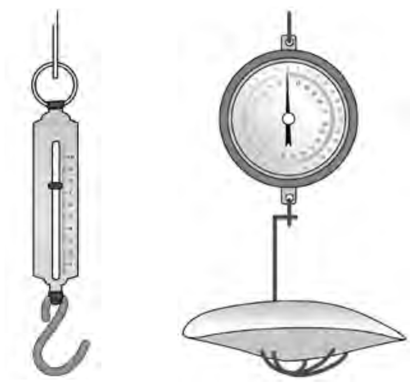


Figura I.34: un dinamómetro (izquierda) y una pesa de feria (derecha).

Note que el peso es una magnitud que varía debido a traslaciones: una persona no pesa lo mismo a nivel del mar que en la cumbre de una montaña. De hecho, debido a que la Tierra no es una esfera perfecta (es achatada en los polos), una persona pesa más en los polos que en el Ecuador.

Note además que, en general, cuando medimos peso y masa, usamos instrumentos que nos "dicen" cuánto pesa algo. Es decir, no comparamos directamente con una unidad preestablecida, por lo tanto, en este caso solo usamos comparación indirecta, salvo en el ejemplo de la balanza de platillos.

Ejercicios

1. Averigüe, ¿cuál es la razón (aproximada) entre el peso de un objeto medido en la superficie de la Tierra y en la superficie de la Luna? ¿A qué se debe esta razón?

2. Averigüe, ¿cuánto pesará una persona de $70\ \mathrm{kg}$ de masa en la superficie lunar?

3. Averigüe, ¿cómo funciona una romana?

Las unidades más usadas para medir el peso están relacionadas con las unidades de masa y, de hecho, muchas llevan el mismo nombre, al que se le agrega el sufijo "-fuerza". Así, por ejemplo, un *kilogramo-fuerza* es la fuerza que le imprime a un kilogramo de masa una aceleración especificada (a saber; $9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$); esto corresponde a la fuerza que ejerce la Tierra sobre un kilogramo de masa en un punto específico de la superficie terrestre.

Note que, en lenguaje coloquial, generalmente usamos las unidades de masa (gramo, kilogramo) para referirnos a peso; lo correcto sería hablar de gramos-fuerza o kilogramos-fuerza. La unidad básica del SI para medir fuerza es el Newton (N), que es la fuerza que le imprime a una masa de $1\ \mathrm{kg}$, una aceleración de $1\ \mathrm{m/s^2}$. Así, un kilogramo-fuerza es más o menos equivalente a $9{,}8\ \mathrm{N}$.

Ejercicios

1. Indique qué unidad de medida sería la más apropiada (miligramo, gramo, kilogramo, tonelada) para medir la masa de los siguientes objetos:

   a. Un grano de arroz.
   b. Una bolsa de manzanas.
   c. Un puñado de almendras.
   d. Una tableta de paracetamol.
   e. Un camión cargado de madera.
   f. Un ascensor transportando 5 personas.
   g. 2 rebanadas de pan.
   h. Una caja llena de libros.
   i. Un limón.

2. Complete la siguiente tabla de equivalencias:

Toneladas	Kilogramos	Gramos
0,0025	2,5	2.500
	3,2	
0,5		
	1.000	
		2.200
2,7		
	750	
		35
45.000		

3. Realice las siguientes transformaciones:

a. 27 kg = ☐ g
b. 250 g = ☐ kg
c. 38 mg = ☐ g
d. 8 t = ☐ kg
e. 3,75 kg = ☐ g
f. 280 kg = ☐ t
g. $\frac{1}{4}$ kg = ☐ g
h. 0,2 kg = ☐ g

4. Resuelva los siguientes problemas:

a. Si un paquete de caramelos pesa **215 g** ¿Cuántos paquetes de ese mismo peso puedo armar con **4 kg** de caramelos?
b. Un bombón de chocolate pesa **6 g**. ¿Cuántos **kg** pesan **500** bombones?
c. Una caja de manzanas de exportación contiene **40** manzanas. Si cada manzana pesa, en promedio, **70 g** y se tienen **5** cajas, ¿cuánto pesarán todas las manzanas?
d. Al puerto llega un barco con **2.800 t** de mercancía. ¿Cuántos camiones se necesitarán para transportarla, si cada camión puede cargar **1.200 kg**? ¿Y si se consiguen camiones que pueden cargar **1.400 kg**?

3.5 Medición de tiempo

Para el final de esta sección y de este capítulo, hemos dejado la medición del tiempo. Por una parte, el tiempo es mucho menos tangible que la longitud, la masa, y el volumen; de hecho ha sido un quebradero de cabeza para filósofos y físicos. Sin embargo, todos creemos tener una noción de tiempo, aunque ninguno de nosotros podamos explicar qué cosa es. San Agustín ejemplifica esta idea muy bien, él dice:

"¿Qué es, pues, el tiempo? Si nadie me lo pregunta, lo sé; si quiero explicarlo a quien me lo pide, no lo sé."

Por otra parte, la medición de tiempo, al igual que la medición de masa y peso, escapan del ámbito de la geometría. Pero suele ocurrir que los currículos incluyen un eje de medición en el área de matemáticas o, a veces, dentro del eje de geometría. Es por esto que un profesor de matemática de enseñanza básica debiera conocer acerca de la medición del tiempo y el uso de los relojes. Además, en los primeros años de enseñanza básica, el profesor de ciencias y el profesor de matemáticas suele ser el mismo profesional.

En música, por ejemplo, una redonda denota 4 tiempos, una blanca 2 tiempos, una negra denota un tiempo, y una corchea mide medio tiempo, y esas medidas no se traducen ni a segundos ni a minutos. En este caso, la medida "tiempo" es no estandarizada, pese a que los músicos cuando leen estos símbolos en las partituras todos entienden lo mismo y tocan al mismo ritmo.

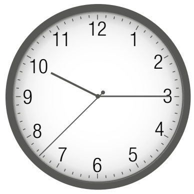
Redondas	𝅝							
Blancas	𝅗𝅥				𝅗𝅥			
Negras	♩		♩		♩		♩	
Corcheas	♪	♪	♪	♪	♪	♪	♪	♪

Figura I.35: tabla de equivalencia de los símbolos musicales, según tiempos.

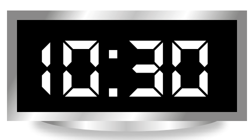
El programa de estudio de nuestro país, del 2012, sugiere que se les pida a los niños que usen medidas no estandarizadas de tiempo para comparar la duración de actividades cotidianas. Por ejemplo, mientras un niño escribe su nombre en la pizarra, otro niño dice en voz alta la secuencia de números naturales y registra el número que coincidió con el término de la tarea; luego intercambian papeles; y concluyen que aquel niño que registró un número menor en la secuencia es aquel niño que se demoró menos en escribir su nombre.

El programa sugiere también que en lugar de usar la secuencia numérica, también se pueden usar aplausos, rebotes de pelota y golpes de pie en el suelo. Si la duración de una actividad está asociada a alguna competencia, por ejemplo, ¿quién se demora menos en armar un rompecabezas? y no se tienen 2 copias del mismo puzle, entonces, los niños usarán alguna de las unidades antes mencionadas para medir el tiempo que demoran, por ejemplo, el "recitado" de la secuencia numérica. Pero los niños con la intención de ganar acelerarán el ritmo en que dicen la secuencia. En ese momento, se hace necesario el uso de una medida estándar del tiempo.

Para medir el tiempo en forma estándar, usamos un reloj que hace la medición por sí solo, es decir, no necesitamos interactuar con él, como lo hacemos con una regla para medir longitud, o como lo hacemos con una balanza de platillos para comparar masa. Lo único que tenemos que hacer es saber leer el reloj. La lectura de relojes análogos (de manecillas) es un objetivo en enseñanza prebásica y en enseñanza básica. En las bases curriculares de nuestro país del 2009, la lectura relojes análogos y digitales aparece en el primer ciclo básico.



Reloj análogo



Reloj digital

Figura I.36: tipos de relojes que se estudian en enseñanza básica.

El reloj análogo cuenta con 2 o 3 manecillas: la más pequeña indica la hora y se llama *horario*, la que le sigue mide los minutos y se llama *minutero,* y la más larga y más delgada indica los segundos y se llama *segundero*. El reloj está dividido en 12 marcas, el segundero da una vuelta completa en un minuto, el minutero da una vuelta completa en una hora y el horario en una hora pasa de una marca a otra. Es decir, si el horario está justo en la marca 4, entonces al cabo de una hora estará en la marca 5. Pero ese paso no ocurre en un instante, sino que el horario avanza lenta y homogéneamente de una marca a otra durante una hora. Es decir, a las 10 y cuarto, el horario no estará justo en la marca 10, si no que habrá avanzado un poco. Por su parte, el minutero habrá dado un cuarto de vuelta completa, es decir, estará en la marca 3.

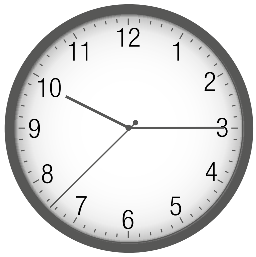


Figura I.37.

Para pensar

Si un reloj análogo ha perdido su minutero y su segundero, ¿cómo se podría decir la hora aproximando al cuarto de hora?

El reloj digital no presenta las dificultades de la lectura, pues muestra la hora y los minutos en forma explícita; por ejemplo, cuando el reloj marca 10:25, dice que son las 10 con 25 minutos. Sin embargo, existe una dificultad que se produce entre el sistema decimal y el sistema sexagesimal. En el sistema decimal, las diferentes nomenclaturas cambian de 10 en 10; en cambio 10 segundos no son un minuto, ni 100 segundos son un minuto, de hecho, ninguna potencia de 10 segundos equivale a un minuto; la equivalencia es que 60 segundos corresponden a un minuto y 60 minutos equivalen a una hora. Entonces, 10 horas y 50 minutos alguien podría escribirlo como 10,5 horas, lo cual correspondería a un error, pues 10,5 horas corresponde a 10 horas y media, lo que equivale a 10 horas y 30 minutos.

Una notación que se suele usar para denotar tiempo es la siguiente: los minutos se marcan con un apóstrofe (') y los segundos con dos apóstrofes ("), por ejemplo, para denotar 2 horas 25 minutos y 13 segundos, se usa:

2 25' 13"

El problema surge cuando tenemos unidades de tiempo menores al segundo, entonces, se deja de lado el sistema sexagesimal, y se vuelve al sistema decimal, y para medidas menores que el segundo se usan centésimas de segundo.

Por ejemplo, Usain Bolt, con un tiempo de 9,58 s, es el récord masculino de los 100 metros planos, y para la categoría femenina, Florence Griffith Joyner, con una marca de 10,49 s, posee el récord. Es decir, Bolt recorre 100 metros en 9 segundos y 58 centésimas de segundo. Entonces, el récord de Usain Bold difiere del de Florence Griffith en 91 centésimas de segundo (ese tiempo es equivalente al de 2 parpadeos, más o menos).

3.5.1 Unidades de medida de tiempo

La unidad que utiliza el Sistema Internacional de Unidades para el tiempo es el segundo y su símbolo es s, como ya lo hemos utilizado. Otras unidades estandarizadas de medida de tiempo son: el día, que equivale a 24 horas; la semana, que corresponde a 7 días; el mes, el año; la década; y el siglo. Una mención especial merece el mes, pues hay meses con 28 días, con 30 días y con 31 días, incluso hay años que tienen meses de 29 días. Sin embargo, cuando se dice que algún proceso duró 8 meses, por ejemplo, se suele pensar en meses de 30 días, si es necesario hacer la transformación a días.

Ejercicios del capítulo

1. Si Jorge en desayunar se demora 15 minutos; en bañarse, lavarse los dientes y vestirse se demora 35 minutos; el colegio le queda a 25 minutos de su casa; entra a las 08:15 de la mañana. ¿A qué hora debiera levantarse para no llegar atrasado al colegio?

2. Cuando el reloj marca las 03:48, ¿el horario está más cerca del 3 o del 4?

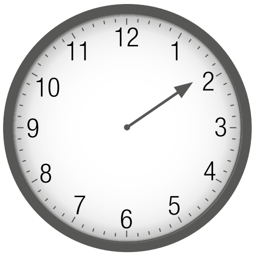
3. Un tren sale de la estación a las 07:45 y llega a destino a las 20:16 ¿Cuánto tiempo duró el viaje?

4. Una máquina imprime 15 páginas por minuto ¿Cuánto tiempo ha estado funcionando si ha impreso 555 páginas?

5. Un niño sale de su casa a las 07:10 de la mañana y regresa a las 11:20 de la mañana. ¿Cuánto demora en ir y regresar a la casa?

6. ¿Cuál de las siguientes es una buena aproximación de la hora que muestra el reloj que solo tiene horario?

   a. 01:30
   b. 01:15
   c. 1,45
   d. 10 minutos para las 2.
   e. Las 2 y 10 minutos.



7. Una y solo una de las siguientes afirmaciones es correcta. Decida cuál es y explique por qué.

   a. María pesa exactamente 45 k.
   b. María mide exactamente 1,50 m.
   c. María demoró exactamente 20,4 minutos en correr 100 m.
   d. María tiene exactamente 4 hermanos.

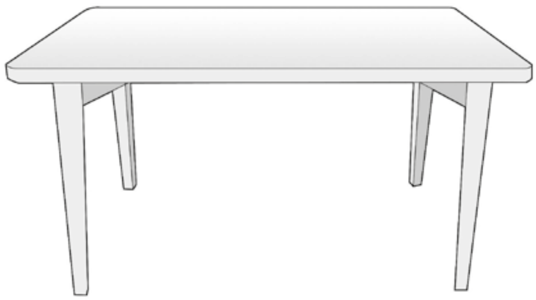
8. Explique cuál es la diferencia entre decir que algo mide 2,3 m y decir que algo mide 2,30 m.

9. Si se informa que el ancho de una mesa mide 45 cm, ¿entre qué valores se encuentra la medida del ancho de la mesa?

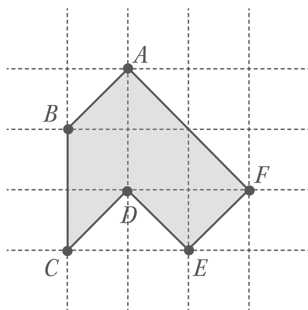
10. ¿Cuál de las siguientes podría ser la medida del alto de una puerta?

a. 1,7 cm
b. 21 cm
c. 2,1 km
d. 210 cm

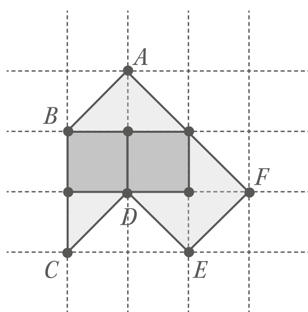
11. Describa una estrategia para determinar cuántas veces cabe el largo del contorno de una moneda en el ancho de una mesa.



12. Un estudiante de tercero básico pone un elástico en una geoplano formando la siguiente figura.



El niño pone elásticos en los cuadrados que están completamente contenidos en la figura:



El niño dice que el área de la figura es mayor que el área de 2 cuadrados del geoplano, pero que no sabe cuánto más, pues las otras partes de la figura no son cuadrados.

a. ¿Cuál es el área de la figura, si la unidad de medida es el área de un cuadrado del geoplano?
b. ¿Cómo le ayudaría al niño a encontrar la respuesta?

Capítulo
II

Nociones geométricas básicas

"A ti, contorno de la gracia humana,
recta, curva, bailable geometría,
delirante de luz, caligrafía
que diluye la variable más liviana".
R. Alberti.

Introducción

En este capítulo, hacemos un recorrido por distintos conceptos e ideas básicas de la geometría. Debemos aclarar (y declarar) que adoptaremos un punto de vista a la vez intuitivo y platónico; por esto último, queremos decir que consideramos los objetos geométricos como ideales, sin las limitaciones impuestas por el mundo físico. Así, por ejemplo, concebimos los puntos como infinitamente pequeños, las rectas y curvas como infinitamente delgadas, las rectas y planos de extensión infinita, etc. Hacemos esto porque esta es, precisamente, la mirada con que la matemática estudia estos objetos.

Partiremos acordando las ideas primitivas de la geometría, como son punto, línea, recta, plano, superficie y espacio, entre otras. Estas ideas no son presentadas mediante definiciones, sino que invocaremos a la intuición para que todos entendamos lo mismo de esas ideas. En la **Sección 2** daremos las primeras definiciones usando las ideas primitivas anteriores, estas incluyen: punto medio, segmento, rayo, ángulo, paralelismo y perpendicularidad. Además, en esta parte daremos algunos argumentos para asegurar la validez de algunas propiedades en total generalidad.

La **Sección 3** está dedicada a figuras geométricas en el plano. Hacemos una detallada discusión acerca de la definición de polígono, a modo de ejemplo, y de cómo se desarrolla una definición en matemática, de tal forma de que sea lo más precisa y económica posible.

También en la **Sección 3** se entregan las definiciones de círculo y circunferencia y de algunos elementos de ella. Finalmente, al igual que en el capítulo anterior, dedicamos un apartado a los errores que pueden surgir en la representación de objetos geométricos en aulas escolares.

1. Nociones primitivas

Aquí mencionaremos y describiremos conceptos *primitivos*, o sea, conceptos que daremos por conocidos sin definirlos. Esto nos permitirá comenzar a construir el lenguaje que usaremos para comunicar nuestras ideas.

Sin embargo, si no definimos estas nociones, ¿cómo pretendemos trabajar con ellas? Nos apoyaremos en las nociones intuitivas que, con alta probabilidad, todos compartimos, ya que han llegado a ser parte de nuestra cultura.

Así, damos las siguientes descripciones de conceptos primitivos:

- **Punto:** usualmente, asociamos la noción de *punto* a la de posición; por ejemplo, es común escuchar que "un punto es algo que no tiene dimensiones, sino que solo tiene posición". Euclides intentó definir el punto como "aquello que no tiene partes". La RAE nos dice que un punto, en su acepción geométrica, es el "límite mínimo de la extensión, que se considera sin longitud, anchura ni profundidad".

  En el lenguaje cotidiano, usamos la palabra "punto" para referirnos a una posición como (el punto penal, el punto de partida de una carrera, un punto de encuentro para una cita). En los dibujos geométricos, solemos representar los puntos con marcas de lápiz (una pequeña marca hecha con la punta o 2 pequeñas líneas que se cruzan). Pero estas representaciones no reflejan fielmente lo que queremos: la marca del lápiz, en realidad, es una figura parecida a un pequeño círculo y el cruce de 2 líneas es una pequeña cruz. Ni siquiera los puntos que vemos dibujados en la pantalla del computador o impresos con tecnología láser son representaciones perfectas de nuestro concepto ideal de punto (una forma de verificar esto es observar la pantalla o el papel impreso con un lente de aumento lo suficientemente potente).

  Además de pequeñas marcas para mostrar la ubicación de los puntos, usaremos letras mayúsculas para poder referirnos a ellos en la discusión.

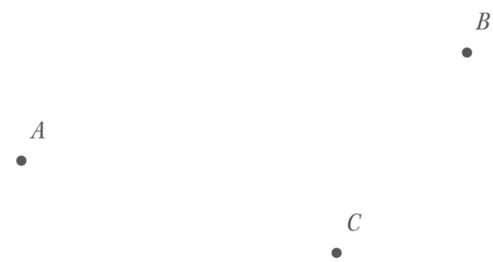


Figura II.1: tres Puntos.

- **Línea:** llamamos *línea* a un conjunto continuo[1] de puntos, que pueden ser recorridos (sin repeticiones) solo de 2 maneras, que llamaremos los *sentidos* de los recorridos.

  El origen de la palabra línea es la palabra latina *linum*, "lino"[2]. Así, una primera imagen de lo que es una línea nos la da una hebra de hilo delgado.

---

[1] Por "conjunto continuo de puntos" entendemos uno que puede ser dibujado sin levantar el lápiz.

[2] Planta cuyo tallo se usa para fabricar telas.

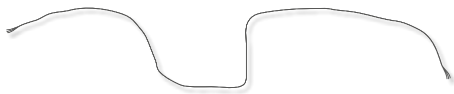


Figura II.2: hebra de hilo.

En el mismo sentido que decimos que un punto no tiene dimensiones, diremos que una línea "no tiene ancho". Así, toda línea tiene una sola *dimensión*, la que llamamos *largo* o *longitud*.

Distinguiremos, gruesamente, 4 tipos de líneas: *cerradas* (en que tras recorrerlas a partir de un punto se llega nuevamente a este), *finitas* (que tienen dos puntos extremos), *infinitas* (que se extienden sin límites al ser recorridas en ambos sentidos) y *semiinfinitas* (que tienen un extremo en un sentido, pero que se extienden sin límite en el otro). En las figuras siguientes, indicaremos, con una línea punteada terminada en una flecha, una porción de una línea que se extiende infinitamente en uno de sus sentidos (claramente, esta forma de indicar la infinitud de la línea es insatisfactoria, pero no hay una manera universalmente aceptada de dibujarla).

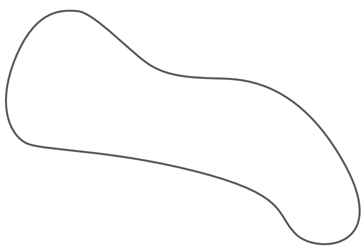


Figura II.3: una línea cerrada.

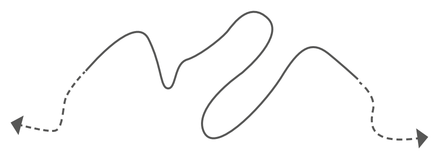


Figura II.4: una línea infinita.

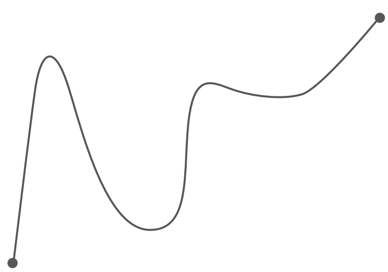


Figura II.5: una línea finita.

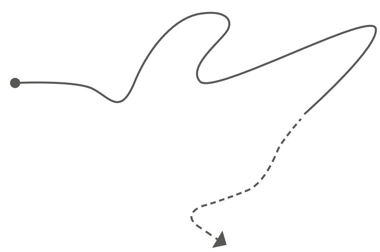


Figura II.6: una línea semiinfinita.

Una línea, que al recorrerla, la dirección del movimiento va variando la llamamos una línea *curva*.

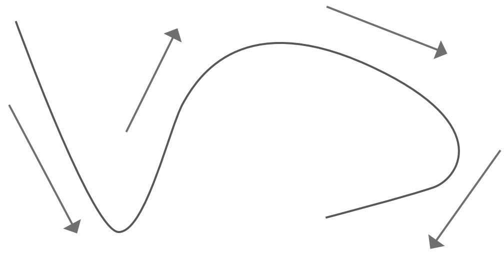


Figura II.7: línea que cambia su dirección en cada momento.

- **Recta:** una *recta* (o *línea recta*) es una línea infinita en ambos sentidos, que al recorrerla siempre se mantiene la misma dirección.

  Una propiedad importante de las rectas es que, dados 2 puntos distintos cualesquiera, ellos determinan una y solo una recta; si A y B son dos puntos, denotaremos por $\overleftrightarrow{AB}$ a la única recta que pasa por ambos puntos.

  Si se tienen 3 o más puntos, diremos que ellos son *colineales* si y solo si existe una recta que los contiene a todos. Note que, por la propiedad del párrafo anterior, 2 puntos cualesquiera siempre están contenidos en una recta, por lo que no es interesante preguntarse por la colinealidad de dos puntos.

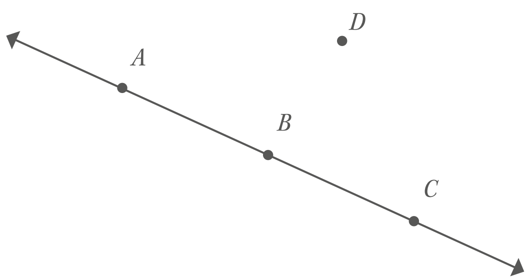


Figura II.8: los puntos A, B y C son colineales, pero A, B y D no son colineales.

- **Distancia:** unida a la noción de punto y a la noción de recta que pasa por 2 de ellos, se encuentra la de *distancia* entre puntos. La distancia entre dos puntos distintos A y B (que es lo que podemos medir con una regla graduada apoyada en ellos) es siempre un número positivo, que denotamos por AB, y la distancia entre un punto y el mismo es 0.

Para pensar

Note que lo anterior implica que si 2 puntos P y Q son tales que $PQ = 0$, entonces necesariamente $P = Q$. Esto puede chocar con la noción intuitiva, reforzada por la representación de puntos como círculos rellenos, de que puede haber 2 puntos distintos "pegados" (a distancia cero).

Por ejemplo, a partir de la imagen de la izquierda (en que 2 puntos aparecen muy juntos) podría pensarse que, vista con un lente de aumento, la situación es como en la figura de la derecha, los dos puntos –que ahora parecen más grandes– siguen juntos.

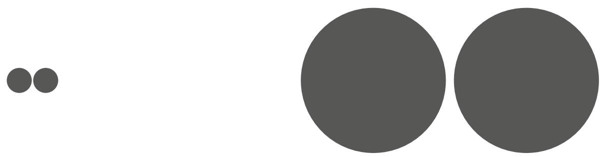


Figura II.9: 2 puntos "pegados".

Pero en realidad, si pudiéramos ver la figura de la izquierda con un lente de aumento, veríamos algo como lo siguiente:

Figura II.10: 2 puntos vistos a través de un lente.

Recuerde que los círculos que marcan la posición del punto no son propiamente círculos, sino simples marcas; entonces, al acercarnos a ellos no los veremos más grandes. Tampoco veremos las líneas más gruesas si nos acercamos a ellas. En la figura siguiente vemos una recta con dos puntos marcados.

Figura II.11.

Sin embargo, al verlos con un lente de aumento, vemos algo como lo que sigue:

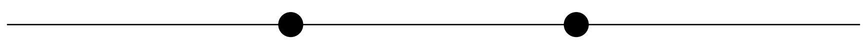


Figura II.12.

- **Plano**: llamamos *plano* a un conjunto de puntos de extensión infinita, sobre el cual podemos movernos en línea recta, tanto como queramos, en 2 direcciones fijas (a lo *largo* y a lo *ancho*). Estas 2 direcciones son llamadas las *dimensiones* del plano, por lo que este es un objeto bidimensional (2D).

  Buenas imágenes aproximadas de la noción de plano son (salvo por el hecho de que son finitas) el piso, el techo o las paredes de la sala de clases; la superficie de la mesa e incluso la tapa de un cuaderno.

- **Superficie:** llamamos *superficie* a un conjunto de puntos que, en cada uno de dichos puntos, es "localmente parecido" a un plano. El parecido local entre una superficie y un plano se hace evidente si aumentamos la escala de ella, o si –al menos en nuestra imaginación– reducimos la escala del observador.

  Así, por ejemplo, al observar una esfera pequeña (como, una bola de billar), nos damos cuenta de cuán distinta es de un plano; pero si la esfera es mucho más grande (como de un tamaño similar al de la Tierra), o si el observador es mucho más pequeño (imaginemos un insecto o microbio parado sobre la bola de billar), la esfera le parecerá indistinguible de un plano. De hecho, la creencia de que la Tierra es plana se originó precisamente en este fenómeno.

  Ya que una superficie es localmente similar a un plano, también es un objeto bidimensional.

  Las siguientes figuras ilustran lo anterior mostrando 2 ejes (correspondientes a las 2 dimensiones) en la superficie y ejes similares en un plano.

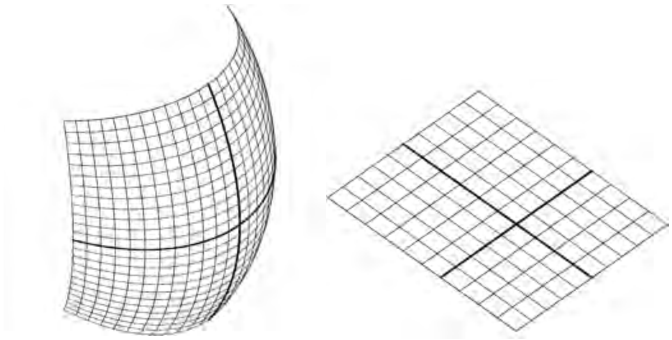


Figura II.13.

  Al igual que las líneas, las superficies pueden ser finitas o infinitas. Tradicionalmente, llamamos superficies a algunos objetos que no cumplen a cabalidad la definición dada anteriormente, sino que tienen –excepcionalmente– uno o más puntos en los que el objeto no es localmente parecido a un plano. Un ejemplo típico de esta situación es el cono, que es localmente parecido a un plano, salvo en su vértice.

Ejemplos

1) Superficies finitas

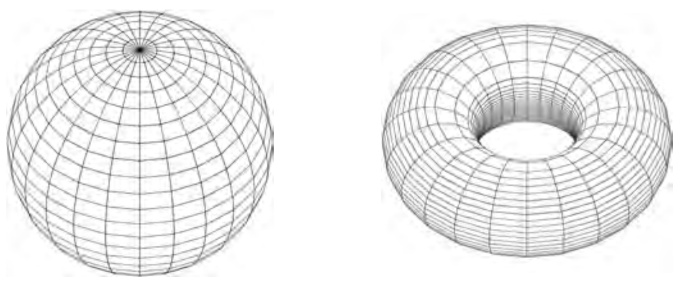


Figura II.14: una esfera (izquierda) y un toro (derecha).

2) Superficies infinitas

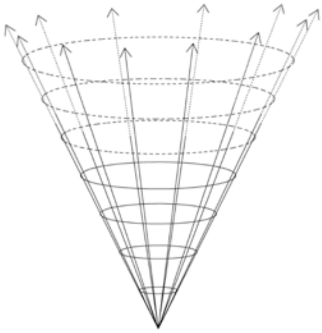


Figura II.15: La imagen representa un cono infinito.

Note que un plano es una superficie infinita con la propiedad de que, dados 2 cualesquiera, la recta que los une está completamente contenida en él.

Una *superficie con borde* es un conjunto de puntos tal que, al eliminar de él una o más líneas (el *borde*), se obtiene una superficie en el sentido anteriormente descrito. Las superficies con borde también pueden ser finitas o infinitas.

Ejemplos

1) Superficies finitas con borde

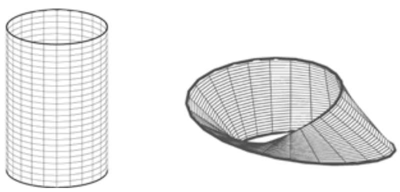


Figura II.16: un cilindro con borde (izquierda), una cinta de Moebius con borde (derecha).

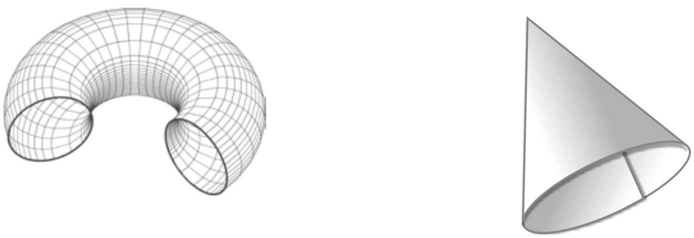


Figura II.17: un trozo de toro con borde (izquierda), un cono con borde (derecha).

2) Superficies infinitas con borde

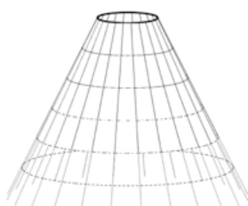


Figura II.18: cono truncado infinito.

¿Qué pasa si "pegamos" dos superficies con borde justamente en sus bordes? Por ejemplo, si tomamos un cilindro finito abierto (como, un tubo de cartón) y en sus 2 bordes pegamos sendos discos, obtenemos un cilindro finito cerrado.

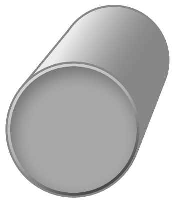


Figura II.19: un cilindro con bordes con dos "tapas" es un cilindro cerrado.

Algo similar pasa si tomamos un cono finito abierto (por ejemplo, un gorro de cumpleaños o un cono para helado) y en su borde pegamos un disco; en este caso, obtenemos un cono finito cerrado.

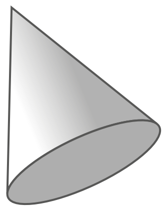


Figura II.20: un cono cerrado con "tapa".

En general, en el lenguaje cotidiano, al hablar de conos o cilindros, nos estamos refiriendo a sus versiones finitas. Además, no hacemos las distinciones entre las versiones "abiertas" o "cerradas" de dichas superficies: usamos la palabra "cilindro" tanto para referirnos a una lata de conservas como a un tubo de cartón, y la palabra "cono" para hablar de un gorro de cumpleaños o de un cono sólido de madera.

Otro aspecto en el que se aprecia la ambigüedad de nuestro lenguaje usual es en que usamos los mismos nombres para referirnos a las superficies cerradas que a los sólidos[3] que estas encierran: al decir "esfera" pensamos tanto en la bola sólida (imagínese una bola de billar) como en la cáscara de ella; si tenemos una lata de conservas hueca, decimos que es "un cilindro", y si la rellenamos de cemento también es un cilindro. En cada caso, es el contexto el que permite reconocer qué acepción de la palabra se está usando.

- **Espacio:** entendemos por espacio el conjunto de todos los puntos.

  El espacio es ilimitado (infinito) en todas las direcciones, y en él podemos identificar tres *dimensiones*: largo, ancho y alto[4].

---

[3] Estudiaremos los sólidos con mayor detención en el **Capítulo V**.

[4] Un libro interesante para entender el concepto de "dimensión" es *Planilandia, un romance de muchas dimensiones*, de Edwin Abbot, que narra las aventuras de seres que viven en un mundo de dos dimensiones.

2. Primeras definiciones

En la parte anterior se dieron a conocer los conceptos primitivos, aquellos que no definimos, pero tenemos una idea de qué representan. Aquí definimos conceptos que, sin ser primitivos, son básicos para entender las figuras geométricas. En esta sección y en las siguientes de este capítulo, restringimos nuestro estudio a geometría bidimensional (sobre el plano); toda la discusión sobre geometría 3D es dejada para el **Capítulo V.**

2.1 La noción de "estar entre", segmentos y rayos

Definición II. 1 **[Estar entre]**: Dados tres puntos distintos A, B y C, decimos que *B está entre A y C* si A, B y C son colineales y $AB + BC = AC$.

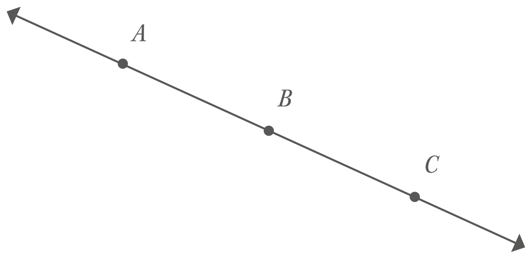


Figura II.21: el punto B está entre A y C.

Notemos que la condición $AB + BC = AC$ obliga a que A, B y C sean colineales, pues si no, los puntos A, B y C serían los vértices de un triángulo y en este caso $AB + BC > AC$.

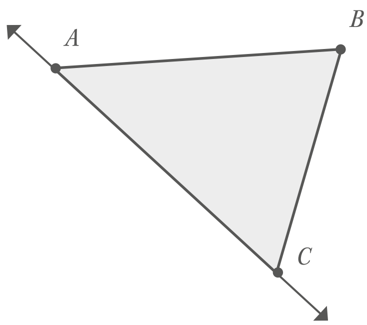


Figura II.22.

Sin embargo, para que la definición de "estar entre" resulte más clara, dejaremos la condición de colinealidad en su enunciado.

Definición II. 2 [Segmento o trazo]: Dados 2 puntos A y B, el *segmento* (o *trazo*) $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ formado por A, B y todos los puntos que están entre ellos. Diremos que los *extremos* de $\overline{AB}$ son los puntos A y B.

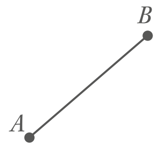


Figura II.23: segmento $\overline{AB}$.

Definición II. 3 [Punto Medio]: Dado un segmento, digamos $\overline{AB}$, su *punto medio* es aquel punto M que está en el segmento y satisface $AM = MB$.

Como $AM + MB = AB$, entonces $AM = MB = \dfrac{AB}{2}$. Note que este punto es único. De hecho, supongamos que existen 2 puntos, digamos M y M', tales que $AM = MB = \dfrac{AB}{2}$ y $AM' = M'B = \dfrac{AB}{2}$. Además, tanto M como M' están entre A y B, lo que implica que A, B, M y M' son colineales y $AM + MB = AB = AM' + M'B$. Entonces, M está entre A y M' o M' está entre A y M. En el primer caso se tiene que

$$AM + MM' + M'B = AB$$
$$\frac{AB}{2} + MM' + \frac{AB}{2} = AB$$
$$MM' = 0$$

Es decir, $M = M'$. Lo mismo resulta si suponemos que M' está entre A y M.

Una consecuencia de la existencia del punto medio de un segmento es que todo segmento tiene una cantidad infinita de puntos. Una forma de convencernos de esto es que, tras encontrar el punto medio M del segmento $\overline{AB}$, podemos considerar ahora el segmento $\overline{AM}$ y encontrar el punto medio de aquel segmento, y repetir este proceso indefinidamente.

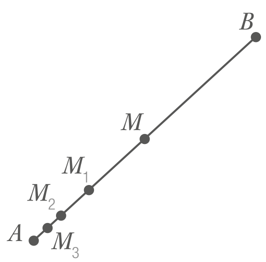


Figura II.24: M es el punto medio de $\overline{AB}$, M_1 es el punto medio de $\overline{AM}$, M_2 es el punto medio de $\overline{AM_1}$ y M_3 es el punto medio de $\overline{AM_2}$.

Definición II. 4. **[Convexidad]**: Un conjunto de puntos se dice *convexo* si, dados 2 cualesquiera de sus puntos, el segmento que los une está completamente contenido en él.

Así, por ejemplo, la imagen de la izquierda en la **Figura II.25** es convexa, ya que es imposible encontrar 2 puntos tales que el segmento que los une no esté contenido en ella; pero la de la derecha no lo es (como lo demuestra el segmento dibujado).

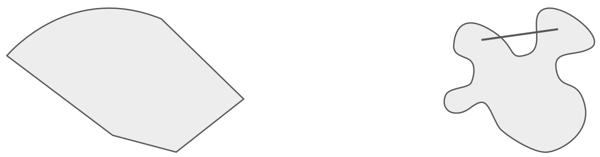


Figura II.25: la figura de la izquierda es convexa y la de la derecha no es convexa.

Una recta l divide al plano en 2 regiones, ambas regiones se llaman *semiplanos*, y son conjuntos convexos; y el segmento que une un punto de un semiplano con un punto del otro semiplano interseca a la recta l.

Definición II. 5 **[Rayo]**: Cualquier punto P de una recta $\overleftrightarrow{AB}$ la divide en 2 *semirrectas*. Estas semirrectas no contienen al punto P.

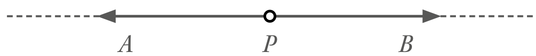


Figura II.26: Una recta con dos semirrectas determinadas desde el punto P, una en dirección de A y la otra en dirección de B.

Un *rayo* es una de las dos semirrectas en que queda dividida la recta, unida al punto que la divide. Dicho punto es llamado el *origen* del rayo.

Para denotar un rayo, indicamos primero su origen y después otro cualquiera de sus puntos, con una flecha (→) sobre ellos.

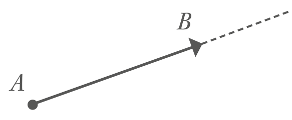


Figura II.27: rayo $\overrightarrow{AB}$.

Ejercicios

1. ¿Cómo es posible definir en términos de la relación "estar entre" estas semirrectas? (Ayuda: ¿qué ocurre si se toma un punto de cada una de estas semirrectas? ¿qué punto queda entre ellos?)

2. ¿Es cierto que el rayo $\overrightarrow{PQ}$ es el mismo que el rayo $\overrightarrow{QP}$?

3. El conjunto de puntos que forman una recta, ¿es un conjunto convexo?

4. Si $\overrightarrow{QP}$ es igual a $\overrightarrow{QS}$, entonces ¿es cierto que los puntos P, Q y S son colineales?

5. Si se consideran todos los puntos de $\overrightarrow{QP}$ y de $\overrightarrow{PQ}$ y luego se unen, ¿es cierto que se obtiene una recta?

6. Describa una estrategia para encontrar el punto medio de un segmento dibujado en una hoja de papel, sin medir.

2.2 Ángulos

Definición II. 6 [Ángulo]: Un *ángulo* queda determinado por 2 rayos que tienen un origen común (llamado *vértice* del ángulo). Si los rayos son $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, entonces el ángulo lo denotaremos por $\measuredangle ABC$.

Exactamente, qué entendemos por ángulo, depende del punto de vista que se adopte. En general, en este libro adoptaremos el enfoque de que "un ángulo es la unión de los conjuntos de puntos que forman 2 rayos con un mismo origen".

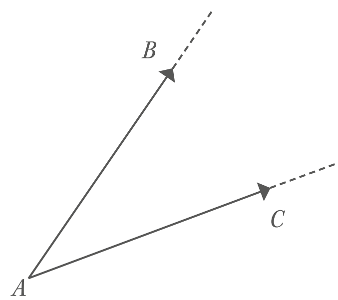


Figura II.28: el ángulo $\measuredangle BAC$ como la unión de los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Sin embargo, existen, por lo menos, otras 2 posibilidades:

- Entender la noción de ángulo como la "abertura" que se forma entre 2 rayos con un origen común (algunos prefieren llamar a esta abertura *región angular*).

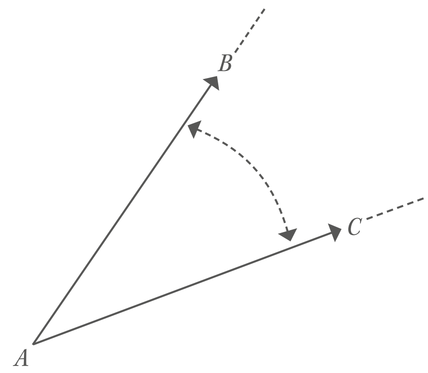


Figura II.29: ángulo visto como abertura.

- Entender ángulo como el giro (rotación en torno a un punto fijo) que se produce cuando uno de los rayos cambia de orientación, y pasa de estar orientado en la dirección de uno de los rayos a estarlo en la dirección del otro.

En los primeros años de escolaridad, la atención se enfoca en el atributo principal de los ángulos, es decir, en la medida de su abertura. Es importante que los alumnos participen en actividades que les permitan, a ellos mismos, realizar giros o hacer rotar objetos. Un error que se puede observar en el aprendizaje de los ángulos se relaciona con la medida de los ángulos, como las 2 líneas que representan los lados del ángulo en el caso de la figura de la derecha son más largas que las de la izquierda, algunos niños señalan que el primer ángulo mide menos que el segundo, reflejando una comprensión no acabada del concepto de ángulo.

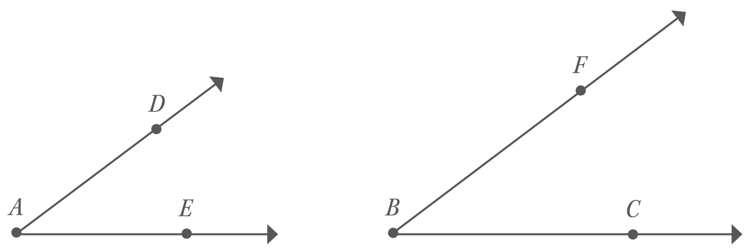


Figura II.30.

Si 2 segmentos tienen uno de sus extremos en común, digamos V, podemos considerar los rayos que los contienen y decimos que el ángulo que forman los segmentos es el ángulo de los rayos que contienen a dichos segmentos, que tiene como origen a V. Lo mismo ocurre entre un segmento y un rayo.

2.2.1 Medida de ángulos

A cada ángulo se le asocia un número, el que llamamos *medida*. Informalmente, la medida de un ángulo nos dice "cuán amplio es su interior" denotaremos por $m(\measuredangle ABC)$ o $m\measuredangle ABC$ la medida del ángulo $\measuredangle ABC$.

Dados 2 puntos distintos, podemos considerar la recta que los contiene. Esa recta divide al plano en 2 semiplanos. Consideremos un ángulo $\measuredangle ABC$ y el semiplano determinado por *A* y por *B*, y que contiene a *C*.

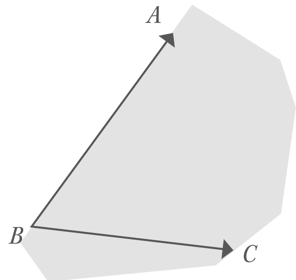


Figura II.31.

Ahora consideremos el semiplano determinado por *B* y *C* que contiene a *A*.

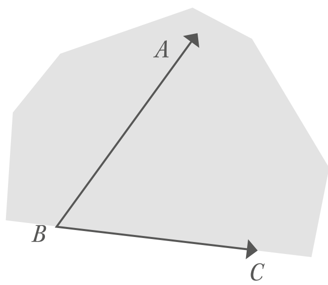


Figura II.32.

Entonces, el interior del ángulo $\measuredangle ABC$ corresponde a la intersección de esos 2 semiplanos.

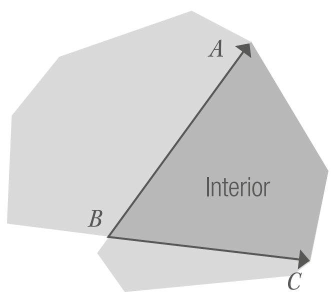


Figura II.33.

Una propiedad importante de la medida de los ángulos es que es invariante bajo movimientos rígidos: si un ángulo puede ser llevado a otro, mediante un giro, un desplazamiento o una reflexión, entonces deben tener la misma medida. Cuando 2 ángulos tienen la misma medida, decimos que son *congruentes*.

Un tipo importante de ángulo se forma cuando 2 rectas se cortan formando 4 ángulos congruentes entre sí; en este caso, se dice que los ángulos son *rectos* (y, de paso, se dice que las rectas son *perpendiculares*). Para denotar un ángulo recto, lo marcamos formando un cuadrado en el vértice del ángulo

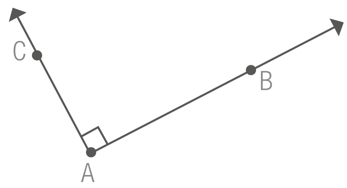


Figura II.34: un ángulo recto.

Tradicionalmente, se le asigna al ángulo recto una medida de 90°, pero este número corresponde a una convención: la unidad de medida para los ángulos (igual que para cualquier magnitud) es esencialmente arbitraria, como lo evidencia el hecho de que existen otros sistemas de medición de ángulos.

En lo que sigue, adoptaremos como unidad de medida el *grado* (que es denotado por °). Escogemos esta unidad de modo que la medida de un ángulo recto sea 90 grados (90°), y las medidas de otros ángulos quedan proporcionalmente determinadas en base a esto.

2.2.2 Medición de Ángulos

¿Cómo se miden los ángulos en la práctica? Para este propósito usamos el *transportador*, instrumento graduado en el cual está marcado un punto (el *centro* del transportador). El transportador de la figura tiene dos graduaciones, una en cada sentido. La marca "90" es común a ambas graduaciones.

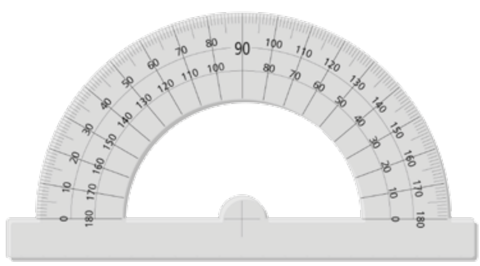


Figura II.35: Transportador.

Para medir un ángulo, se hace coincidir el centro del transportador con el vértice del ángulo a medir y se alinea la marca "0" con uno de los lados del ángulo. De esta forma, la medida del ángulo está dada por la marca correspondiente al otro lado de este.

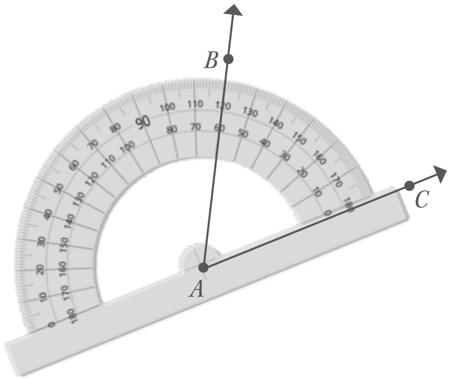


Figura II.36.

Una estrategia alternativa consiste en considerar que, una vez que se ha hecho coincidir el vértice del ángulo con el centro del transportador, la medida del ángulo corresponde a la diferencia de las marcas correspondientes a los rayos que forman el ángulo. Así, por ejemplo, en la figura podemos medir el ángulo considerando las marcas de la graduación interior; en este caso, diríamos que la medida es **160º – 100º = 60º.** También podríamos usar la graduación exterior; en este caso, diríamos que la medida es **80º – 20º = 60º.**

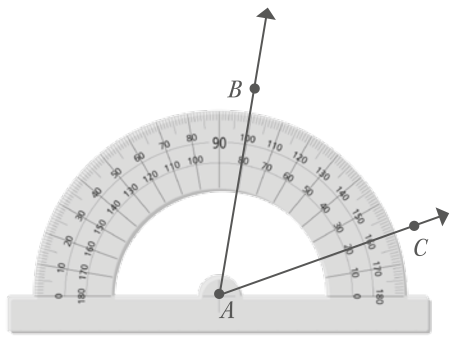


Figura II.37.

Una propiedad importante de las medidas de los ángulos es la *aditividad*: dados 3 rayos con un origen común, digamos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, si $\overrightarrow{OB}$ está en el interior de $\measuredangle AOC$, entonces

$$m\measuredangle AOB + m\measuredangle BOC = m\measuredangle AOC.$$

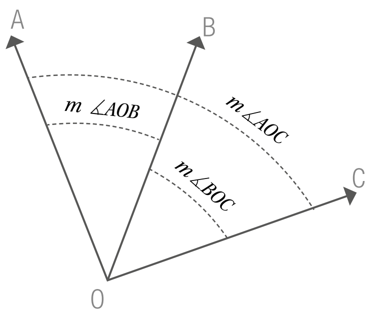


Figura II.38: aditividad de ángulos.

Notemos que nuestra definición de ángulo, la unión de 2 rayos de origen común, permite definir el interior del ángulo, ya que la medida del ángulo da cuenta de cuán amplio es su interior. Nuestra forma de definir interior y de medir ángulos solo nos permite considerar medidas de ángulos mayores que $0°$ y hasta $180°$. Es decir, dado un ángulo $\measuredangle ABC$, como el de la **Figura II.39**, la medida de ese ángulo es β y no α.

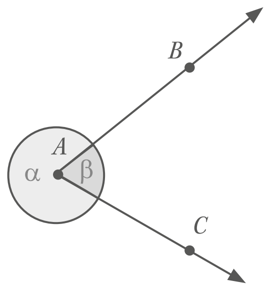


Figura II.39.

2.2.3 Clasificación de los ángulos

Un ángulo cuyo interior es un semiplano se llama ángulo *extendido* y mide el doble de un ángulo recto, es decir, $180°$.

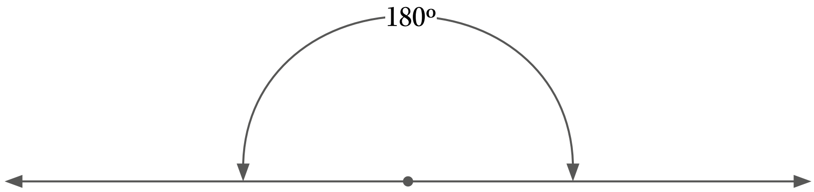


Figura II.40: ángulo extendido.

Un ángulo cuya medida es menor que la de un ángulo recto es llamado *agudo*.

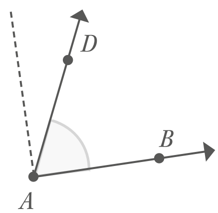


Figura II.41: el ángulo $\measuredangle BAD$ es agudo.

Un ángulo que mide más que un ángulo recto, pero menos que uno extendido es llamado *obtuso*.

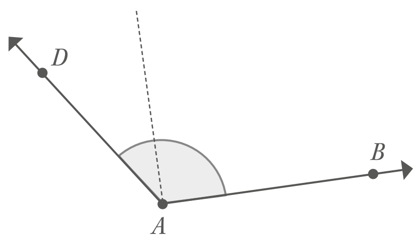


Figura II.42: el ángulo $\measuredangle BAD$ es obtuso.

Consideremos una recta L con un punto V en ella. Si de V nace un rayo $\overrightarrow{VR}$ que solo tiene a V en común con L, entonces se forman 2 ángulos entre $\overrightarrow{VR}$ y L, digamos α y β, como lo muestra la **Figura II.43**.

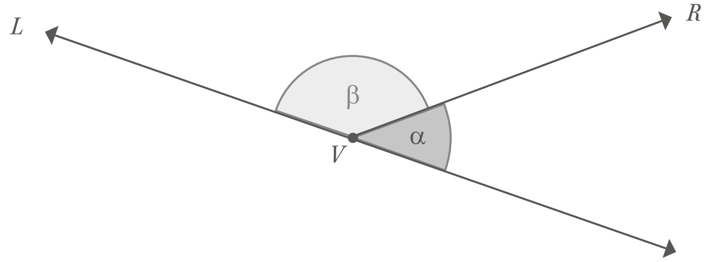


Figura II.43: Ángulos adyacentes.

Si 2 ángulos son tales que tomados en conjunto forman un ángulo extendido (como α y β), son llamados ángulos *adyacentes*.

Si α y β son ángulos adyacentes, entonces la medida de α más la medida de β es 180°. En general, 2 ángulos se dicen *suplementarios* si sus medidas suman 180°. En nuestro caso, α y β son suplementarios, α es el suplemento de β y viceversa. Es importante notar que dos ángulos pueden ser suplementarios y no adyacentes.

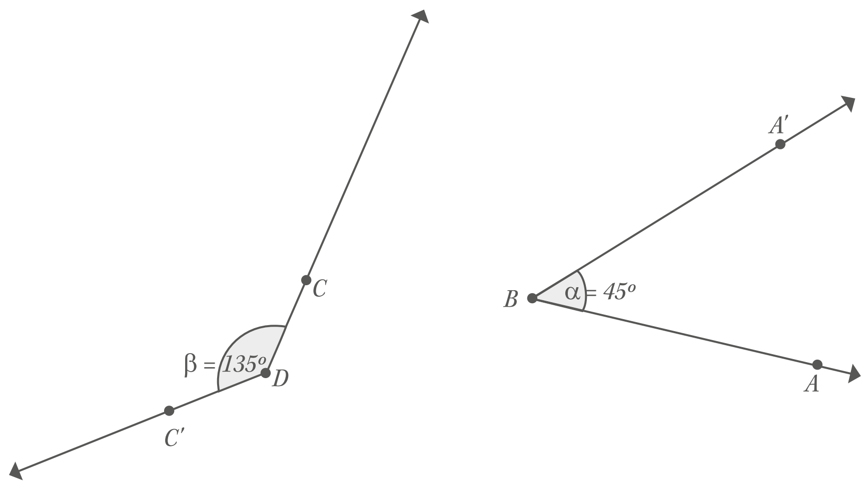
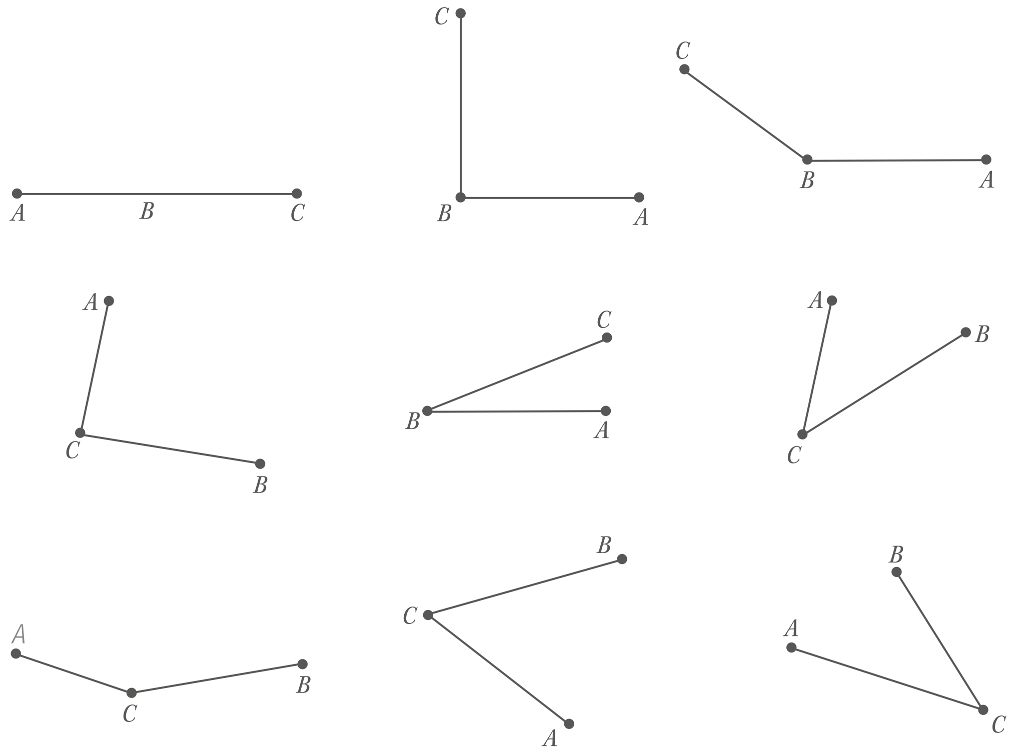


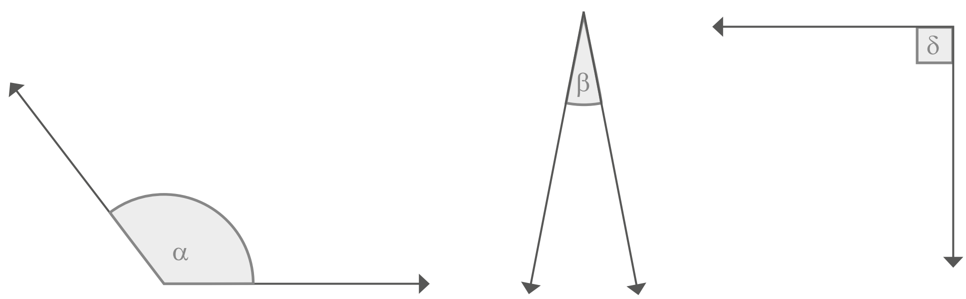
Figura II.44: ángulos suplementarios.

Ejercicios

1. Mida con el transportador e indique el valor de cada ángulo



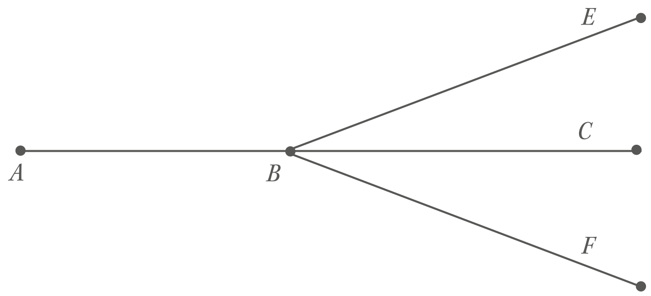
2. Mida con el transportador, escriba las medida de cada ángulo y clasifíquelos (agudo, obtuso, recto o extendido).



3. Con la ayuda del transportador y la regla, construya ángulos con las siguientes medidas.

a. 98º
b. 15º
c. 141º
d. 35º
e. 45º
f. 120º
g. 175º

4. Considere la siguiente figura, donde A, B y C son colineales. Marque en ella la medida del ángulo $\measuredangle ABE$ como α, la medida del ángulo $\measuredangle EBC$ como β, la medida del ángulo $\measuredangle CBF$ como γ, la medida del ángulo $\measuredangle EBF$ como δ y el ángulo $\measuredangle ABF$ como ε. Decida si las siguientes frases son ciertas o falsas:



a. Si $\beta = \gamma$, entonces $\alpha = \varepsilon$.

b. $\beta + \gamma = \delta$

c. $\alpha + \beta = \delta + \varepsilon$

d. $\alpha + \beta = 180^{o}$

2.2.4 Perpendicularidad

Recuerde que dijimos que dos rectas son *perpendiculares* si se intersecan formando 4 ángulos con igual medida (congruentes), y que dichos ángulos son rectos. Otra forma –equivalente a la anterior– de definir perpendicularidad es que 2 rectas son perpendiculares si se cortan formando, del mismo lado de una de ellas, 2 ángulos de igual medida.

Si se tienen dos rayos, dos segmentos, un segmento y un rayo, una recta y un segmento o cualquier otra combinación similar, decimos que ellos son perpendiculares si las rectas que los contienen lo son.

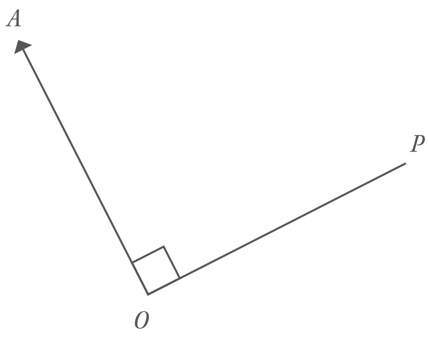


Figura II.45: el segmentos $\overline{OP}$ es perpendicular al rayo $\overrightarrow{OA}$.

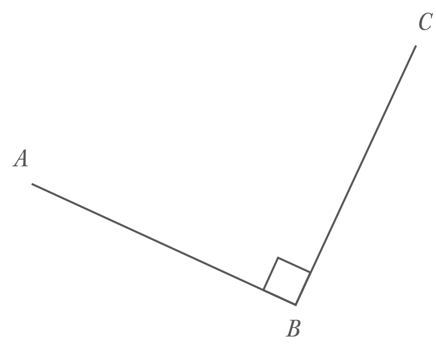


Figura II.46: el segmentos $\overline{AB}$ es perpendicular al segmento $\overline{BC}$.

Una experiencia beneficiosa para el aprendizaje de ángulos rectos puede realizarse mediante el plegado de papel. Para ello, se toma un papel de cualquier tamaño y forma, y se hace un doblez. La marca del doblez puede ser interpretada como un segmento, luego se vuelve a doblar haciendo coincidir los extremos del segmento (el doblez anterior). Con esto, el ángulo extendido se divide en 2 partes iguales. Al desplegar el papel, se obtienen 2 segmentos perpendiculares.

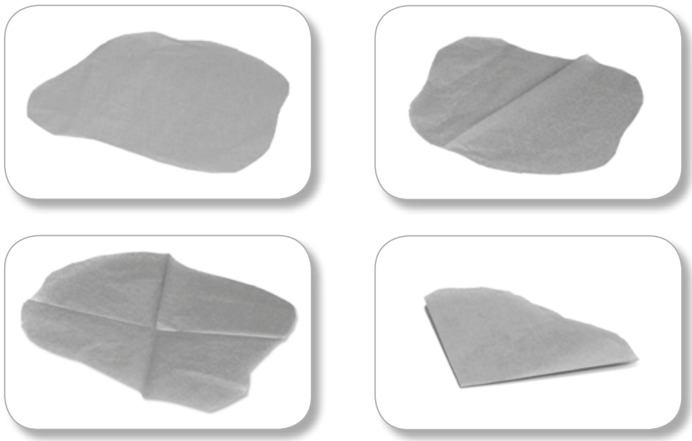


Figura II.47.

Además, se puede utilizar este ángulo recto construido artesanalmente para buscar ángulos rectos en objetos del entorno cercano, a modo de escuadra, como se muestra a continuación.

Figura II.48.

2.2.5 Paralelismo

Definición II. 7	[Paralelismo]: Decimos que 2 rectas en el plano son *paralelas* (lo que se denota usando el símbolo $\|$) si no se intersecan, es decir, si no tienen ningún punto en común.

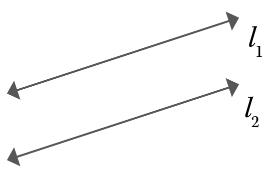


Figura II.49: las rectas l_1 y l_2 son paralelas ($l_1 \| l_2$).

Dos rayos, 2 segmentos, un segmento y un rayo, u otra combinación similar, se dicen paralelos si las rectas que los contienen lo son.

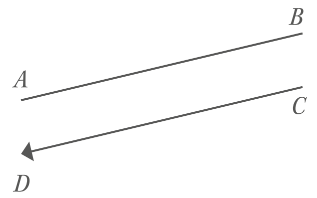


Figura II.50: el segmento $\overline{AB}$ y el rayo $\overrightarrow{CD}$ son paralelos.

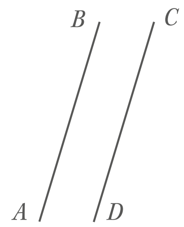


Figura II.51: los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos.

Notemos que 2 rectas son paralelas si no se intersecan; sin embargo, como las rectas se extienden infinitamente en ambos sentidos, el tamaño de la hoja de papel en donde se representan no puede capturar esa infinitud, por lo tanto, puede que 2 rectas no sean paralelas, pero no se intersequen en la vista de la hoja de papel. Por ejemplo, las rectas de la imagen de abajo no son paralelas.

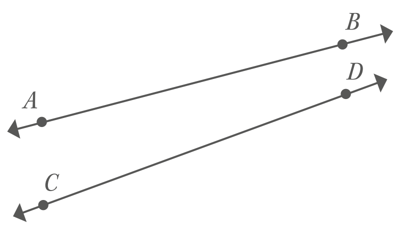


Figura II.52: 2 rectas no son paralelas, pero no se ve el punto de intersección.

Otra forma de definir rectas paralelas en el plano es la siguiente: consideremos 2 rectas *L* y *L'* en el plano. Consideremos, además, una recta *M* no coincidente con las anteriores y que interseca a *L* y a *L'*. Si los ángulos agudos (o rectos) que forman *M* con *L* y *M* con *L'* miden lo mismo, entonces diremos que las rectas *L* y *L'* son paralelas. En el dibujo siguiente, *L* es paralela a *L'* si y solo si $\alpha = \alpha'$.

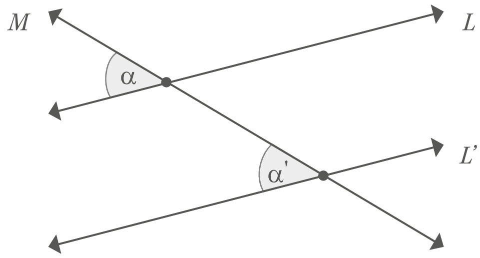


Figura II.53.

Que las 2 definiciones son equivalentes lo demostraremos en la segunda parte de este libro. Entonces, con esta definición podemos afirmar que las rectas de la **Figura II.54**, no son paralelas, pues α no mide lo mismo que α'.

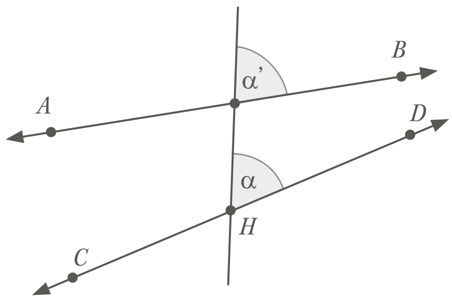


Figura II.54

Definición II. 8 [Simetral] La *simetral* (también llamada la *mediatriz* o el *bisector perpendicular*) de un segmento es la recta perpendicular a este que pasa por su punto medio.

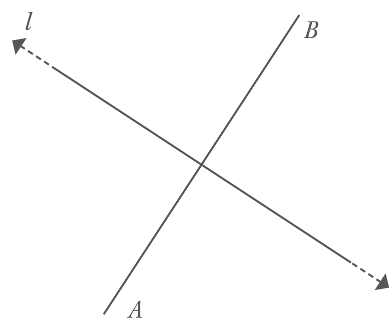


Figura II.55: la recta l es la simetral del segmento $\overline{AB}$.

Se puede demostrar que los puntos de la simetral de un trazo son precisamente aquellos que equidistan (están a la misma distancia) de los extremos del trazo. Esto lo probaremos en la segunda parte del libro.

Definición II. 9 [Bisectriz de un ángulo] Dado un ángulo cualquiera, su *bisectriz* es un rayo contenido en su interior que determina 2 ángulos, cada uno de los cuales mide la mitad del ángulo original.

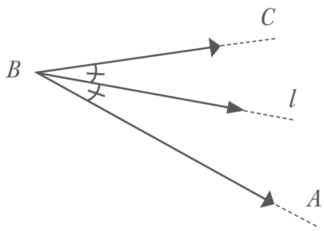


Figura II.56: el rayo l es bisectriz del $\angle ABC$.

Definición II. 10 **[Ángulos opuestos por el vértice]** Consideremos 2 rectas L y L' que se intersecan en el punto V. Marquemos 2 puntos P y Q en L y también P' y Q' en L', como muestra la **Figura II.57**. Los ángulos $\measuredangle PVP'$ y $\measuredangle QVQ'$ se llaman *opuestos por el vértice*.

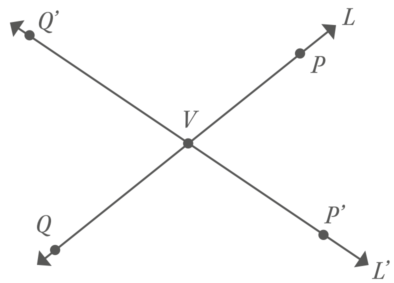


Figura II.57.

Denotemos por α la medida del ángulo $\measuredangle PVP'$ y por β la medida del ángulo $\measuredangle P'VQ$. Como estos dos ángulos son adyacentes, se tiene que $\alpha + \beta = 180^{\circ}$.

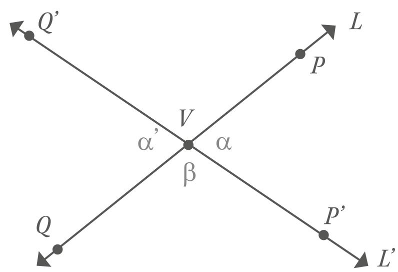


Figura II.58.

Si denotamos por α' la medida del ángulo $\measuredangle QVQ'$ y como este ángulo es adyacente a $\measuredangle P'VQ$, entonces también se cumple que $\alpha' + \beta = 180^{\circ}$. Por lo tanto:

$$\alpha' + \beta = 180^{\circ} \qquad \text{y} \qquad \alpha' + \beta = 180^{\circ}$$

De lo cual se desprende que $\alpha = \alpha'$.

Del mismo modo, si denotamos por β' la medida del ángulo $\measuredangle PVQ'$ se tiene que $\beta = \beta'$. Entonces, por lo tanto, nuestro argumento anterior asegura que 2 ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida. Dejémoslo escrito como una propiedad.

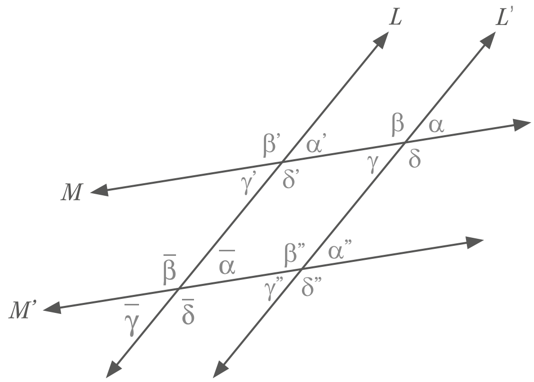
Propiedad II. 1 Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Ejercicios de la sección

1. Consideremos 2 rectas paralelas L y L', y M es una recta perpendicular a L. ¿Es cierto que M es perpendicular a L? Argumente.

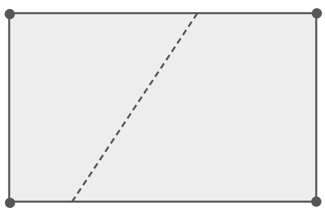
2. Consideremos 2 pares de rectas paralelas $L \| L'$ y $M \| M'$ y además que $L \perp M$ ¿Es cierto que $L' \perp M'$?

3. Consideremos 2 pares de rectas paralelas $L \| L'$ y $M \| M'$, y además, L no es paralela a M, como lo muestra la figura de abajo.

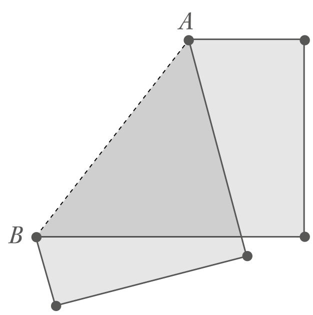


   a. Muestre que $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \alpha'' + \beta'' = \alpha + \beta = 180º$
   b. Muestre que $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \bar{\alpha}$
   c. Muestre que $\beta = \beta' = \beta'' = \bar{\beta}$

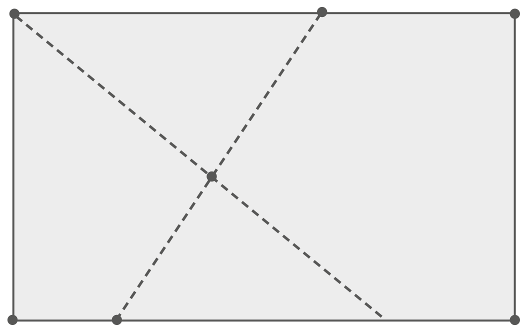
4. Considere una hoja de papel y haga un doblez en ella.



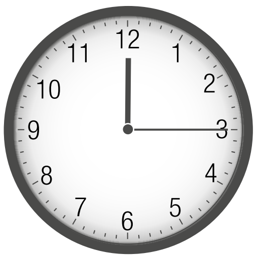
   Marque con A y B los puntos del doblez que están en el borde de la hoja:



Ahora hagamos un nuevo doblez, haciendo coincidir los puntos A y B. En el punto medio de $\overline{AB}$ quedarán marcados cuatro ángulos una vez que se despliegue la hoja. Dé un argumento para justificar que esos ángulos son todos rectos.



5. El minutero de un reloj da una vuelta completa en una hora, es decir, da media vuelta en media, entonces en 15 minutos, ¿qué ángulo barrió el minutero? Es decir, si el minutero está en el 12 y luego está en el 3, ¿que ángulo forman esas dos posiciones?



6. El horario avanza una vuelta completa en 12 horas, es decir da media vuelta en 6 horas. ¿Qué ángulo barre el horario en una hora?

7. Si el reloj marca 03:00 entonces el horario y el minutero forman un ángulo recto. ¿A las tres y media el minutero y el horario forman un ángulo recto? Si no es recto, ¿es menor o mayor que un ángulo recto?

3. Figuras planas

Uno de los principales objetos de estudio de la geometría son las figuras planas. Estas son conjuntos de puntos formados (o delimitados) por líneas. En este apartado, estudiaremos los triángulos, cuadriláteros, y polígonos en general; y como ejemplo de figura curva veremos la circunferencia.

3.1 Polígonos

El concepto de polígono es uno del cual manejamos, a nivel informal, una idea bastante precisa. Producto de nuestra experiencia y educación previa, tenemos una imagen mental bastante consensuada –una convención no escrita– de qué es y qué no es un polígono. En este apartado, intentaremos poner por escrito, en la forma de una definición, los términos de esa convención.

La palabra "polígono" es comúnmente usada de 2 formas para definir una clase de figuras planas. Por una parte, se entiende por tal a una porción de plano delimitada por segmentos de recta, pero también se usa definir como polígono el borde de dicha figura. En este libro, la usaremos en el segundo sentido dado (o sea, el borde de una porción de plano que está delimitada por segmentos de recta). Para referirnos a dicha porción de plano, usaremos la frase "región poligonal".

En cualquiera de los 2 casos, es necesario agregar ciertas condiciones adicionales para que la definición sea coherente con la idea de polígono que ya tenemos en nuestra mente.

Así, por ejemplo, consideraremos que las siguientes 5 figuras son polígonos:

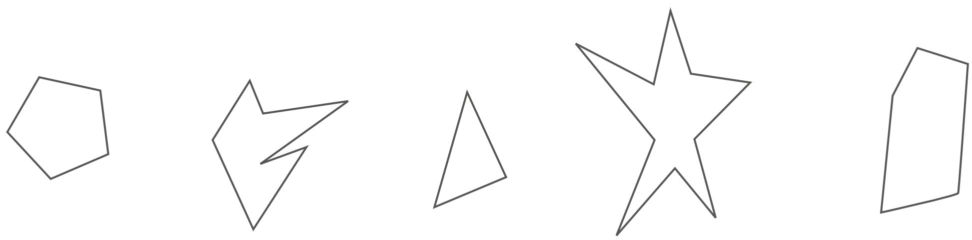


Figura II.59.

Y consideraremos que las siguientes 4 no son polígonos:

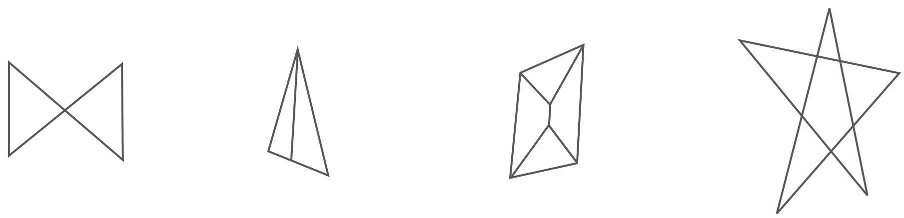


Figura II.60.

En la figura siguiente, se ven 2 polígonos:

Figura II.61.

¿Es razonable considerar la figura anterior como *un* solo polígono? Acordaremos que no; una propiedad importante de la noción comúnmente aceptada de polígono es que sea posible dibujarlo sin levantar el lápiz.

Para pensar

Suponga que deseamos definir polígono como una porción de plano delimitada por segmentos de recta. ¿Qué condiciones adicionales cree usted que es necesario exigir?

Para responder lo anterior, piense en las siguientes 2 figuras. ¿Es razonable aceptarlas como polígonos?

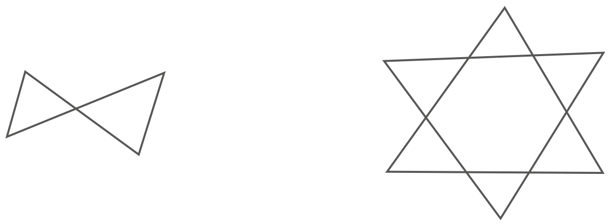


Figura II.62.

Suponga que queremos definir polígono como una unión de segmentos, y que imponemos las siguientes condiciones:

- 2 segmentos solo pueden encontrarse en sus extremos.
- En cada extremo de los segmentos, deben encontrarse exactamente 2 de ellos.
- Cada segmento se encuentra con exactamente otros 2.

¿Corresponden estas condiciones a nuestra idea preformada de lo que es un polígono? La verdad es que le falta un poco. La **Figura II.61** muestra dos polígonos y no un polígono, sin embargo, con las 3 condiciones de arriba lo podemos considerar como un solo polígono. Para evitar este problema, agregaremos una condición que diga que un polígono se debe dibujar en forma continua, sin levantar el lápiz de la hoja.

Por lo tanto, en este libro adoptaremos la postura de que un polígono es la unión de algunos segmentos, con las 3 condiciones enunciadas anteriormente, más:

- Una que evite que consideremos una unión de 2 polígonos como si fuera uno solo (por ejemplo, exigir que sea posible recorrer los segmentos pasando por todos ellos sin levantar el lápiz), y
- Otra que obligue a que la cantidad de segmentos considerados en la unión sea finita.

A continuación, queremos definir conceptos como *vértices* y *lados* de un polígono. Una primera idea es que, si un polígono es la unión de ciertos segmentos, entonces dichos segmentos son sus lados y los extremos de ellos son sus vértices.

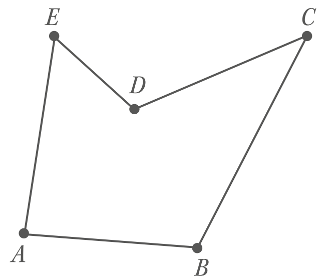


Figura II.63: en este polígono, los vértices son A, B, C, D y E; y sus lados son los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{ED}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{BA}$.

Sin embargo, se presenta el siguiente problema: el polígono de la **Figura II.64** está formado por la unión de 3 segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, por lo que diríamos que esos son sus lados y que sus vértices son A, B y C.

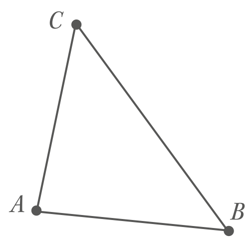


Figura II.64.

¿Qué pasa si llamamos D a algún punto del segmento $\overline{CA}$ que no sea uno de sus extremos?

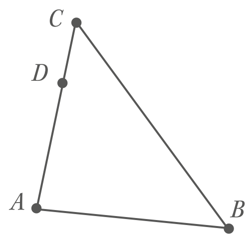


Figura II.65.

Podemos ahora decir que los lados del polígono son $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{BA}$, y que sus vértices son A, B, C y D. ¡Pero entonces el polígono tiene 3 lados y también 4 (y lo mismo pasa con los vértices)!

Claramente, esta ambigüedad no es deseable (en algún momento quisiéramos hablar de "los vértices" o "los lados" de un polígono dado), por lo que nuestra definición de vértices y lados requiere una precisión.

La forma más simple de hacer esto es no considerar como lados a 2 segmentos si ellos se unen formando un ángulo extendido y no considerar como vértices a los extremos de los segmentos donde esto ocurre.

Así, dado un polígono indicado como unión de ciertos segmentos dados, llamamos vértices a los puntos donde dichos segmentos se *unen en ángulos no extendidos*, y llamamos lados a los segmentos que unen 2 vértices.

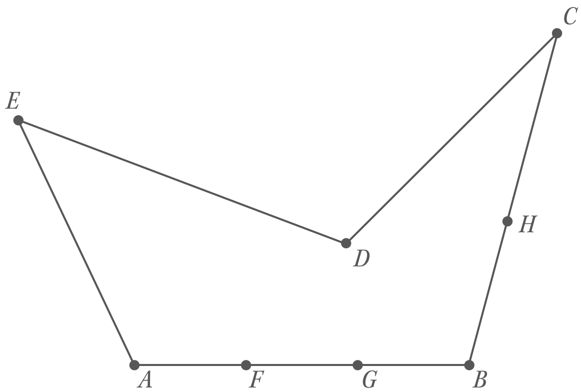


Figura II.66.

Así, por ejemplo, en el polígono de la **Figura II.66** los vértices son A, B, C, D y E (F, G y H no califican, ya que en ellos se forman ángulos extendidos), y los lados son $\overline{AE}$, $\overline{ED}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$ y $\overline{BA}$.

En resumen

Un *polígono* es una figura plana que consiste en la unión de una cantidad finita de segmentos que satisface las siguientes condiciones:

- 2 segmentos solo pueden tener un punto en común y es uno de sus extremos.
- En cada extremo de los segmentos, deben encontrarse exactamente 2 de ellos.
- Cada segmento se encuentra con exactamente otros 2.
- Es posible dibujar todos los segmentos sin levantar el lápiz.

Además, cada uno de los puntos en que se encuentran dos de los segmentos del polígono, sin que formen un ángulo extendido, es llamado *vértice* del polígono.

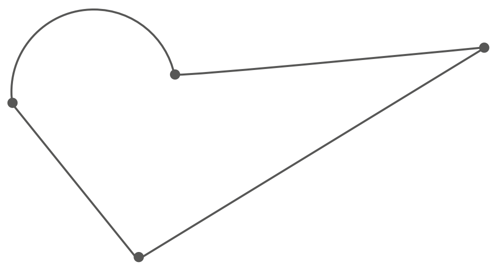
Los segmentos del polígono que tienen por extremos a 2 vértices son los *lados* del polígono.

Ejercicios

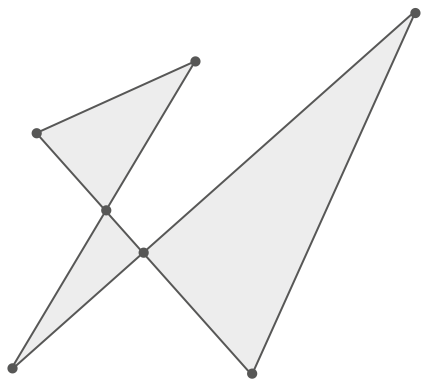
1. Busque definiciones de polígono en al menos 3 textos escolares distintos y analice si son equivalentes a la presentada en este libro. En el caso de que no lo sean muestre un ejemplo de una figura que para los textos es un polígono, pero no para nosotros (o viceversa).

2. Según nuestra definición de polígono, ¿Cuál de las siguientes figuras es un polígono? En el caso de que una figura no sea un polígono, describa cuál de las condiciones de un polígono no se cumple.

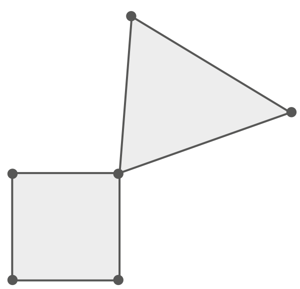
a.



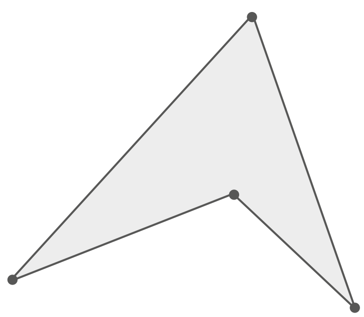
b.



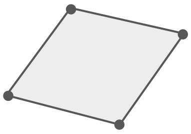
c.

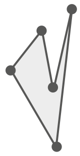


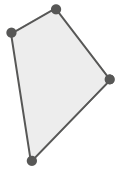
d.

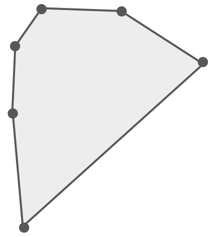


3. ¿En cuál o cuáles de los siguientes casos la figura no corresponde a un polígono convexo?

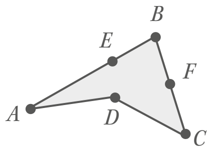
a. 

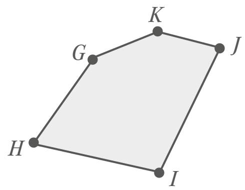
b. 

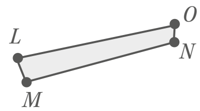
c. 

d. 

4. En cada caso determine los segmentos y los vértices de los polígonos.

a. 

b. 

c. 

3.2 Clasificación de los polígonos

Los polígonos son clasificados de acuerdo a cuántos lados tienen. Los más simples (tres lados) son llamados *triángulos*; los de cuatro lados *cuadriláteros*; los de 5, 6, 7 y 8 lados son llamados, respectivamente, *pentágonos*, *hexágonos*, *heptágonos* y *octógonos*.

Los ángulos que forman los lados del polígono (considerando sus interiores hacia la región poligonal que este encierra) son llamados los *ángulos interiores* del polígono.

3.2.1 Clasificación de los triángulos

Los triángulos, según las características de sus lados, se clasifican en *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*.

- Un triángulo es *escaleno* si no tiene pares de lados que midan lo mismo.

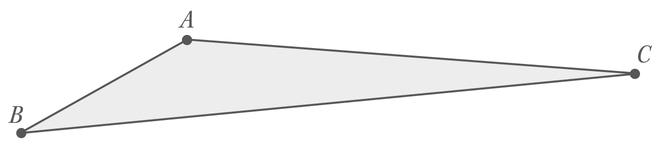


Figura II.67.

- Un triángulo es *isósceles* si tiene al menos un par de lados que miden lo mismo.

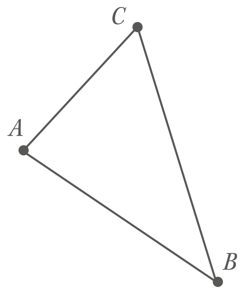


Figura II.68.

- Un triángulo es *equilátero* si todos sus lados miden lo mismo.

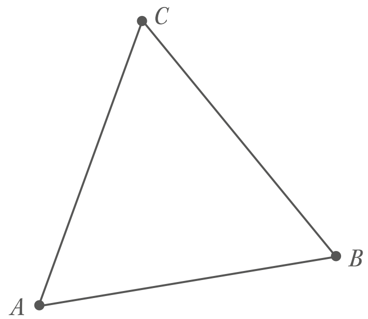


Figura II.69.

Los triángulos, según la medida sus ángulos, se clasifican en *acutángulos*, *rectángulos* y *obtusángulos*.

- Un triángulo es *acutángulo* si tiene todos sus ángulos agudos.

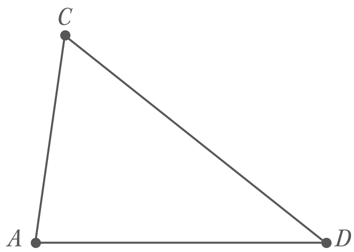


Figura II.70.

- Un triángulo es *rectángulo* si tiene un ángulo recto.

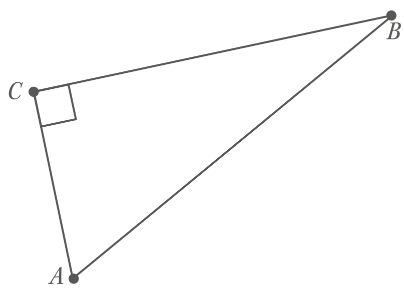


Figura II.71.

- Un triángulo es *obtusángulo* si tiene un ángulo obtuso.

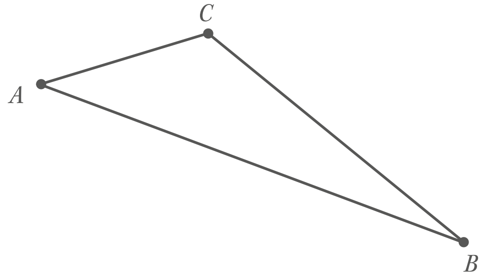


Figura II.72.

Es importante notar que nuestra definición de triángulo isósceles es "si tiene al menos un par de lados que miden lo mismo", y la de un triángulo equilátero es "si todos sus lados miden lo mismo"; por lo tanto, según nuestras definiciones, todo triángulo equilátero es isósceles. Es decir, toda propiedad que cumplan los triángulos isósceles también la cumplirán los equiláteros.

Consideremos un triángulo ΔABC cualquiera y denotemos por α, β y γ las medidas de los ángulos interiores del triángulo, como muestra la **Figura II.73**.

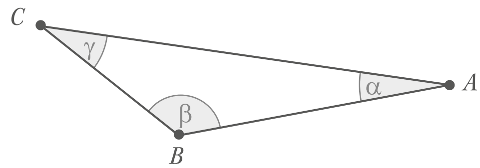


Figura II.73.

Ahora tracemos la recta L paralela a $\overline{BC}$ que pase por A, prolonguemos los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y marquemos los puntos P y Q en esas prolongaciones. También prolongaremos el segmento $\overline{BC}$ solo para tener una imagen completa de la situación.

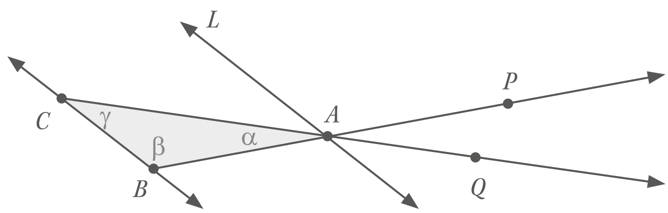


Figura II.74.

Notamos que el ángulo $\measuredangle PAQ$ mide α, pues es opuesto por el vértice a $\measuredangle CAB$. Ahora bien, fijémonos solamente en la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y en la recta L paralela a ella que pasa por A, y en el rayo de origen C que pasa por A. Además marquemos un punto R en L.

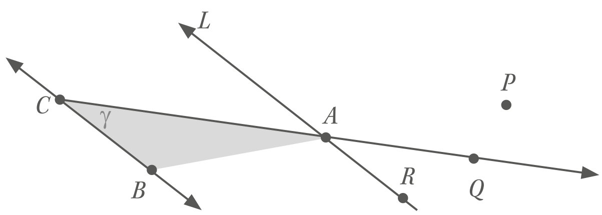


Figura II.75.

Como $\overleftrightarrow{CB}$ y L son paralelas, entonces los ángulos $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle QAR$ miden lo mismo, es decir, el ángulo $\measuredangle QAR$ mide γ.

Del mismo modo, ahora fijémonos solamente en la recta $\overleftrightarrow{BC}$, en la recta L paralela a ella que pasa por A y en el rayo de origen B que pasa por A. Además, marquemos un punto S en L.

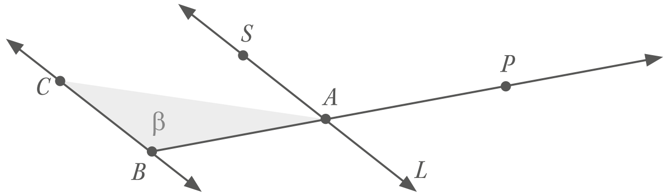


Figura II.76.

Como $\overleftrightarrow{CB}$ y L son paralelas, entonces los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle PAS$ miden lo mismo, es decir, el ángulo $\measuredangle PAS$ mide β. De este modo, viendo la situación completa, se tiene la siguiente figura:

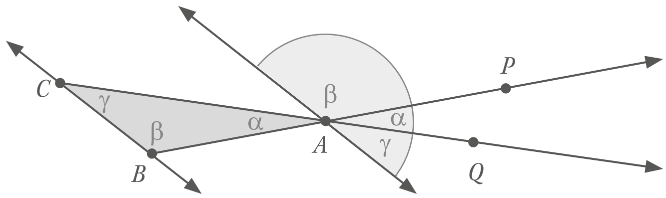


Figura II.77.

Por lo tanto, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Lo anotaremos como una propiedad.

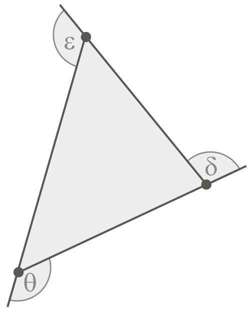
Propiedad II. 2.	En cualquier triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 180°.

Arriba, hemos probado que "la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°". Una demostración es un argumento, que se hace desde resultados conocidos y aceptados, mediante pasos lógicos, hasta llegar al nuevo resultado que queremos probar. En nuestro caso usamos el resultado conocido y aceptado: "2 rectas L y L' son paralelas si y solo si al intersecar estas rectas por una tercera recta M, el ángulo agudo (o recto) que forma L y M mide lo mismo que el ángulo agudo (o recto) que forma L' con M". Sin embargo, este resultado que caracteriza a las paralelas mediante ángulos no lo hemos demostrado. En la segunda parte de este libro, haremos una demostración formal de ese resultado. El otro resultado que hemos supuesto conocido y aceptado es que los ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo.

En la demostración de la **Propiedad II.2**, usamos 2 técnicas que serán de mucha utilidad en este libro: Primero, *ver lo que no hay*, esto es construir un objeto que en la situación inicial no estaba. En nuestro caso, dibujamos la recta paralela a $\overline{CB}$ que pasa por A y prolongamos todos los lados del triángulo. Eso nos permitió "poner copias" de los ángulos interiores del triángulo, de tal manera de formar un ángulo extendido. A esta técnica se le llama *agregar objetos auxiliares*. Segundo: *no ver lo que hay*, esto es fijarse en algunos aspectos de la situación, pues el dibujo completo no permite ver los detalles. En nuestro caso, nos fijamos en un par de rectas paralelas y un lado del triángulo, y nos olvidamos del resto. En la práctica, conviene hacer un nuevo diagrama con menos elementos o borrar los objetos que interfieren en la visión local.

Ejercicios

1. Se define el ángulo exterior de un triángulo como el adyacente de un ángulo interior del triángulo. Demuestre que la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es 360°.



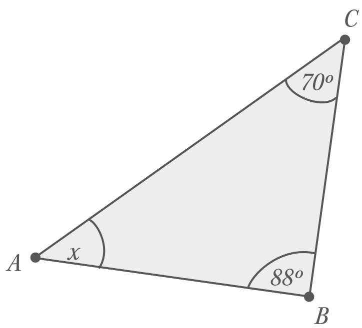
2. ¿Puede un triángulo tener 2 ángulos rectos? Explique.

3. ¿Puede un triángulo tener 2 ángulos obtusos? Explique.

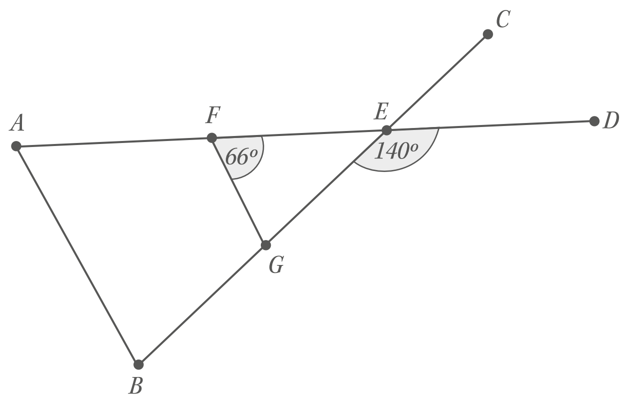
4. ¿Puede un triángulo ser obtusángulo y rectángulo a la vez? Explique.

5. ¿Puede un triángulo ser isósceles y rectángulo a la vez? Explique.

6. ¿Cuál es el valor de x?



7. Si $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{FG}$, entonces ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle EBA$?



3.2.2 Clasificación de los cuadriláteros

Dependiendo de si un cuadrilátero tiene o no pares de lados paralelos y cuántos, recibe diferentes nombres.

Definición II. 11	[**Paralelogramo**]: Si un cuadrilátero tiene 2 pares de lados paralelos, se llama *paralelogramo*.

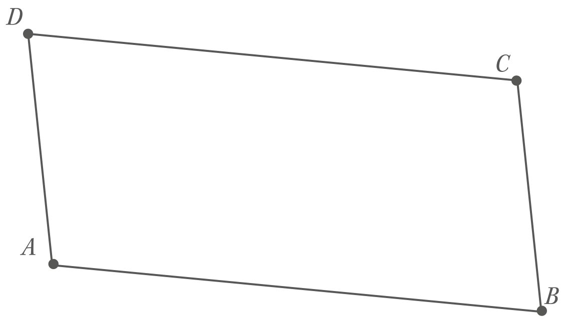


Figura II.78.

Uno en particular es el *rectángulo*: aquel paralelogramo que tiene todos sus ángulos interiores rectos. Un rectángulo particular es el *cuadrado*, aquel rectángulo que tiene todos sus lados de la misma medida.

Consideremos un paralelogramo cualquiera y prolonguemos sus lados a las rectas que los contienen.

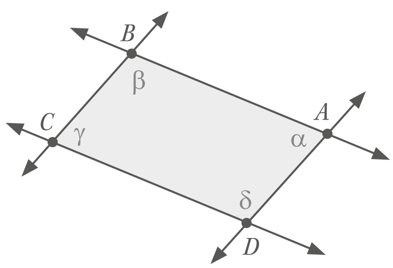


Figura II.79.

Ahora, concentrémonos en una parte de esa configuración.

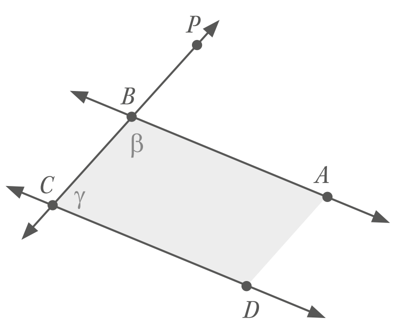


Figura II.80.

Como $\overleftrightarrow{CD}$ es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, se tiene que el ángulo $\measuredangle PBA$ mide γ, y como $\measuredangle PBA$ es adyacente a $\measuredangle CBA$ se tiene que $\beta + \gamma = 180$.

Concentrémonos ahora, en otra parte de esa configuración.

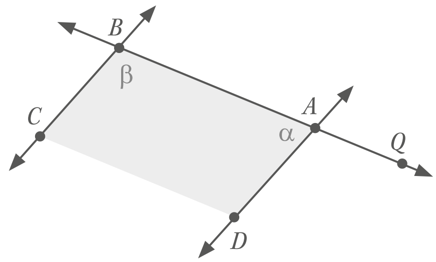


Figura II.81.

Como $\overleftrightarrow{CB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{AD}$, se tiene que el ángulo $\measuredangle DAQ$ mide β y como los ángulos $\measuredangle DAQ$ y $\measuredangle DAB$ son adyacentes, entonces se tiene que $\alpha + \beta = 180º$. Entonces podemos concluir que $\alpha = \gamma$. Del mismo modo, podemos probar que $\beta = \delta$ y que $\alpha + \delta = 180º$. En resumen, tenemos la siguiente propiedad:

Propiedad II. 3 En todo paralelogramo, los ángulos que tienen un lado en común son suplementarios y los ángulos que no tienen lados en común miden lo mismo.

Definición II. 12 [Trapecio]: Un cuadrilátero que tiene exactamente un par de lados paralelos se llama *trapecio*.

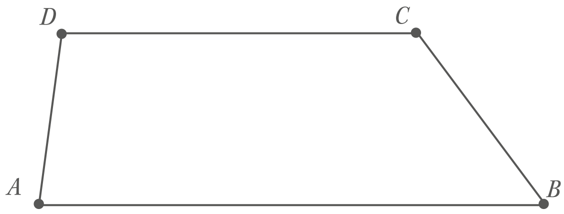


Figura II.82. Trapecio.

Definición II. 13 [Trapezoide]: Un cuadrilátero que no tiene pares de lados paralelos se llama *trapezoide*.

Notemos que el trapezoide es el cuadrilátero genérico; por ejemplo, si nos dicen "dibujen un cuadrilátero con total generalidad", debiéramos dibujar un trapezoide. Al igual que el triángulo escaleno es el triángulo genérico. Por lo tanto, no es necesario llamarlo de alguna forma en particular. Sin embargo, hemos optado por incluir este nombre, pues los textos en varios idiomas utilizan trapezoide para significar al cuadrilátero genérico y no quisiéramos que un profesor se sienta sorprendido cuando encuentre esta definición en la literatura.

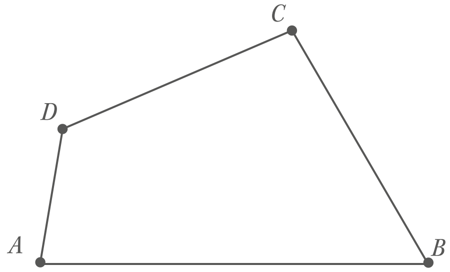


Figura II.83: trapezoide.

Notemos también que, si bien en general preferimos las definiciones inclusivas, la clasificación tradicional de los cuadriláteros –que es la que hemos dado– es completamente excluyente: las tres categorías en que dividimos los cuadriláteros son completamente disjuntas.

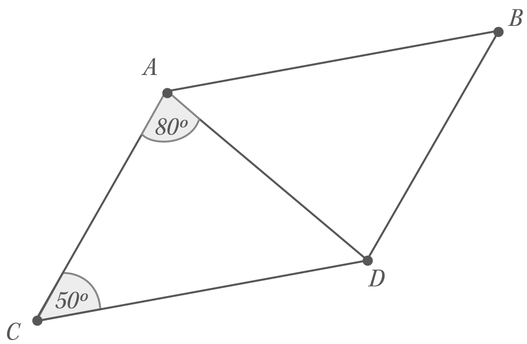
Ejercicios

1. Demuestre que si un paralelogramo tiene un ángulo interior recto, entonces es un rectángulo.

2. Demuestre que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es $360°$.

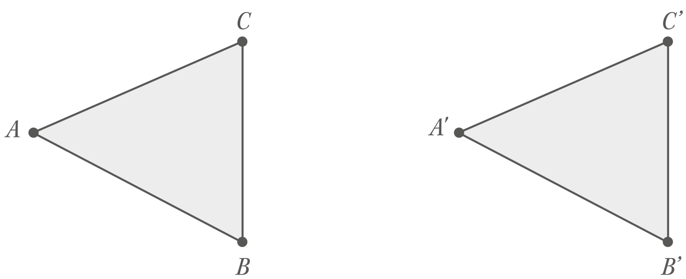
3. Si el ángulo suplementario a un ángulo interior de un paralelogramo se llama ángulo *exterior* del paralelogramo, demuestre que la suma de los ángulos exteriores de un paralelogramo es $360°$.

4. La figura *ABDC* es un paralelogramo, $\overline{AD}$ es diagonal. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle ADB$?

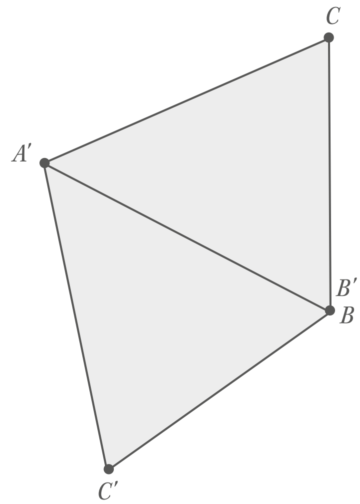


5. Si una diagonal de un rectángulo mide lo mismo que una diagonal de otro rectángulo, ¿entonces los rectángulos tienen las mismas medidas de sus lados?

6. Considere 2 copias del mismo triángulo.



Ahora haga coincidir el vérice A con A' y B con B', pero que no coincidan C con C'.



a. ¿Es cierto que el ángulo $\measuredangle CA'C'$ mide lo mismo que el ángulo $\measuredangle CBC'$?
b. ¿Es cierto que el ángulo $\measuredangle B'CA'$ mide lo mismo que el ángulo $\measuredangle B'C'A'$?
c. ¿Es cierto que $\overline{A'C}$ es paralelo a $\overline{B'C'}$?

3.3 Circunferencia y círculo

Definición II. 14 [Circunferencia]: Llamamos *circunferencia* a una figura plana formada por todos los puntos que equidistan (que están a la misma distancia) de un punto dado, llamado el *centro* de la circunferencia.

La distancia común a la que todos los puntos están del centro es llamada *el radio* de la circunferencia. También nos referimos a *un radio* de una circunferencia como todo segmento que une el centro de esta con uno de sus puntos.

Note la diferencia entre *el* radio y *un* radio de la circunferencia.

Definición II. 15 [Cuerda y Diámetro]: Una *cuerda* de una circunferencia es un segmento que une dos puntos cualesquiera de ella. Una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia es llamada *un diámetro* de ella. Todos los diámetros de una circunferencia miden lo mismo; la longitud común de todos ellos es llamada *el diámetro* de la circunferencia, y mide el doble del radio. Note cómo, al igual que con el término radio, diferenciamos entre *el diámetro* y *un* diámetro.

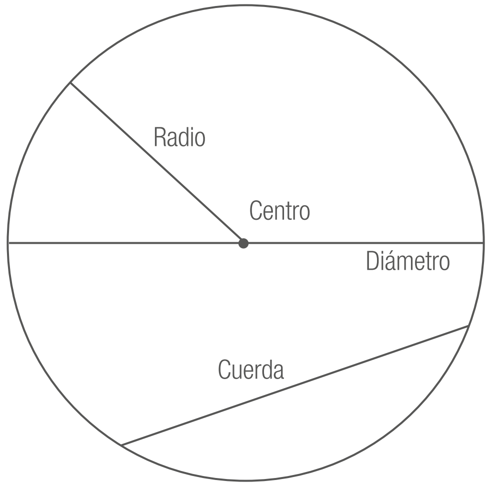


Figura II.84: una circunferencia y algunos de sus elementos.

La circunferencia separa el plano en dos partes; aquella donde está el centro es llamada *interior de la circunferencia*, y la otra es su *exterior*.

Definición II. 16 **[Círculo]:** La unión de una circunferencia con su interior es llamada *círculo*.

Uno se podría preguntar, ¿es la circunferencia un polígono? La respuesta es categóricamente no, ya que en la circunferencia es imposible identificar segmentos. Un error frecuente es decir que "una circunferencia es un polígono con un número infinito de lados", pero esto no resiste análisis, ya que implicaría un número infinito de segmentos... y en la circunferencia no hay ninguno (a menos que quisiéramos considerar los puntos como segmentos de largo 0, pero en este caso no sería cierto que "cada segmento interseca a exactamente otros 2".

Ejercicios

1. ¿Es el centro de la circunferencia un punto de la circunferencia?
2. Si una cuerda contiene a un radio, entonces ¿es cierto que la cuerda es un diámetro?
3. Dado un punto P en una circunferencia, ¿cuántas cuerdas pasan por P?
4. Dado un punto P en una circunferencia, ¿cuántos diámetros pasan por P?
5. Si O es el centro de una circunferencia de radio r y P es un punto del plano tal que $OP < r$, entonces ¿P está en el interior o en el exterior de la circunferencia?
6. Si una circunferencia de radio r y centro O interseca a una circunferencia de radio r' y centro O' en un solo punto. Muestre que $OO' \geq r + r'$.

3.4 Errores que pueden surgir en la representación de objetos geométricos

Muchos de los errores, dificultades u obstáculos en el aprendizaje de la geometría se relacionan con las representaciones poco habituales de figuras o elementos geométricos, ya que comúnmente los libros los presentan siempre de una misma manera, lo que hace que la representación mental que se forman los alumnos de dichos elementos y figuras sea sumamente restringida y acotada. Asimismo, estos errores reflejan la falta de comprensión conceptual y la falta de elaboración de relaciones entre los elementos. Algunos ejemplos son:

- **Paralelismo**: algunos estudiantes consideran que para que 2 segmentos sean paralelos, además de no cortarse, deben tener igual longitud, identificando los segmentos de la Figura A como paralelos, pero no las de la Figura B.

Figura A　　　　Figura B

Figura II.85.

- **Perpendicularidad**: cuando se solicita dibujar rectas perpendiculares, es posible obtener como respuesta una recta vertical (perpendicular al borde inferior de la página o de la pizarra) sola, sin relación a otra recta.

  También se presenta la dificultad para identificar pares de rectas perpendiculares cuando ellas no están formadas por una recta vertical y una horizontal, como en la siguiente figura.

Figura II.86.

- **Ángulos**: algunos estudiantes identifica como mayores los ángulos con segmentos más extensos. Esto se produce porque se asocia el ángulo al largo de los segmentos o al área entre los segmentos. Por ejemplo, en las figuras de abajo, el ángulo de la izquierda es identificado como mayor que el de la derecha.

Figura II.87.

- **Polígonos**: la recurrente representación de formas geométricas en una determinada posición canónica induce a que los estudiantes reconozcan el objeto solamente en aquella ubicación. Por ejemplo, es probable que los estudiantes identifiquen como triángulos solo a aquellos que tienen un vértice que apunta hacia arriba y un lado paralelo al borde inferior de la página. Es por esto, que podría ocurrir que niños no reconozcan a todos los polígonos de la **Figura II.88.** como triángulos.

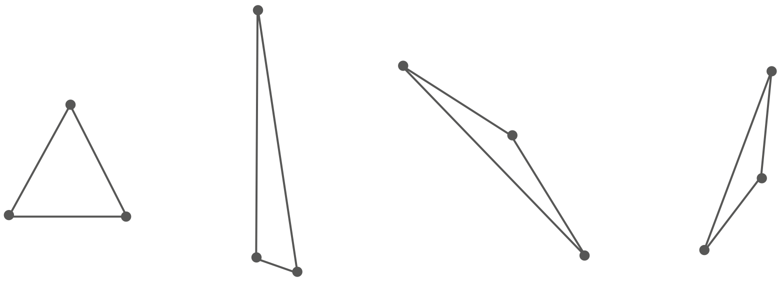


Figura II.88.

En el caso de los cuadriláteros, si la figura no es mostrada en su posición habitual, esto es, con sus lados paralelos a los bordes de la hoja, su reconocimiento no se vuelve una tarea fácil. Por ejemplo, si se muestra un cuadrado donde ninguno de sus lados es paralelo a los bordes de la página, los alumnos y alumnas dicen que no se trata de un cuadrado.

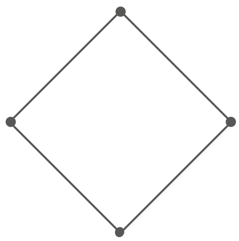
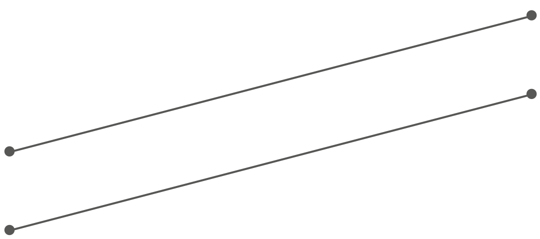


Figura II.89.

Ejercicios del capítulo

1. Un estudiante le dice que no se puede saber si los segmentos son paralelos, pues es probable que las rectas que los contienen se intersequen en un lugar que no alcanzamos a ver.



¿Qué argumentos daría al alumno para que pueda decidir si los segmentos son paralelos o no sin tener que extenderlos en su infinitud?

2. La profesora Domínguez define *rombo* como "un paralelogramo que tiene sus 4 lados congruentes", define *rectángulo* como "un paralelogramo que tiene todos sus ángulos interiores rectos" y define *cuadrado* como "un paralelogramo cuyos lados son congruentes y al menos uno de sus ángulos es recto". Según la profesora Domínguez, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

   I. Un cuadrado es un rombo.
   II. Un cuadrado es un rectángulo.
   III. Un rectángulo es un rombo.

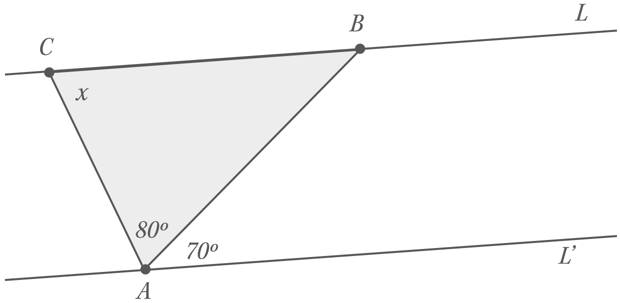
3. Considere la siguiente definición de rayo: "Dados 2 puntos A y B, el rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de todos los puntos C que son colineales con A y B tal que A no está entre B y C". Es esta definición de rayo equivalente a la dada en el libro.

4. Si el ángulo $\measuredangle ABC$ es igual al ángulo $\measuredangle PQR$, entonces se puede afirmar que:

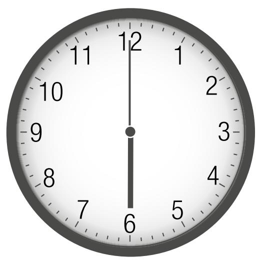
   I. $A = P$
   II. $B = Q$
   III. $C = R$

   a. Solo I
   b. Solo II
   c. Solo I y II
   d. I, II y III

5. Determine el valor del ángulo x, si las rectas L y L' son paralelas.

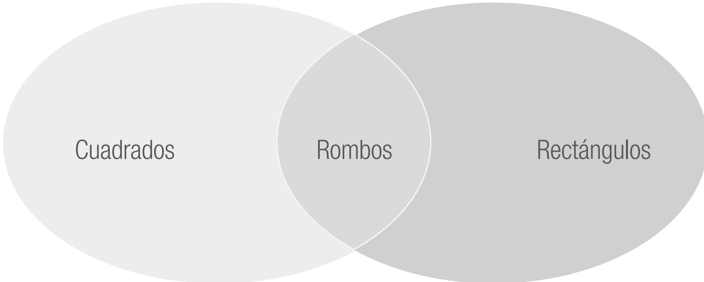


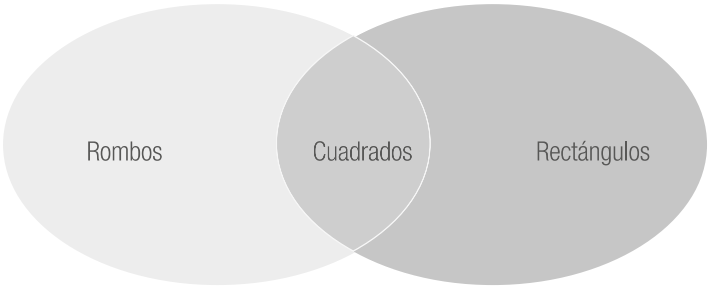
6. Los punteros del reloj a las 06:00 forman un ángulo extendido. ¿A qué hora entre las 06:00 y las 07:00 los punteros del reloj forman un ángulo recto? (Ayuda: la respuesta no es a las 06:15).



7. Si a usted le piden dibujar un triángulo en total generalidad, dibujaría uno escaleno, uno isósceles o uno equilátero. ¿Por qué?

8. Cuál de los siguientes diagramas representa mejor la relación entre rombos, rectángulos y cuadrados.





Capítulo III

Isometrías y construcciones

> "La música es la aritmética de los sonidos así como la óptica es la geometría de la luz ".
> C. Debussy.

Introducción

Una parte importante de la geometría son los movimientos de los objetos geométricos. Es natural pensar que si se tiene una figura geométrica, digamos un triángulo, para fijar ideas, este no pierde ni gana propiedades si lo rotamos, lo trasladamos o lo damos vuelta.

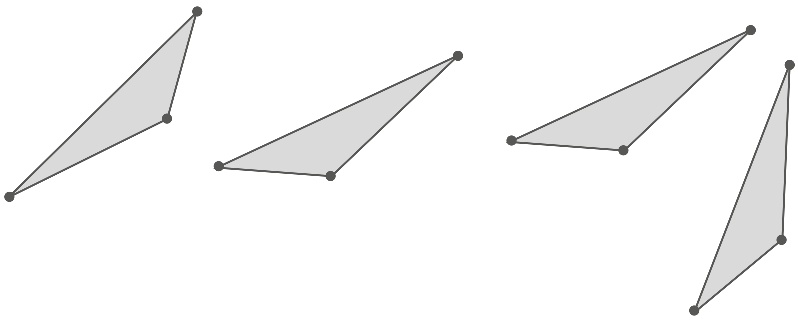


Figura III.1.

Esos movimientos preservan distancias, esto es, transforman un segmento de largo ***a*** en otro segmento del mismo largo ***a***. Esos movimientos los llamamos *isometrías* y serán parte del estudio de este capítulo.

Unido a esto estudiaremos el uso de instrumentos geométricos como regla, escuadra y compás, para realizar estas isometrías y construir objetos geométricos. Estas construcciones apasionaron a los matemáticos desde la antigüedad, los griegos desde al menos el siglo III a. C., se preguntaban: ¿dado un ángulo cualquiera podremos construir la bisectriz de un ángulo?, ¿dado un cuadrado, podremos construir con regla y compás otro cuadrado cuya área es el doble que el primero?, ¿dado un círculo, podremos construir un cuadrado cuya área sea la del círculo?, etc. Algunas de esas preguntas se pueden resolver y otras no, en este capítulo estudiaremos estas construcciones.

1. Isometrías

En este apartado, estudiaremos algunas transformaciones de los puntos del plano, a saber, aquellas que mantienen las distancias entre puntos. Es decir, si los puntos A y B son llevados a A' y B' por una de estas transformaciones, entonces el trazo $\overline{AB}$ mide lo mismo que el trazo $\overline{A'B'}$. Así, si los puntos de una figura son transformados por una de estas aplicaciones, entonces los puntos obtenidos mantienen las distancias de la figura original. Estas transformaciones que preservan distancia también preservan ángulos. Por ejemplo, si aplicamos una de estas transformaciones a un triángulo equilátero, el resultado será un triángulo equilátero de las mismas dimensiones que el original. Si aplicamos una de estas transformaciones a un rectángulo, el resultado será un rectángulo con las mismas dimensiones que el original. Más adelante en el libro, estudiaremos cuándo 2 figuras son *congruentes*, que es un tema central de la geometría de todo nivel. Pues bien, la definición de congruencia de figuras planas se basa en este tipo de transformaciones: diremos que 2 figuras son congruentes si y solo si existe una de estas transformaciones, que transforman a una en la otra. Por esta razón, estas transformaciones merecen nuestra atención desde los primeros niveles de enseñanza de la geometría.

Tales transformaciones serán llamadas *isometrías* o *transformaciones isométricas*[1]. Consideraremos 3 tipos particulares de isometrías en el plano: *traslaciones, reflexiones* y *rotaciones*. ¿Por qué solo estas 3? Estos 3 tipos de isometrías son la base de las isometrías, en el sentido de que cualquier isometría resulta de aplicar consecutivamente varias (pero una cantidad finita) de estas tres transformaciones destacadas.

1.1 Traslaciones

Nuestro primer ejemplo de isometría son las traslaciones. Una traslación de los puntos del plano mueve todos los puntos de éste en la misma dirección y en la misma magnitud. Pensemos que el plano está estampado en una cuadrícula, la usaremos para señalar cuál será la acción de la traslación en los puntos del plano. Por ejemplo, podemos decir que el punto O lo trasladaremos 2 espacios hacia la derecha y 3 espacios hacia abajo, y el resultado lo denotamos por O'.

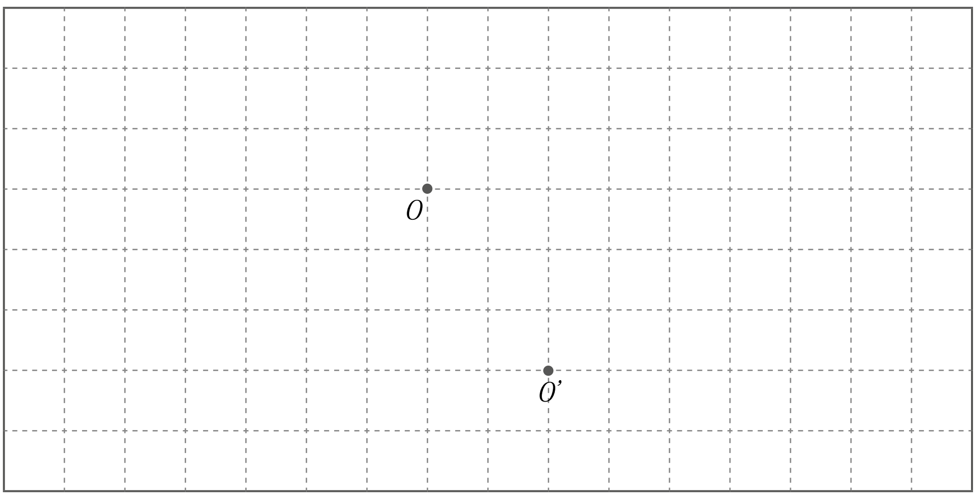


Figura III.2.

[1] "Iso" significa "igual" y "métrico" significa "medida". Entonces, las transformaciones isométricas preservan medida.

Para denotar las traslaciones usaremos el símbolo $T_{(a,b)}$, para significar que los puntos del plano se mueven a unidades a la derecha, si $a \geq 0$, y se mueven $-a$ unidades a la izquierda si $a < 0$, y que se mueven b unidades hacia arriba, si $b \geq 0$, y $-b$ unidades hacia abajo, si $b < 0$. Por ejemplo, la traslación de la **Figura III.2** la denotaremos por $T_{(2,-3)}$.

También podemos trasladar todos los puntos de una figura. Abajo vemos que hemos trasladado los puntos de la imagen de la niña según la traslación $T_{(-7,-3)}$, es decir, 7 puestos a la izquierda y 3 puestos hacia abajo[2] .

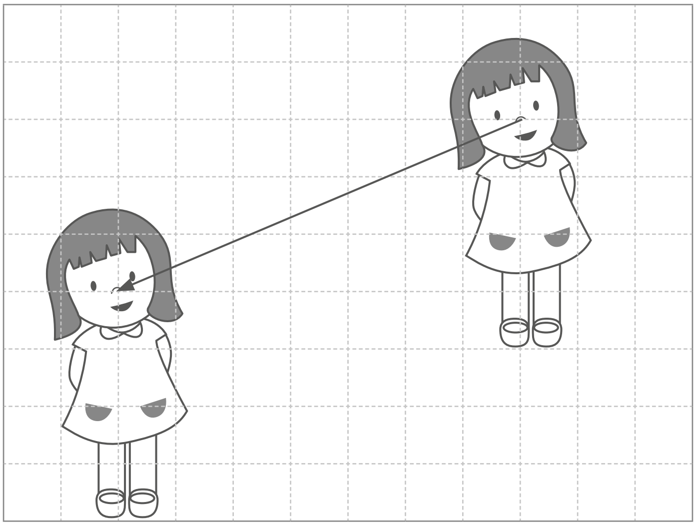


Figura III.3.

Ejercicios

1. ¿Qué ocurre si aplicamos la traslación $T_{(a,b)}$ a un punto cualquiera del plano y luego la traslación $T_{(-a,-b)}$ al punto resultante?

2. ¿Qué le ocurre a los puntos del plano si aplicamos la traslación $T_{(0,0)}$?

3. ¿Cuántos puntos deja fijos una traslación?

4. ¿Qué pasa si aplicamos a cada punto del plano la traslación $T_{(a,\, b)}$ y luego la traslación $T_{(c,d)}$? Compare su resultado con la aplicación de la traslación $T_{(a+c,b+d)}$.

5. ¿Conmutan las traslaciones? Es decir, si aplicamos a los puntos del plano primero una traslación T_1 y luego la traslación T_2, ¿resulta lo mismo que aplicar primero T_2 y luego T_1?

[2] Si aplicamos una isometría a una figura o a un punto, entonces la figura resultante o el punto resultante, se llama *la imagen de la figura* o *del punto*, respectivamente.

1.2 Reflexiones

Consideremos la figura Willodmawe Ñimin, que es un símbolo mapuche que representa un abrazo, aunque algunos le dan el significado de una serpiente. Si copiamos esa figura en varias transparencias y se pegan, podemos formar el diseño de abajo.

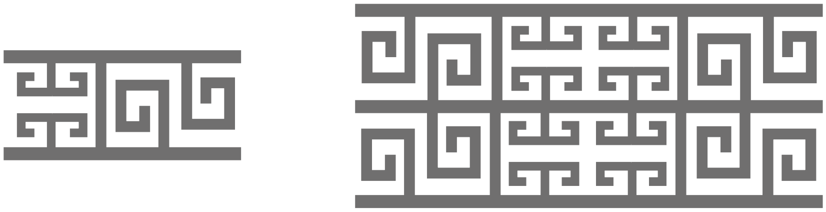


Figura III.4.

Como vemos, a partir de la imagen de la izquierda, haciendo algunos movimientos, logramos hacer el diseño de la derecha. Pero hay que notar que dimos vuelta algunas transparencias para formar el diseño. Fijémonos bien en la mitad derecha del diseño, esto es:

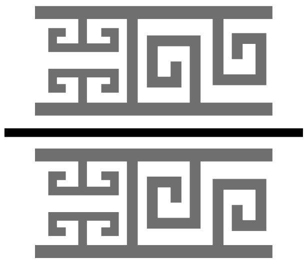


Figura III.5.

La imagen muestra la transparencia básica, arriba de la línea divisoria, y abajo está una copia de la transparencia, pero dada vuelta. Cuando estas 2 transparencias se pegan por el lado donde está la línea divisoria, resulta la mitad derecha del diseño anterior.

Lo mismo ocurre cuando ponemos un objeto en frente de un espejo: se ve el mismo objeto, pero lo que está a la izquierda se ve a la derecha y lo que está a la derecha se ve a la izquierda. Es importante notar que si una figura se pone frente a un espejo (plano), su imagen se ve del mismo tamaño.

Figura III.6.

La acción de dar vuelta una transparencia, lo que vimos antes, es la misma acción que reflejar en un espejo, por ejemplo, la siguiente imagen: se puede pensar que la línea es un espejo que refleja lo de la izquierda en la derecha o también que la transparencia de la izquierda se dio vuelta, según la recta divisoria vertical.

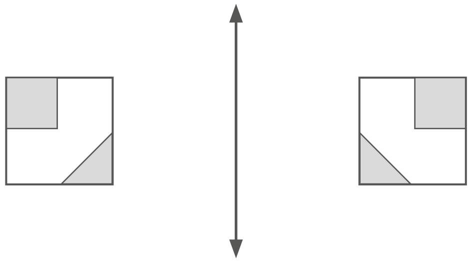


Figura III.7.

Otra forma de entender las reflexiones es la siguiente: consideremos una hoja de papel y marquemos una línea recta en ella donde luego haremos un doblez. En uno o en ambos lados de la línea (o sobre la línea) haremos una figura:

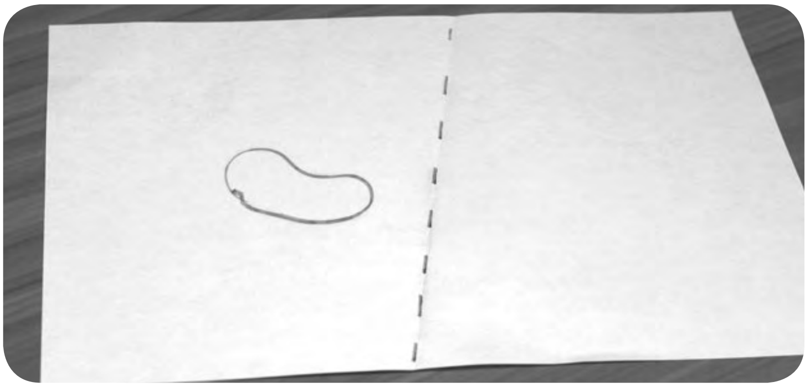


Figura III.8.

Luego hagamos el doblez y marquemos la figura como muestra la imagen siguiente:

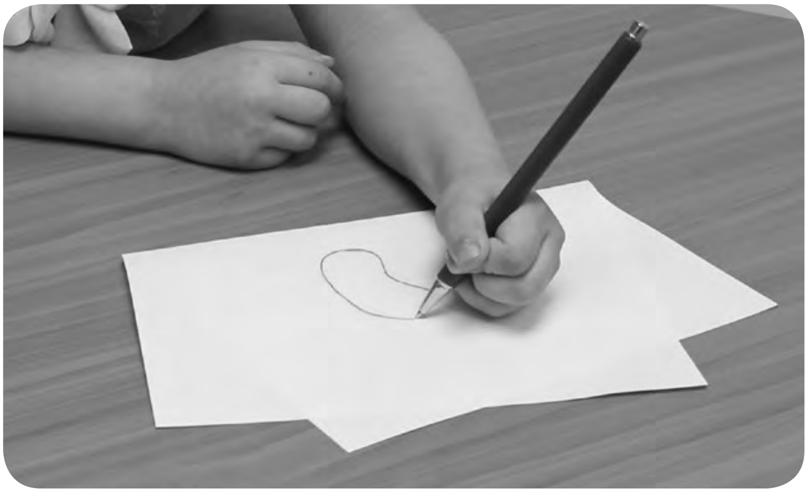


Figura III.9.

Para finalizar, con el lápiz marcamos sobre la huella de la figura para obtener el reflejado.

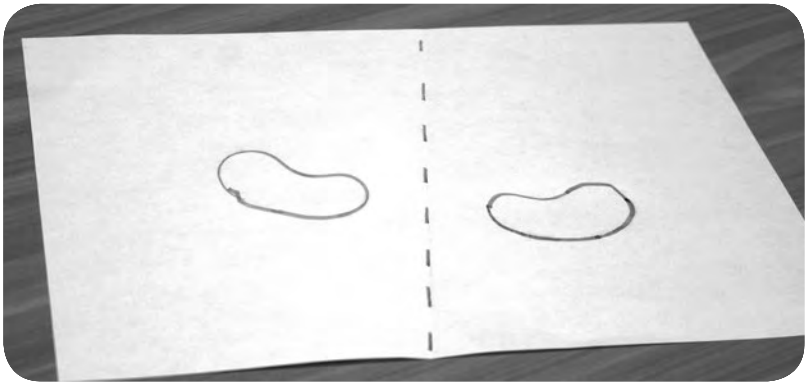


Figura III.10.

Hasta ahora, hemos mostrado 3 estrategias que permiten entender la misma idea. Esta idea es la de *reflexión*, que formalmente significa lo siguiente: consideremos una recta L y un punto P. Si P está en la recta L, entonces la reflexión de P respecto de L es el propio P. Si P no está en L, entonces la reflexión de P respecto de L es el punto P' que está en la recta L', que es perpendicular a L, que no es P, y tal que la distancia de P a L es la misma que la distancia de P' a L.

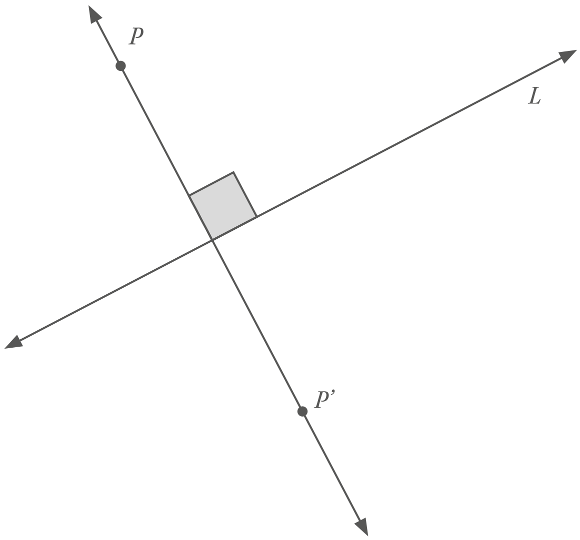


Figura III.11.

La distancia de un punto a una recta se define del siguiente modo. Dado un punto P y una recta L, trazamos la recta perpendicular a L que pasa por P, esa recta intersecta a L en un solo punto, digamos Q, entonces la distancia de P a Q es lo que llamamos la distancia de P a L y anotamos $d(P,L)$.

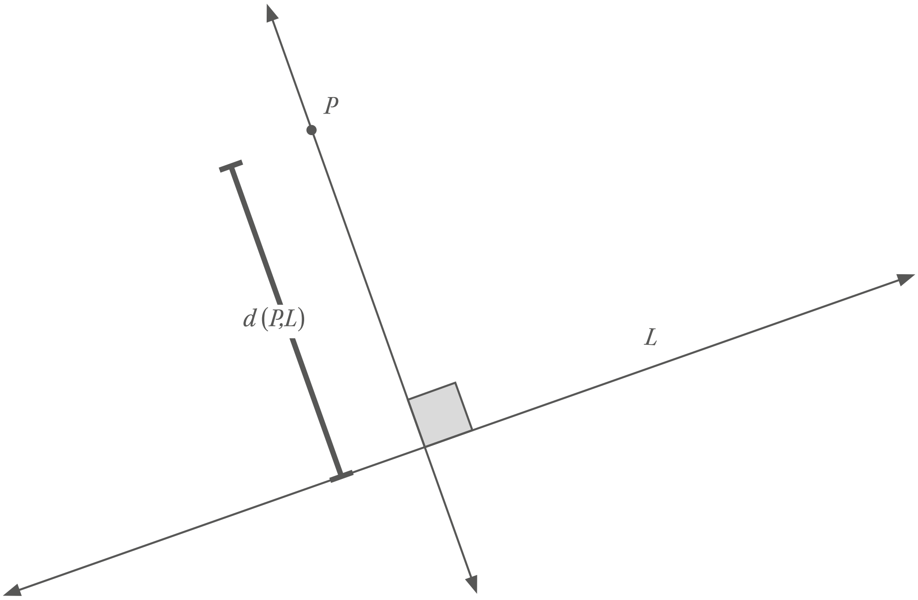


Figura III.12.

En la práctica, para encontrar la reflexión de un punto *P* respecto de una recta *L*, basta considerar un punto *P* que no esté en *L*, pues si *P* está en *L*, la reflexión lo deja fijo. En este caso, se procede como sigue:

• Considere la recta *L'* que pasa por *P* y es perpendicular a *L*.

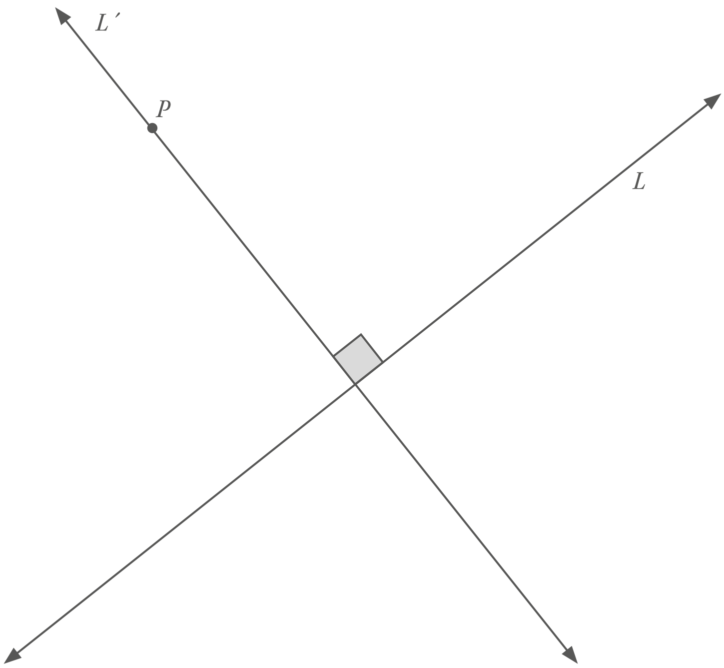


Figura III.13.

- Denote por Q el punto en común de ambas rectas.
- Entonces, P' es el punto que está en L', tal que $P \neq P'$ y $PQ = P'Q$.

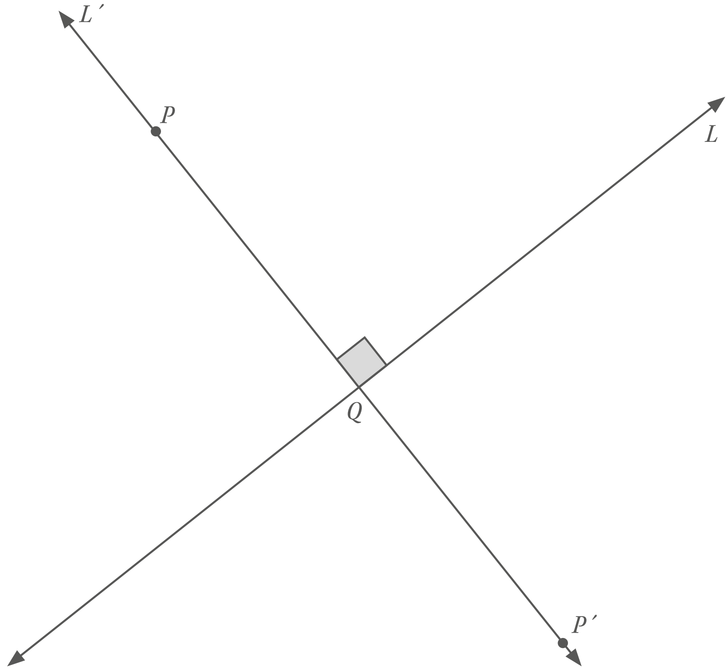


Figura III.14

Hay quienes que para significar que P' es el reflejado de P respecto de L, dicen que P' es la *imagen* de P, por la reflexión respecto a L.

Entonces, tenemos 3 estrategias para entender las reflexiones: el espejo, dar vuelta una transparencia y copiar en una hoja de papel una imagen según un doblez. En este momento, es necesario hacer algunas consideraciones. Primero, es importante decir que la representación de la reflexión mediante la idea del espejo tiene algunos inconvenientes. Por ejemplo, al usar el espejo, solo se pueden poner objetos a un lado del este. Tampoco se puede usar esta representación para figuras que atraviesen el eje de la reflexión.

Figura III.15.

Esto hace que en algunos textos y guías se pida a los alumnos reflejar figuras que se encuentran siempre a un lado del eje. Esto puede producir dificultades, por ejemplo, cuando a los niños y niñas se les pide reflejar para ambos lados del eje o figuras que atraviesan el eje. Así, por ejemplo, si se les pide reflejar el rectángulo *ABCD* según la recta $\overleftrightarrow{EF}$, lo que puede ocurrir es lo siguiente:

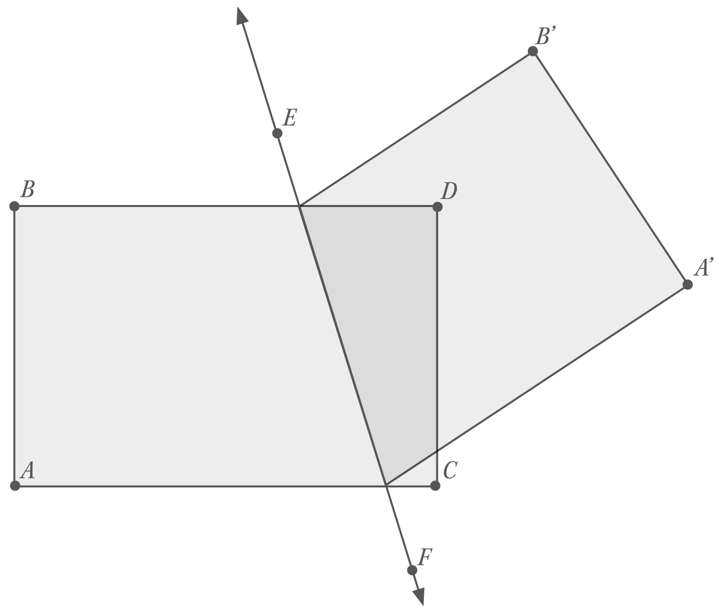


Figura III.16.

En lugar de:

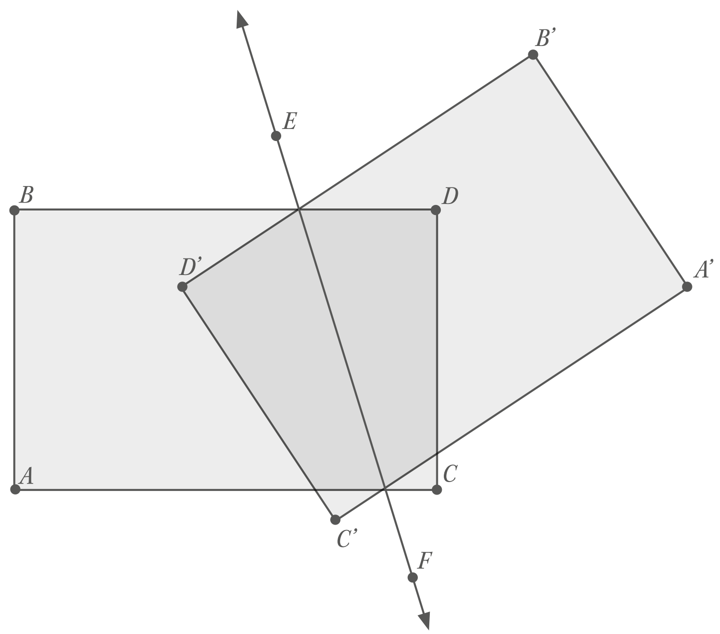


Figura III.17.

Otra dificultad del espejo es que cuando ponemos un objeto sobre este (que corresponde al eje de simetría), la imagen no se ve pegada al espejo, sino que se refleja con cierta distancia de un borde del espejo, pues la figura se refleja en el fondo, donde está la pintura de aluminio, y no permite ver qué le hace la reflexión a los puntos del eje.

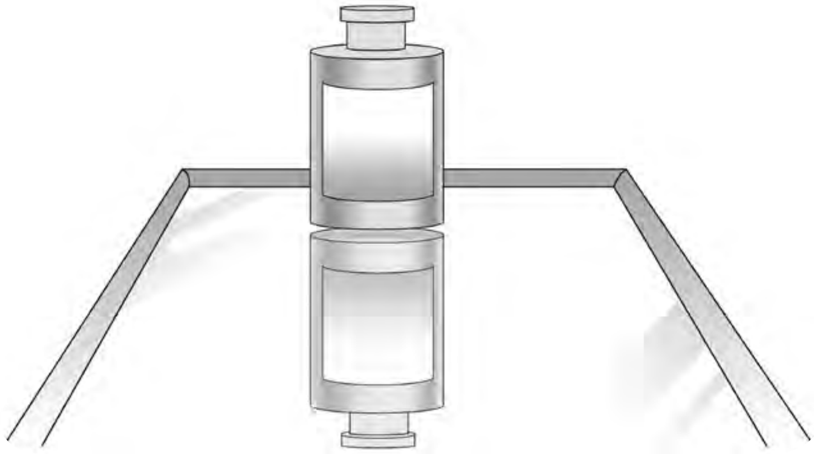


Figura III.18. el vidrio del espejo no es el eje de la reflexión.

Note que la idea de la transparencia permite ver el reflejado, pero se puede perder el eje de simetría y además no se pueden reflejar figuras que atraviesen el eje de simetría. En cambio, la idea del doblez permite hacer todo lo que las transparencias y el espejo no pueden, pero el proceso de ver el reflejado no es tan inmediato como en los otros casos.

Un concepto asociado al de reflexión es el de *eje de simetría*. Dada una figura, un *eje de simetría* es una recta L, tal que al hacer una reflexión respecto a L, la figura que resulta no se distingue de la original. También decimos que la figura tiene una *simetría axial*.

Por ejemplo, un cuadrado tiene 4 ejes de simetría: las 2 diagonales y las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos.

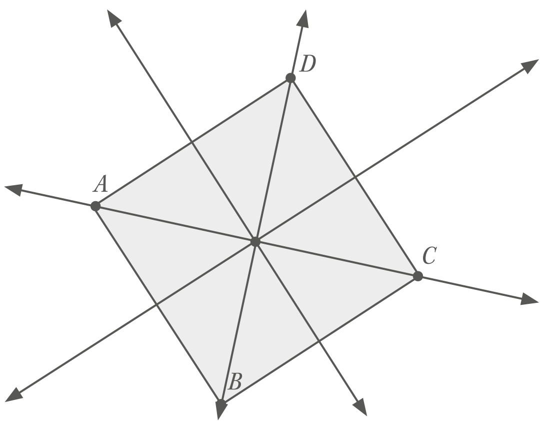


Figura III.19.

Por ejemplo, si reflejamos un rectángulo no cuadrado respecto a una de sus diagonales se observa lo siguiente.

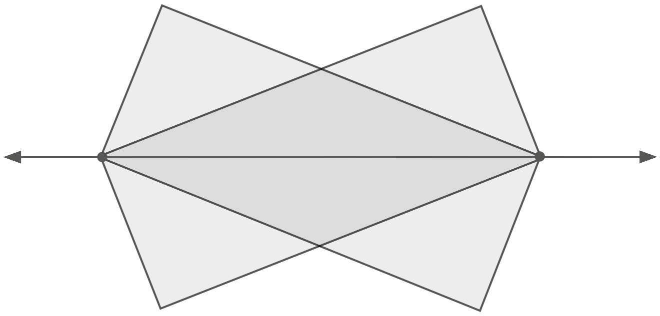
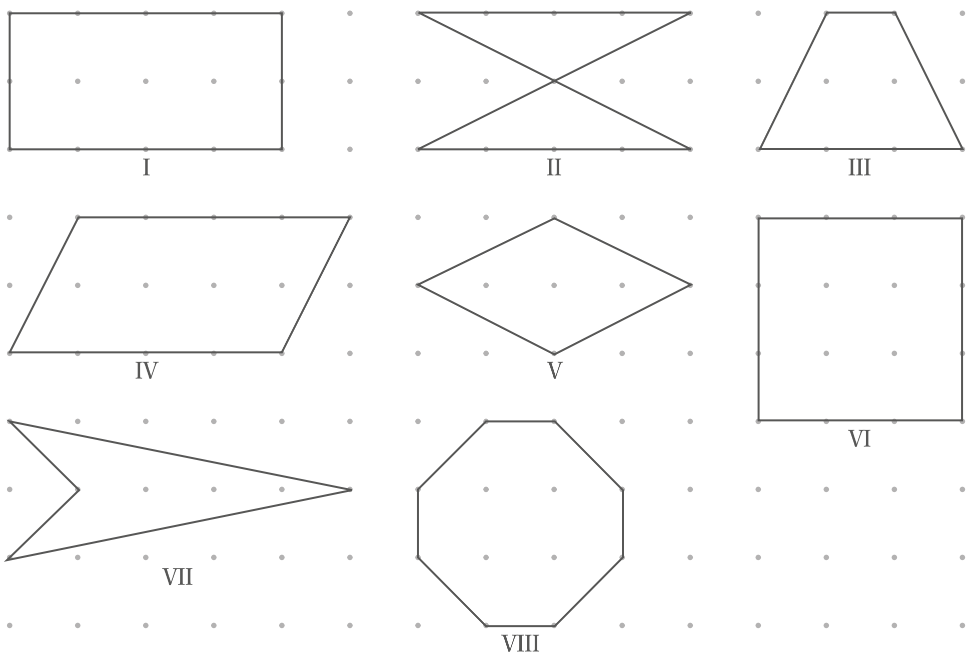


Figura III.120.

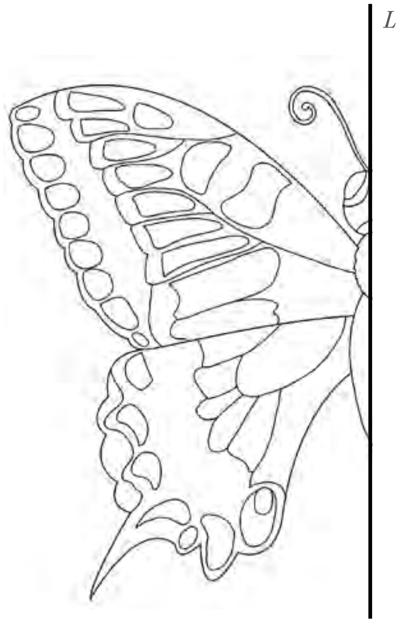
Por lo tanto, la diagonal de un rectángulo (no cuadrado) no es un eje de simetría del rectángulo.

Ejercicios

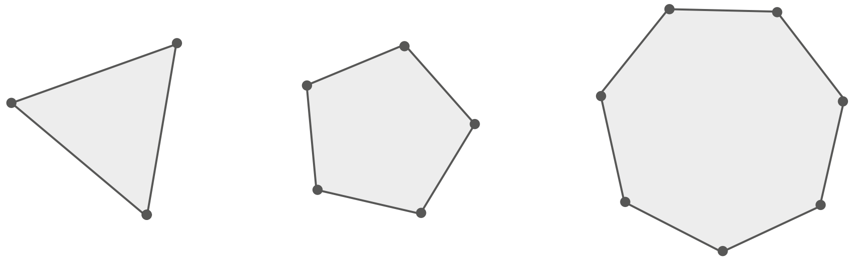
1. Determine si las siguientes figuras tienen ejes de simetría y dibújelos en caso de que sea afirmativo.



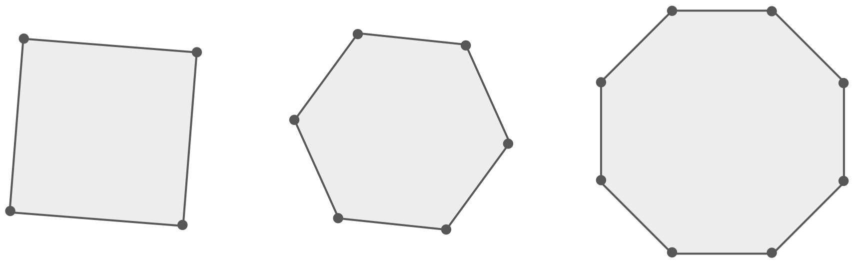
2. Dibuje la otra mitad de la mariposa de forma tal que L sea un eje de simetría.



3. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo equilátero? ¿Cuántos ejes de simetría tiene un pentágono regular? ¿Cuántos ejes de simetría tiene un heptágono regular?



4. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado, un hexágono y un octógono regular?



5. Conjeture cuántos ejes de simetría tiene un polígono regular de n lados, dependiendo de si n es par o impar.

1.3 Rotaciones

Consideremos la siguiente imagen con una marca en el centro de la figura:

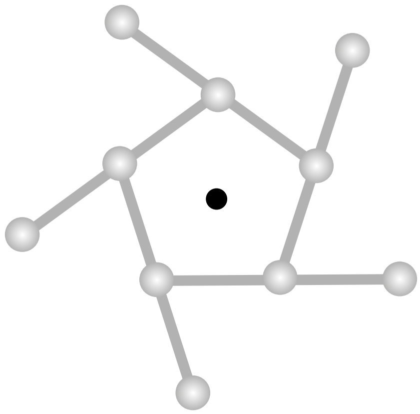


Figura III.21

Supongamos que la figura está impresa en una hoja de papel. Clavemos un alfiler en el centro de la figura y giremos la hoja de papel, en algún ángulo, manteniendo fijo el centro de la figura. Así, obtenemos una figura como la siguiente:

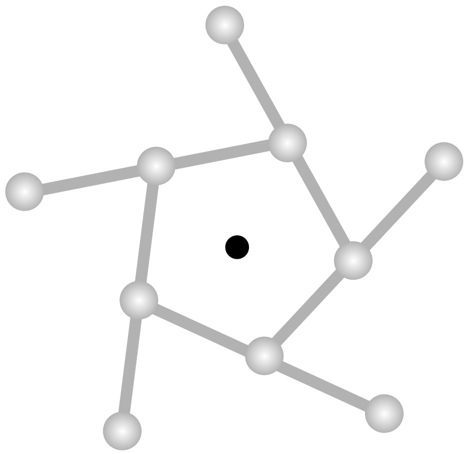


Figura III.22

Ejercicio

Al rotar la figura inicial en cierto ángulo, resulta la misma figura que la inicial, ¿cuál es el menor ángulo positivo con esa particularidad?

También podemos girar una figura impresa en una hoja de papel, pero poniendo el alfiler fuera de la figura. Por ejemplo, en la **Figura III.23** se muestra un triángulo ΔABC, el cual es girado en un ángulo α y el alfiler lo pusimos en el punto O que está fuera del triángulo, y se obtuvo el triángulo $\Delta A'B'C'$.

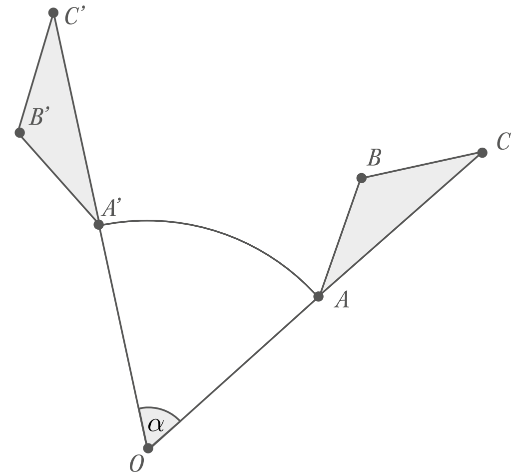


Figura III.23.

A ese movimiento, que fija un punto O y gira todos los puntos según un ángulo α dado, se llama *rotación* con centro en O y ángulo α. La rotación de ángulo α y centro O, a cada punto P del plano le asocia el punto P' del siguiente modo:

- Construir la circunferencia de centro O que pasa por P.
- Marcar el ángulo α de modo que el radio $\overline{OP}$ esté contenido en uno de los rayos del ángulo (mediremos los ángulos en sentido opuesto a las manecillas del reloj, a menos que se diga otra cosa).
- El rayo que forma el ángulo α y que no contiene a $\overline{OP}$ interseca a la circunferencia en un punto, ese punto es P'. Entonces, P' es resultado de aplicar la rotación con centro en O y ángulo α a P.

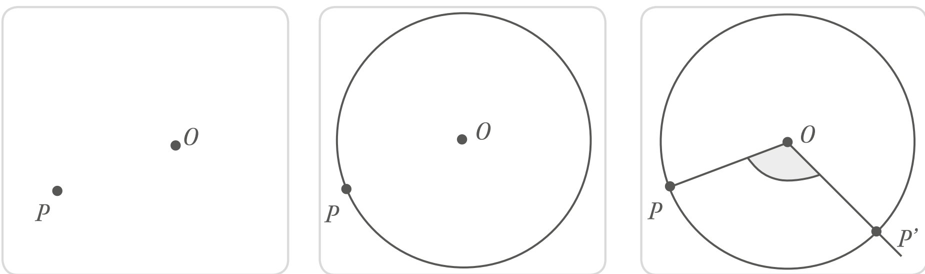


Figura III.24.

En resumen

¿Cómo se diferencian las 3 isometrías estudiadas?

- Las traslaciones no dejan ningún punto fijo.
- Las rotaciones dejan solamente un punto fijo (el centro de la rotación).
- Las reflexiones dejan fijos todos los puntos del eje de reflexión.

1.4 Posibles errores en el estudio de las isometrías

En relación a las isometrías, presentaremos algunos errores que se pueden observar en los alumnos y alumnas.

En ocasiones, los estudiantes creen que si una recta divide a una figura en dos figuras congruentes, entonces la recta es un eje de simetría, lo cual es falso. La afirmación correcta es en el otro sentido, es decir, si una recta es eje de simetría, entonces divide a la figura en dos figuras congruentes. Por ejemplo, los estudiantes pueden creer que la diagonal de un rectángulo (no cuadrado) es un eje de simetría, lo cual es falso, como vimos antes.

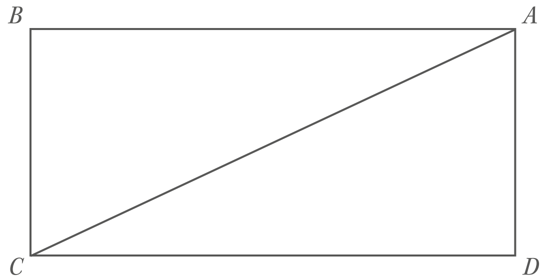


Figura III.25.

En el rectángulo de la **Figura III.25** los triángulos ΔABC y ΔADC son congruentes, sin embargo, la recta $\overleftrightarrow{AC}$ no es un eje de simetría.

Otra idea equivocada que pueden tener los estudiantes es que no reflejen las figuras respecto de una recta dada, sino que respecto de una recta vertical u horizontal que ellos se imaginan. Por ejemplo, si a un estudiante se le pide reflejar la figura T respecto de L, entrega como respuesta T'.

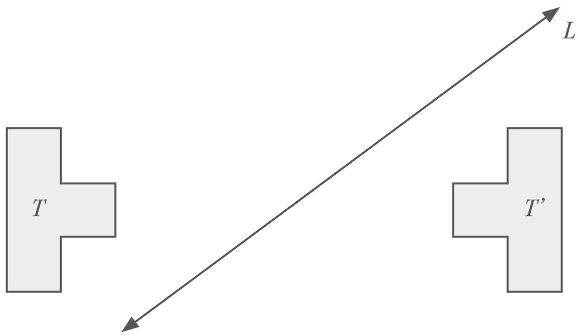


Figura III.26.

El error consistió en que el alumno reflejó respecto de *L'* en lugar de *L*, posiblemente porque estaba acostumbrado a reflejar respecto a ejes paralelos a los bordes del cuaderno, del libro o de la pizarra.

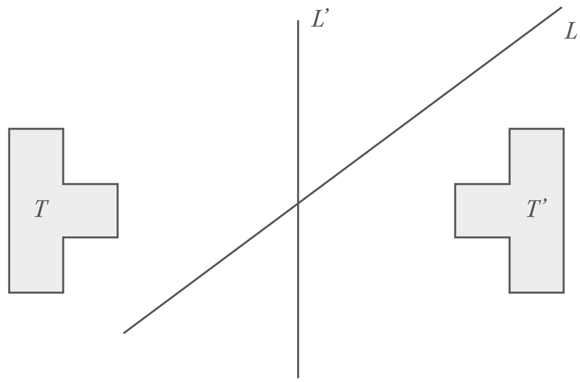


Figura III.27.

Ejercicios de la sección

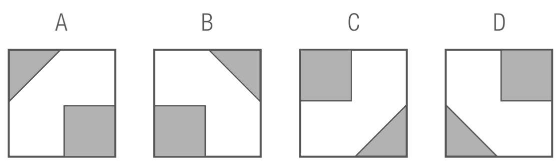
1. ¿Por qué existe una sola circunferencia de centro *O* que pasa por *P*?

2. Consideremos 2 puntos en el plano, digamos *P* y *P'*, ¿es cierto que existe una rotación que lleva *P* en *P'*? ¿es única?

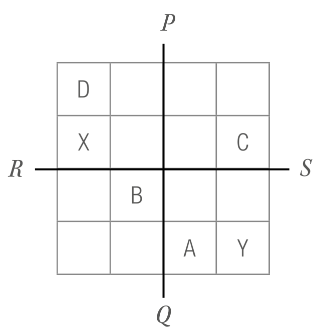
3. Si rotamos todos los puntos del plano en torno a *O*, con ángulo α, ¿qué le pasa a *O*?

4. ¿Cuántos puntos quedan fijos por una rotación?

5. Considere las siguientes baldosas:

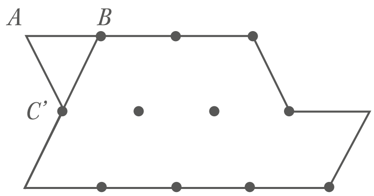


Si en el cuadriculado *PQ* y *RS* son ejes de simetría, ¿cuál baldosa debería ir en el lugar de *X* e *Y*, respectivamente?



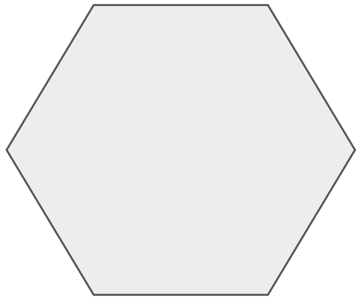
a. *D* y *B*
b. *A* y *B*
c. *B* y *D*
d. *D* y *C*

6. Si una baldosa B cubre exactamente la superficie del triángulo ΔABC, ¿cuántas baldosas como B debe colocar para cubrir la siguiente figura (incluyendo a la propia baldosa B)?



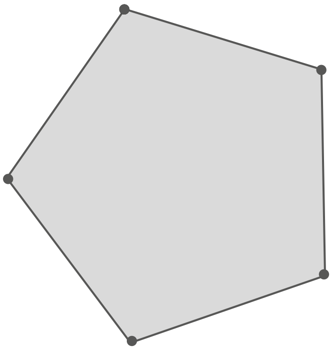
a. 14
b. 7
c. 13
d. 12

7. Trace los ejes de simetría del hexágono regular que se muestra a continuación.



8. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un rectángulo no cuadrado?

9. ¿Cuántos ejes de simetría tiene el pentágono regular que se muestra a continuación?



10. ¿Es cierto que una recta que contiene a un diámetro de una circunferencia es un eje de simetría de la circunferencia?

11. ¿Cuántos ejes de simetría tiene una circunferencia?

2. Visualización

La visualización es la comprensión y la realización de movimientos imaginados de objetos en 2 y 3 dimensiones. Para ello, debemos ser capaces de crear una imagen mental del objeto y "manipularla" en forma imaginaria (girarla, reflejarla, trasladarla, contraerla, dilatarla, partirla, etc). Algunas imágenes pueden causar dificultades, sobre todo si son demasiado inflexibles o llenas de detalles irrelevantes. Según estudios[3] recientes, en los primeros años de vida las imágenes son estáticas, se puede volver a crear y examinar, pero en la misma posición, no se pueden transformar. Por ejemplo, si a un niño pequeño (menor de 4 años) se le muestra un cuadrado, él lo puede identificar en otra imagen, siempre y cuando esté en la misma posición que el original, pero si está rotado en un ángulo positivo menor que 90°, no es tan fácil que lo reconozca como el mismo que el original. Más adelante, los niños pueden transformar las imágenes, por ejemplo, es posible que muevan mentalmente la imagen de un libro para ver si cabe en el espacio de un estante. Varios estudios recientes han demostrado que los niños en edad preescolar, pero mayores de 4 años, son capaces de rotar mentalmente formas en el plano, en particular niños y niñas de 4 años y medio son capaces de realizar transformaciones mentales que incluyen la rotación. También se ha demostrado que niños y niñas entre 4 y 6 años de edad son capaces de rotar mentalmente imágenes visuales en el plano para determinar si una figura es "igual" a otra (son congruentes).[4]

Las habilidades de visualización pueden ser desarrolladas en los niños y niñas mediante diferentes ejercicios. Por ejemplo, actividades con tangramas proporcionan una valiosa experiencia para la visualización de figuras planas. Se recomienda que los niños formen diferentes figuras utilizando las piezas del tangrama. Después de tales exploraciones, es útil realizar con los niños rompecabezas en los que solo ven el contorno de la figura armada y deben encontrar maneras de llenar ese esquema con su propio conjunto de tangramas. Por ejemplo, a los niños se les muestra una silueta, como la de abajo, y luego se les pide que la repitan usando sus propias piezas.

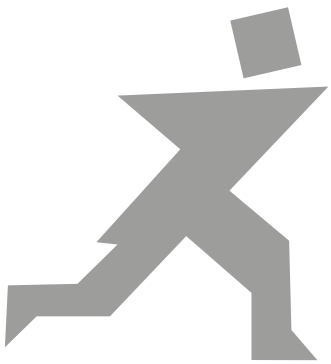


Figura III.28.

También las habilidades de visualización son útiles para resolver problemas que involucran isometrías. Por ejemplo, consideremos la siguiente actividad:

[3] Cross, C., Woods, T,.Schweingruber (Eds.). *Mathematics learning in early chilhood*. Paths towards excellence and equity. Commitee on early childhood mathematics, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. National Research Council of National Academies. Washington D.C. USA. 2009.

[4] Ibíd.

Juan ha tomado un curso de orfebrería y ha aprendido a hacer collares en los que se engarzan 6 piedras preciosas (rubíes y esmeraldas). Por ejemplo, en el collar de la figura hay 4 esmeraldas y 2 rubíes:

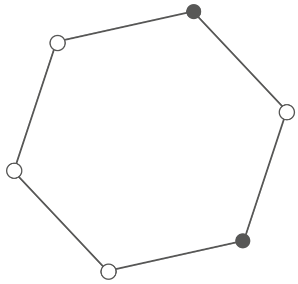


Figura III.29.

Juan tiene 14 amigas, y todas ellas le han pedido un collar exclusivo. ¿Puede Juan hacer un collar distinto para cada una de ellas?

Para responder esta pregunta, primero hay que reconocer qué collares son idénticos. Por ejemplo, las siguientes son imágenes del mismo collar.

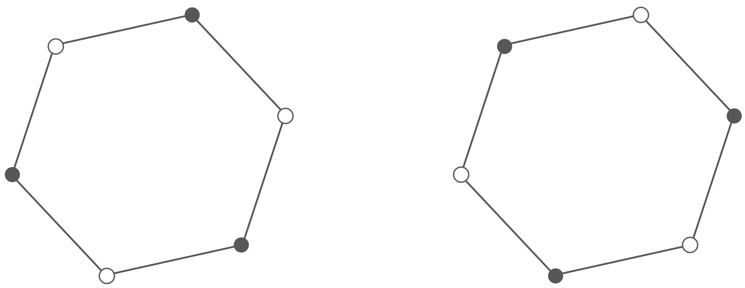


Figura III.30. El mismo collar.

Para que los niños reconozcan que las imágenes de arriba representan el mismo collar, es necesario que ellos roten mentalmente uno de ellos y lo superpongan sobre el otro para ver que coinciden.

Habilidades como estas son útiles para notar que existen solo 3 collares con 2 rubíes y 4 esmeraldas, 1 solo collar con 1 esmeralda y 5 rubíes, etc.

Las actividades de anticipación suelen ser utilizadas para desarrollar habilidades de visualización en 2D (y también en 3D). Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

¿Cuál es la reflexión de la figura respecto a la recta L?

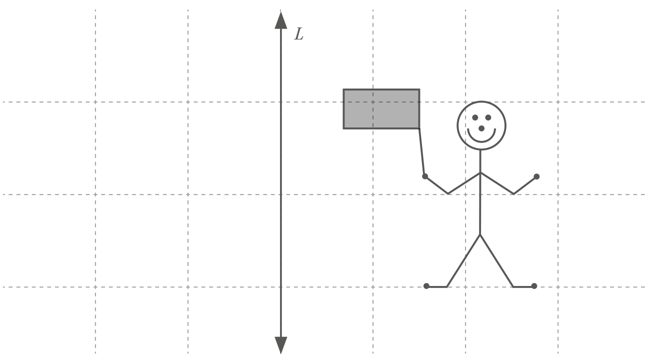


Figura III.31.

A medida que los estudiantes van logrando resultados satisfactorios, se puede avanzar en el nivel de dificultad de la tarea. Por ejemplo:

*¿Cuál es la reflexión de la figura respecto a la recta **L**?*

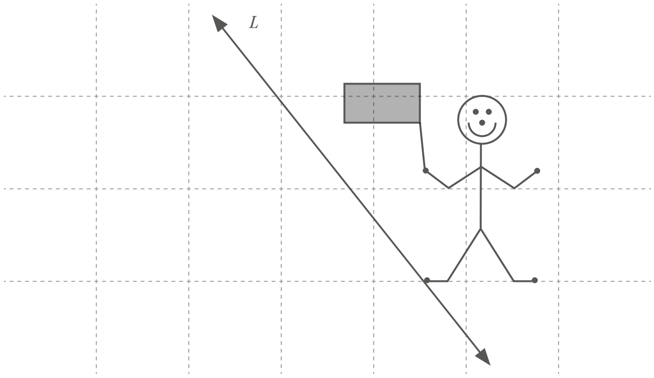


Figura III.32.

También se puede pedir a los alumnos que completen una figura con la pieza del rompecabezas correcta. Por ejemplo:

Suponga que la pared fue pintada de arriba hacia abajo con brochas de distintos tamaños, pero haciendo franjas verticales. *¿Cuál de las alternativas corresponde al pedazo de pintura faltante?*

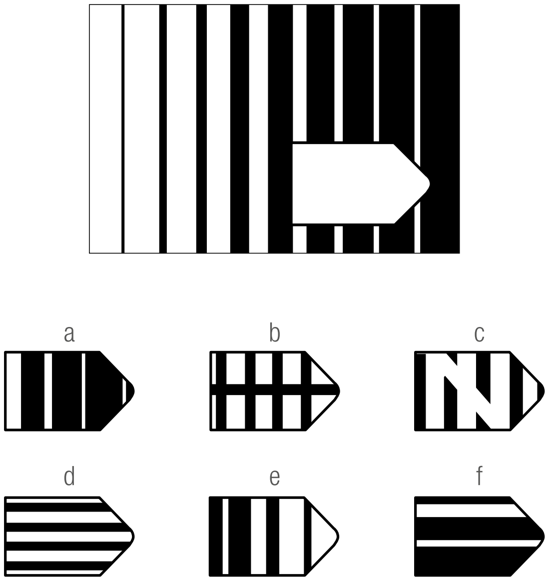


Figura III.33.

Ejercicios de la sección

1. Si a un punto *P* se le aplica una reflexión, resulta *P'*. ¿Qué le pasa a *P'* si se le aplica la misma reflexión?

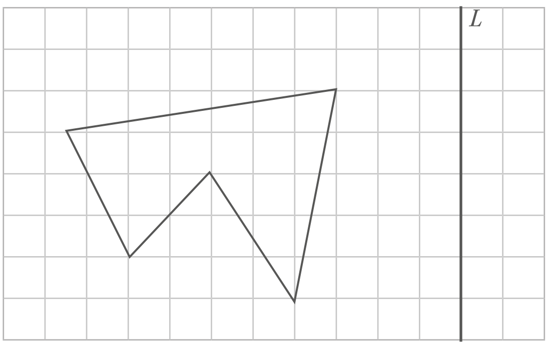
2. ¿Qué le pasa a los puntos de la recta *L* cuando se les aplica la reflexión respecto a *L*?

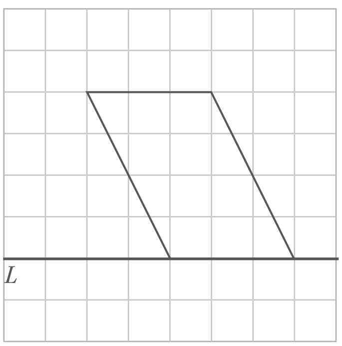
3. Si una reflexión deja al punto *P* fijo, ¿qué se puede decir de *P*?

4. Consideremos 2 rectas paralelas *L* y *L'*. Si a los puntos del plano se les aplica primero la reflexión respecto a *L* y luego la reflexión respecto a *L'*, se obtiene lo mismo que si se hubiese aplicado una traslación. Explique por qué ocurre esto y describa tal traslación.

5. Si a los puntos del plano se les aplica una traslación *T* y luego una reflexión *S* respecto a una recta *L*, ¿resulta lo mismo que si se aplica primero la reflexión *S* respecto de *L* y luego la traslación *T*?

6. Dibuje las imágenes que resultan al reflejar las siguientes figuras con respecto a la recta *L* dada en cada caso, y luego aplíqueles la traslación $T_{(-2,-2)}$.

a.


b.


3. Construcciones geométricas

En esta sección exploraremos algunas construcciones con regla, compás y escuadra; en especial, nos dedicaremos al estudio de construcciones con regla y compás. Nuestros compases y reglas serán ideales, como los de Platón; esto es, el compás es capaz de hacer circunferencias tan grandes y tan pequeñas como se quiera, y de copiar cualquier distancia en forma exacta; del mismo modo, la regla puede ser usada para dibujar trazos tan largos como se quiera o pueda. Es importante mencionar que supondremos que el compás, la regla y la escuadra no tienen medidas, por lo tanto no las usaremos para medir, sino solo para dibujar (en inglés se usa la palabra *straightedge*, que quiere decir literalmente "borde recto", para referirse a la regla).

Para descubrir propiedades de las figuras, en muchos casos es necesario construir objetos auxiliares, que originalmente no estaban en la figura. Por ejemplo, suele ocurrir que para demostrar alguna propiedad de un triángulo, tengamos que llenar la figura de puntos, rectas y circunferencias auxiliares. Esto recarga el dibujo, pero es absolutamente necesario para utilizar resultados previamente descubiertos. Por esta razón, los griegos necesitaban tener un compendio de "construcciones" realizables con regla y compás. Ellos podían construir rectas paralelas a una dada que pasa por un punto dado, podían construir la recta perpendicular a una dada que pasa por un punto dado, podían copiar un trazo dado, podían bisecar un ángulo cualquiera, etc. Pero había cosas que no podían hacer, por ejemplo, trisecar un ángulo. Hoy se sabe que tal cosa no se puede, en general, pero para poder demostrar esa imposibilidad se tuvo que esperar muchísimo tiempo, desde que se hicieron la pregunta hasta que, recién a comienzos del siglo XIX, se tuvieron las herramientas para dar una respuesta definitiva.

3.1 Uso de la regla, el compás y la escuadra

La regla

Como hemos supuesto, nuestra regla no tiene marcas para hacer medidas (y si las tiene no las consideraremos); la utilizaremos obviamente para trazar líneas rectas. Dado un punto en el plano, podemos trazar todas las rectas que pasan por ese punto; hay quienes le llaman al conjunto de dichas rectas el *haz de rectas* que pasan por el punto.

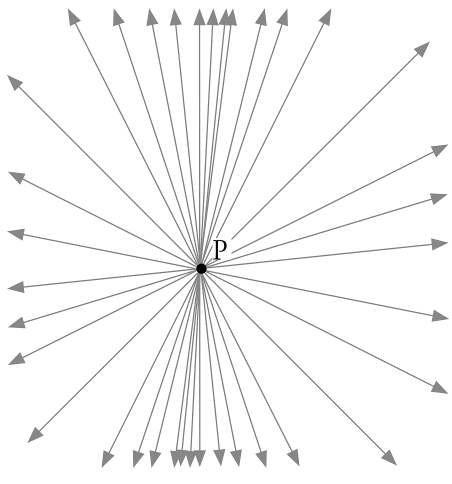


Figura III.34: haz de rectas que pasan por P.

Dados 2 puntos en el plano, la regla permite trazar la (única) recta que pasa por esos 2 puntos:

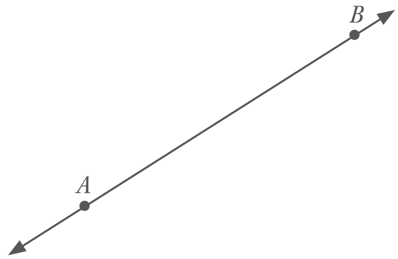


Figura III.35.

Consideremos un trazo $\overline{AB}$ y un punto P fuera del trazo, pero no colineal con A y B, entonces (en teoría) podemos trazar todas las rectas que pasan por P y por algún punto de $\overline{AB}$.

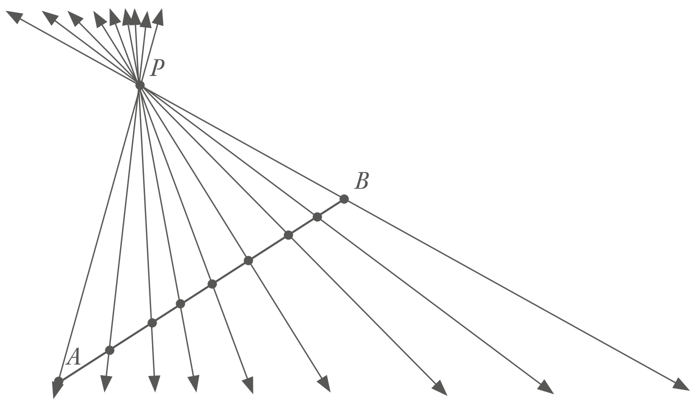


Figura III.36.

Ahora, consideremos una recta L paralela a la recta que contiene a $\overline{AB}$ y que esté entre P y $\overline{AB}$. Denotemos por C la intesección de L con $\overline{PB}$ y por D la intersección de $\overline{PA}$ con L. Entonces cada una de las rectas que teníamos antes interseca una y solo una vez al trazo $\overline{AB}$ y al trazo $\overline{CD}$, es decir, cada punto de $\overline{AB}$ determina un único punto de $\overline{CD}$.

Recíprocamente, y es un ejercicio para el lector mostrar que, cada punto de $\overline{CD}$ determina un único punto de $\overline{AB}$.

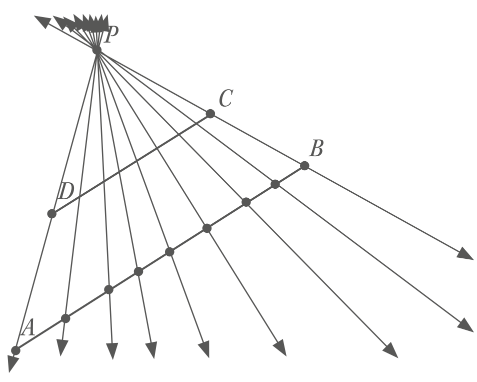


Figura III.37.

Lo anterior, puede interpretarse como que existe la misma cantidad de puntos en $\overline{AB}$ que en $\overline{CD}$, lo cual no es tan evidente a primera vista.

La escuadra

La escuadra es una plantilla con la forma de un triángulo rectángulo. Las más usadas son aquellas con forma de triángulo rectángulo isósceles y las con forma de un triángulo de ángulos interiores agudos de **30°** y **60°**.[5]

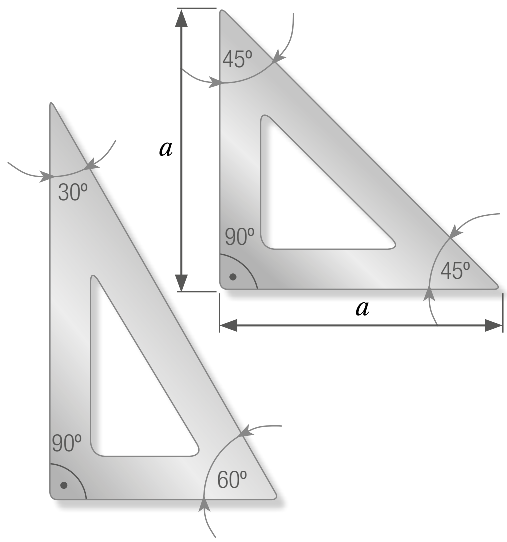


Figura III.38. Escuadras.

Se usa, principalmente, para marcar ángulos rectos, aunque esta no es su única función. En efecto, si solo fuese el objetivo marcar y/o reconocer ángulos rectos, nos bastaría simplemente una plantilla de ángulo recto; de hecho, hay una herramienta con esas características que es usada por los carpinteros, albañiles y otros oficios, y que también es llamada escuadra:

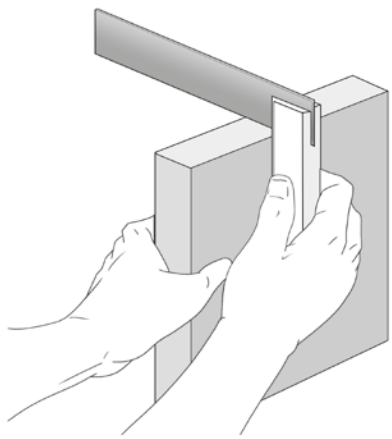


Figura III.39.

[5] La Real Academia Española de la Lengua (RAE) acepta solamente bajo el nombre de "escuadra" aquella con forma de triángulo isósceles. A la otra, la RAE le llama "cartabón", sin embargo, en este texto usaremos escuadra para cualquier plantilla triangular con un ángulo recto.

Usos de la escuadra

Podemos usar la escuadra para:

- **Trazar perpendiculares:** dada una recta *L* y un punto *P* fuera de ella podemos usar la escuadra (en cualquiera de los formatos) para trazar la perpendicular a *L* que pasa por *P*. Para ello, "apoyamos" un lado de la escuadra en la recta *L* y luego hacemos que el otro lado de la escuadra pase por *P*.

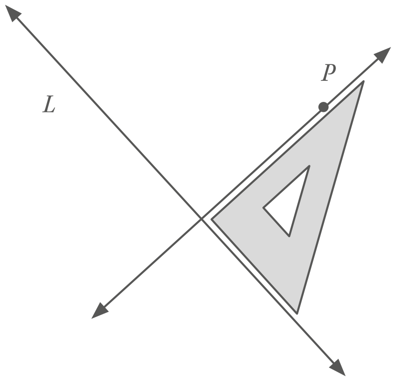


Figura III.40.

- **Trazar paralelas:** también podemos usar la escuadra y la regla para trazar una recta paralela a una recta dada. Consideremos una recta *L* y un punto *P* que no está en *L*. Pongamos la hipotenusa[6] apoyada en la recta *L*, luego apoyamos la regla en un cateto[7] de la escuadra. Manteniendo la regla fija, movemos la escuadra deslizándola por la regla, hasta que la hipotenusa de la escuadra pase por *P*, entonces, trazamos la recta *L* sobre la hipotenusa de la escuadra[8].

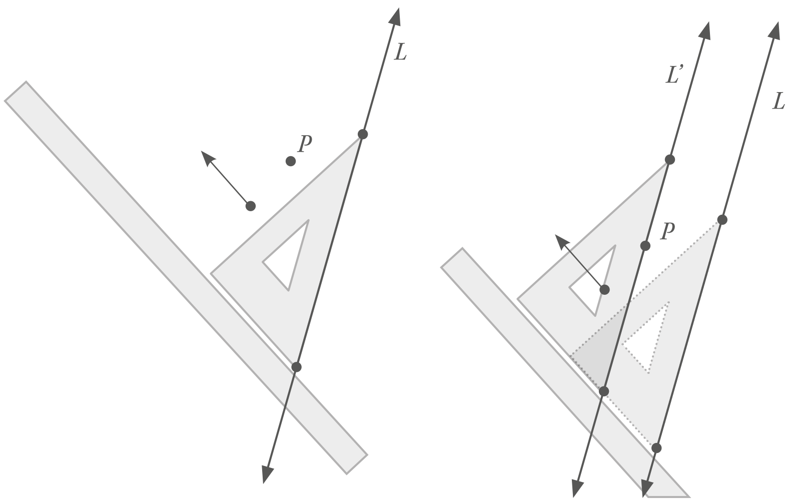


Figura III.41.

---

[6] Se le llama *hipotenusa* al lado del triángulo rectángulo que es opuesto al ángulo recto.

[7] Se le llama *cateto* a cada uno de los lados del triángulo rectángulo que forman el ángulo recto.

[8] Note que, en este caso, la escuadra del carpintero no sirve, en cambio, cualquiera de las otras escuadras sí sirve.

El compás

El compás es un instrumento formado por 2 brazos unidos en su extremo superior, por un eje o clavillo para que se puedan abrir o cerrar. En los extremos de los brazos hay una aguja y en el otro hay un lápiz o algo que permita hacer marcas en alguna superficie.

Figura III.42.

Usos del compás

Podemos usar el compás para:

- **Trazar circunferencias o sus arcos:** podemos dibujar una o más circunferencias con el centro en un punto dado.

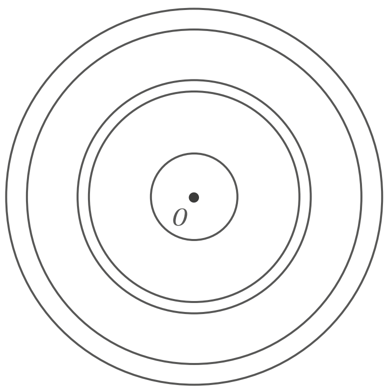


Figura III.43: circunferencias con centro en el punto O (y distintos radios).

También podemos dibujar una o más circunferencias cuyo radio sea la longitud de un trazo dado.

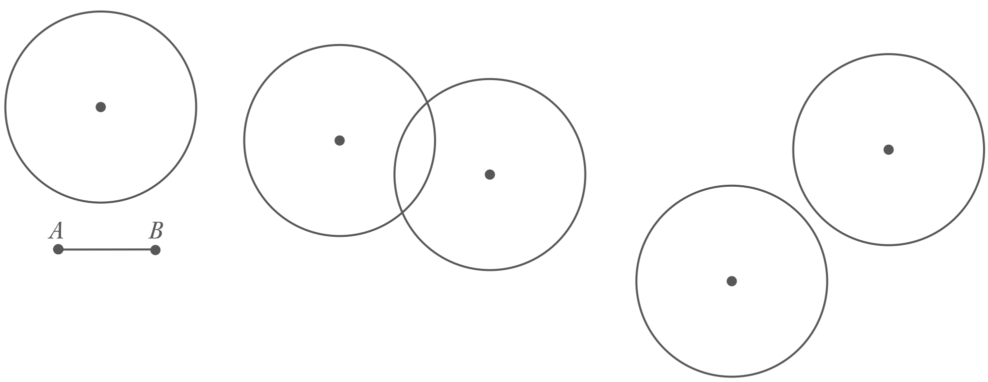


Figura III.44: circunferencias cuyo radio mide AB y de diferentes centros.

Si no necesitamos las circunferencias completas, podemos trazar partes (arcos) de estas (en la figura, las líneas continuas son los arcos trazados con compás, las líneas punteadas son las partes no trazadas de las circunferencias).

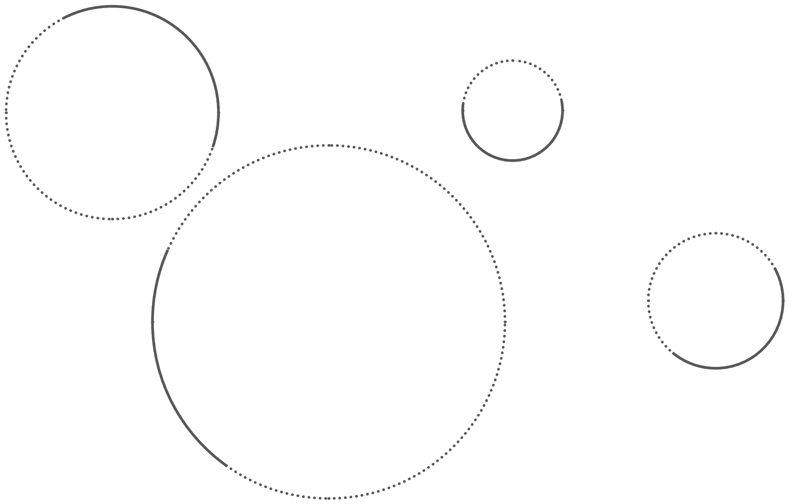


Figura III.45.

- **Copiar distancias:** lo importante es notar que podemos dibujar trazos del mismo tamaño que uno dado, ya que todos los puntos de la circunferencia están a la misma distancia del centro.

Por ejemplo, si tenemos un trazo $\overline{AB}$, con el compás podemos dibujar el trazo $\overline{AC}$ que mide lo mismo que $\overline{AB}$. Para ello trazamos la circunferencia con centro en A y radio AB. Cualquier otro radio de la circunferencia, por ejemplo el que une A con C, mide AB.

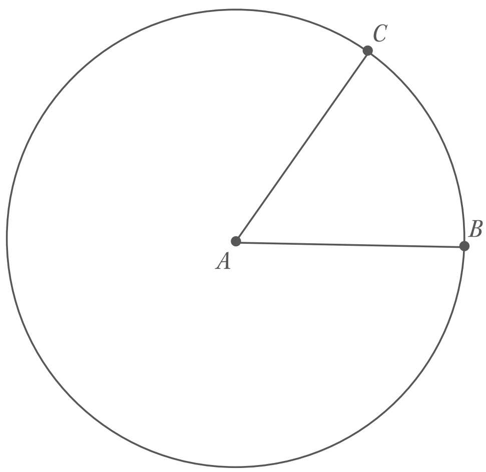


Figura III.46.

Otra posibilidad es copiar un segmento sobre un rayo dado, haciendo coincidir un extremo del nuevo segmento con el origen del rayo. La forma de lograr esto se ilustra en la siguiente secuencia:

- Se desea copiar el segmento $\overline{AB}$ sobre el rayo $\overrightarrow{CD}$.
- Hay que hacer coincidir un extremo del segmento con el punto C (el origen del rayo).

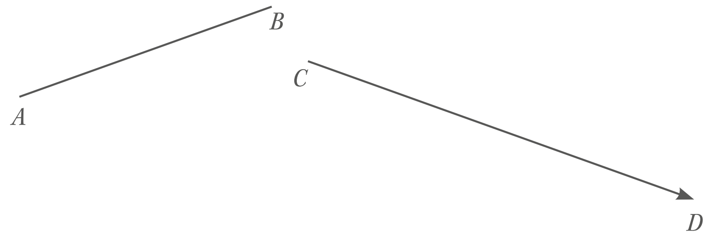


Figura III.47.

- Usar el compás para "copiar" la medida del segmento $\overline{AB}$. Para ello abrimos el compás de tal manera que una punta del compás esté en *A* y la otra, en *B*.

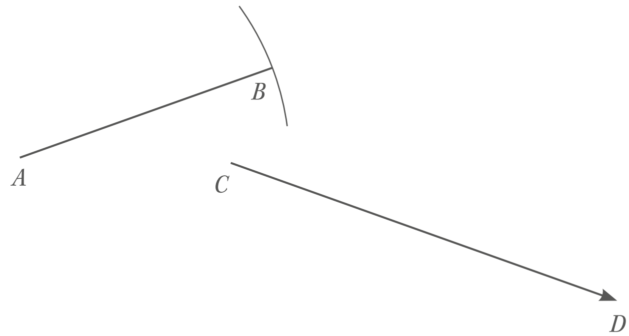


Figura III.48.

- Con el compás abierto con la distancia *AB* como radio, trazamos un arco de circunferencia con centro en *C*, que interseque a $\overrightarrow{CD}$.
- Denotemos por *E* la intersección del arco con el rayo.

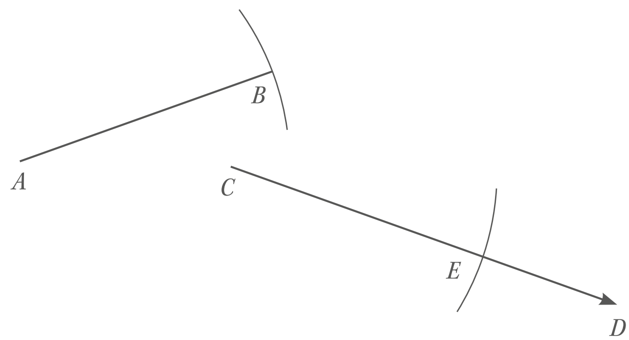


Figura III.49.

El segmento buscado es $\overline{CE}$.

En resumen

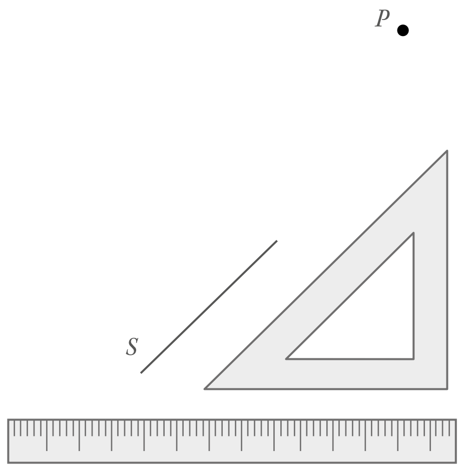
- Las escuadras nos sirve para trazar paralelas y perpendiculares. También nos sirve para marcar ángulos de 45°, de 30° y de 60°.
- El compás lo usamos para trazar circunferencias y arcos, y para copiar medidas.

Ejercicios

1. Considere la construcción que se hizo en el texto, de una recta paralela a otra usando escuadra y regla. ¿Por qué la recta L' es efectivamente paralela a L? Explique.

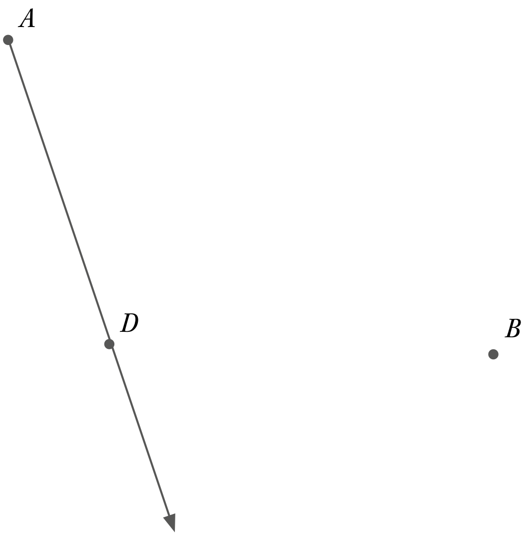
2. Dada una recta L y un punto P fuera de ella, ¿puede construir la recta paralela a L que pasa por P usando la escuadra del carpintero? De ser así, ¿cómo?

3. Dado un segmento S y un punto P fuera de él, ¿cómo trazaría la paralela a S que pasa por P, con regla y escuadra, si desde S no es posible alcanzar P usando la escuadra, pues esta es muy pequeña?



4. Dada una recta L y un punto P fuera de ella, ¿cómo trazaría la perpendicular a L que pasa por P, si desde P no es posible alcanzar P usando la escuadra?

5. Dado el rayo $\overrightarrow{AD}$ y el punto B fuera de él, construya con regla y compás un triángulo que tenga a A y a B como vértices y $\overrightarrow{AD}$ a como una de sus bisectrices.



3.2 Ejemplos de construcciones con regla y compás

- **La mediatriz de un trazo:** recordemos que la mediatriz de un trazo $\overline{AB}$ es la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por el punto medio de ese segmento. Con esto en mente, construyamos la mediatriz de un trazo con regla y compás. Para esto, consideremos un segmento $\overline{AB}$. Con el compás, tracemos una circunferencia con centro en A y radio cercano (puede ser el mismo AB) a AB, y otra con centro B y del mismo radio que el anterior. Esas circunferencias se intersectan en dos puntos, uno a cada lado del trazo $\overline{AB}$. La recta que pasa por esos puntos de intersección de las circunferencias es la mediatriz de $\overline{AB}$.

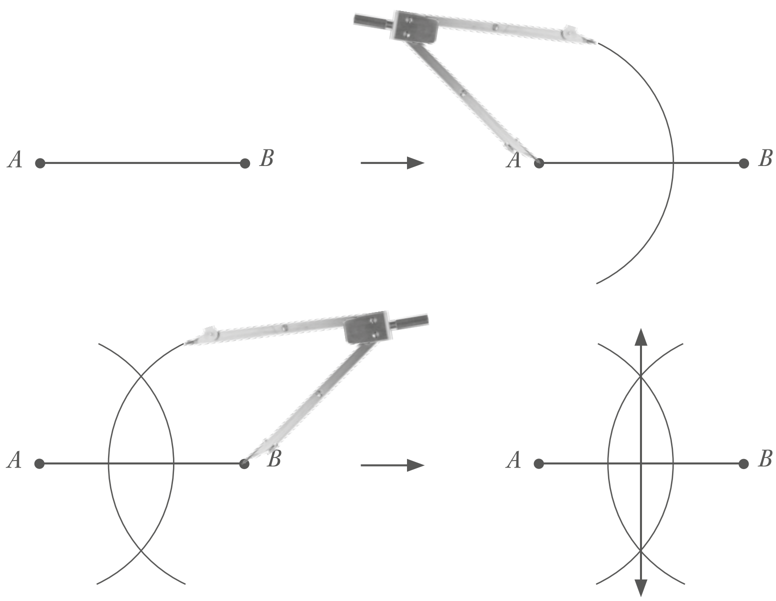


Figura III.50.

- **Triángulo equilátero:** podemos aprovechar la construcción anterior para hacer un triángulo equilátero dado uno de sus lados. Consideremos un trazo $\overline{AB}$, con el compás tracemos una circunferencia con centro en A y radio AB y otra del mismo radio, pero con centro en B. Marquemos como C una de las intersecciones de esas circunferencias. El triángulo ΔABC es equilátero, pues $AB = AC = BC$.

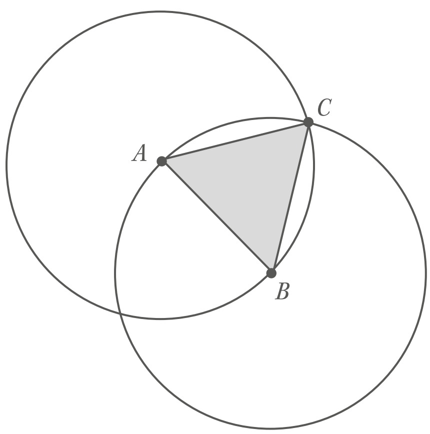


Figura III.51.

- **Copiar un ángulo sobre un rayo dado:** consideremos un ángulo $\angle ABC$ y un rayo $\overrightarrow{PQ}$.

Figura III.52.

Abrimos el compás con una punta en A y otra en B, hacemos una circunferencia con centro en P y radio AB y denotamos por D la intersección de esa circunferencia h con $\overrightarrow{PQ}$.

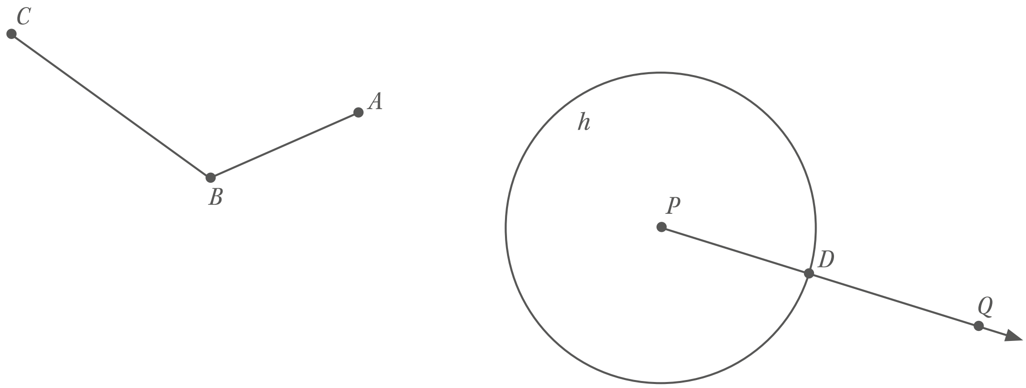


Figura III.53.

Luego, usamos el mismo procedimiento para hacer una circunferencia con centro en P, y con radio BC y llamamos a esa circunferencia i.

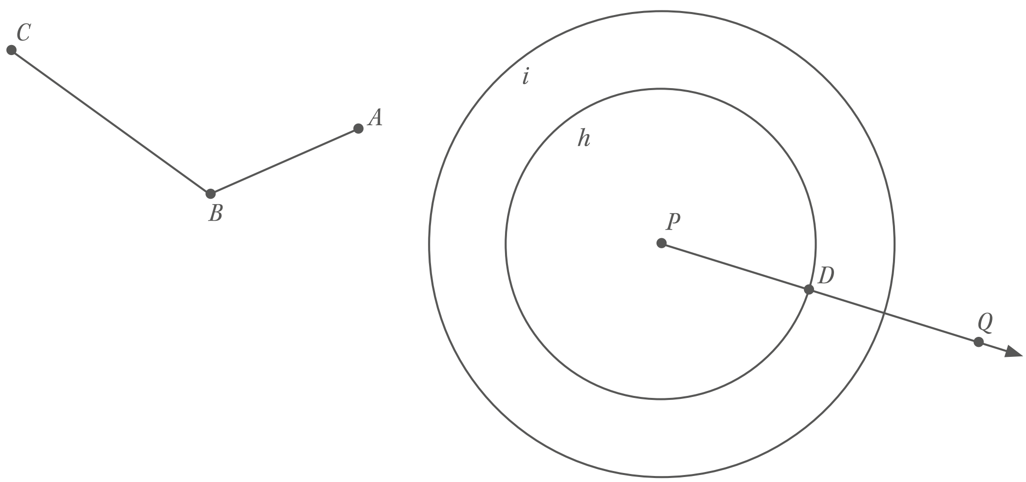


Figura III.54.

Para finalizar trazamos la circunferencia con centro en D y radio AC, denotamos por k a esa circunferencia y llamamos E a una de las intersecciones de k con i. El ángulo $\angle DPE$ es congruente con el $\angle ABC$.

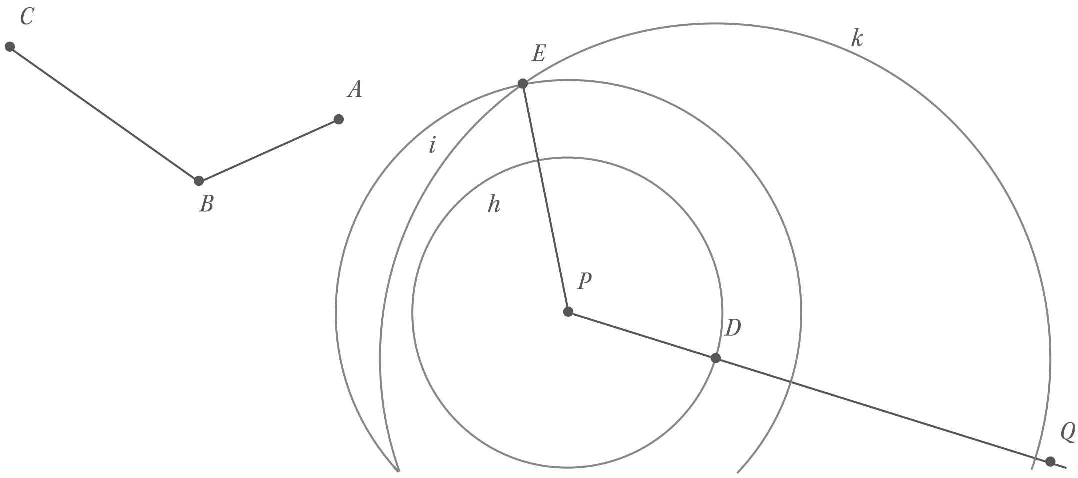


Figura III.55.

- **Bisecar un ángulo:** también podemos construir la bisectriz de un ángulo dado. Consideremos un ángulo $\measuredangle ABC$, con el compás con la aguja en B hagamos una marca en $\overline{AB}$ y otra en $\overline{BC}$, llamemos a esas marcas R y Q, respectivamente.

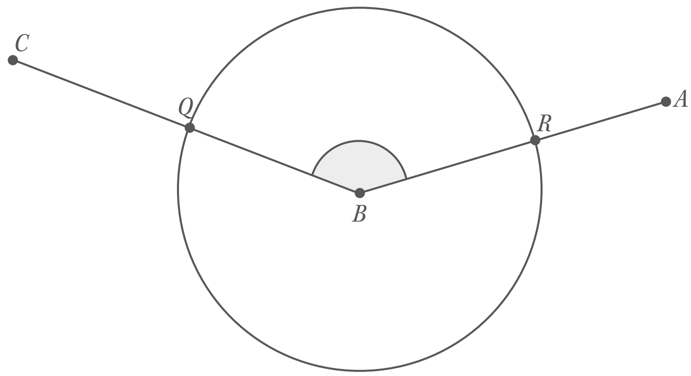


Figura III.56.

Ahora, con el compás hagamos 2 circunferencias de radio BR, una con centro en R y otra con centro en Q. Estas 2 circunferencias se intersectan en 2 puntos, uno de ellos es B, al otro llamémoslo D.

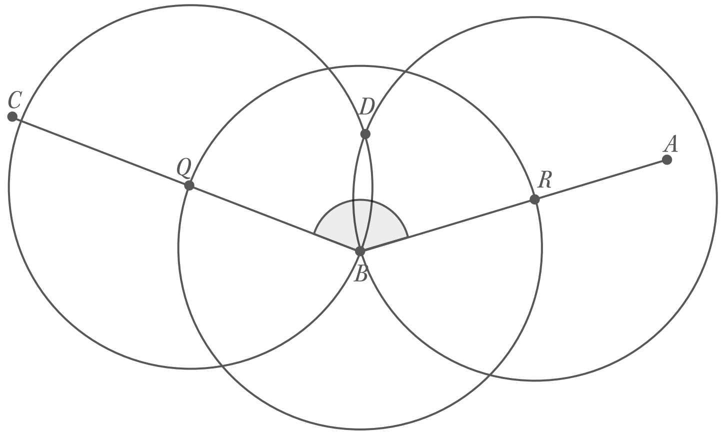


Figura III.57.

El rayo de origen B que pasa por D es la bisectriz del ángulo $\measuredangle ABC$.

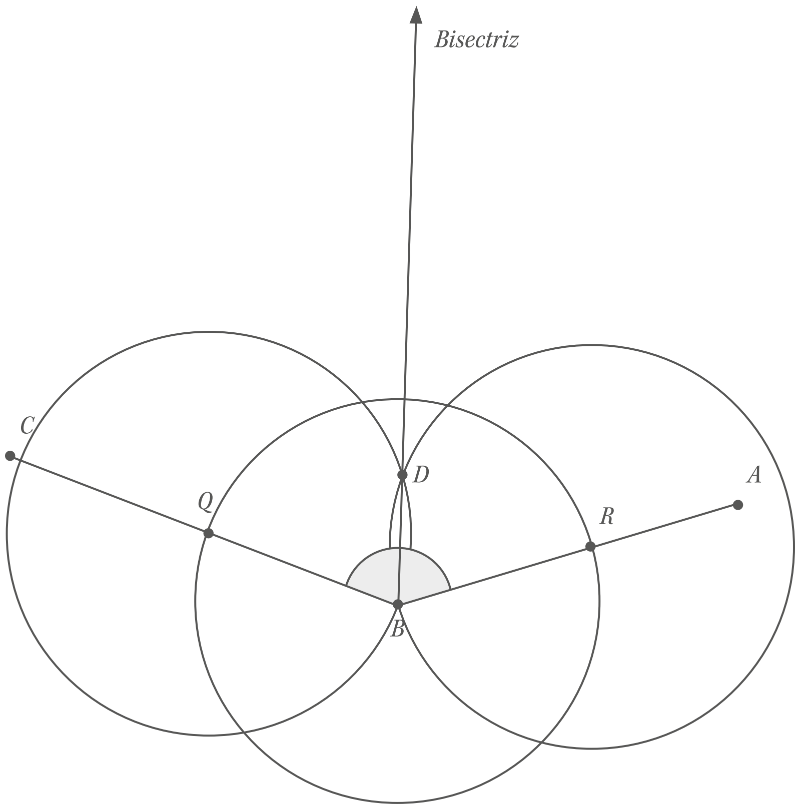
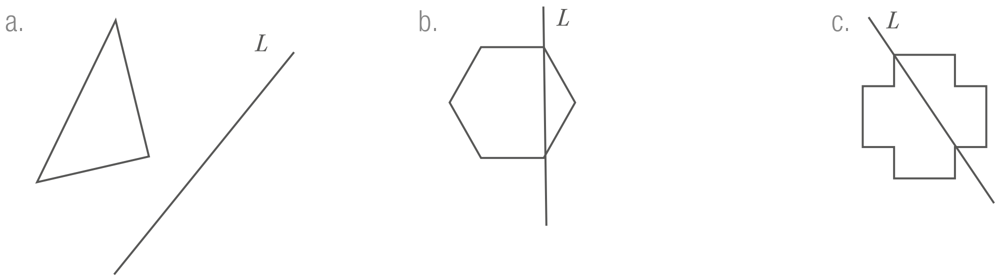


Figura III.58.

Ejercicios del capítulo

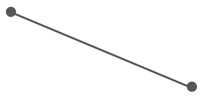
1. Construya un paralelogramo con sus 4 lados de la misma medida.[9]
2. Construya la rotación de un punto respecto de un centro dado O y ángulo dado.
3. Dada una recta describa, cómo construir la reflexión de un punto con regla y compás.
4. Use regla y compás para reflejar las siguientes figuras con respecto a la recta L.



[9] Un paralelogramo cuyos lados miden lo mismo se llama *rombo*.

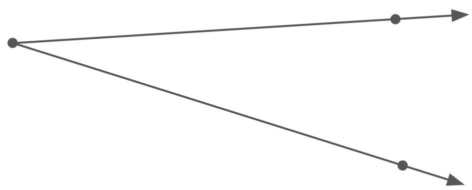
5. Explique por qué el procedimiento para copiar con regla y compás un ángulo efectivamente funciona.

6. Construya un cuadrado que tenga el siguiente segmento como uno de sus lados.



7. Construya un cuadrado que tenga el siguiente segmento como una de sus diagonales.

8. Construya un triángulo isósceles en el que uno de sus ángulos sea el que se muestra abajo.



9. Construya un ángulo de 30°.

10. Construya un ángulo de 120°.

11. Recordemos que dijimos que 2 figuras en el plano son congruentes si existe una isometría que transforma a una en la otra. Muestre que 2 segmentos son congruentes si y solo si miden lo mismo. Describa las isometrías que utilizó.

12. Muestre que 2 cuadrados son congruentes si y solo si las medidas de sus lados coinciden. Describa las isometrías que utilizó.

13. Muestre que 2 circunferencias son congruentes si y solo si sus radios miden lo mismo.

14. Muestre que la diagonal de un rectángulo lo divide en 2 triángulos congruentes.

Capítulo
IV

Área y perímetro

"Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, solo se les revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella".

C. F. Gauss.

Introducción

Como hemos dicho antes, etimológicamente, *geometría* quiere decir "medida de la Tierra". Sin embargo, los objetos geométricos y matemáticos en general, son ideales, es decir no existen en el mundo real, solo viven en el mundo de las ideas. Entonces, las rectas, los círculos, las circunferencias no existen en la realidad, solo en nuestras mentes, pero pretenden idealizar objetos reales. Si se hace girar con la mano una piedra amarrada a una pita, la trayectoria de la piedra será algo parecido a una circunferencia, pero no será una circunferencia, porque la mano se mueve, la pita se estira, la gravedad atrae la piedra hacia abajo, etc.

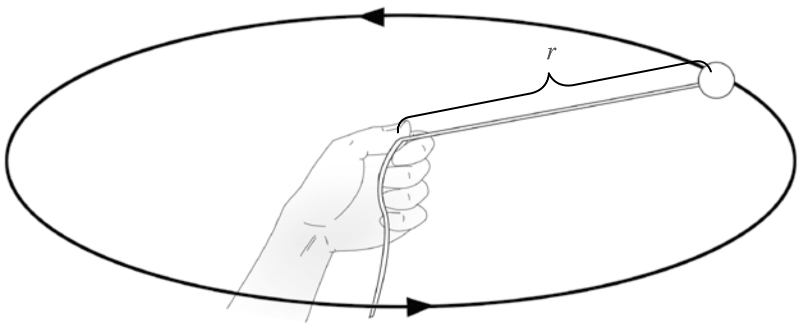


Figura IV.1.

Por lo tanto, en este capítulo, a diferencia del **Capítulo I** en donde la medición se estudia más bien desde un punto de vista físico, se dedica al perímetro y al área de figuras geométricas (ideales). Así, para medir esos atributos usaremos propiedades geométricas de los objetos y no haremos una acción física para medir.

En este capítulo, encontraremos fórmulas que dependen de medidas lineales para conocer el área y el perímetro de figuras. Para ello, usaremos argumentos deductivos, que surgen de las definiciones y propiedades de los objetos.

1. Área de figuras planas

Como vimos en el **Capítulo I**, el área es un atributo que poseen las superficies.

Si tenemos una superficie plana, es decir, que está contenida en un plano, el área de esa superficie la mediremos contando la cantidad de cuadrados unidades que caben en la superficie.

Figura IV.2.

En la figura, se muestra una superficie rectangular cuya área es 24 unidades cuadradas. Si la unidad cuadrada es un cuadrado cuyo lado mide una unidad de longitud u, entonces denotaremos la unidad cuadrada como u^2. Por ejemplo, si la unidad de longitud es un centímetro, entonces la unidad cuadrada será 1 centímetro cuadrado y corresponde al área que posee un cuadrado cuyo lado mide 1 centímetro, y lo anotamos como 1 cm^2.

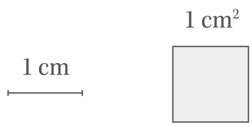


Figura IV.3.

Concentrémonos por ahora en calcular el área de un rectángulo. Si la unidad de longitud es u, pensemos en un rectángulo cuyos lados miden $1u$ y $5u$.

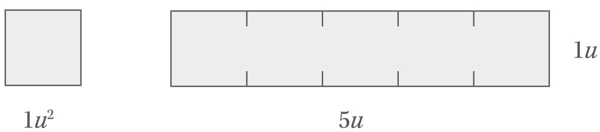


Figura IV.4.

Entonces, en el rectángulo caben exactamente 5 unidades cuadradas, pues podemos trazar las paralelas al lado que mide $1u$, a una unidad de ese lado, a dos unidades de ese lado, y así sucesivamente, y se obtienen 5 cuadrados de lado $1u$.

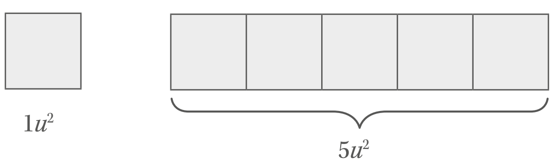


Figura IV.5.

Ahora, pensemos en un rectángulo cuyos lados miden $4u$ y $5u$.

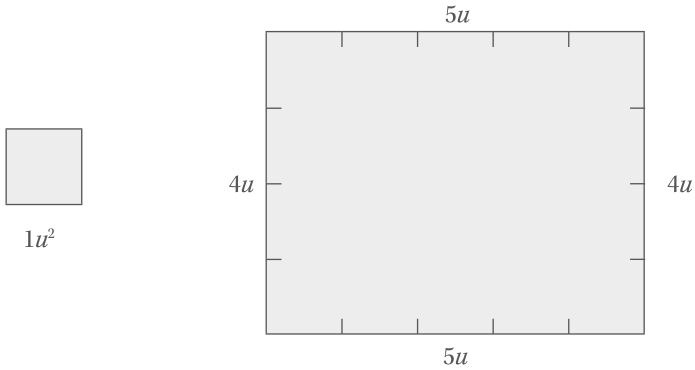


Figura IV.6.

Podemos trazar las paralelas a los lados, a distancia de $1u$, $2u$, $3u$, $4u$, etc. Entonces, resulta una grilla, donde el área de cada cuadrado es $1u^2$.

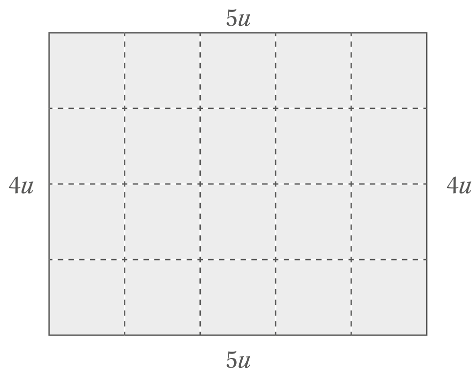


Figura IV.7.

Entonces, el área de ese rectángulo es $20\ u^2$. Pues podemos pensar que son 4 filas, donde cada fila es un rectángulo de lados $1u$ y $5u$ que como vimos tiene un área de $5u^2$. Entonces, como tenemos 4 de esas filas, entonces tenemos 4 veces $5u^2$, es decir $20u^2$.

En general, si un rectángulo cuyos lados miden $1u$ y nu, donde n es un número natural, tiene la misma área de una hilera de n cuadrados cuyos lados miden $1u$. Entonces, el área de ese rectángulo es nu^2.

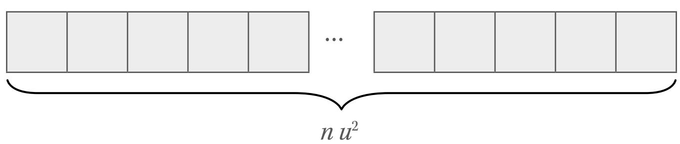


Figura IV.8.

Si n y m son números naturales, un rectángulo de lados nu y mu lo podemos pensar como m rectángulos apilados de lados $1u$ y nu. Entonces, cada rectángulo aplilado tiene nu^2 de área, y como hay m de esos rectángulos, el área total es $m \cdot nu^2$, es decir mnu^2.

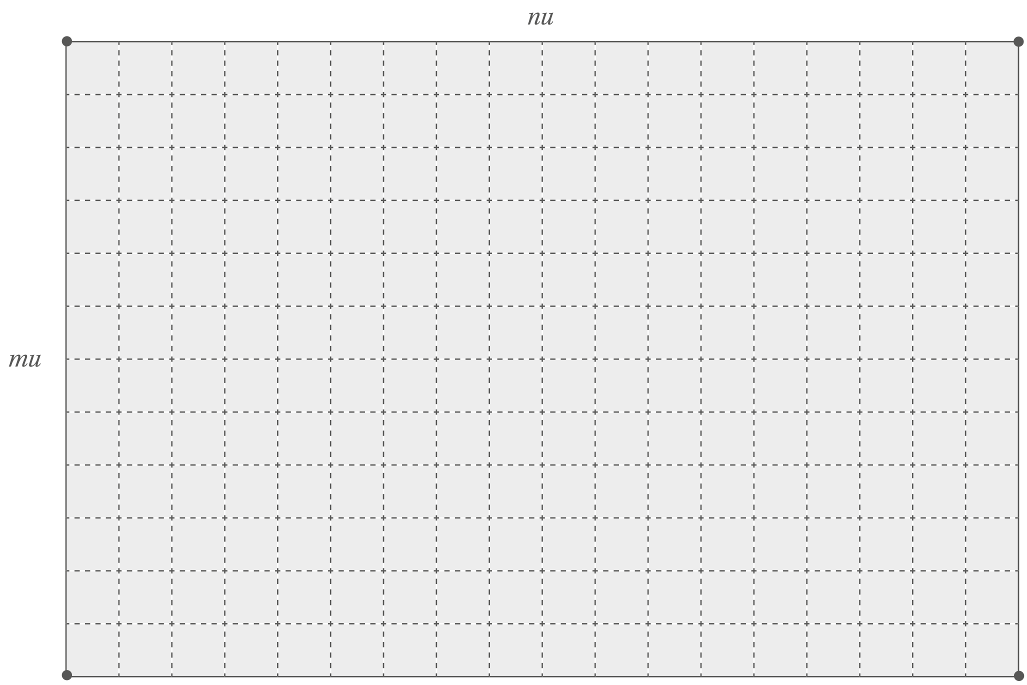


Figura IV.9.

Por lo tanto, es natural decir, que el área de un rectángulo cuyos lados miden n y m unidades u, es $nm\ u^2$.

Nota: En el **Capítulo III** del libro *Números* de esta colección, se utiliza el área de un rectángulo como representación gráfica de la multiplicación. Por ejemplo, ahí se muestra lo útil, de esta representación para entender la conmutatividad de la multiplicación.

Pero, ¿qué pasa si los lados del rectángulo no corresponde a una medida entera de la unidad? Por ejemplo, pensemos en un cuadrado de lado $\frac{1}{3}u$. Entonces podemos extender cada uno de los lados hasta alcanzar la unidad.

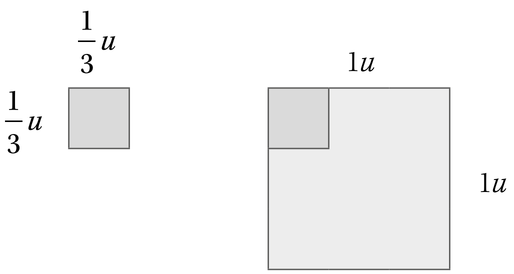


Figura IV.10.

Como un tercio de u cabe 3 veces en una u, se puede pensar que el cuadrado de lado de una unidad contiene 3 hileras de 3 cuadrados de lado $\frac{1}{3}u$.

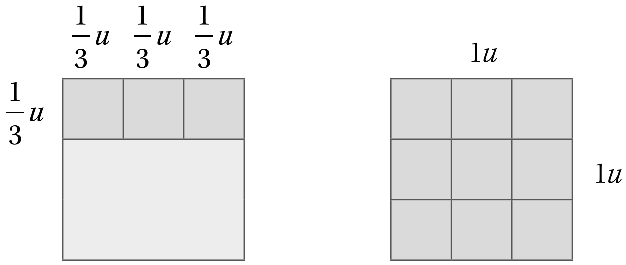


Figura IV.11.

Es decir, el cuadrado cuyo lado es una unidad contiene exactamente 9 cuadrados cuyo lado mide $\frac{1}{3}u$. Por lo tanto, el área de un cuadrado de lado $\frac{1}{3}u$ es un noveno de u^2, $\frac{1}{9}u^2$.

Del mismo modo, si n es un número natural, consideremos un cuadrado de lado $\frac{1}{n}u$, entonces cada uno de sus lados se puede extender hasta formar un cuadrado cuyo lado mide una unidad. Como en un u caben n segmentos de largo $\frac{1}{n}u$, podemos marcar hileras, donde en cada hilera caben n cuadrados de lado $\frac{1}{n}u$.

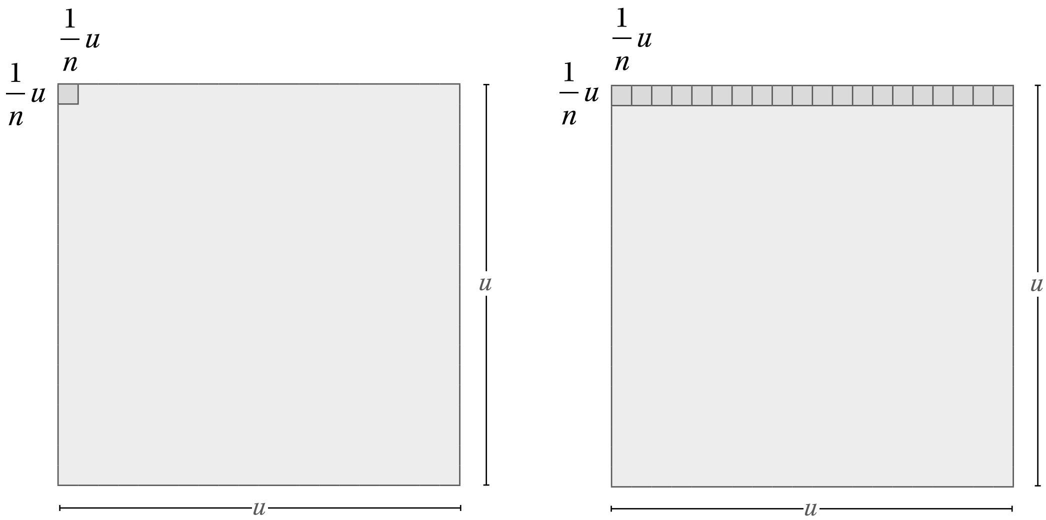


Figura IV.12.

Como en total tenemos n de esas hileras, entonces, en el cuadrado cuyo lado mide una unidad, tenemos $n \cdot n$ cuadrados cuyos lados miden $\frac{1}{n}u$. Por lo tanto, el área de un cuadrado de lado $\frac{1}{n}u$ cabe n^2 veces en el cuadrado de lado $1u$. Es decir, el área de un cuadrado de lado $\frac{1}{n}u$ mide $\frac{1}{n^2}u^2$.

Ahora, a modo de ejemplo, calculemos el área de un rectángulo de lados $\frac{4}{5}u$ y $\frac{2}{3}u$. Podríamos dividir uno de los lados en quintos y el otro lado en tercios, pero esta división produciría rectángulos no cuadrados. ¿Cómo podemos hacer para que la división en uno de los lados y en el otro produzca cuadrados?

Una respuesta es usar una fracción que sea igual a $\frac{4}{5}$ y otra que sea igual a $\frac{2}{3}$, pero que ambas tengan el mismo denominador. Por ejemplo tenemos que:

$$\frac{4}{5}=\frac{12}{15} \text{ y } \frac{2}{3}=\frac{10}{15}$$

Entonces, tenemos un rectángulo de lados $\frac{12}{15}u$ y $\frac{10}{15}u$.

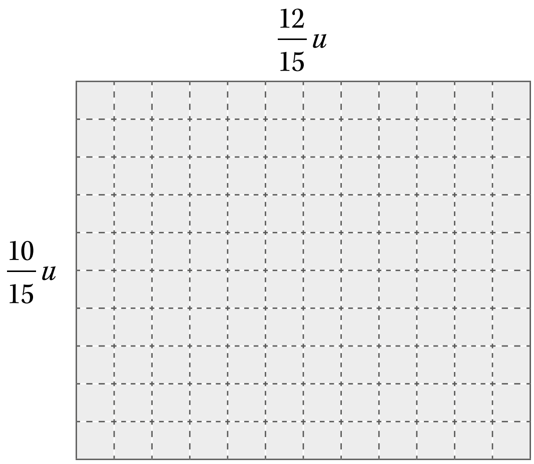


Figura IV.13.

Así, tenemos 120 cuadrados cuyo lado mide $\frac{1}{15}u$, y es lo mismo que decir que el área total del rectángulo es igual a 120 veces $\frac{1}{15^2}u^2$. Por lo tanto, el área del rectángulo es:

$$\frac{120}{15^2}u^2=\frac{8}{15}u^2$$

Que es lo mismo que $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}u^2$.

En general, si $a=\frac{m}{n}$ y $b=\frac{k}{l}$ son dos fracciones de números naturales, entonces consideremos un rectángulo de lados au y bu. Notemos que $a=\frac{m}{n}=\frac{ml}{nl}$ y $b=\frac{k}{l}=\frac{nk}{nl}$; por lo tanto si dividimos cada lado del rectángulo en segmentos de $\frac{1}{nl}$, entonces en el lado de largo a caben ml segmentos de largo $\frac{1}{nl}$, y en el lado de largo b caben nk segmentos de lado $\frac{1}{nl}$. De esta forma, esta división produce cuadrados cuyo lado mide $\frac{1}{nl}$.

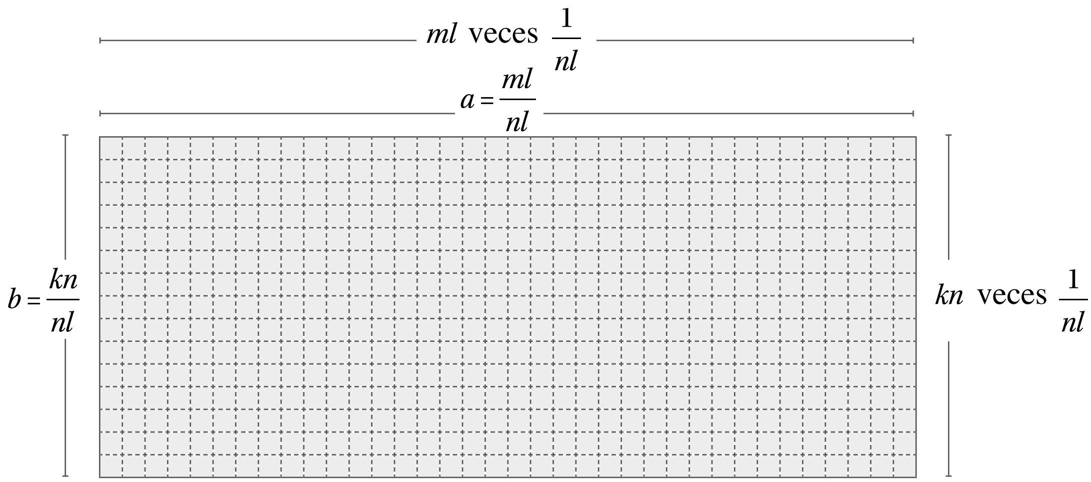


Figura IV.14.

Así, en total tenemos $kn \cdot ml$ cuadrados cuyo lado mide $\frac{1}{nl}u$. Como cada cuadrado de lado $\frac{1}{nl}u$ tiene área $\frac{1}{(nl)^2}u^2$, entonces el área total del rectángulo es

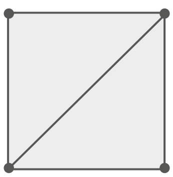
$$(kn \cdot ml)\frac{1}{(nl)^2}u^2$$

$$\frac{knml}{nlnl}u^2 = \frac{km}{nl}u^2 = (\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l})u^2 = abu^2$$

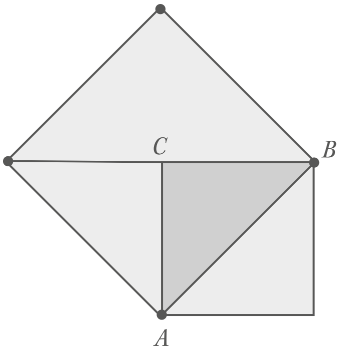
Por lo tanto, hasta ahora tenemos que si un rectángulo tiene lados que miden au y bu con a y b números racionales positivos, entonces el área del rectángulo es abu^2.

Ejemplo

Pensemos en un cuadrado cuyo lado mide $1u$ y dibujemos una de sus diagonales:



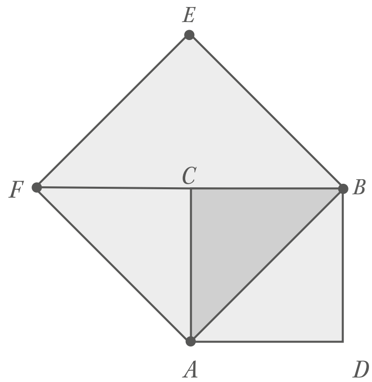
Ahora, consideremos el cuadrado cuyo lado mide lo mismo que la diagonal del cuadrado anterior:



Demostremos que el área[1] del cuadrado grande es:

$$\acute{A} = 2u^2$$

De hecho, el área del triángulo ΔABC es la mitad del área del cuadrado pequeño y es la cuarta parte del área del cuadrado grande.



Entonces,

$$\acute{A}(ABEF) = 4\acute{A}\,(ABC) = 4 \cdot \frac{1}{2}\acute{A}(ADBC) = 2u^2$$

Como probaremos más adelante, el lado del cuadrado *ABEF* es $\sqrt{2}$ que no es un número racional, sin embargo, en este caso también se cumple que el área del cuadrado *ABCD* es la multiplicación de la medida del lado por sí mismo.

Si las medidas de un rectángulo son a y b unidades, donde a y b no son necesariamente fracciones, es natural pensar que el área de ese rectángulo es ab unidades cuadradas, como una extensión de lo que ocurre en las fracciones, y es así como lo asumiremos de aquí en adelante.

En resumen

El área de un rectángulo de lados a y b unidades es ab unidades cuadradas. En particular el área de un cuadrado cuyo lado mide a unidades, será $a \cdot a = a^2$ unidades cuadradas.

Consideremos un triángulo rectángulo de catetos que miden a y c.

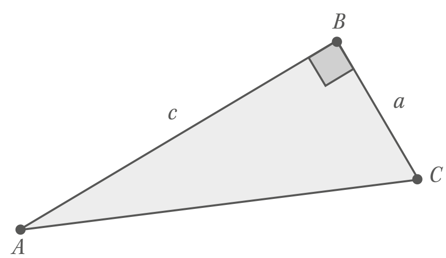


Figura IV.15.

[1] En lo sucesivo, dada una figura F, denotaremos su área por $\acute{A}(F)$. Por ejemplo, el área del cuadrado de vértices *ABCD*, la denotaremos como $\acute{A}(ABCD)$.

Tracemos la recta L paralela a $\overline{BC}$ que pasa por A y la recta perpendicular a L y que pasa por C.

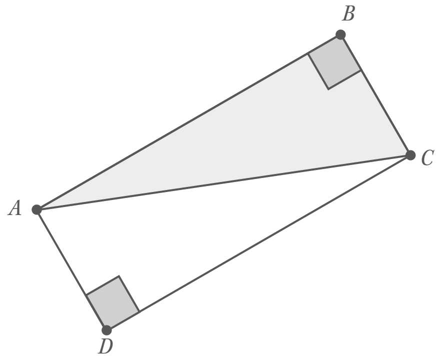


Figura IV.16.

Denotemos por D la intersección de esas dos rectas y así tenemos el rectángulo $ABCD$, cuya área es ac. Como el área del triángulo ΔABC es la mitad del rectángulo, entonces:

$$\acute{A}\,(\Delta ABC) = \frac{ac}{2}$$

Por lo tanto, el área del triángulo rectángulo de catetos que miden a y c es la mitad del producto de las medidas de sus catetos.

1.1 Área del paralelogramo

En un paralegramo de lados que miden a y b unidades y consideremos la altura que une el vértice A con el lado $\overline{CD}$ que mide h unidades.

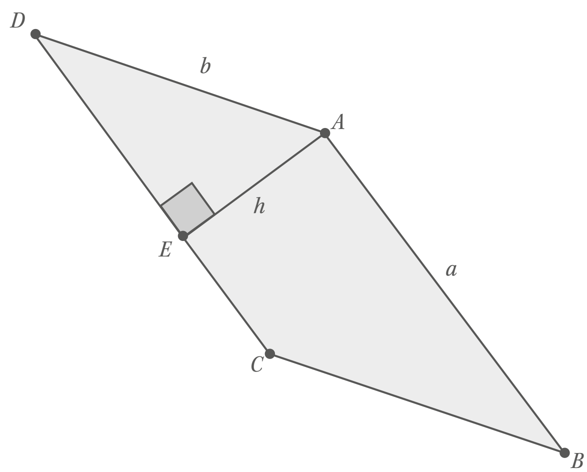


Figura IV.17.

Tracemos ahora el segmento $\overline{CF}$ paralelo a $\overline{AE}$. Entonces, *ECFA* es un paralelogramo el cual tiene en uno de sus ángulos interiores un ángulo recto. Por lo tanto *ECFA* es un rectángulo.

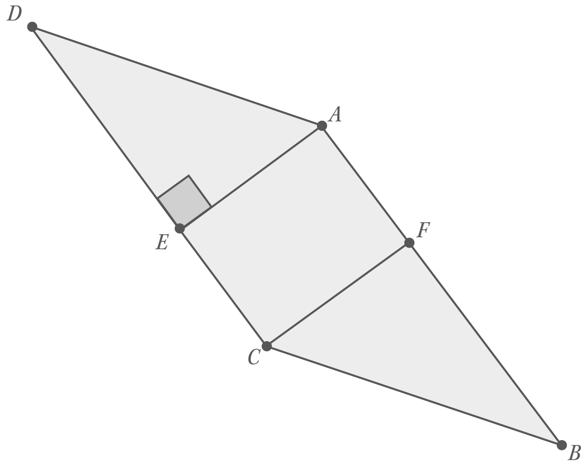


Figura IV.18.

Entonces, $\overline{AE} \cong \overline{FC}$ y $\overline{AF} \cong \overline{EC}$. Como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden $\boldsymbol{a}$ y $\overline{AF}$ y $\overline{EC}$ miden lo mismo, $\overline{FB}$ y $\overline{DE}$ miden lo mismo. Por lo tanto, los triángulos rectángulos ΔAED y ΔCFB son congruentes. Así, podemos cortar el triángulo ΔAEC, yuxtaponer al triángulo ΔDFB y formar un rectángulo:

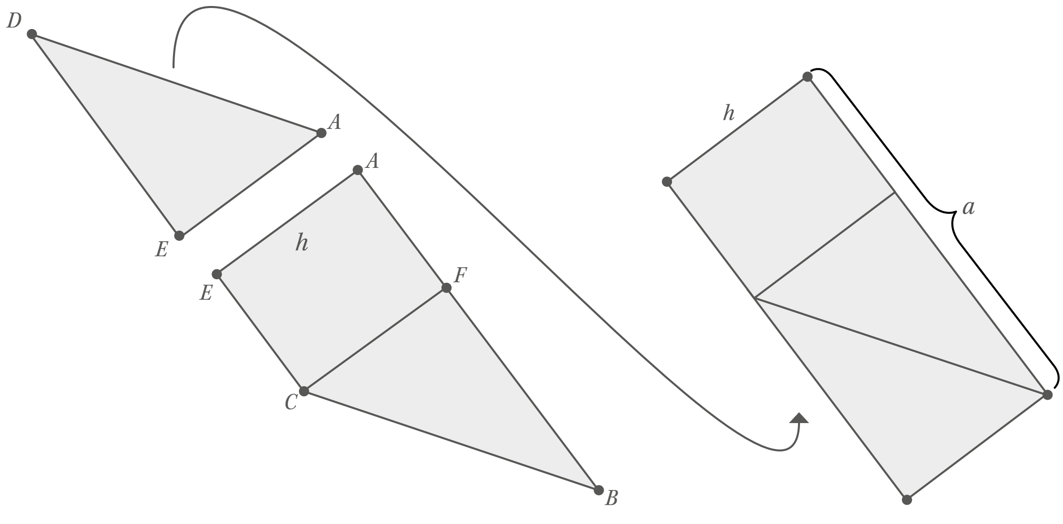


Figura IV.19.

Y resulta un rectángulo cuyos lados miden $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{h}$ unidades

Entonces, el área de un paralelogramo, donde uno de sus lados mide $\boldsymbol{a}$ y la altura que es perpendicular a ese lado mide $\boldsymbol{h}$, tiene la misma área que el rectángulo cuyo lados miden $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{h}$ unidades.

En resumen

Si en un paralelogramo uno de sus lados mide a unidades y la altura perpendicular a ese lado mide h unidades, entonces el área del paralelogramo es ah unidades cuadradas.

Una forma de mostrar esto a los niños es mediante recortes de papel. La siguiente imagen muestra como haciendo cortes en un paralelogramo de papel lustre, se ve la propiedad que acabamos de desarrollar:

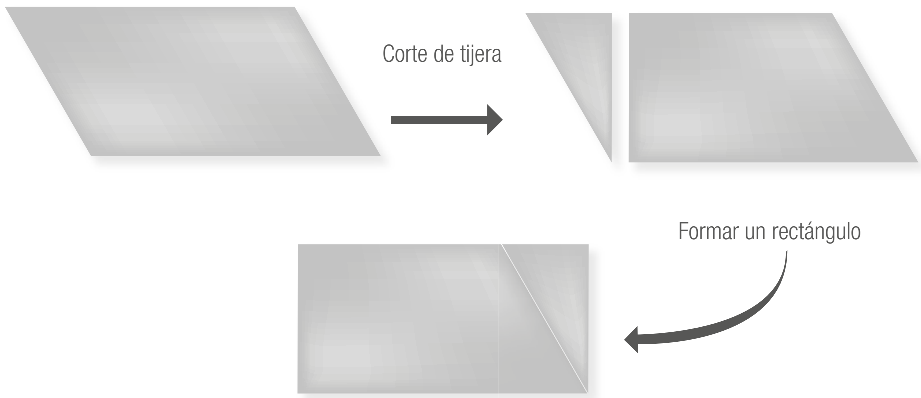
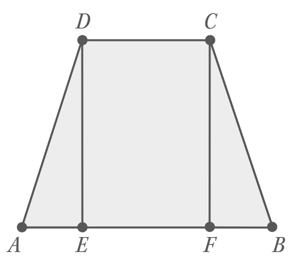


Figura IV.20.

Lo anterior no constituye una demostración formal del resultado, pero muestra la misma idea que el argumento matemático.

Ejercicios

1. Considere un trapecio como el que se muestra abajo. El ángulo $\measuredangle DAE$ es congruente a $\measuredangle CBF$ y los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$ son alturas que miden h unidades. Si $\overline{CD}$ mide a unidades y $\overline{AB}$ mide b unidades.



a. Pruebe que los triángulos ΔAED y ΔBFC son congruentes.

b. Demuestre que el segmento $\overline{FB}$ mide $\dfrac{b-a}{2}$ unidades.

c. Compruebe que el área del trapecio es igual al área de un rectángulo de lados h y $a+\dfrac{b-a}{2}$ unidades.

d. Muestre que el área del trapecio es $h \cdot \dfrac{a+b}{2}$.

1.2 Área del triángulo

Consideremos un triángulo ΔABC cualquiera.

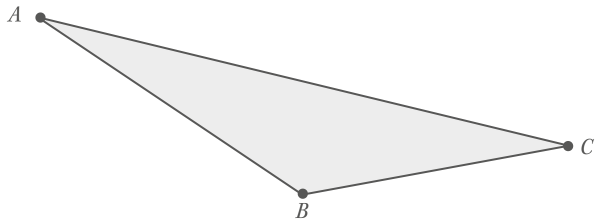


Figura IV.21.

Dibujemos ahora la paralela a $\overline{BC}$ que pasa por A y la paralela a $\overline{AB}$ que pasa por C, y denotemos con D el punto de intersección de esas dos rectas.

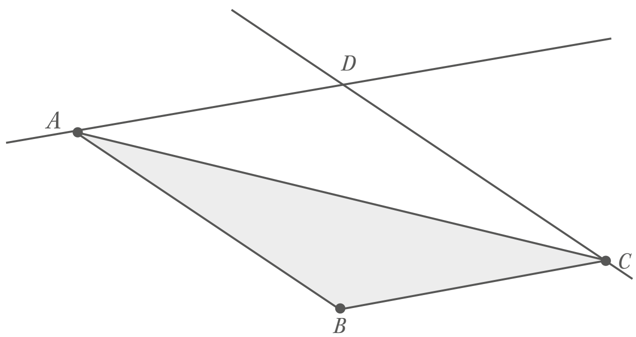


Figura IV.22.

Así, $ABCD$ es un paralelogramo cuya diagonal es $\overline{AC}$, y los triángulos ΔABC y ΔADC son congruentes. Por lo tanto, el área del paralelogramo es el doble del área del triángulo ΔABC. Pero el área del paralelogramo la sabemos calcular si conocemos lo que mide la altura del paralelogramo.

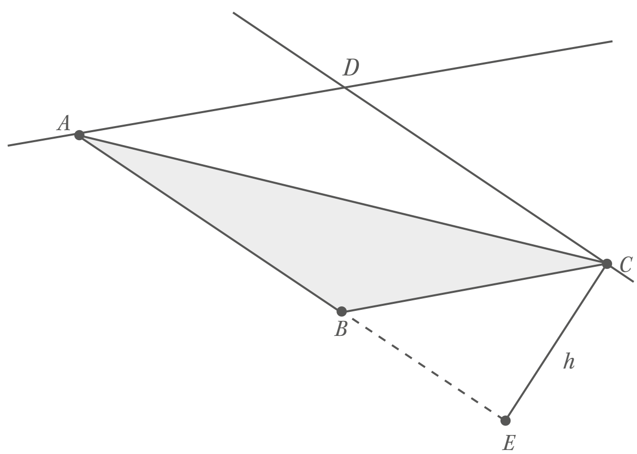


Figura IV.23.

Ahora consideremos el lado $\overline{AB}$ y digamos que mide b unidades y la altura perpendicular a ese lado digamos que mide h unidades. Entonces el área del paralelogramo es bh unidades cuadradas. Como el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo, por lo tanto, el área del triángulo ΔABC es:

$$\frac{bh}{2}$$

Es decir, el área de un triángulo es la mitad del producto de la medida de uno de sus lados y la altura perpendicular a ese lado. El valor del área es independiente del lado y la altura correspondiente para calcularla, es decir, si un triángulo ΔABC tiene lados de medidas a, b y c y alturas correspondientes a h, k, l, entonces:

$$Á(\Delta ABC) = \frac{ah}{2} = \frac{bk}{2} = \frac{cl}{2}$$

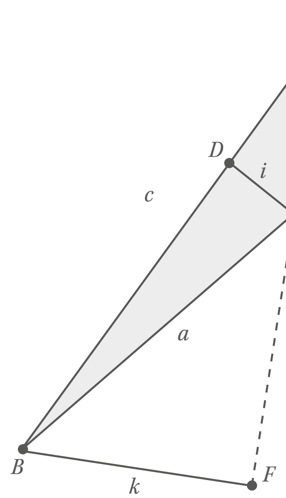


Figura IV.24.

Algo que se desprende inmediatamente de la fórmula del área del triángulo es que si dos triángulos tienen un lado en común (o que miden lo mismo) y las alturas correspondientes a ese lado en cada triángulo miden lo mismo, entonces sus áreas son iguales. En la figura de abajo se muestra el triángulo ΔABC, luego se trazó la paralela a $\overline{AB}$ que pasa por C, se marcaron los puntos D y E en esa recta y se formaron los triángulos ΔABE y ΔABD.

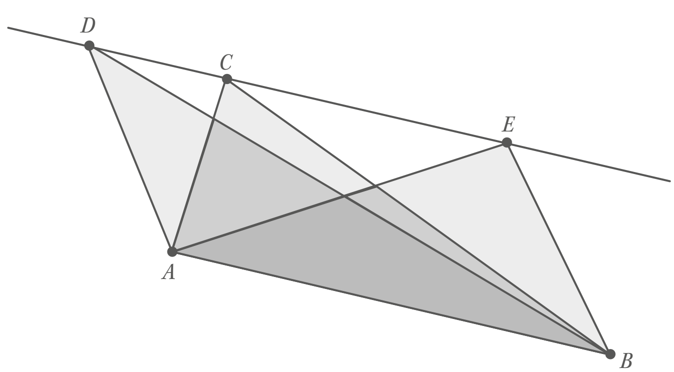


Figura IV.25.

Ahora bien, si trazamos las alturas que pasan por *D*, por *C* y por *F* que son perpendiculares a $\overline{AB}$.

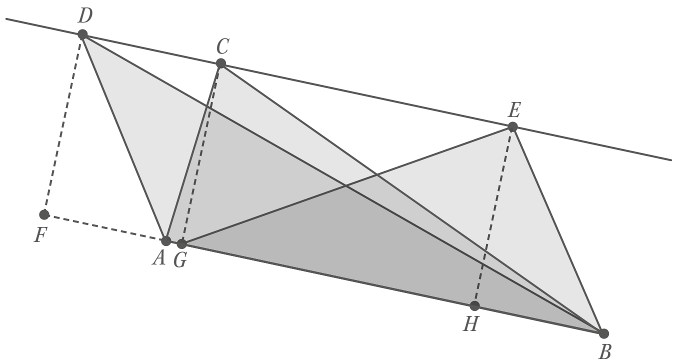


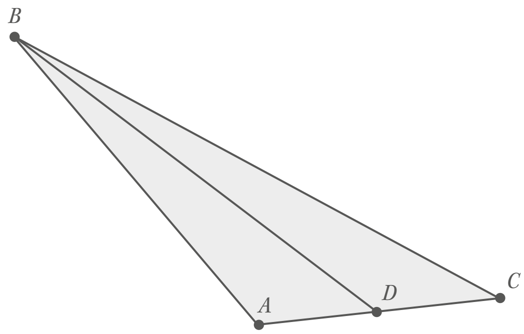
Figura IV.26.

Vemos que *DFGC* es un rectángulo (¿por qué?) entonces *FD* = *CG*. Del mismo modo, *GC* = *EH*, por lo tanto, esas tres alturas miden lo mismo, y los triángulos ΔABC, ΔABE y ΔABD tienen la misma área. De hecho, cualquier triángulo Δ*ABP* con *P* en la recta $\overleftrightarrow{EC}$ tiene la misma área que el triángulo Δ*ABC*.

Ejemplo

En este ejemplo, usaremos la fórmula del área para demostrar que la mediana[2] de un triángulo lo divide en dos triángulos de igual área.

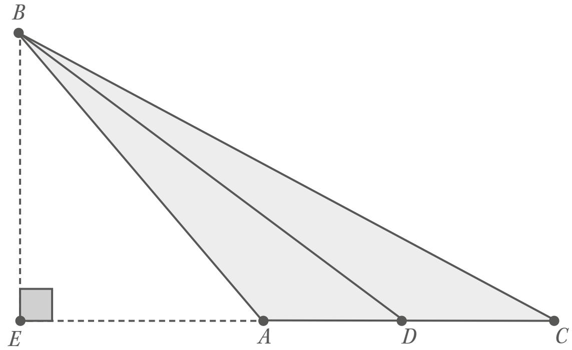
Consideremos el triángulo Δ*ABC* (hemos dibujado uno que no es equilátero, ni isósceles, ni rectángulo; obviamente será de todos modos uno "particular". Así, para la demostración, trataremos de deducir argumentos sin dejarnos influenciar por el dibujo).



El segmento $\overline{BD}$ es una mediana, es decir *D* es punto medio del segmento $\overline{AC}$, entonces, *AD* = *DC*. Lo que tenemos que demostrar es que el área de Δ*BAD* es la misma que la de Δ*BDC*.

[2] Recordar que en Chile a la mediana se le llama *transversal de gravedad*.

Para ello tracemos la altura que pasa por B y es perpendicular a $\overline{AC}$.

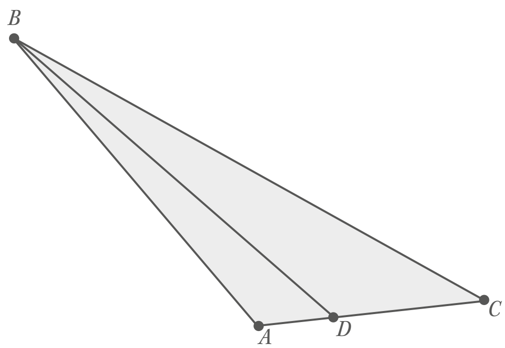


En este punto, debemos notar algo importante para la solución del problema. El segmento $\overline{BE}$ es la altura del triángulo ΔABC, pero también de los triángulos ΔBAD y ΔBDC. Por lo tanto, el área del triángulo ΔBAD es $\dfrac{BE \cdot AD}{2}$ y el área del triángulo ΔBDC es $\dfrac{BE \cdot DC}{2}$. Como $AD = DC$, entonces el área de los triángulos ΔBAD y ΔBDC es la misma. Además, corresponde a la mitad del área del triángulo ΔABC.

Ejercicios

1. En el ejemplo anterior, usamos una altura que está en el exterior del triángulo original, ¿influye esto en el resultado?

2. Considere un triángulo ΔABC cualquiera y un punto D que está en el segmento $\overline{AC}$, de tal forma que $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{1}{2}$. ¿Cuál es la razón entre las áreas de los triángulos ΔBAD y ΔBDC?



Observemos lo siguiente: Consideremos un triángulo ΔABC cualquiera y $\overline{CD}$, una bisectriz como se muestra en la figura:

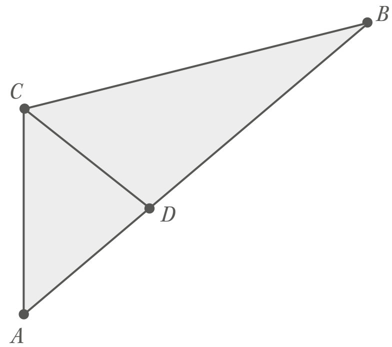


Figura IV.27.

Ahora, consideremos la altura de medida h correspondiente al vértice C.

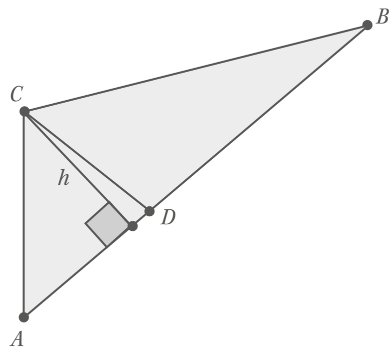


Figura IV.28.

Notemos que h es altura de los triángulos ΔABC, ΔADC y ΔBDC. Por lo tanto:

$$\acute{A}(\triangle ADC) = \frac{1}{2} AD \cdot h \text{ y } \acute{A}(\triangle BDC) = \frac{1}{2} DB \cdot h$$

Como D está en la bisectriz del ángulo $\measuredangle ACB$, entonces equidista de $\overline{CB}$ y de $\overline{AC}$, por lo tanto, las alturas que correspondientes a D en los triángulos ΔADC y ΔDBC miden lo mismo. Digamos que esa medida común es k, como vemos en la **Figura IV.29**. Entonces, tenemos que:

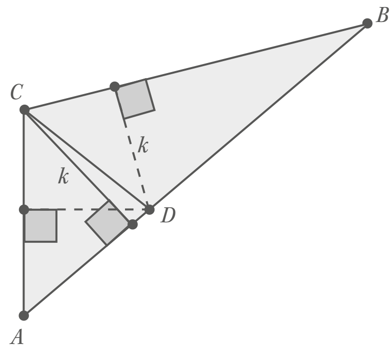


Figura IV.29.

$$\acute{A}(\triangle ADC) = \frac{1}{2} AC \cdot k \text{ y } \acute{A}(\triangle BDC) = \frac{1}{2} BC \cdot k$$

Estas relaciones pueden escribirse también en función de la medida *h*, como sigue:

$$\acute{A}(\triangle ADC) = \frac{1}{2} AD \cdot h$$

$$\acute{A}(\triangle BDC) = \frac{1}{2} DB \cdot h$$

Entonces, resultan las siguientes igualdades:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{h}{k}$$

$$\frac{BC}{DB} = \frac{h}{k}$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

Este resultado se conoce como Teorema de la Bisectriz, el cual enunciaremos ahora:

Teorema IV.1: de la bisectriz

Considere un triángulo ΔABC y denotemos por D la intersección de la bisectriz correspondiente a C con el lado $\overline{AB}$, entonces:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

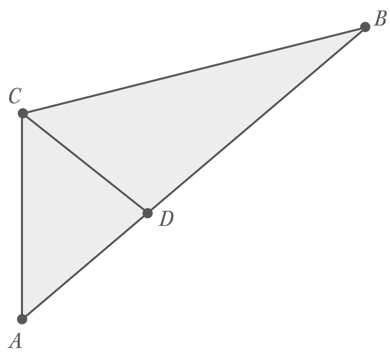


Figura IV.30.

Ejercicios

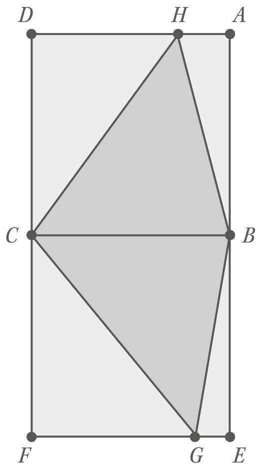
1. ¿Es cierto el recíproco del Teorema de la Bisectriz? Es decir, si en un triángulo ΔABC se tiene un punto D en el lado $\overline{AB}$, tal que:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$$

¿Es cierto que $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz del ángulo $\measuredangle ACB$?

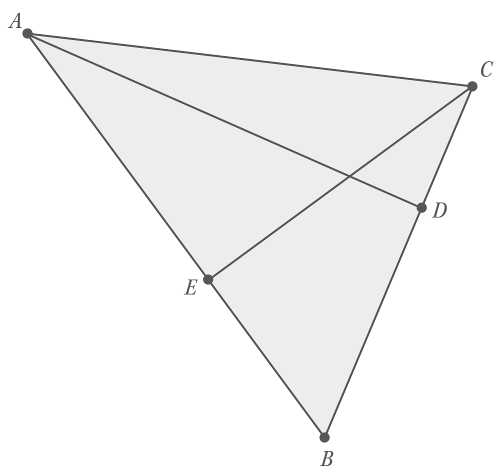
2. Los cuadriláteros $ABCD$ y $BEFC$ son cuadrados y DC = 4 cm. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $GCHB$?

a. 24 cm^2
b. 16 cm^2
c. 12 cm^2
d. 8 cm^2



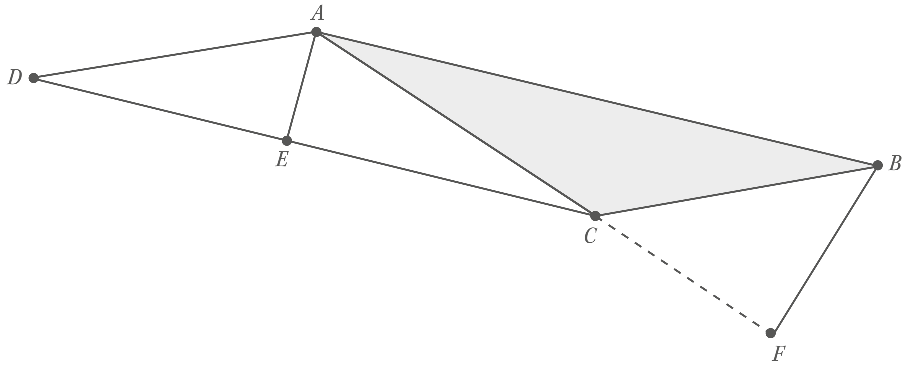
3. Considere un triángulo ΔABC, en el cual se han trazado las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$. Demuestre que:

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AB}{BC}$$



4. Consideremos un triángulo ΔABC. Se traza $\overline{AD}$ paralelo a $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$ paralelo a $\overline{AB}$. También se trazan las alturas $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$. Demuestre que:

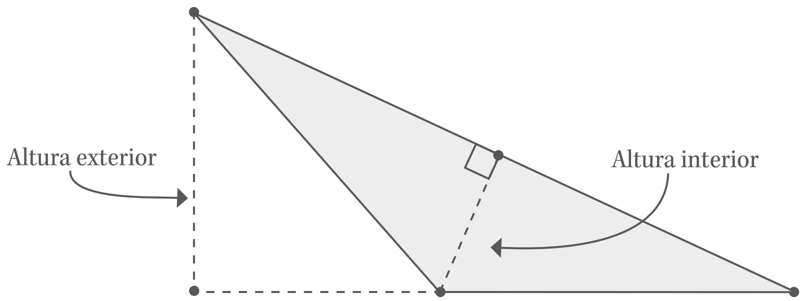
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{AE}$$



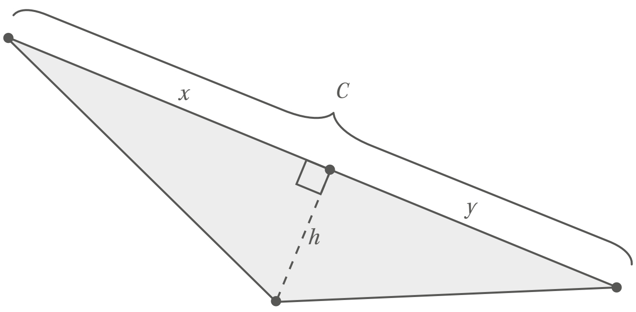
5. Con este ejercicio se pretende encontrar de una forma alternativa a la mostrada en el texto, el área de un triángulo.

Primero: muestre que el área de un triángulo rectángulo de catetos a y h es la mitad de un rectángulo de lados a y h.

Segundo: pruebe que un triángulo siempre tiene una altura que está en el interior del triángulo.



Tercero: muestre que una altura interior divide a un triángulo en dos triángulos rectángulos.



y compruebe que esos triángulos tienen área $\frac{xh}{2}$ y $\frac{yh}{2}$.

Cuarto: Use que $x + y = c$, para mostrar que el área del triángulo es $\frac{ch}{2}$.

1.3 Composición de figuras

En todas las deducciones que hemos hecho, hemos usado dos cosas importantes, las cuáles hemos establecido en el **Capítulo I** y en el **Capítulo III** de este libro:

Primero: si una figura tiene área A y otra figura tiene área B y estas se yuxtaponen, entonces la figura resultante tiene área $A + B$.

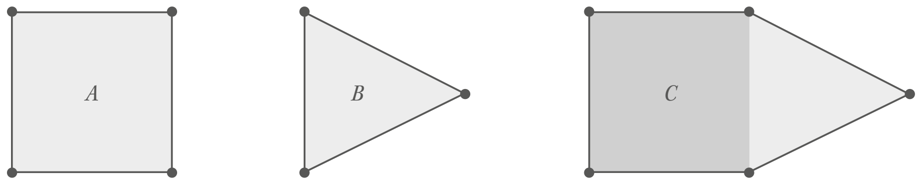


Figura IV.31.

Segundo: si una figura tiene una área A y se rota, se traslada o se refleja, entonces la figura resultante también tiene área A.

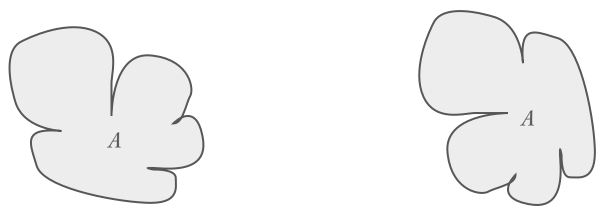


Figura IV.32.

Ahora bien, estas dos ideas también nos permiten calcular el área de figuras que fueron compuestas usando figuras de las que podemos conocer su área por separado. Por ejemplo, consideremos la siguiente:

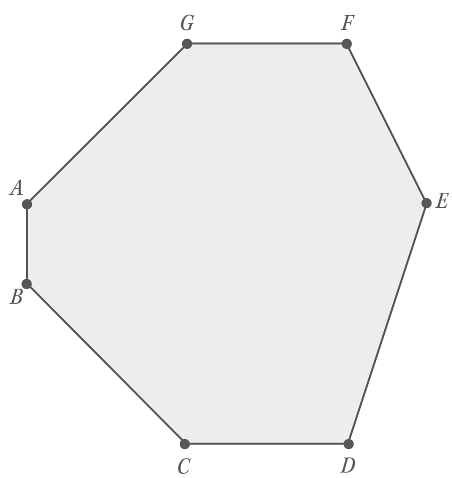


Figura IV.33.

No tenemos una fórmula explícita que nos permita conocer el área de ella a partir de la medida de sus lados. Lo que haremos será descomponerla en varias partes de las que sí conocemos su área. Para partir, dividamos la figura de tal forma que obtengamos rectángulos y triángulos rectángulos, es decir, $\overline{FG}$, $\overline{BH}$, $\overline{EI}$ y $\overline{CD}$ son paralelos. Además, F, I, H, D son colineales. Los segmentos $\overline{GC}$ y $\overline{FD}$ son paralelos, supondremos además que los puntos A, I y E son colineales y que, por último, $\overline{BH}$ es perpendicular a $\overline{DF}$.

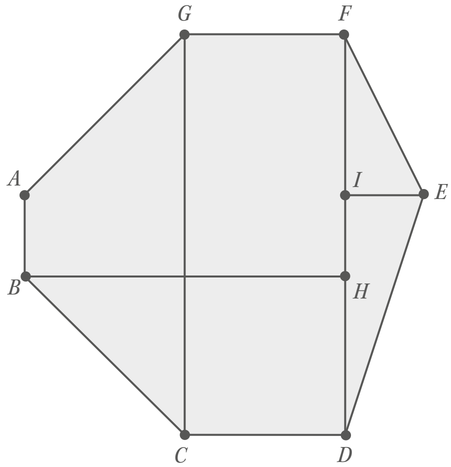


Figura IV.34.

En segundo lugar daremos las medidas de algunos de los segmentos:

$$FD = 5 \text{ cm}; IE = HI = 1 \text{ cm}; BH = 4 \text{ cm}; CD = 2 \text{ cm y } FI = 2 \text{ cm}.$$

Con esto en mente, podemos descomponer la figura como en un puzle, en donde las piezas son figuras a las cuales les podemos calcular el área. Para ello, dibujaremos un segmento auxiliar más, a saber $\overline{AI}$. Como $CD = 2$ cm y $BH = 4$ cm, entonces $AL = 2$ cm.

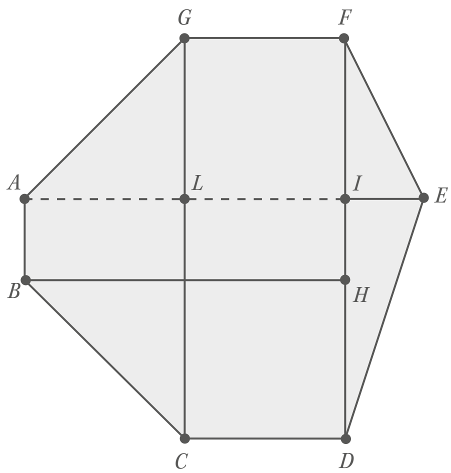


Figura IV.35.

Del mismo modo, podemos afirmar que *GL* = *HD* = **2 cm**. Así, el polígono *ABCDEFG* está formado solamente por rectángulos y triángulos rectángulos que hacen la figura. Para verlos mejor, denotaremos con *M* a la intersección entre $\overline{GC}$ y $\overline{BH}$.

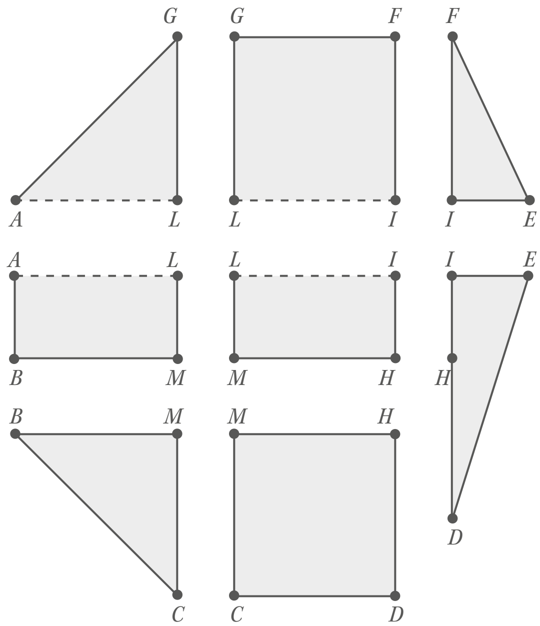


Figura IV.36.

El triángulo Δ*ALG* es rectángulo, cuyos catetos miden **2 cm** cada uno, entonces su área es **2 cm²**, lo mismo ocurre con el triángulo Δ*CMB* El cuadrilátero *LIFG* es un cuadrado cuyo lado mide **2 cm**, por lo tanto, su área es **4 cm²**, de igual manera el cuadrado *CDHM* tiene área **4 cm²**. El triángulo Δ*FIE* es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden **1** y **2 cm**, por lo tanto su área es **1 cm²**. El área de *ABML* es **2 cm²**, al igual que el área de *LMHI*. Finalmente, Δ*DIE* es rectángulo cuyos catetos miden **1** y **3 cm**, por lo tanto, su área es de **1,5 cm²**.

Así, el área de polígono *ABCDEFG* es **18,5 cm²**.

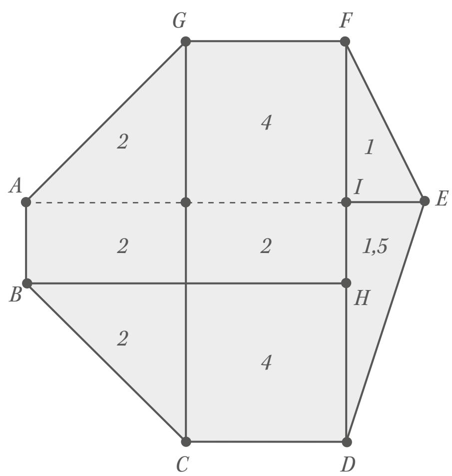


Figura IV. 37.

Otra forma de calcular el área del mismo polígono es la siguiente: podemos dibujar un rectángulo que contenga a nuestro polígono, y además podemos dibujar todo dentro de una cuadrícula centimetrada.

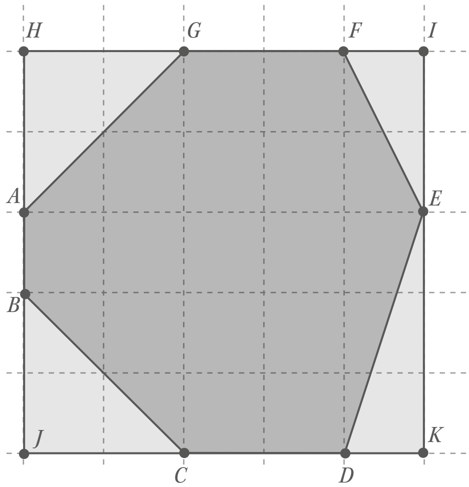


Figura IV. 38.

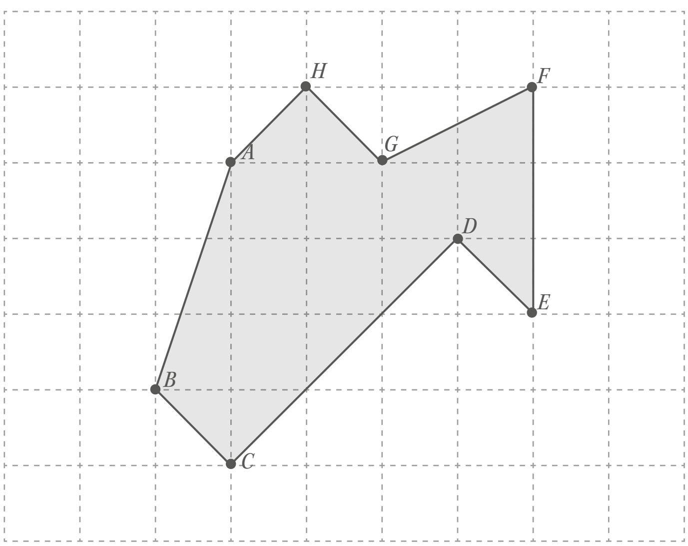
En este caso, el área del polígono *ABCDEFG* la podemos calcular como la resta del área del rectángulo *HIJK* menos la suma de las áreas de los rectángulos ΔAGH, ΔEIF, ΔDKE y ΔJCB. El área de *HIJK* es 25 cm^2, pues corresponde a un cuadrado de lado 5 cm (también se pueden contar directamente los cuadrados de la grilla que están contenidos en *HIJK*). Por su parte el triángulo ΔBJC tiene un área de 2 cm^2, lo mismo que el triángulo ΔHAG. El triángulo ΔDKE tiene área 1,5 cm^2 y el triángulo ΔEIF tiene área 1 cm^2. Por lo tanto, el área del polígono *ABCDEFG* es igual a :

$$[25 - (2 + 2 + 1{,}5 + 1)]\ cm^2 = [25 - 6{,}5]\ cm^2 = 18{,}5\ cm^2$$

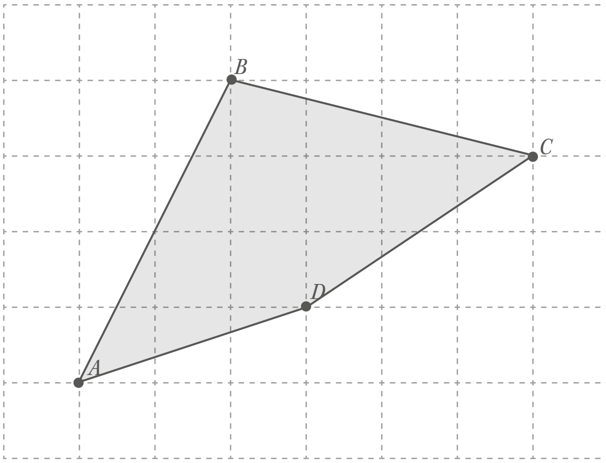
Ejercicios

1. Calcule en cada caso el área de la figura si cada cuadrado de la grilla tiene un área de 1 cm^2.

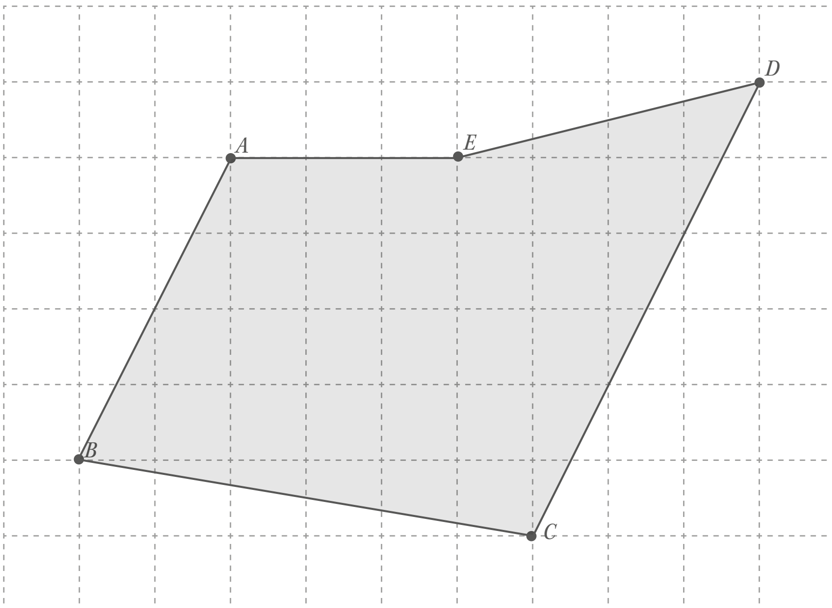
a.



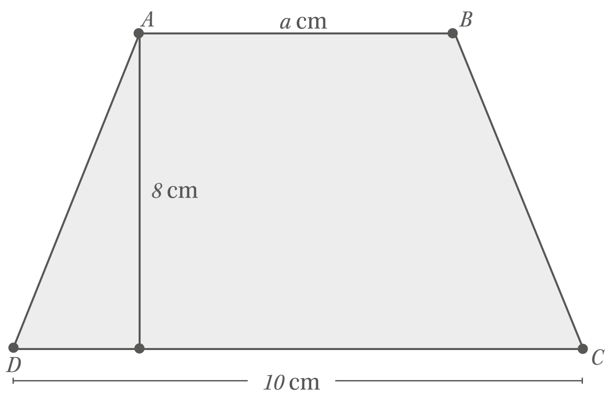
b.



c.



2. Considere un trapecio isósceles.



Calcule su área en términos de ***a***.

1.4 Geoplano

El geoplano es una buena herramienta para mostrar las descomposiciones de figuras. El geoplano es un recurso concreto, que consiste en una superficie a la cual le sobresalen pequeñas puntas. El más típico es el geoplano cuadrado, en el cual sobresalen puntas como si fueran los vértices de una grilla. Entre las puntas se pueden poner cintas elásticas, con el objetivo de formar figuras geométricas.

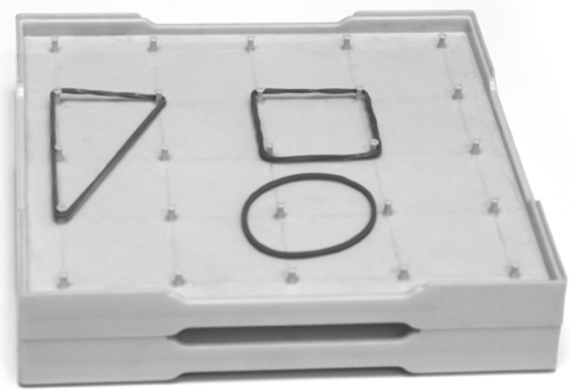


Figura IV.39.

En el geoplano, mediante cintas elásticas de diferentes colores, se puede mostrar la descomposición de figuras poligonales, en triángulos y rectángulos. Por ejemplo, en la **Figura IV.40** se muestra una cinta elástica en un geoplano, que forma un polígono.

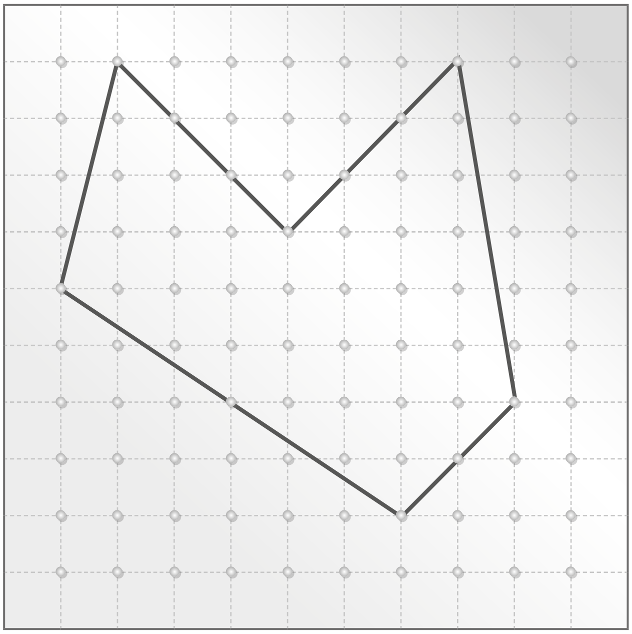


Figura IV.40.

Poniendo otras cintas elásticas, se puede mostrar la descomposición, como en la **Figura IV.41**.

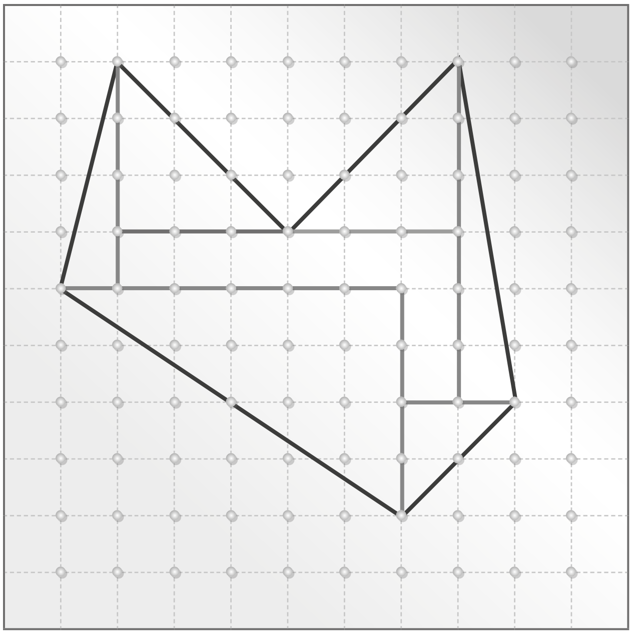
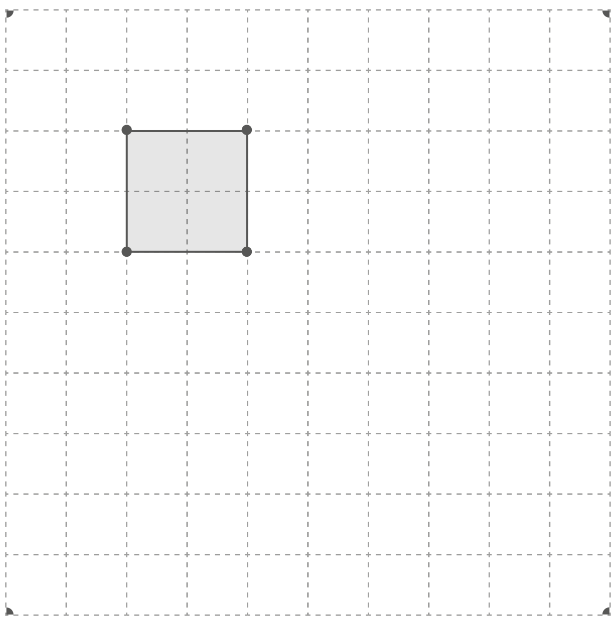


Figura IV.41.

Ejercicios de la sección

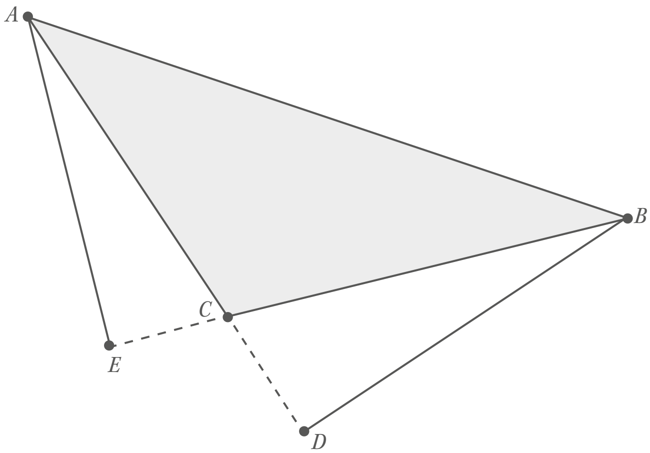
1. En un geoplano cuadrado construya 4 figuras no congruentes entre sí que tengan un área de 20 unidades cuadradas.

2. En un geoplano, construya un cuadrado que tenga el doble de área que el que se muestra en la imagen.

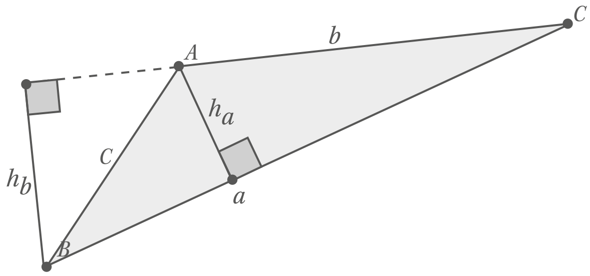


3. Si los contornos de dos rectángulos miden lo mismo, ¿es cierto que sus áreas miden lo mismo?

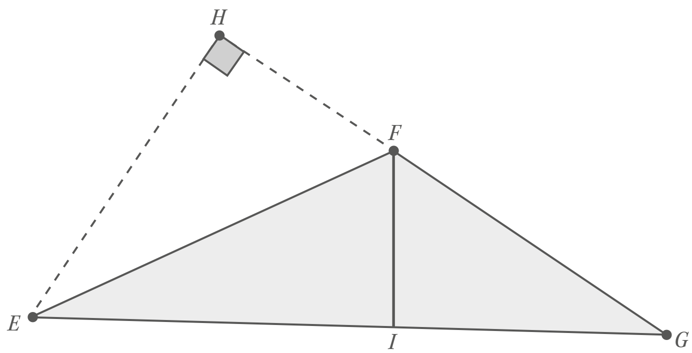
4. Considere el triángulo ΔABC, en el cual $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$ son alturas. Si AC = 3,61 cm, BC = 4,12 cm y BD = 3,88 cm. ¿Cuál es el valor de AE?



5. Considere el triángulo ΔABC, con las notaciones de la figura. Demuestre que $\frac{h_b}{h_a} = \frac{a}{b}$.



6. En la figura siguiente, los puntos F, G y H son colineales. Los segmentos $\overline{FI}$ y $\overline{GE}$ son perpendiculares, lo mismo que $\overline{EH}$ y $\overline{HF}$. Si el lado HG = 5 cm, EH = 6 cm y EG =12 cm, entonces ¿cuánto mide $\overline{FI}$?



2. Perímetro

El *perímetro* de una figura plana es la medida que tiene su contorno. En castellano se ocupa la palabra "perímetro" para referirse al contorno de algo; por ejemplo, frases del tipo "la fuerza pública ha rodeado el perímetro del recinto" hacen mención al contorno del recinto, pero no a su medida. En este libro, usaremos "perímetro" exclusivamente para significar la medida del contorno.

Por ejemplo, consideremos la siguiente figura:

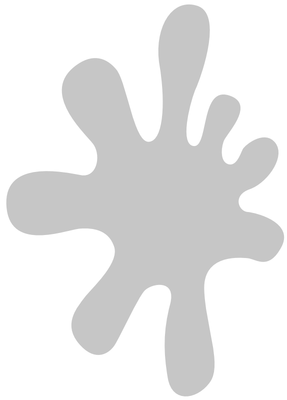


Figura IV.42.

Una estrategia para medir su contorno, es decir, para obtener su perímetro, es rodear la figura con un cordón, luego estirar el cordón y medirlo con una huincha.

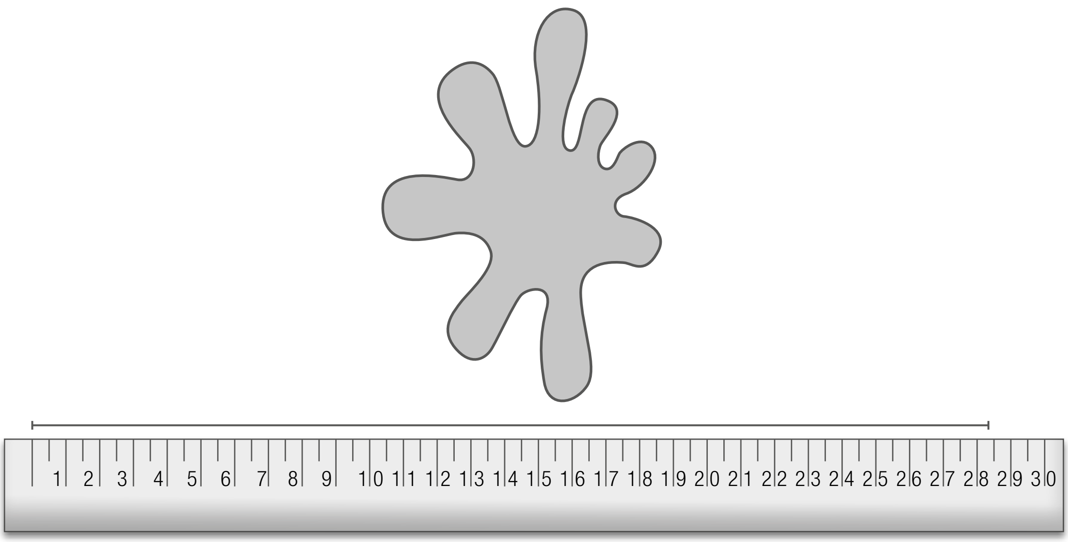


Figura IV.43.

Entonces, el perímetro de la figura es aproximadamente 28,5 cm.

En el caso de un triángulo cuyos lados miden ***a***, ***b*** y ***c***, su perímetro es:

$$P = a + b + c$$

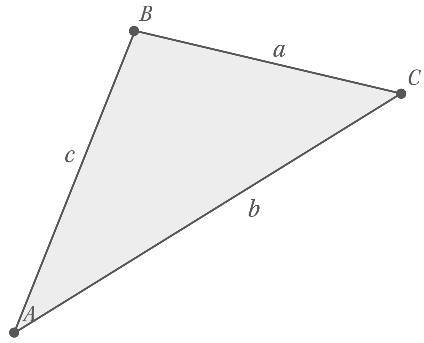


Figura IV.44.

En el caso de un paralelogramo cuyos lados miden ***a*** y ***b***, su perímetro es:

$$P = a + a + b + b = 2a + 2b = 2\,(a + b)$$

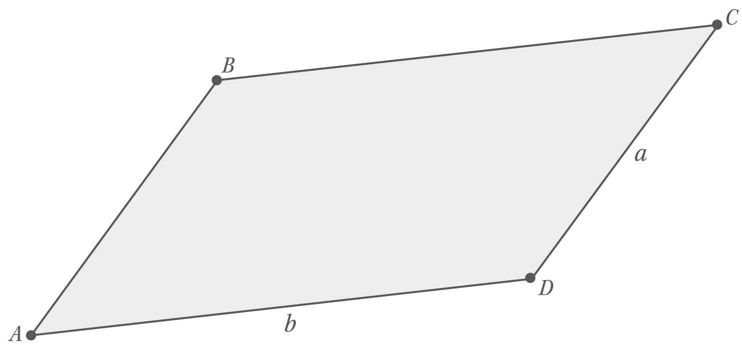


Figura IV.45.

En particular, el perímetro de un rectángulo de lados ***a*** y ***b*** es:

$$P = 2a + 2b = 2\,(a + b)$$

Figura IV.46.

Más generalmente, el perímetro de un polígono es la suma de las medidas de sus lados. Por ejemplo, el perímetro de la siguiente figura es:

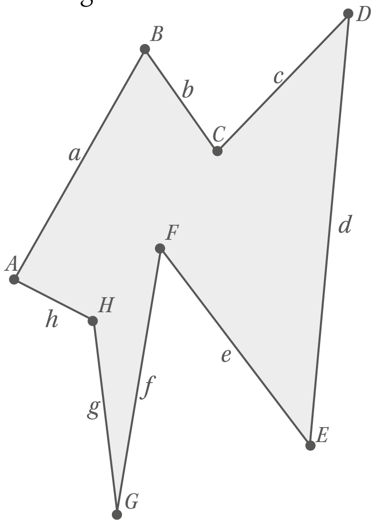


Figura IV.47.

$$P = a + b + c + d + e + f + g + h$$

En algunos sitios de la web y en algunos textos, definen el perímetro de una figura como “la suma de la medida de sus lados”, lo cual es incorrecto en general, pues solo los polígonos tienen lados. Sin embargo, esta definición es correcta para el caso de polígonos.

Recordemos que un polígono regular de n lados es aquel en que todos sus lados miden lo mismo. Por lo tanto, el perímetro de un polígono regular de n lados es n veces la medida del lado. Por ejemplo, si la medida del lado de un heptágono regular es a, entonces su perímetro es $7a$.

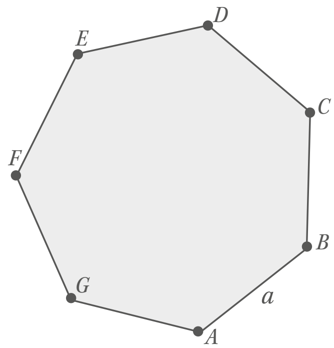


Figura IV.48.

En particular, el perímetro de un cuadrado de lado l es $4l$.

Para pensar

- Si dos rombos tienen el mismo perímetro, entonces ¿necesariamente tienen la misma área?
- Si dos cuadrados tienen el mismo perímetro, ¿necesariamente tienen la misma área?
- Si dos triángulos equiláteros tienen el mismo perímetro, ¿necesariamente son congruentes?

Consideremos una grilla centimetrada, es decir, formada por cuadrados de 1 cm de lado. Dibujemos en ella diferentes rectángulos cuyo perímetro sea 16 cm.

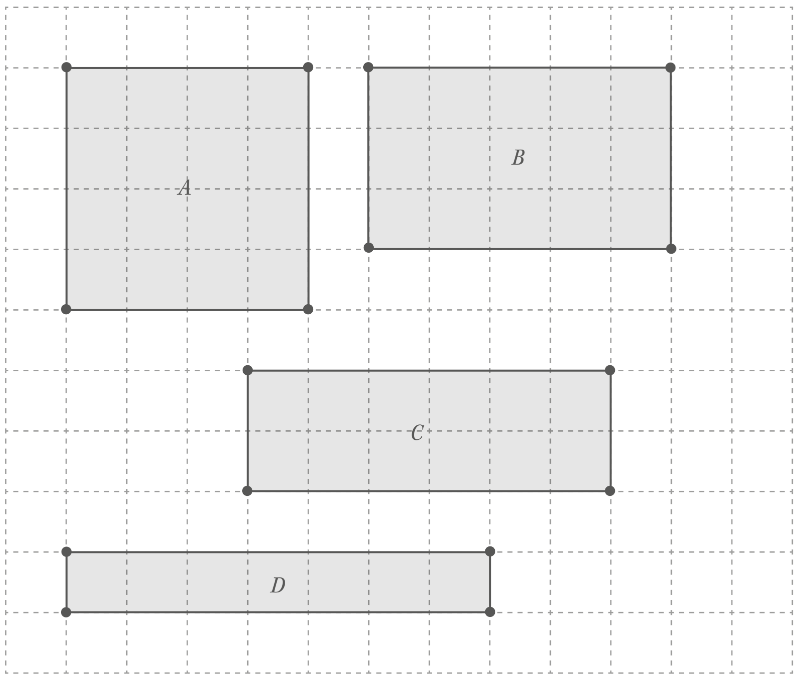


Figura IV.49.

Todos esos rectángulos tienen el mismo perímetro, pero el rectángulo *A* tiene área 16 cm^2, el rectángulo *B* tiene área 15 cm^2, el rectángulo *C* tiene área 12 cm^2 y el rectángulo *D* tiene área 7 cm^2. Es decir, en general, dos figuras que tienen el mismo perímetro no necesariamente tienen la misma área.

De forma similar, podemos dibujar rectángulos que tienen la misma área, pero diferente perímetro.

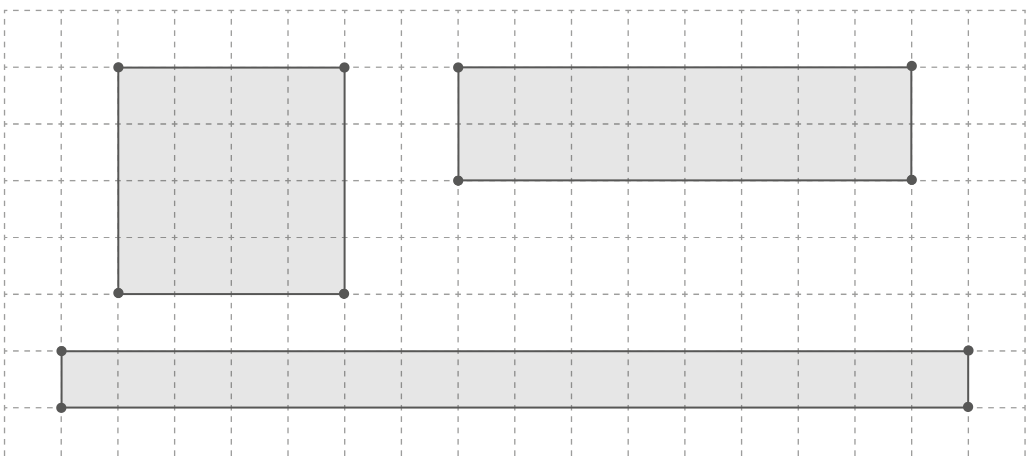
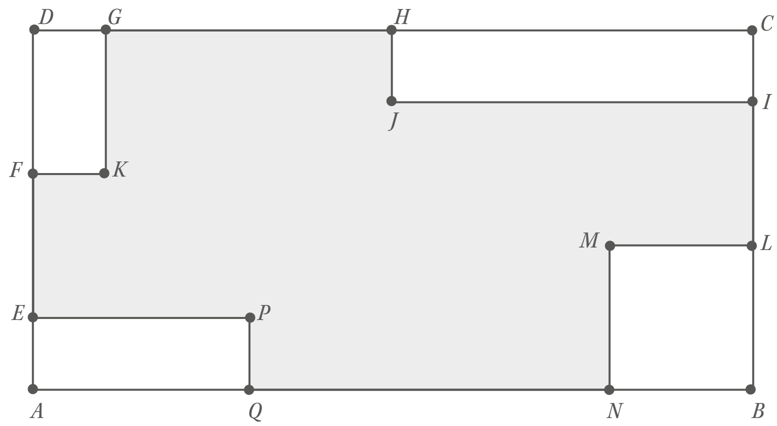


Figura IV. 50.

Ejemplo

Consideremos el rectángulo $ABCD$ de lados cuyas medidas son 6 cm y 10 cm. Todos los ángulos que parecen en la figura son rectos. Calculemos el perímetro de la figura achurada.



En una primera mirada, se podría decir que no podemos solucionarlo, pues no conocemos las medidas de los lados del polígono $QNMLIJHGKFEP$. Sin embargo, eso no es impedimento para conocer el perímetro. Por ejemplo, notemos que:

$$EP + QN + ML = AQ + QN + NB = AB = 10 \text{ cm}$$

Es decir, no sabemos cual es el valor de EP, ni de QN, ni de ML, pero podemos saber cuanto mide la suma de esas medidas. Esa es la estrategia que usaremos para calcular el perímetro de la figura.

Notemos que $LB = ML$, que $HJ = CI$ y que $CI + IL + LB = 6$ cm, por lo tanto:

$$NM + LI + HJ = 6 \text{ cm}$$

Del mismo modo, $DG = FK$, $HC = JI$ y $DG + GH + HC = 10$ cm, por lo tanto:

$$FK + GH + JI = 10 \text{ cm}$$

Finalmente, $DF = GK$, $EA = PQ$ y $DF + FE + EA = 6$ cm, por lo tanto:

$$GK + EF + PQ = 6 \text{ cm}$$

De todo lo anterior se deduce que el perímetro del polígono $QNMLIJHGKFEP$ es

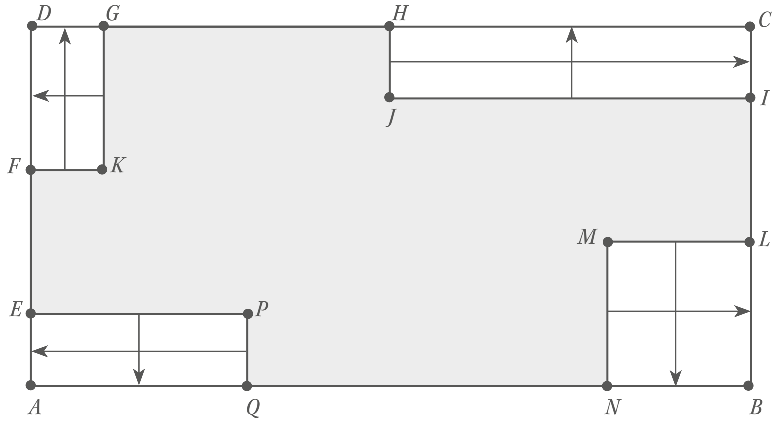
$QN + NM + ML + LI + IJ + JH + HG + GK + KF + FE + EP =$

$(EP + QN + ML) + (NM + LI + HJ) + (FK + GH + JI) + (GK+EF+PQ) =$

10 cm+ 6 cm+ 10 cm + 6 cm = 32 cm

Que corresponde al perímetro del rectángulo $ABCD$.

Otra forma de observar que el perímetro de *QNMLIJHGKFEP* y el perímetro de *ABCD* son el mismo es moviendo los lados de *QNMLIJHGKFEP* hasta hacerlos coincidir con partes de los lados del rectángulo



2.1 Dificultades asociadas a la enseñanza de perímetro y área

Las dificultades u obstáculos que se pueden observar en la enseñanza de áreas y perímetros son de dos tipos: unos tienen que ver con un deficiente manejo algebraico y numérico, y confusión en el uso de fórmulas; y otros tienen que ver con concepciones erradas de los objetos geométricos.

Por ejemplo, si a un niño se le pide que resuelva el siguiente ejercicio:

En el cuadrado *ABCD*, el lado *AB* mide 5 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado *ACEF*?

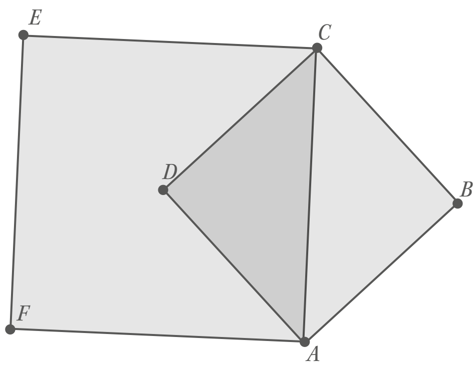


Figura IV.51.

Un alumno puede responder erróneamente 500 cm^2, pues comete un error de cálculo en la operatoria con decimales como se muestra en la Figura IV.52.

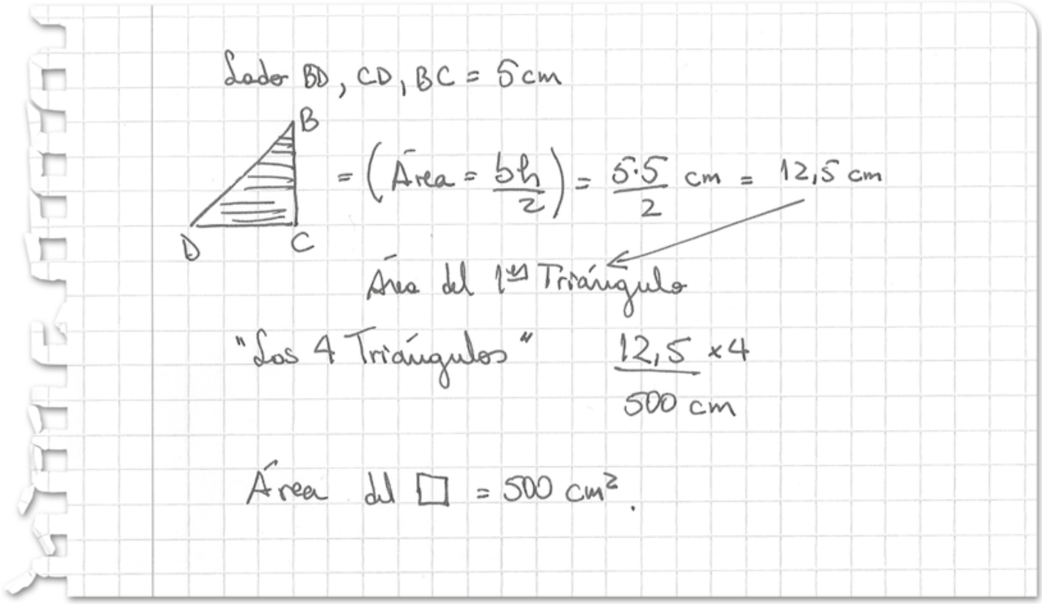


Figura IV.52.

Es muy común también que los alumnos confundan fórmulas de perímetro y de área. Por ejemplo, un alumno sistemáticamente al calcular el área de rectángulos entrega como resultado el doble de la medida correcta. Eso ocurre porque, cuando él calcula el perímetro de un rectángulo suma la medida de los lados y el resultado lo multiplica por 2, entonces cuando calcula el área multiplica la medida de los lados y el resultado lo multiplica erróneamente por 2.

Una dificultad que aparece en la enseñanza del área del triángulo, que no tiene que ver con asuntos numéricos, ni con manejo algebraico, sino que con la manera que tienen los estudiantes de memorizar la fórmula del área del triángulo. Ellos dicen "el área del triángulo es la mitad de la base por la altura". Eso puede traer consigo dos dificultades: Primero, ¿cuál es la base? Cuando el triángulo se muestra con un lado paralelo a la horizontal y el vértice opuesto a ese lado se muestra arriba de ese lado, algunos estudiantes reconocen a aquel lado como base, entonces con un triángulo como el de la **Figura IV.53**, no tendrían problemas para calcular su área.

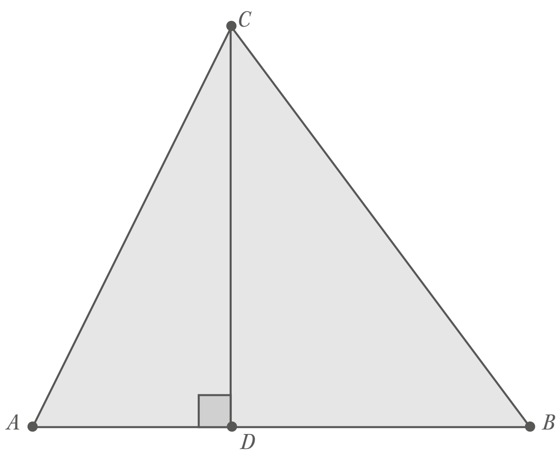


Figura IV.53.

En este caso, un estudiante no tiene problemas en decir que el área del triángulo es $\frac{1}{2}CD \cdot AB$, pero si se les muestra el mismo triángulo, con la altura que pasa por A, como en la **Figura IV.54**, ya no es tan simple la tarea de calcular el área.

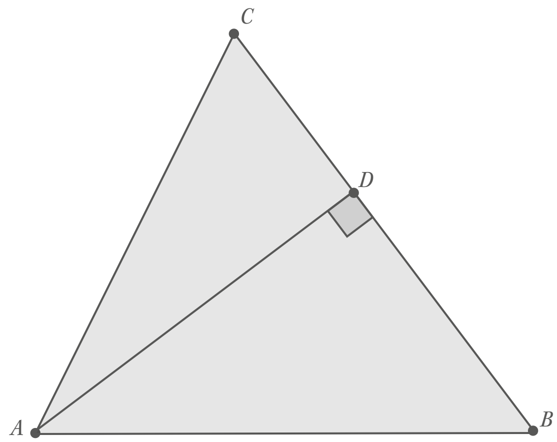


Figura IV.54.

En este caso, algunos estudiantes no reconocen a $\frac{1}{2}BC \cdot AD$ como el valor del área del triángulo, pues no reconocen a $\overline{CB}$ como base.

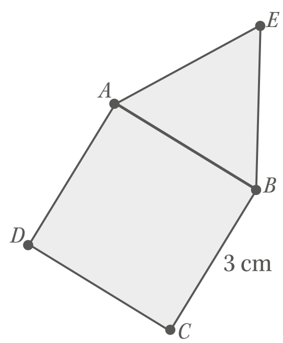
Relacionado con lo anterior, la segunda dificultad que puede aparecer en el aula escolar, es que los estudiantes crean que un triángulo tiene solo una altura. Entonces, si un alumno tiene la medida de una altura, digamos h, y la medida de un lado, digamos b, él puede dar como valor del área el número $\frac{bh}{2}$, sin preocuparse de si la altura es perpendicular al lado que mide b.

Ejercicios de la sección

1. Dé un ejemplo de dos polígonos de diferente número de lados que tienen el mismo perímetro.

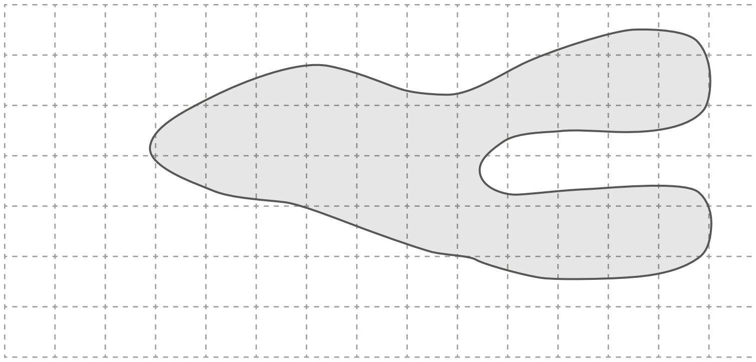
2. ¿Existen dos figuras que tienen el mismo perímetro y la misma área, pero que no son congruentes?

3. Si $ABCD$ es un cuadrado y ABE es un triángulo equilátero, ¿cuál es el perímetro de $ABCDE$?



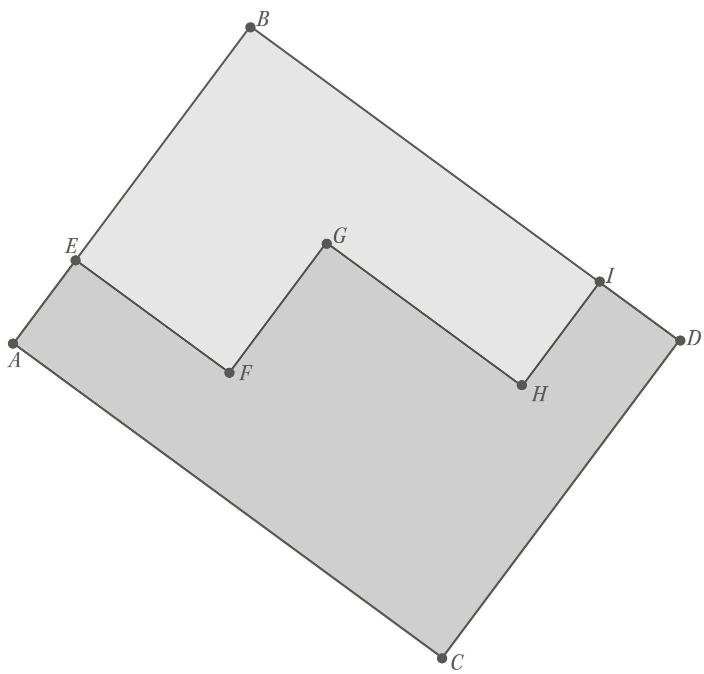
4. Suponga que la grilla está centimetrada.

   a. Aproxime el área de la figura.
   b. Describa la estrategia que utilizó para aproximar el área.
   c. ¿Puede asegurar que su aproximación difiere del área real en $\frac{1}{4}u^2$? Justifique



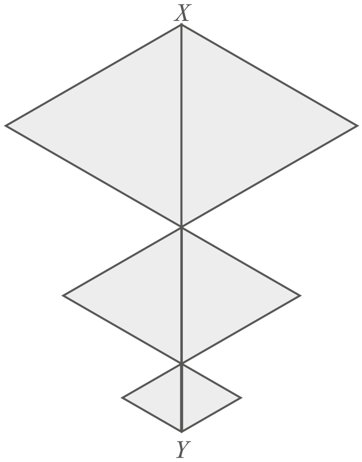
5. En la figura siguiente, se muestra el rectángulo *ABDC*. Los segmentos $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ y $\overline{DI}$ son paralelos. Los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{FG}$ y $\overline{HI}$ son paralelos. Si $BD = 12{,}3$ cm, y $AB = 5{,}6$ cm y $FG = 2$ cm, entonces ¿cuál es el perímetro de la figura *AEFGHIDC*?

   a. 35,8 cm
   b. 68,88 cm
   c. 27,9 cm
   d. No se puede determinar



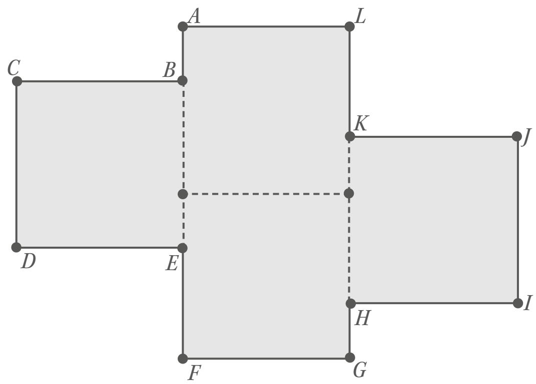
6. Rodrigo tiene una cuerda de 1,5 m de largo. Juan corto un tramo de la cuerda para bordear la figura que se muestra. La figura está compuesta por 6 triángulos equiláteros. Si la distancia entre X y Y es 19 cm. ¿Cuánta cuerda le sobró?

a. Sobró 74 cm de cuerda.
b. Sobró 76 cm de cuerda.
c. Sobró 114 cm de cuerda.
d. Sobró 36 cm de cuerda.

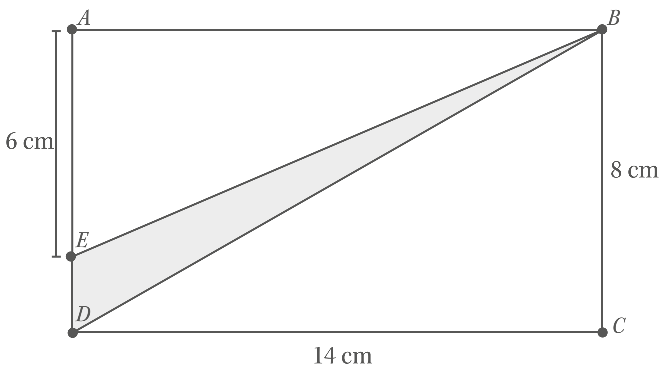


7. La figura está formada por 4 cuadrados congruentes de lado 2 cm. ¿Cuál es el perímetro de la figura *ABCDEFGHIJKL*?

a. 16 cm.
b. 20 cm.
c. 26 cm
d. 22 cm



8. Determine el área de la figura achurada de dos formas distintas. Explique su razonamiento en cada caso. El cuadrilátero *ABCD* es un rectángulo.



3. Perímetro de la circunferencia y área del círculo

En general, encontrar el perímetro y el área de una figura plana no es una tarea fácil, sobre todo cuando se trata de una figura no poligonal. Por ejemplo, si la grilla está centimetrada, ¿cuál es el perímetro y el área de la siguiente figura?

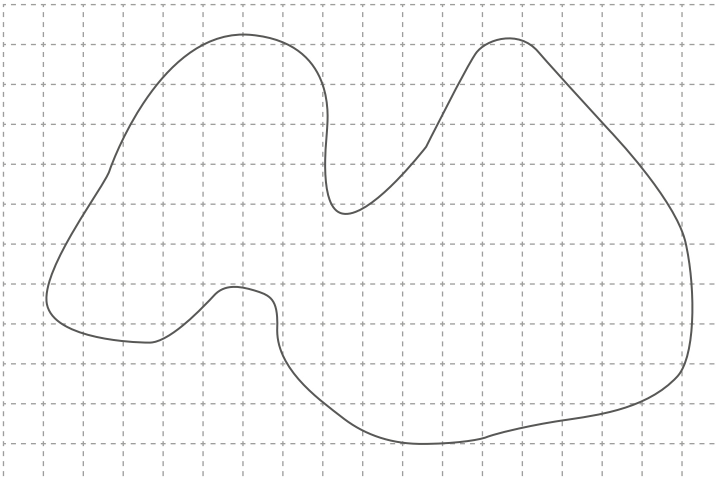


Figura IV.55.

Para calcular el perímetro podríamos poner un cordón que rodee la figura y luego medirlo. Para calcular el área podríamos contar todos los cuadrados que están completamente contenidos en la figura y luego aproximar las fracciones de los otros.

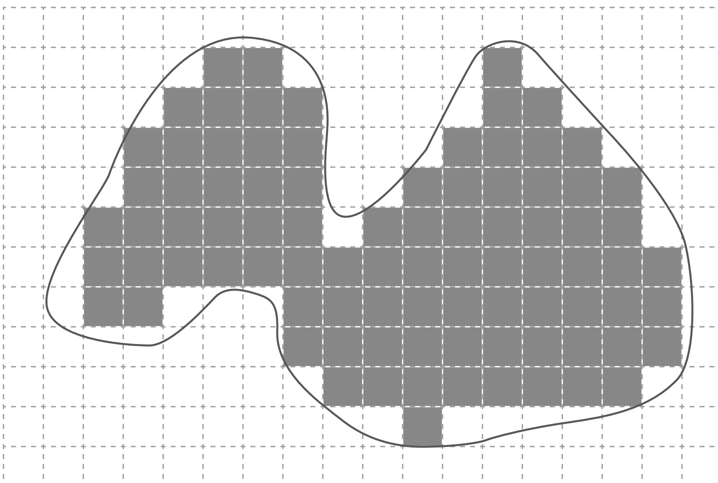


Figura IV.56.

Entonces podemos afirmar que el área de la figura es mayor que 87 cm^2. Algunos de los restantes los podemos aproximar como la mitad de un cuadrado, los pintaremos de gris.

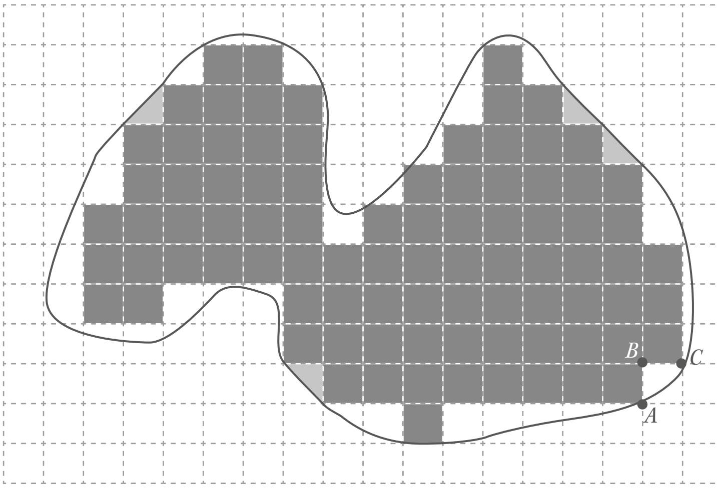


Figura IV.57.

Ahora podemos decir que el área de la figura es mayor que 89 cm^2. La parte que está abajo a la derecha, y la podemos pensar que se trata un triángulo rectángulo ΔABC, donde $AB = 1$ cm y $BC = 4$ cm, por lo tanto, su área es 2 cm^2. De este modo, podríamos hacer una aproximación del área de la figura.

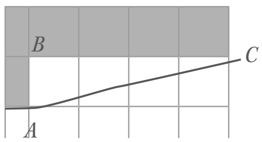


Figura IV.58.

Una estrategia para mejorar la aproximación es dividir la grilla en cuadrados más pequeños, por ejemplo, en cuadrados cuyo lado mida medio centímetro, incluyendo así más cuadrados al interior de la figura:

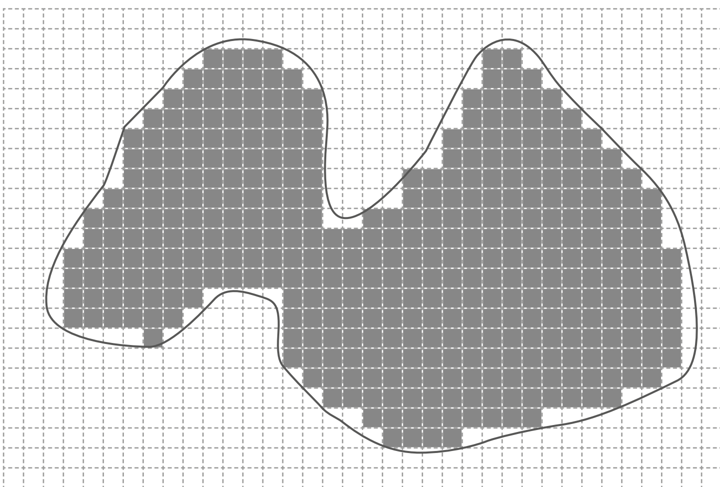


Figura IV.59.

Incluso podemos achicar más el lado del cuadrado de la grilla, para aproximar aún mejor el área de la figura. Por ejemplo, consideremos una grilla en la cual el lado de cada cuadrado mide un cuarto de centímetro.

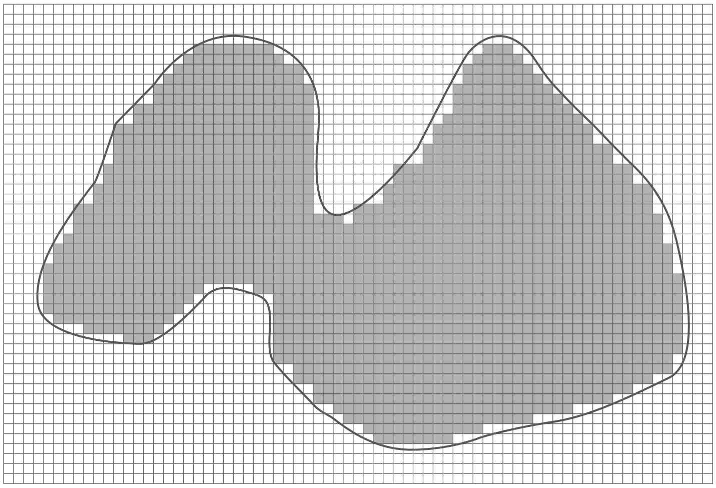


Figura IV.60.

Sin embargo, ahora el problema está en contar los cuadrados.

Un ejemplo importante de figura no poligonal es la circunferencia. Si consideramos una circunferencia cuyo diámetro mide **10 cm**, ¿cuál es su área?

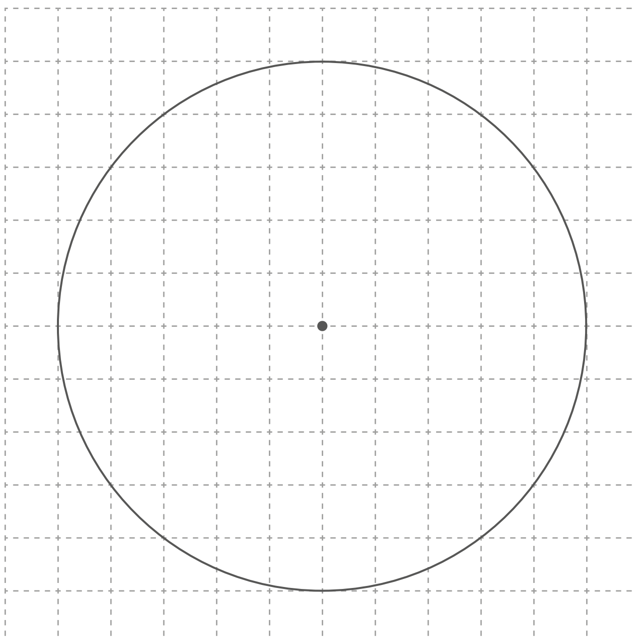


Figura IV.61.

Si pintamos los cuadrados que están completamente contenidos en el interior, resultan 60.

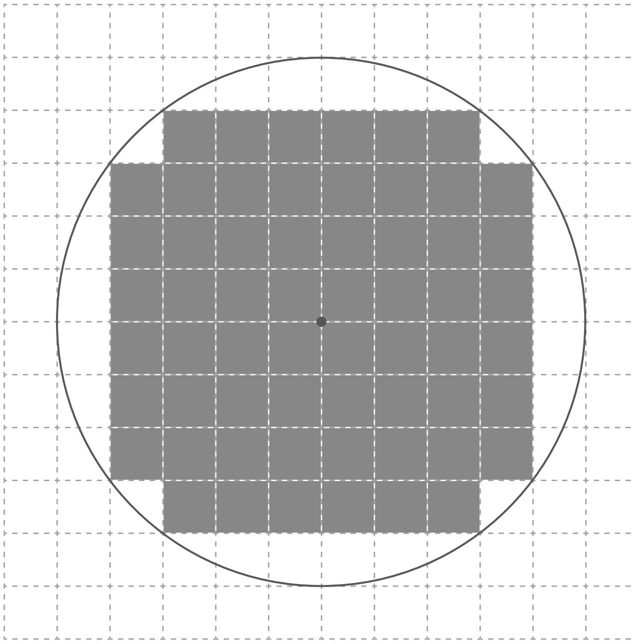


Figura IV.62.

Ahora bien, en las partes donde los cuadrados no estén contenidos completamente en la circunferencia, dividiremos en cuadrados de medio centímetro de lado.

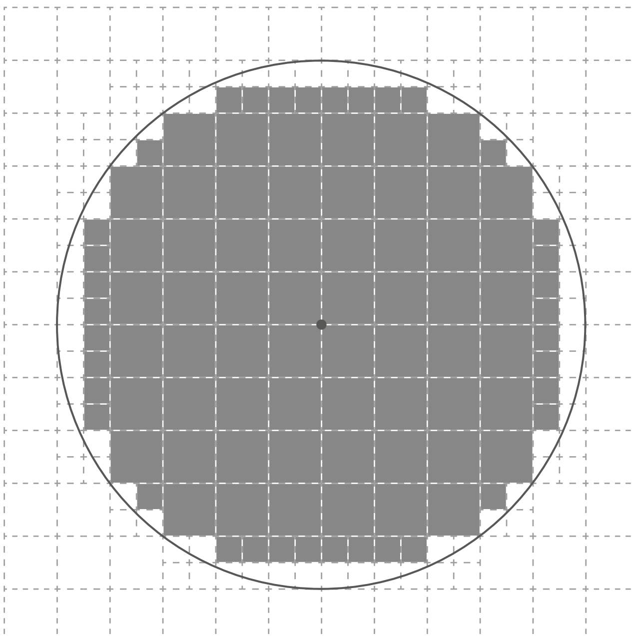


Figura IV.63.

Así obtenemos 36 nuevos cuadrados pintados, pero ahora cada uno tiene un área de $\frac{1}{4}\text{cm}^2$. Es decir, hasta ahora, hemos contado cuadrados, cuyas áreas suman

$$60+\frac{36}{4}\ \text{cm}^2=69\,\text{cm}^2$$

Ahora los cuadrados que no están totalmente contenidos en la circunferencias los dividimos en cuadrados de lado $\frac{1}{4}$ cm. Así, agregamos 78 de esos cuadrados.

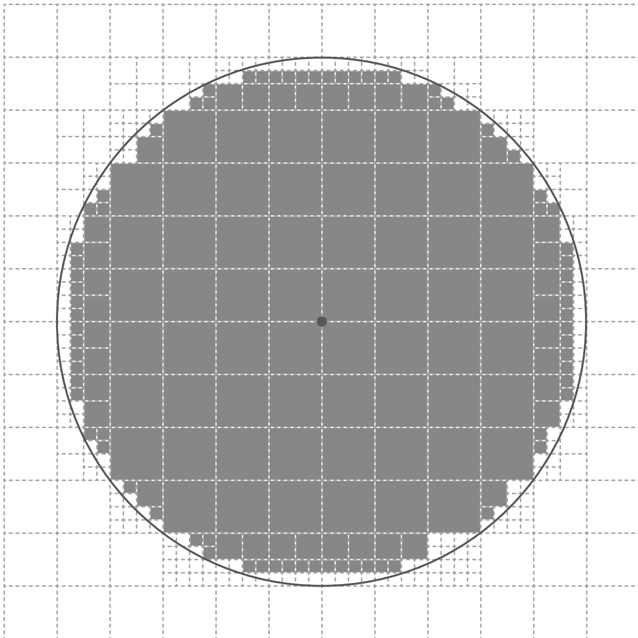


Figura IV.64.

Entonces, tenemos que, hasta ahora, hemos sumado una área de:

$$69+\frac{80}{16}\ \text{cm}^2=(69+5)\text{cm}^2=74\text{cm}^2$$

Aún quedan 128 fracciones de cuadraditos de área $\frac{1}{16}\text{cm}^2$. Algunos de ellos, están mas de la mitad dentro de la circunferencia y otros están menos de la mitad dentro de la circunferencia. En este momento, haremos una estimación para aproximar el área de la circunferencia: pensaremos que cada uno de esos cuadrados tiene la mitad de área dentro de la circunferencia. Haciendo este supuesto, el área que nos falta por contar es:

$$\frac{128}{16}\cdot\frac{1}{2}\ \text{cm}^2=\frac{64}{16}\text{cm}^2=4\,\text{cm}^2$$

Por lo tanto, mediante este método y usando un supuesto arbitrario, pero razonable, podemos afirmar que el área del cículo de diámetro **10 cm** es aproximadamente **78 cm^2** pero no sabemos cuán cerca estamos del valor real del área.

La aproximación anterior muestra lo dificil que es determinar el área de una figura no poligonal. Tanto o más complicado es estimar el perímetro de la circunferencia.

Lo que es evidente es que una circunferencia que tiene mayor diámetro que otra, entonces, también tiene mayor perímetro.

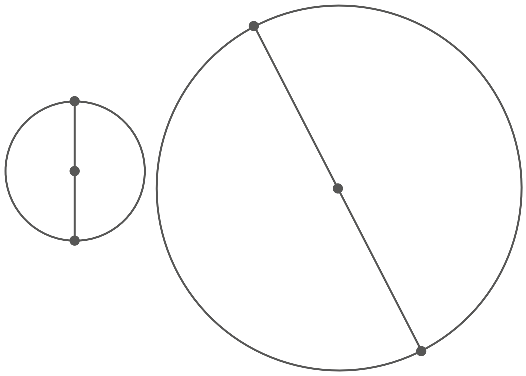


Figura IV.65.

Para conjeturar cómo depende el perímetro de una circunferencia respecto del radio, podemos tomar diferentes objetos circulares y medir su diámetro y su contorno. Por ejemplo, podemos medir el diámetro de una moneda con un "pie de rey"[3] y su contorno con una huincha de costura, o bien hacer girar una moneda en el borde de una regla, y poner una marca en el punto inicial de giro.

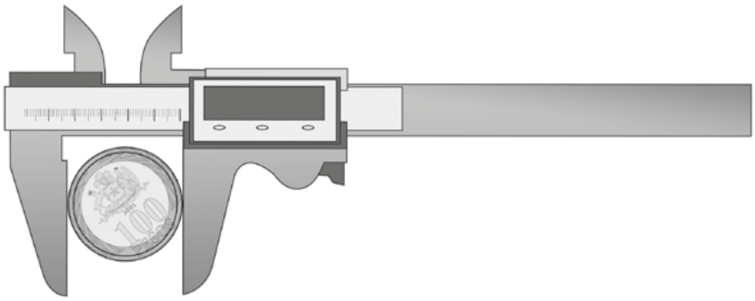


Figura IV.66.

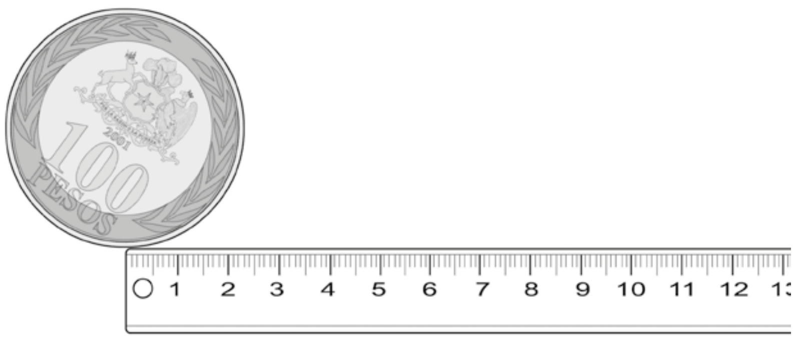


Figura IV.67.

[3] En Chile le decimos "pie de metro".

Repetir el experimento con diferentes objetos circulares: monedas, platos, platillos, tapas de botellas, tapas de frascos, etc. Y luego hacer una tabla con el diámetro del objeto, el perímetro del objeto y el cociente $\frac{\text{Perímetro}}{\text{Diámetro}}$.

Diámetro (cm)	Perímetro (cm)	Cociente
2	6,3	3,15
4,2	13,2	3,14285714
8,7	27,4	3,14942529
10,1	31,7	3,13861386
15,5	48,7	3,14193548
24,2	76	3,14049587
31,4	98,7	3,14012739

Tabla IV.1.

En nuestro experimento, el cociente entre el perímetro de la circunferencia y el diámetro parece ser constante y esa constante es un número cercano a 3,14. Este experimento es solo eso: una experiencia. Además, esa experiencia está realizada con objetos físicos que no son perfectamente redondos, y las mediciones nuestras tampoco son muy buenas (de hecho, nunca son precisas).

Se puede demostrar, utilizando herramientas que escapan al contenido y al objetivo de este curso, que el cociente entre el perímetro de la circunferencia y el diámetro de la circunferencia es constante; ese valor constante se anota π y corresponde a una letra griega llamada "pi". Se usa esa letra para denotar a ese cociente, pues es la primera letra de la palabra *περι ετρου*, que significa "perímetro"; entonces, los griegos asociaban ese número al perímetro de la circunferencia. Sin embargo, fue el matemático Leonhard Euler (1707-1783) quien popularizó el símbolo π para denotar al cociente entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia.

El valor numérico de π no se puede mostrar como un decimal finito o infinito periódico, pues no es un número racional, es decir, el número π no se puede escribir como el cociente de dos números naturales. Nuestro experimento nos dice que el valor de π es cercano a 3,14. Durante la historia de la matemática, se han buscado varios métodos para aproximar a π. Por ejemplo, en el "Primer libro de los reyes" de la *Bíblia* se lee:

"Hizo fundir asimismo un mar de 10 codos de un lado al otro, perfectamente redondo; su altura era de 5 codos, y lo ceñía alrededor un cordón de 30 codos".

Si se lee con atención, el diámetro del mar es de 10 codos y el perímetro es de 30 codos. Es decir, en la Biblia se aproxima π a 3.

Otro ejemplo, en el *Papiro de Rhind*, que data del año 1800 antes de nuestra era, se aproxima π a $\frac{256}{81} \approx 3{,}1604938$. En Mesopotamia se aproximaba a $3 + \frac{1}{8} = 3{,}125$.

Si bien desde muy temprano en la historia de las matemáticas se conoce π como el cociente constante entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia, recién en 1770 el matemático alemán de origen francés Johann Heinrich Lambert (1728-1777) logró demostrar que π no es una fracción de dos números naturales, más de 2.000 años después de haberse definido π.

En resumen

Si el diámetro de una circunferencia mide d, entonces su perímetro es

$$P = d \cdot \pi$$

El valor numérico de π no se puede expresar como fracción de números naturales y por lo tanto su expansión decimal es infinita y no periódica.

Arquímedes (siglo III a.C.) ubicó a π entre $3+\frac{10}{71}$ y $3+\frac{1}{7}$, es decir

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

Notemos que la diferencia entre esos dos valores que encajonan a π es:

$$\frac{1}{7}-\frac{10}{71}\approx 0{,}0020$$

Es decir, Arquímedes podía aproximar a π, pero además podía medir cuán lejos estaba del valor exacto de π.

Aparte de aproximar el valor de π y medir cuán cercana es su aproximación del valor exacto, el método que utilizó Arquímedes resultó ser muy interesante. Él construyó polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia, calculó el perímetro de esos polígonos y así pudo encajonar el valor de π.

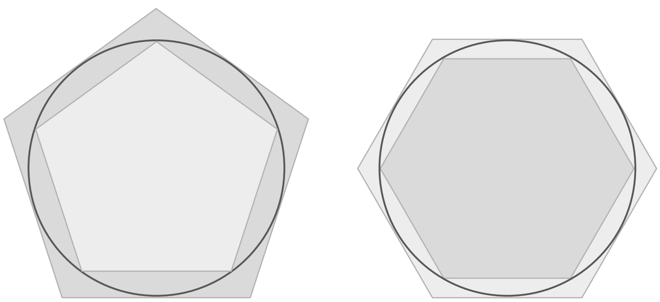


Figura IV.68.

Para calcular el área del círculo, el método usado en la antigua Grecia es el mismo que utilizó Arquímedes para calcular el perímetro, es decir, inscribir y circunscribir polígonos regulares al círculo y encajonar el área del círculo por las áreas de esos polígonos. Ahora, presentaremos esa idea simplificada. De nuevo, una demostración formal del resultado requiere herramientas que escapan al contenido de este texto.

Consideremos un círculo de radio r e inscribamos en él un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono, un hexágono y un octógono.

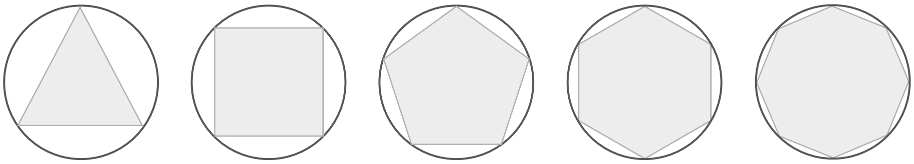


Figura IV.69.

Se puede observar que, a medida que el número de lados del polígono regular inscrito en la circunferencia crece, el área del polígono se acerca cada vez más al área del círculo. Entonces la apuesta es que un polígono regular de muchos lados inscritos en la circunferencia, es una buena aproximación del área del círculo.

Pensemos en un cuadrado inscrito en una circunferencia cuyo radio mide **5 cm** y en otro cuadrado circunscrito en la misma circunferencia.

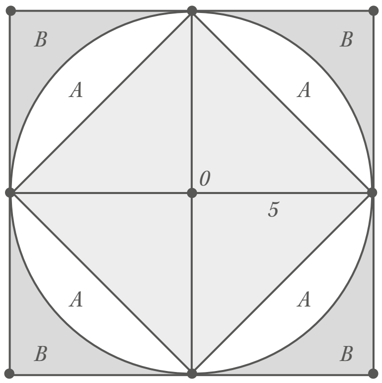


Figura IV.70.

El lado del cuadrado circunscrito mide **10 cm**, pues mide lo mismo que el diámetro de la circunferencia; entonces, el área del cuadrado circunscrito es **100 cm^2**. El área del cuadrado inscrito en la circunferencia corresponde a la mitad (¿Por qué?) del área del cuadrado circunscrito, es decir, el área del cuadrado inscrito es **50 cm^2.** Entonces:

$$50 \text{ cm}^2 < \text{Área del círculo} < 100 \text{ cm}^2$$

El problema es que los sectores marcados con la letra *B* y con la letra *A* en la **Figura IV.70** son muy grandes, y el área del cuadrado no es una buena aproximación del área del círculo.

Pensemos ahora en un octógono.

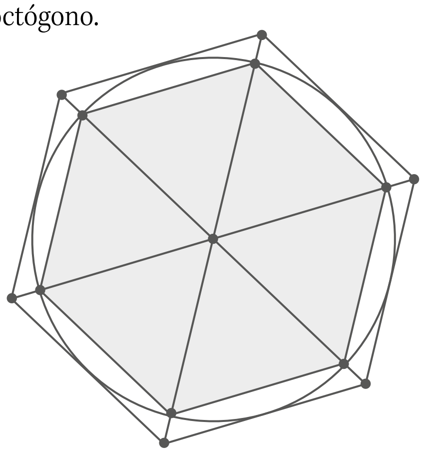


Figura IV.71.

Ahora la diferencia entre el área del polígono regular inscrito y el polígono circunscrito es menor que en el caso del cuadrado, por lo tanto, el área del círculo quedará encajonado entre dos valores más cercanos entre sí que $50\ cm^2$ y $100\ cm^2$.

A continuación, mostramos el caso de un polígono regular de 20 lados inscrito en una circunferencia:

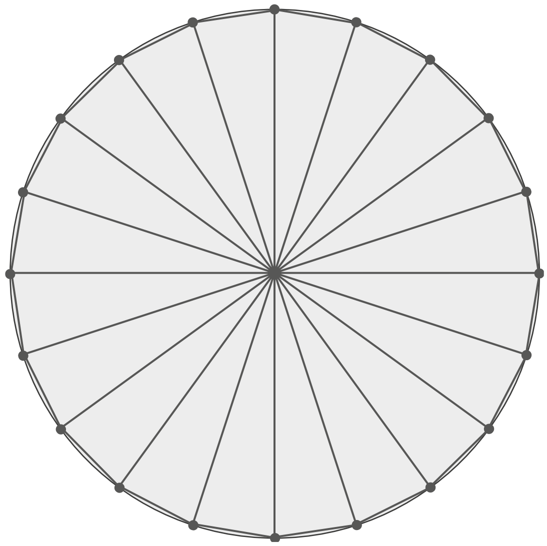


Figura IV.72.

La diferencia entre el área del polígono regular y el área del círculo, en este caso, es casi imperceptible. Imagínese qué ocurre en el caso del polígono regular de 100 lados inscrito en una circunferencia. De hecho, la definición de nuestro computador ni la impresora hacen diferencia entre el polígono regular de 100 lados y la circunferencia.

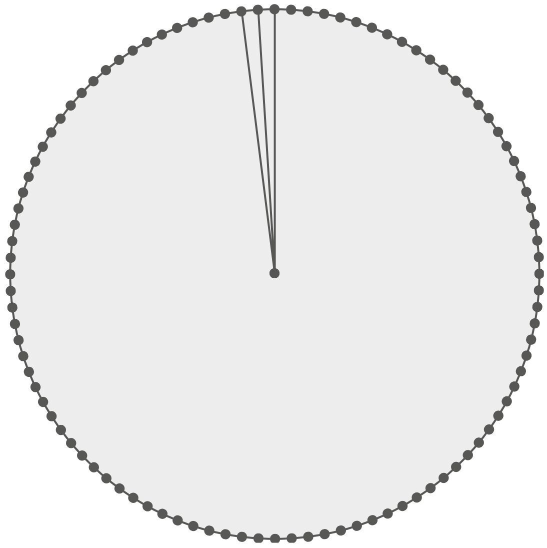


Figura IV.73.

En ese polígono hemos elegido dos vértices consecutivos y hemos trazado los radios correspondientes. Además, hemos trazado el segmento que une el centro de la circunferencia con el punto medio entre esos vértices seleccionados. Notemos que, aparentemente, esos trazos miden lo mismo. Hagamos un *zoom* a esa parte del dibujo para notar la diferencia:

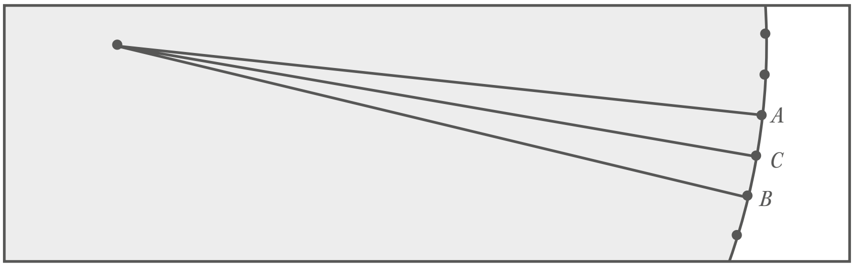


Figura IV.74.[4]

Aún no se nota la diferencia. Hagamos un nuevo *zoom*, pero perderemos el centro de la circunferencia:

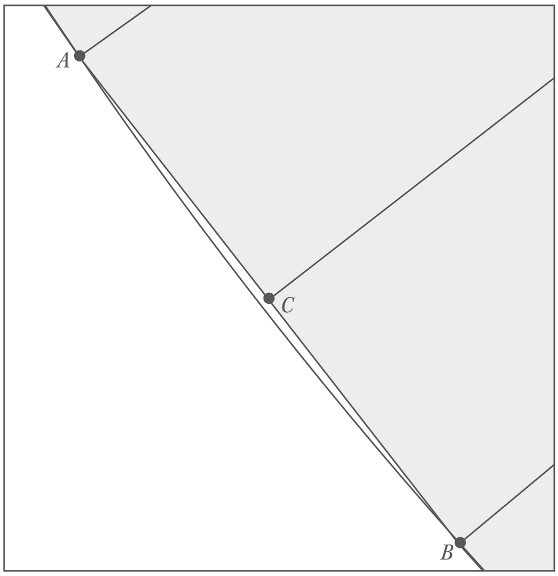


Figura IV.75.[5]

Notemos que los radios y el segmento que une el centro de la circunferencia con el punto medio entre los vértices A y B parecen ser paralelos, y el arco de circunferencia entre A y B parece un segmento recto.

Hagamos un modelo de la situación, sin guardar las proporciones, para poder hacer el análisis dentro del marco de la hoja del libro.

Consideremos una circunferencia de radio r y un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia y otro circunscrito a la circunferencia. Consideremos dos vértices consecutivos de ambos polígonos, denotados por A, B y A', B', respectivamente, y denotemos por O el centro de la circunferencia:

[4] Hemos girado la imagen para que no ocupe tanto espacio en la forma vertical.
[5] Hemos girado la imagen para que no ocupe tanto espacio en la forma vertical.

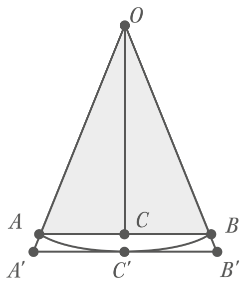


Figura IV.76.

Si el polígono regular tiene n lados, entonces tenemos n figuras como las de arriba. Para fijar ideas, pensemos en el octógono y encajemos las 8 figuras, se verá de la siguiente manera:

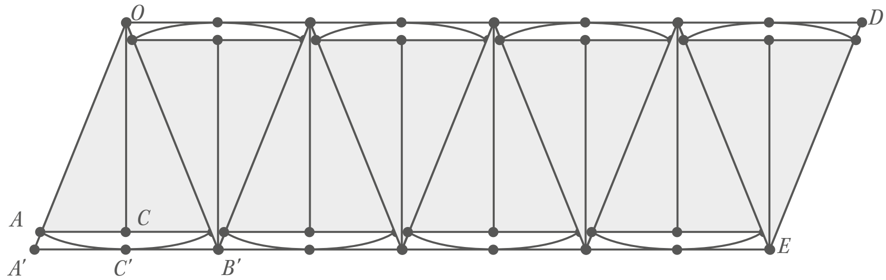


Figura IV.77.

Resulta el paralelogramo $ODEA'$ cuya base mide OD y su altura es aproximadamente r, el radio de la circunferencia. Además notamos que hay 4 arcos que están en la parte de arriba de la figura y 4 arcos que están por debajo de la figura. Todos los arcos juntos miden $d\pi$, donde d es la medida del diámetro, es decir, la suma de 4 arcos es $r\pi$ pues $d = 2r$. Es decir, OD mide aproximadamente $r\pi$.

La idea crucial es la siguiente, si en lugar de 8 considerámos un polígono regular de muchos lados, no habría diferencia entre el área del paralelogramo y el área de la circunferencia y además no habría diferencia entre el largo de la base del paralelogramo y $r\pi$. Por lo tanto el área de la circunferencia, es la misma que la de un paralelogramo cuya base mide $r\pi$ y su altura es r.

En resumen

El área del círculo de radio r es $r \cdot r\pi = r^2\pi$.

Ejercicios del capítulo

1. ¿Cuál es el radio de una circunferencia cuyo perímetro es igual a $18\,\pi$?

2. Muestre un rectángulo de perímetro 8 cm y área 3 cm^2.

3. ¿Existe un rectángulo de perímetro 50 cm y área 3 cm^2?

4. ¿ Existe un rectángulo de perímetro 100 cm y área 3 cm^2?

5. Si el perímetro de un rectángulo es P. Describa el promedio entre el largo y el ancho del rectángulo en función de P.

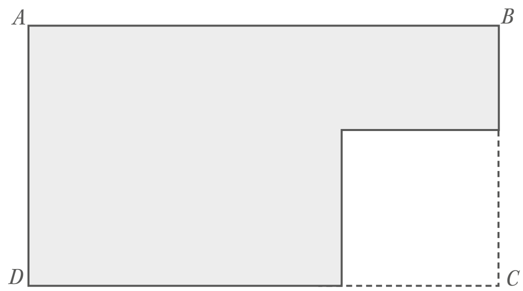
6. Si el perímetro de un rectángulo es P, muestre que existe $a > 0$, tal que el largo del rectángulo es $\frac{P}{4} + a$ y su ancho es $\frac{P}{4} - a$

7. Utilizando la notación del ítem anterior, muestre que el área de ese rectángulo es $\frac{P^2}{16} - a^2$.

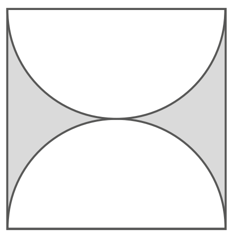
8. Muestre que el área máxima de un rectángulo de perímetro P es $\frac{P^2}{16}$.

9. Muestre que el rectángulo de perímetro 16 cm con área máxima es el cuadrado de lado 4 cm.

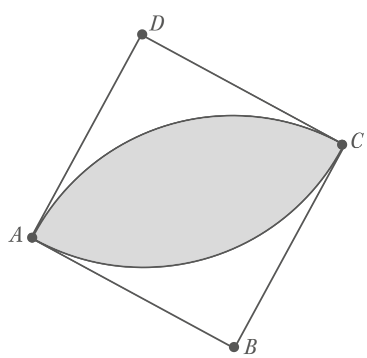
10. En la figura se muestra un rectángulo $ABCD$ con un cuadrado extraído. La razón de la longitud de AB con el perímetro del rectángulo $ABCD$ es $3 : 10$. Si la diferencia entre el largo de $\overline{AB}$ y el largo de $\overline{AD}$ es 5 cm. Determine el perímetro de la figura sombreada. El área de la figura sombreada es 114 cm^2. Determine la medida del lado del cuadrado extraído.



11. Las dos semicircunferencias de la figura tienen radio R. Calcule el área de la región sombreada.



12. En el cuadrado $ABCD$ se han dibujado partes de circunferencias, una con centro en D y otra con centro en B. Si el cuadrado tiene área 6 cm^2, ¿cuál es el área de la región sombreada?



Capítulo
V

Cuerpos geométricos

> "La culminación de *Los Elementos* de Euclides con la construcción de los poliedros responde al interés especial que mostraban los filósofos griegos por todo lo que atañe a los cuerpos regulares"
>
> F. Klein.

Introducción

En este capítulo, estudiaremos la geometría en el espacio. Daremos las primeras definiciones de objetos geométricos en tres dimensiones, algunos ya estudiados en el **Capítulo II**, como las superficies.

Definiremos algunas clases de cuerpos geométricos, como los poliedros, prismas, pirámides, conos, cilindros y sólidos de revolución. En particular, haremos un estudio más profundo de la Fórmula de Euler para poliedros y, a partir él, demostraremos que solo hay cinco sólidos regulares, que corresponde a la extensión al espacio de los polígonos regulares en el plano.

Al igual que en el **Capítulo III**, dedicaremos una sección a habilidades de visualización de objetos en el espacio, respecto de sus representaciones planas, como son los dibujos en perspectiva, las vistas y las redes.

En este capítulo también abordamos, con mayor detalle que en el **Capítulo I**, el cálculo del volumen de cuerpos y del área superficial de los mismos. Los objetos aquí considerados son ideales, así que el cálculo de volumen y área no es experimental, sino que deducimos fórmulas que permiten hacer esos cálculos a partir de las medidas lineales de los objetos.

Como en los capítulos anteriores, también en este incluimos una sección dedicada a dificultades asociadas a la enseñanza de cuerpos geométricos. Además, presentamos algunas actividades que pueden ayudar a prevenir esas dificultades con niños y niñas de enseñanza básica.

1. Posición relativa de elementos en el espacio

1.1 Rectas en el espacio

Recordemos que, en geometría plana, dos rectas son consideradas paralelas si no tienen puntos en común. Que dos rectas en un mismo plano sean paralelas tiene como consecuencia que ambas "tienen la misma dirección", y que la distancia desde cualquier punto de una de ellas a la otra se mantiene constante. Sin embargo, en el espacio tridimensional es posible tener pares de rectas que no se cortan y que no son consideradas paralelas; estas rectas no tienen la misma dirección, y la distancia entre una recta y los puntos de la otra no es constante.

En geometría espacial, dos rectas se dicen paralelas si no tienen puntos en común y además son *coplanares*, o sea, existe un plano que las contiene a ambas. Si dos rectas no tienen puntos en común, pero no son coplanares, decimos que son rectas *alabeadas*.

Una buena imagen de dos rectas alabeadas es la de dos autopistas que se encuentran en un paso a desnivel.

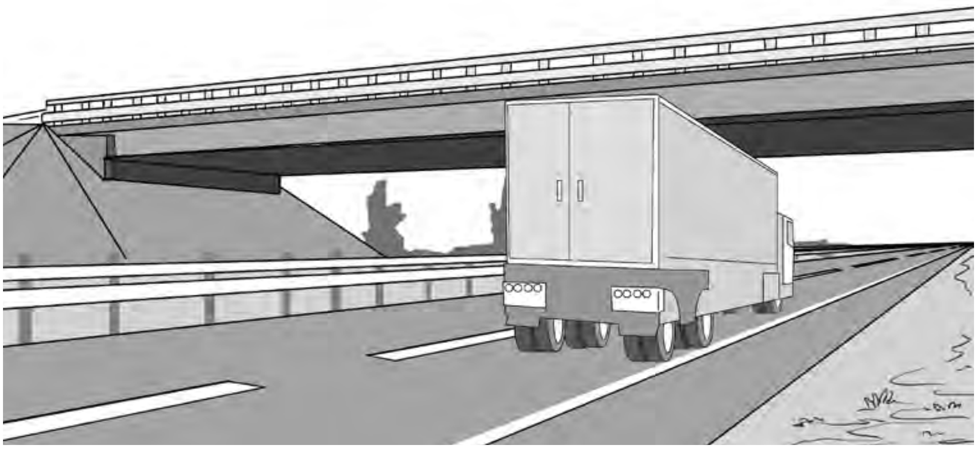


Figura V.1.

Ejercicio

Considere las rectas determinadas por los segmentos que se forman en las intersecciones entre las paredes de la sala de clases, y entre estas y el piso o el techo. Identifique entre ellas pares de rectas paralelas y pares de rectas alabeadas.

1.2 Posición relativa entre un plano y una recta

Dados un plano y una recta en el espacio, hay tres posibles relaciones entre ellos: o bien no tienen elementos en común y se dice que el plano y la recta son *paralelos*; o bien la recta está enteramente contenida en el plano; o la recta y el plano tienen exactamente un punto en común, en cuyo caso decimos que la recta y el plano son *secantes*. Las siguientes figuras ilustran estos casos:

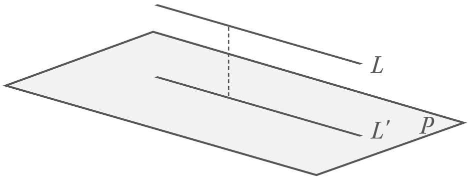


Figura V.2: plano y recta paralelos.

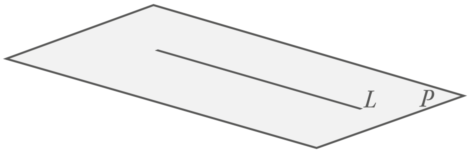


Figura V.3: recta contenida en el plano.

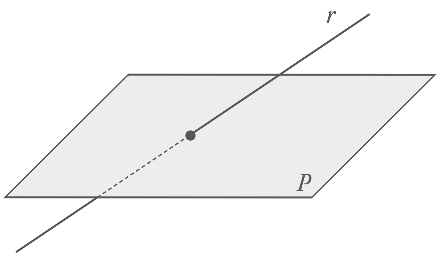


Figura V.4: plano y recta secantes.

Un caso particular de esta última situación se produce cuando la recta secante al plano es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por el punto en común. En este caso, decimos que la recta y el plano son *perpendiculares*.

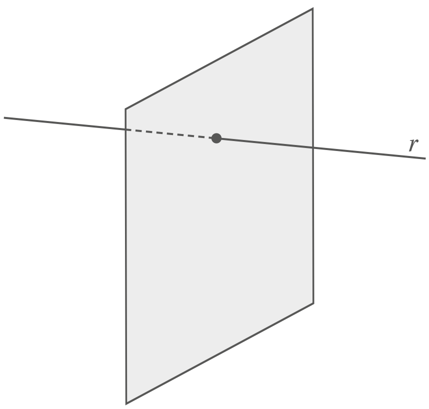


Figura V.5: plano y recta perpendiculares.

Ejercicios

1. Si una recta L tiene dos de sus puntos en un plano P. ¿Es cierto que L tiene todos sus puntos en P?

2. Si la recta L es perpendicular al plano π, y P es el punto de intersección entre ambos. ¿Qué se puede decir de todas las rectas contenidas en π que pasan por P?

1.3 Intersecciones entre superficies

Dos superficies distintas en el espacio pueden ser disjuntas (no tener puntos en común), o intersectarse. Si dos superficies en el espacio se intersecan, ¿qué figura forman los puntos comunes a ambas? En otras palabras, ¿a qué figura corresponde su intersección?

Si dos superficies se intersecan, entonces sus puntos comunes pueden ser agrupados en una o más porciones, cada una de las cuales es un punto aislado, o una línea o un trozo de superficie. Las siguientes figuras ilustran estos casos:

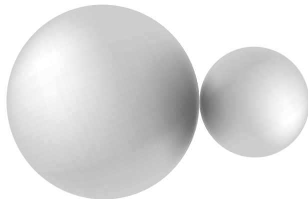


Figura V.6: dos superficies con un punto en común.

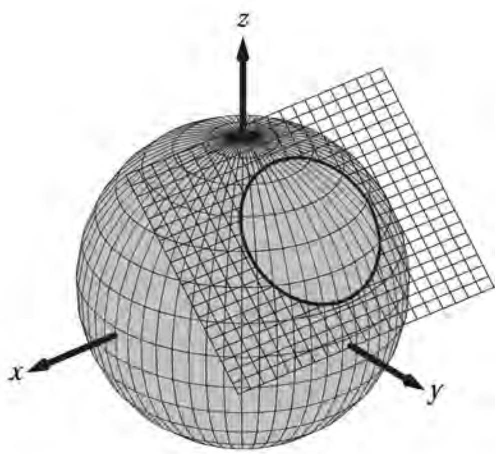


Figura V.7: dos superficies con una línea en común.

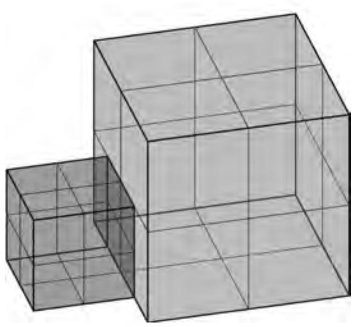
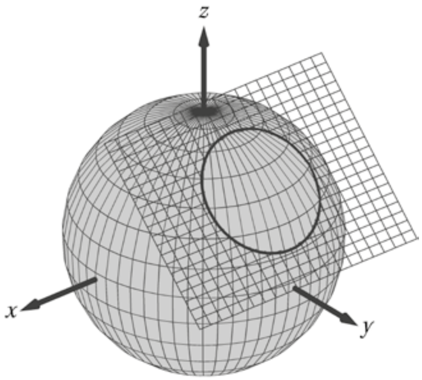
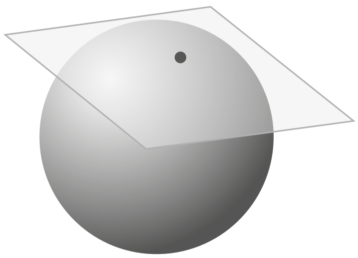


Figura V.8: dos superficies con un trozo de superficie en común.

Ejemplo

La intersección entre un plano y una esfera puede ser un punto o una circunferencia.





1.4 Intersección entre planos. Ángulos diedros

Dos planos distintos pueden ser paralelos, o tener puntos en común. En este último caso, la intersección entre ambos planos es una recta y decimos que los dos planos son *secantes*.

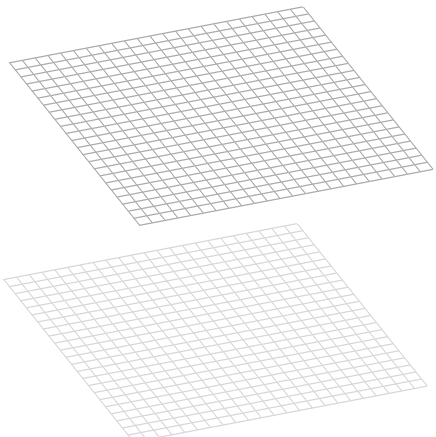


Figura V.9: dos planos paralelos.

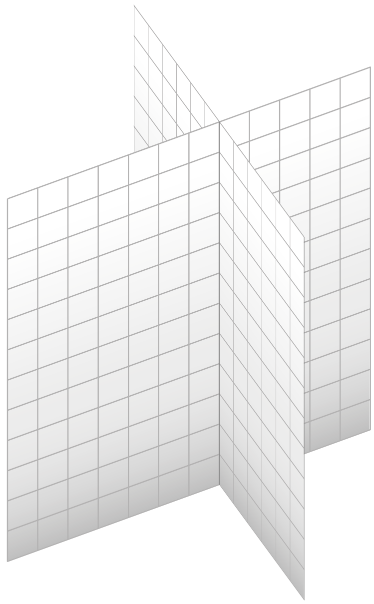


Figura V.10: dos planos secantes.

Cuando dos planos distintos se cortan, el espacio queda dividido en cuatro regiones, llamadas *ángulos diedros*. Cada ángulo diedro está delimitado por dos *semiplanos* (uno en cada plano) y por la recta común a los dos planos (la *arista* del ángulo diedro).

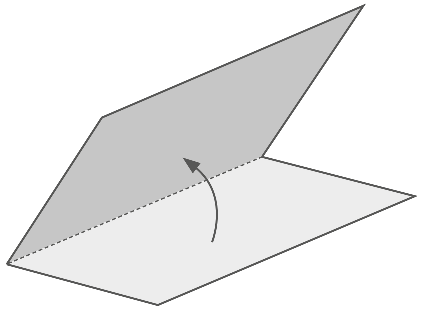


Figura V.11: un ángulo diedro.

Dado un ángulo diedro, nos interesa definir su *medida*. ¿Cómo medir un ángulo diedro? Una primera idea sería elegir un punto sobre la arista del ángulo, trazar dos rayos (uno en cada uno de los semiplanos que lo forman) con ese punto como vértice, y considerar la medida del ángulo que forman dichos rayos como la medida del ángulo diedro.

¿Qué problema hay con esta idea? Dependiendo de cuáles sean los dos rayos escogidos, es posible encontrar cualquier medida como medida del ángulo que forman.

Lo que haremos para determinar esta medida será escoger en cada lado del ángulo diedro *rayos perpendiculares a la arista*.

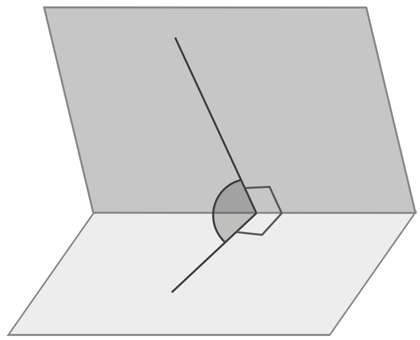
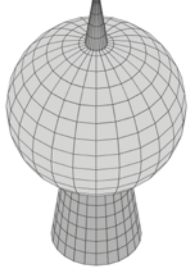


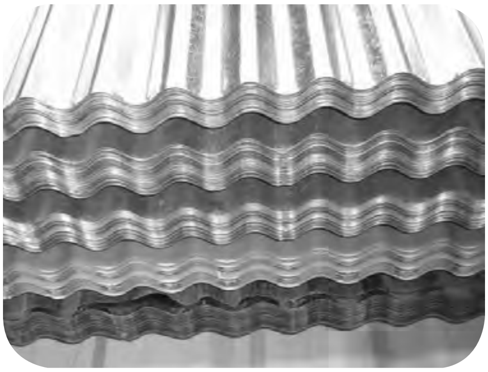
Figura V.12: cómo medir un ángulo diedro.

Ejercicios de la sección

1. En la siguiente figura, se ven un cono y una esfera, donde el centro de la esfera está sobre el eje del cono. ¿Qué curvas forma su intersección?

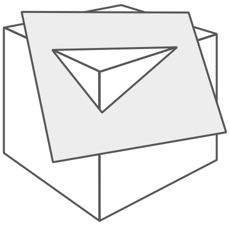


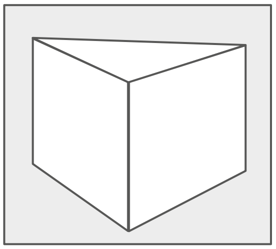
2. Identifique las intersecciones entre las superficies indicadas en cada caso:
   a. Un cono, botado en un plano (por ejemplo, el suelo).
   b. Una esfera que se deja caer dentro de un cono (piense en una bola de helado dentro de un cono).
   c. Una plancha ondulada (por ejemplo, un trozo de techo de zinc) apoyada en el suelo.

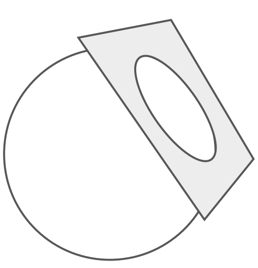


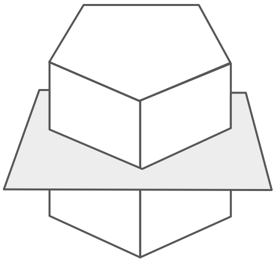
3. Corte un cono (hecho de plasticina u otro material blando) con un plano (por ejemplo, con un cuchillo), en distintas posiciones. Bosqueje las curvas que se obtienen.

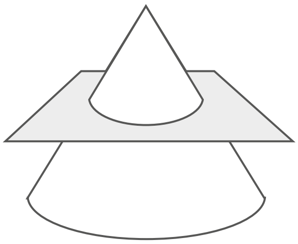
4. En cada caso, decida qué figura plana resulta al intersecar un plano con las siguientes superficies:

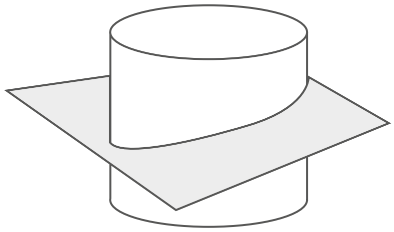




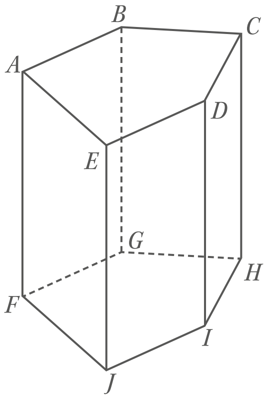








5. La siguiente superficie es intersectada por el plano que contiene a los puntos A, E y H



¿Cuál es la figura que resulta de esa intersección en el plano?

2. Cuerpos sólidos

En esta sección, discutimos los conceptos básicos relativos a cuerpos geométricos tridimensionales (que no están encerrados en un plano, por lo que decimos que están "en el espacio").

En el **Capítulo II** ya mencionamos la idea (que dimos por conocida) de *plano*, y definimos los conceptos de *superficie* y *superficie con borde*. Ahora, diremos que un *cuerpo sólido* (o simplemente sólido) es un conjunto de puntos en el espacio que está encerrado por una o más superficies (o superficies con bordes), todas ellas finitas[1]. Los puntos de las superficies que determinan el sólido son considerados parte de este y forman su *frontera* o *borde*. Los puntos del sólido que no forman parte de la frontera son llamados *puntos interiores* del sólido; el conjunto de ellos forma el *interior* de este. El *exterior* del sólido es el conjunto formado por los puntos que no pertenecen a este, o sea, los que no son parte de su interior ni de su frontera.

Las siguientes figuras muestran sólidos

Un cubo

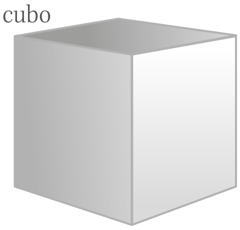


Figura V.13.

Un paralelepípedo

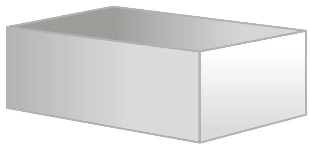


Figura V.14.

Una pirámide

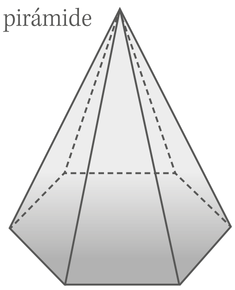


Figura V.15.

Un cono

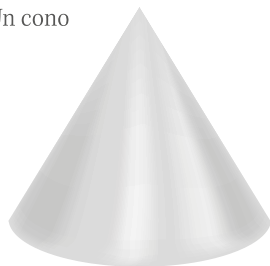


Figura V.16.

Un cilindro

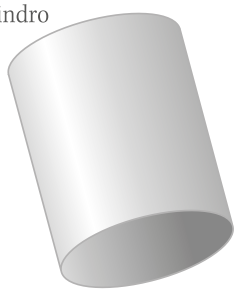


Figura V.17.

Una esfera

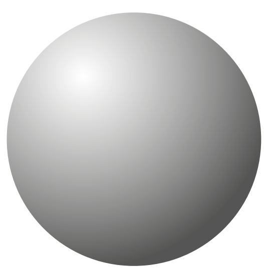


Figura V.18.

[1] Por supuesto, es posible preguntarse qué ocurre si una o más de las superficies que delimitan un conjunto de puntos es infinita, pero esto se escapa a lo que nos interesa estudiar en este texto.

Note que nos referimos a la esfera como un cuerpo sólido, pese a que anteriormente nos habíamos referido a ella como una superficie. Esta dualidad en nuestra decisión de qué significa la palabra "esfera" (usada tanto para referirnos a un sólido como a la superficie que lo delimita) es común entre los objetos tridimensionales. En general, el mismo nombre servirá tanto para denotar a un sólido, como a la superficie o unión de superficies que lo delimitan, será el contexto el que nos indique en qué sentido estamos usando dicho nombre.

Así, por ejemplo, cuando hablemos de una "red para desarrollar el cubo" estaremos pensando en las superficies que lo delimitan (seis cuadrados), pero al hablar del "volumen del cubo", estaremos pensando en el cuerpo sólido.

2.1 Algunas clases de sólidos

En este apartado mencionaremos algunas clases de sólidos, daremos sus definiciones y señalaremos algunas de sus características. No pretendemos que sea una clasificación exhaustiva ni disjunta. Algunas clases son las siguientes:

- **Poliedros:** son sólidos en que todas las superficies que lo delimitan son polígonos.
- **Cilindros:** son sólidos delimitados por dos figuras planas paralelas y congruentes, (las *bases*), y por una superficie (el *manto*) que las une.
- **Conos:** son sólidos delimitados por una figura plana (la *base*) y una superficie formada por los segmentos que unen el borde de la base con un punto (el *vértice*) fuera del plano de esta.
- **Sólidos de revolución:** son aquellos que se obtienen rotando una figura plana alrededor de un eje.

En la **Figura V.19**, vemos como la figura S es girada en torno al eje L (llamado eje de rotación) y produce un sólido de revolución.

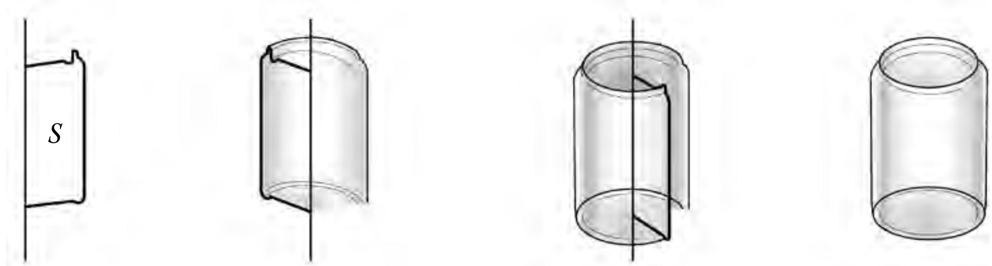


Figura V.19.

Note que las anteriores son descripciones generales más que definiciones precisas de las clases de sólidos mencionadas. Las secciones siguientes estudian en más detalle cada una de las clases aquí mencionadas.

Es necesario destacar que las nociones de cilindros y conos arriba señaladas no se refieren solamente a los conceptos intuitivos que ya mencionamos (como superficies) en el **Capítulo II**, sino que son más generales. También es importante enfatizar en que este nivel de generalización es muy abstracto, por lo que no es adecuado para ser tratado a nivel de aula escolar; su inclusión en este texto apunta exclusivamente al conocimiento que debe tener el futuro profesor o profesora. Las clases detalladas contienen la mayoría de los sólidos que nos interesa estudiar. Así, por ejemplo, el cubo, los prismas y las pirámides son poliedros, mientras que el cilindro y el cono usuales (no así los más generales mencionados más arriba), así como la esfera, son sólidos de revolución.

- **Sólidos convexos y sólidos cóncavos:** al igual que en el caso de las figuras planas, decimos que un sólido es convexo si, dados dos de sus puntos cualesquiera, el segmento que los une está completamente contenido en él.

Las siguientes dos figuras muestran ejemplos de sólidos no convexos, el primero (**Figura V.20**) es un poliedro y el segundo (**Figura V.21**) no calza en ninguna de las categorías mencionadas.

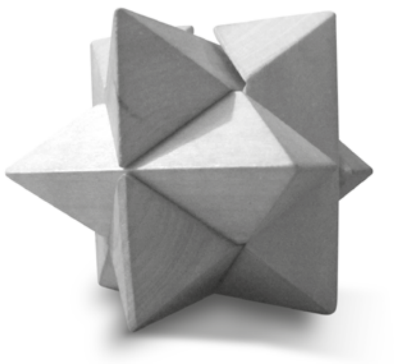


Figura V.20: un "poliedro estrellado".

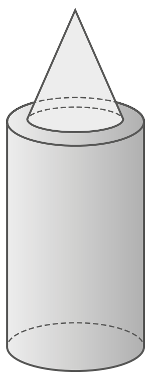


Figura V.21: un cilindro al que se le ha adherido un cono.

2.2 Poliedros

Cada una de las superficies que delimitan un poliedro (que, como hemos mencionado, son todos polígonos) es denominada una *cara* del poliedro. Los vértices de cada cara son, a su vez, vértices del poliedro, y los lados de cada cara son llamados *aristas* del poliedro.

2.2.1 Clasificación de poliedros

Así como los polígonos en el plano son clasificados de acuerdo a su número de vértices o de lados, una primera idea para clasificar a los poliedros es de acuerdo a su número de caras. Como el número mínimo de caras de un poliedro es 4 (¿por qué?), encontramos en esta clasificación los tetraedros (4 caras), pentaedros (5 caras), hexaedros (6 caras) y así sucesivamente.

Sin embargo, esta clasificación no es tan satisfactoria como en el caso de los polígonos: dos polígonos con el mismo número de lados son suficientemente parecidos como para considerarlos miembros de una misma clase. Por ejemplo, cualquier heptágono puede ser transformado gradualmente (modificando poco a poco los largos de sus lados y la medida de sus ángulos) en cualquier otro heptágono; pero dos poliedros con el mismo número de caras pueden ser demasiado distintos, como muestran las siguientes figuras:

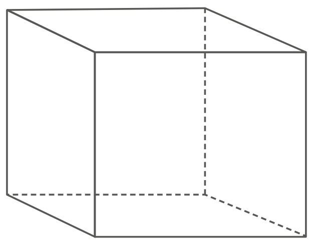


Figura V.22.

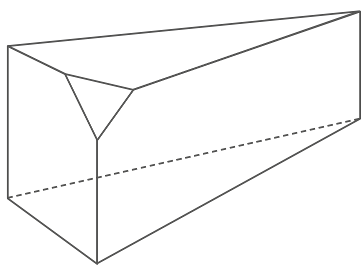


Figura V.23.

Así, no es fácil encontrar clasificación exhaustiva y significativa, de los poliedros en el espacio. Por supuesto, una clasificación posible es la que divide a los poliedros en convexos (concepto ya explicado para sólidos en general) y cóncavos (aquellos que no son convexos). Sin embargo, dado que esta clasificación consta de solo dos clases, es demasiado amplia, en el sentido de que no nos permite distinguir entre poliedros que, a simple vista, son muy diferentes entre sí.

Por lo anterior, nos contentamos con mencionar algunos tipos especiales de poliedros, que comprenden la mayoría de los tipos de poliedros con los cuales trabajaremos.

- **Prismas:** son poliedros en los que es posible identificar dos caras (llamadas *bases* o *caras basales*) que son polígonos congruentes que pertenecen a planos paralelos, y donde todas las otras caras (llamadas las *caras laterales*) son paralelogramos.

  Los siguientes son dos ejemplos de prismas:

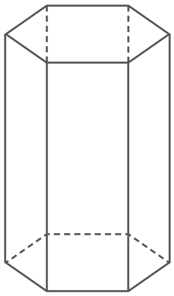


Figura V.24.

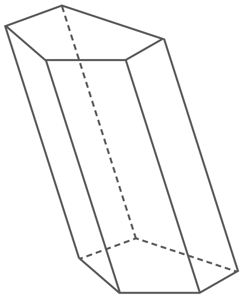


Figura V.25.

  Los siguientes son ejemplos de poliedros que no son prismas:

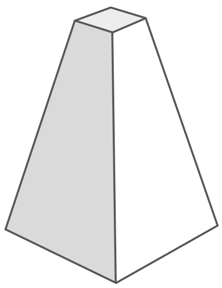


Figura V.26.

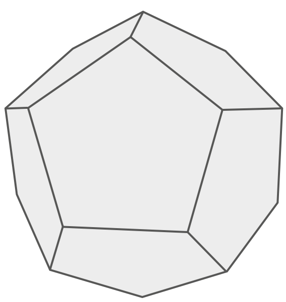


Figura V.27.

El poliedro de la **Figura V.26** no es un poliedro pues, si bien tiene dos polígonos en planos paralelos, las otras caras no son paralelogramos. El de la **Figura V.27** tampoco, porque no tiene paralelogramos como caras.

Para pensar

Note que, dado un prisma, es posible que sus bases no sean determinables en forma única. Por ejemplo, en un cubo, cualquier par de caras opuestas pueden ser consideradas bases, y las otras cuatro caras serán caras laterales.
En general, si un sólido es un paralelepípedo (o sea, si tiene seis caras que son todas paralelogramos), entonces dos caras opuestas cualesquiera pueden ser consideradas las bases, y todas las otras caras serán caras laterales.
¿Es posible que ocurra lo mismo, en prismas que no son paralelepípedos?

Los prismas se clasifican de acuerdo al tipo de polígono que es la base (o sea, de acuerdo a su número de lados). Así, tenemos prismas de base triangular, cuadrada, pentagonal, etc.

- **Pirámides:** son poliedros en los que existe un vértice (llamado la *cúspide*, el *ápice* o el *vértice d*e la pirámide) que está contenido en todas las caras, menos en una. La cara que no contiene a la cúspide recibe el nombre de *base* de la pirámide; todas las otras caras son triángulos, y reciben el nombre de *caras laterales*.

Las pirámides se clasifican de acuerdo al tipo de polígono que es la base (o sea, de acuerdo a su número de lados de ésta). Así, tenemos pirámides de base triangular, cuadrada, pentagonal, etc.

Los siguientes son ejemplos de pirámides:

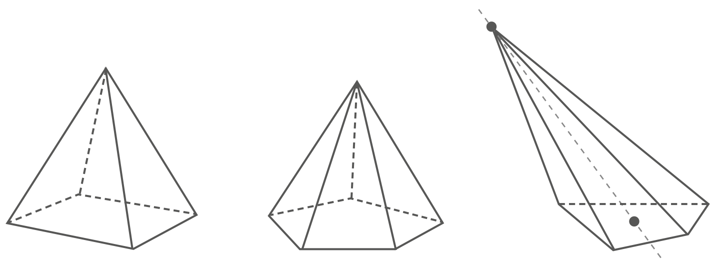


Figura V.28.

Los siguientes son ejemplos de poliedros que no son pirámides:

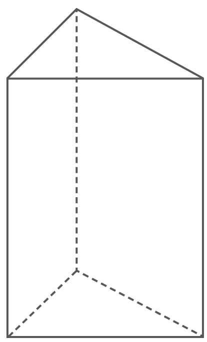


Figura V.29.

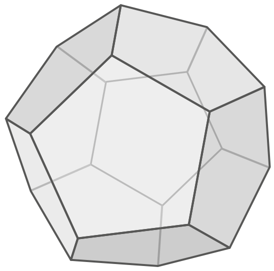


Figura V.30

El poliedro de la **Figura V.29** no es una pirámide pues no existe ningún vértice que pertenezca a todas las caras salvo una. En este caso, no hay un vértice que pertenezca a cuatro caras. Por la misma razón el poliedro de la **Figura V.30** no es una pirámide.

Para pensar

De manera similar a lo que ocurre con los prismas, es posible que en una pirámide la base y la cúspide no sean determinables en forma única. En una pirámide de base triangular (un tetraedro), cualquiera de sus vértices puede ser considerado como la cúspide, y la cara opuesta a él como la base.
¿Es posible que ocurra esto en una pirámide cuya base no sea triangular?

- **Poliedros regulares:** se llaman poliedros regulares aquellos poliedros convexos en que todas las caras son polígonos regulares congruentes entre sí y que en cada vértice convergen la misma cantidad de aristas. Es posible demostrar (en la siguiente sección daremos una manera informal de justificar este hecho) que solo existen cinco poliedros regulares, a saber:
  - El tetraedro (pirámide triangular) regular, formada por cuatro triángulos equiláteros.
  - El cubo (o hexaedro regular), formado por seis cuadrados.
  - El octaedro regular, formado por ocho triángulos equiláteros.
  - El dodecaedro regular, formado por doce pentágonos regulares.
  - El icosaedro regular, formado por veinte triángulos equiláteros.

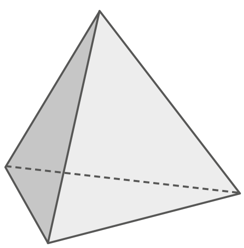


Figura V.31: tetraedro regular.

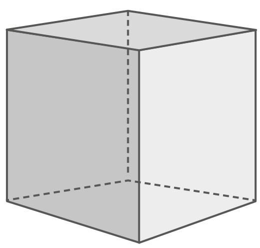


Figura V.32: cubo.

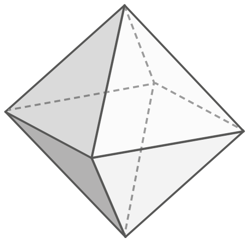


Figura V.33: octaedro regular.

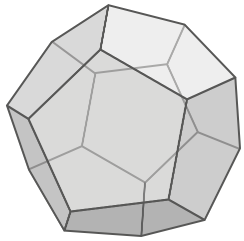


Figura V.34: dodecaedro Regular.

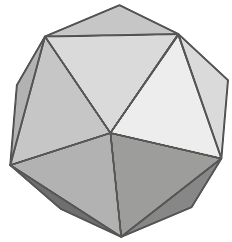


Figura V.35: icosaedro Regular.

Los poliedros regulares también son denominados *sólidos platónicos*, ya que son mencionados por Platón. Él explica[2] que los cuatro elementos (fuego, tierra, aire y agua) están asociados, respectivamente, al tetraedro, al cubo, al octaedro y al icosaedro. Platón menciona —casi al pasar— al dodecaedro diciendo que: “Puesto que todavía había una quinta composición, el dios la utilizó para el universo cuando lo pintó”[3]. Según algunas interpretaciones, el dodecaedro regular estaría asociado al universo o a la divinidad.

La siguiente figura muestra los cinco poliedros regulares, y su asociación con los elementos.

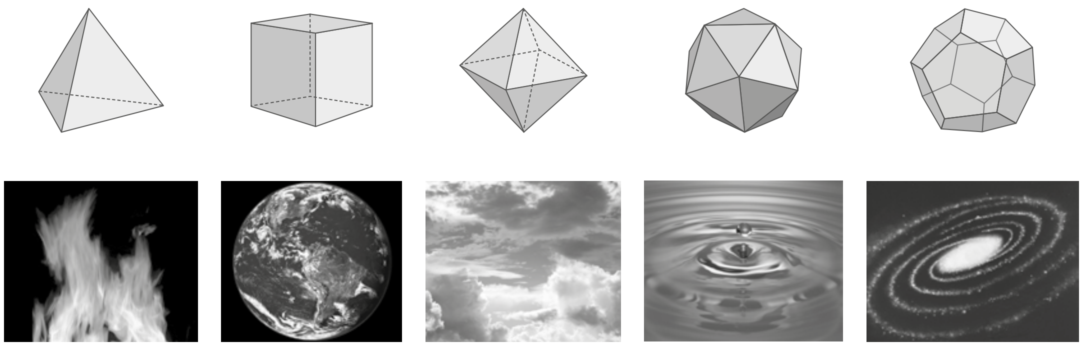


Figura V.36.

Ejercicios

1. ¿Cuál es el menor número de aristas que tiene un prisma? Explique.
2. ¿Cuál es el menor número de vértices que tiene una pirámide? Explique.
3. ¿Cuál es el menor número de caras que tiene un poliedro? Explique.
4. ¿Cuántos pares de bases posibles tiene un prisma rectangular recto? Explique.

[2] En su diálogo *Timeo, o de la naturaleza.*

[3] Ibíd.

2.2.2 La Relación de Euler

Leonhard Euler (matemático y físico suizo del siglo XVIII) descubrió una interesante relación entre las cantidades de vértices, aristas y caras de muchos poliedros.

Ejercicios

Esta actividad está orientada a conjeturar la Relación de Euler a través de ejemplos.

1. Complete la siguiente tabla, donde V denota el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras de cada poliedro.

Poliedro	V	C	$V+C$	A
Tetraedro				
Cubo				
Pirámide de base cuadrada				
Pirámide de base hexagonal				
Pirámide de base pentagonal				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

¿Qué relación observa entre las cantidades $V + C$ y A?

En todos los ejemplos anteriores, la suma de vértices y caras es igual a la cantidad de aristas, más 2. Así, si denotamos por V al número de vértices, por C al número de caras, y por A al número de aristas, la relación propuesta por Euler se escribe:

$$(V + C) - A = 2$$

Euler conjeturó que esta diferencia de 2 entre ambas cantidades $V + C$ y A es una relación que se cumple en todos los poliedros. Sin embargo, hay muchos poliedros en que esto no se cumple.

Es posible observar que todos los ejemplos presentados donde se cumple la Relación de Euler corresponden a poliedros convexos. De hecho, es posible demostrar que ella se cumple en todos los poliedros convexos. Sin embargo, la convexidad no explica completamente la situación, ya que en los dos casos que muestran las siguientes figuras la relación también se cumple, pese a no tratarse de poliedros convexos.

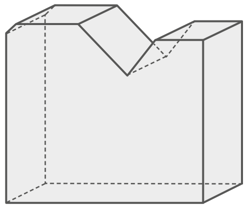


Figura V.37.

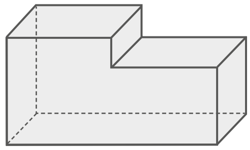


Figura V.38.

Ejercicio

Complete la tabla y verifique que se cumple la Relación de Euler en cada caso.

Poliedro	V	C	$V+C$	A
Poliedro de la **Figura V.37**				
Poliedro de la **Figura V.38**				

A continuación, se muestra un poliedro que no es convexo y que no satisface la Fórmula de Euler.

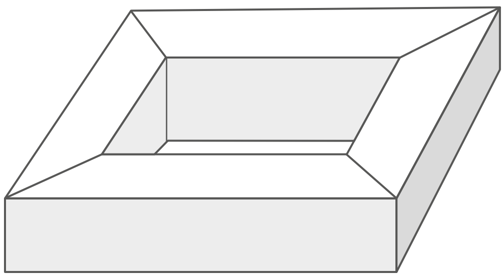


Figura V.39.

De hecho, el número de caras de este poliedro es $C = 16$, el número de aristas es $A = 32$ y el número de vértices es $V = 16$; entonces, en este caso se tiene:

$$C - A + V = 16 - 32 + 16 = 0 \neq 2$$

A continuación, daremos una explicación informal de por qué la Fórmula de Euler funciona. Pensemos en un poliedro que no tenga hoyos, note que el poliedro de la **Figura V.39** se puede pensar como un prisma de base rectangular al cual le sacamos un prisma (hicimos un hoyo) de base rectangular en el centro. Otra forma de entender que no tenga hoyos es pensar que se trata de un polígono de goma blanda que al inflarlo, queda convertido en una esfera.

Figura V.40.

Ahora nos concentraremos en ese tipo de poliedros, imaginémonos que es de un material flexible que se puede estirar. Pues bien, saquémosle una cara (dejando sus aristas y vértices), abrámoslo y dejémoslo abierto en una superficie plana.

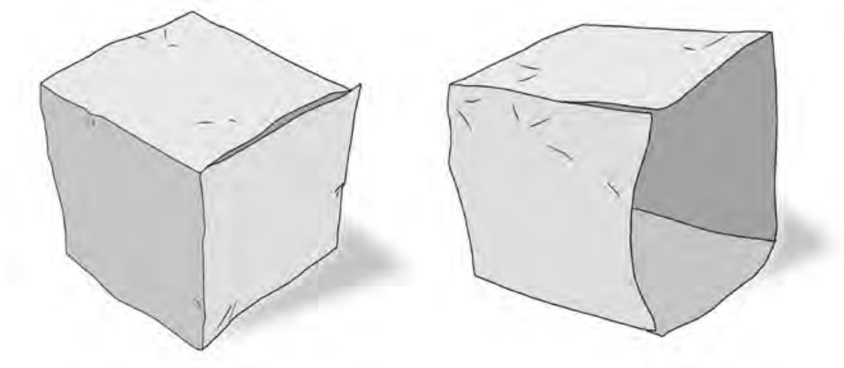


Figura V. 41: cubo de papel lustre al cual le sacamos una cara.

Para fijar ideas, podemos pensar que un cubo, una vez abierto se puede visualizar así:

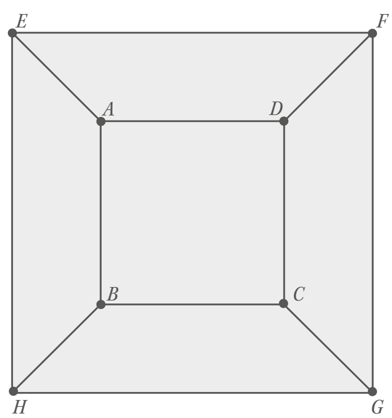


Figura V.42.

Notemos que el cuadrado ***EFGH*** está constituido por las aristas de la cara que sacamos del cubo, antes de abrirlo.

Tenemos un poliedro sin hoyos, al cual le quitamos una cara (pero dejamos los vértices y las aristas) y lo abrimos formando una figura plana. Recordemos que tenemos que explicar por qué siempre es cierto que:

$$(C - A) + V = 2$$

Como a la figura plana le quitamos una cara, debemos justificar la relación:

$$(C - A) + V = 1$$

Eso haremos a continuación, pero en la figura plana. Si en la figura plana, que resultó de quitarle una cara al poliedro y abrirlo en un plano, todas las regiones son triangulares, no hacemos nada. Si la figura plana tiene regiones que no son triangulares, como en el caso de la **Figura V.42**, entonces unamos dos vértices con diagonales para obtener regiones triangulares, en el caso del cubo quedaría como la **Figura V.43**.

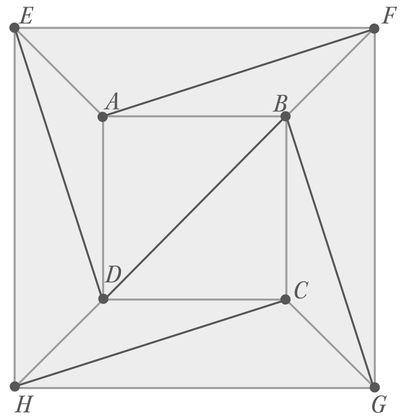


Figura V.43.

Al hacer esto, notamos que agregamos aristas. Por ejemplo, en la **Figura V.43**, $\overline{BD}$ es una arista que nos está en la **Figura V.42**, pero es importante notar que donde había una región, como la región cuadrada *ABCD*, al incluir la diagonal también aumentamos en 1 el número de regiones. Es decir, cuando triangulamos, por cada arista que aumentamos también aumentamos en 1 la cantidad de caras, de tal forma que la diferencia $C - A$ es la misma antes y después de la triangulación, es decir, el proceso de triangular no hace cambiar al número $C - A + V$.

Ahora que tenemos el poliedro abierto y triangulado en una figura plana, procederemos a quitar aristas de la figura, mediante dos operaciones.

Primera operación: quitaremos aristas desde el exterior hacia el interior de la figura. Al quitar la arista, también quitaremos la región triangular que tiene como borde a aquella arista, pero no quitaremos sus vértices. Por ejemplo, de la **Figura V.43**, quitaremos la arista $\overline{FG}$ y la región ΔFBG, lo que resulta es una figura con una arista menos, también con una región menos, pero con la misma cantidad de vértices que antes, entonces esta operación tampoco cambia el valor de:

$$C - A + V$$

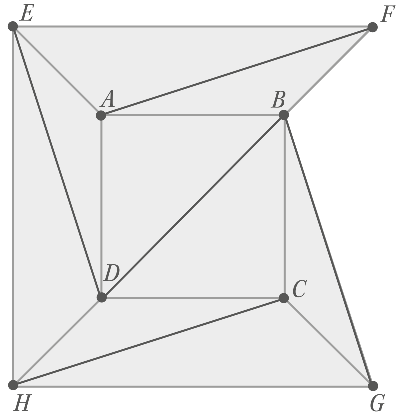


Figura V.44.

Ahora quitemos la arista $\overline{BG}$, pero no sus vértices, y quitamos también la región triangular ΔBCG; de nuevo no cambiamos el valor de $C - A + V$. Solo para no perder de vista la meta, recordemos que debemos mostrar que $C - A + V = 1$.

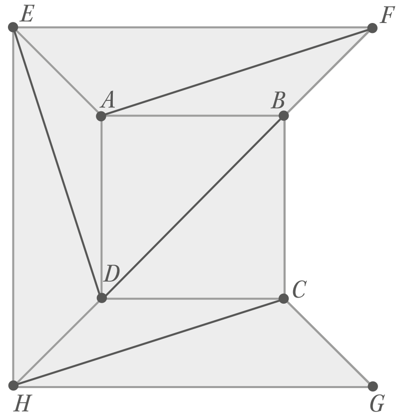


Figura V.45.

Repitiendo este proceso, podemos llegar a la **Figura V.46**, sin que cambie el valor de $C - A + V$. Hasta ahora, si un triángulo tiene solo una arista en el borde, quitamos una arista y una región y hemos cuidado que los triángulos que quedan tengan al menos una arista compartida con otro triángulo.

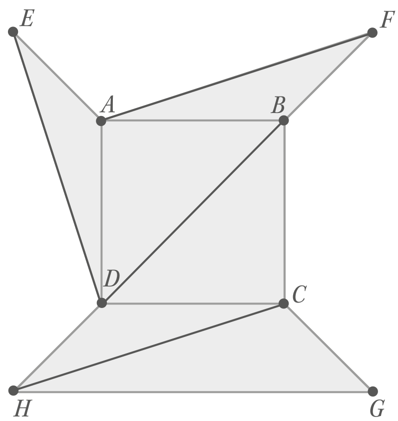


Figura V.46.

Entonces, si quitamos la arista $\overline{DH}$ y la región triangular ΔDCH, dejamos a la región triangular ΔCGH sin ninguna arista compartida con otro triángulo. Así que desistiremos de esa operación. Ahora presentaremos una segunda operación.

Segunda operación: quitaremos simultáneamente dos aristas y un vértice, por ejemplo las aristas $\overline{CG}$ y $\overline{HG}$ y el vértice G, y también desaparece la región triangular ΔCGH (ver **Figura V.46**). Entonces, con esta operación las aristas disminuyen en 2, las caras disminuyen en 1 y los vértices disminuyen en 1. De nuevo esta operación deja invariante al resultado de $C - A + V$.

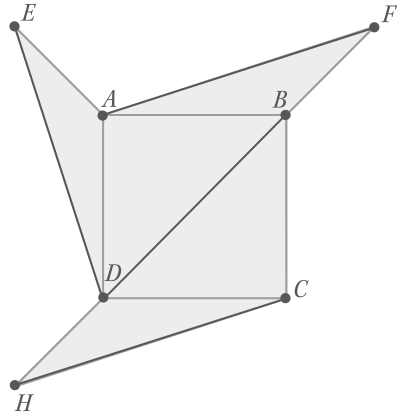


Figura V.47.

Repitiendo estas dos operaciones, quitar una arista y una región, o bien quitando una región, un vértice y dos aristas, que no cambian el valor de $C - A + V$, podemos llegar a un triángulo. Es decir, en cualquier poliedro sin hoyos, al cual le quitamos una cara y lo abrimos en un plano, el valor de $C–A+V$ es igual al valor de (caras − aristas + vértices) que tiene un triángulo.

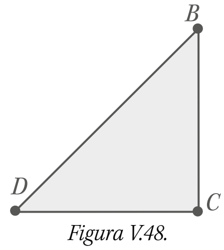


Figura V.48.

Un triángulo tiene una cara, tres aristas y tres vértices, así que para el caso del triángulo se tiene que:

$$C - A + V = 1 - 3 + 3 = 1$$

Esto es exactamente lo que queríamos mostrar.

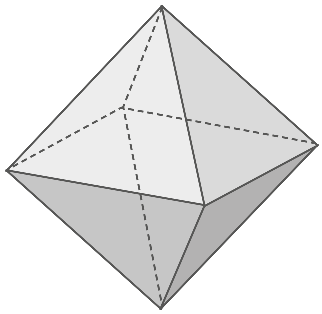
En general, dado cualquier poliedro, al número “Caras − Aristas + Vértices” se le llama la *característica de Euler* del poliedro.

Así, la Fórmula de Euler puede resumirse diciendo que “la característica de Euler de un poliedro (con ciertas condiciones) es *2*”.

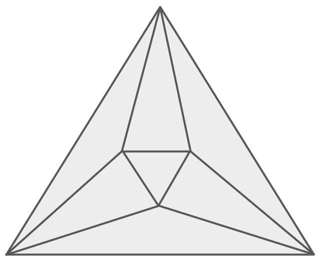
En rigor, nuestra explicación fue realizada para el caso del cubo. Sin embargo, todos los argumentos se pueden aplicar en cualquier poliedro como los considerados.

Ejercicios

1. Considere un octaedro regular



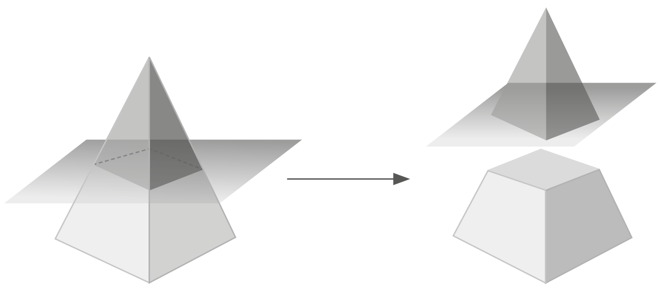
Ahora, si le quitamos una cara y lo abrimos, se vería como sigue:



Repita la operación de quitar aristas y vértices para el caso de la figura anterior, para llegar a un triángulo y manteniendo invariante el número $C - A + V$.

2. Haga lo mismo que en 1. con una pirámide de base hexagonal.

3. Si a una pirámide le hacemos un corte paralelo al plano de la base, se obtienen dos poliedros nuevos, tal como muestra la figura. Demuestre que cada uno de ellos tiene la misma característica de Euler que la pirámide inicial.



Usaremos la Fórmula de Euler para mostrar que existen solo cinco poliedros regulares. Recordemos que un poliedro regular es aquel en que todas sus caras son polígonos regulares congruentes entre sí y que además en cada vértice concurren la misma cantidad de aristas. Al igual que antes, denotaremos por C la cantidad de caras, por A la cantidad de aristas y por V la cantidad de vértices. Además, como estamos considerando un poliedro regular, pensemos que cada cara es un polígono regular de p lados y que en cada vértice concurren q aristas. Cada lado de un polígono regular, que es una arista del poliedro, está en dos caras; entonces, la cantidad de caras multiplicada por la cantidad de lados de una cara es el doble de la cantidad de aristas del poliedro, esto es:

$$pC = 2A \qquad (V.1)$$

Un razonamiento similar, permite afirmar que el número de vértices por la cantidad de aristas que concurren en un vértice es el doble de la cantidad de aristas.

$$qV = 2A \qquad (V.2)$$

Además, como un poliedro regular es convexo, satisface la Fórmula de Euler, esto es:

$$C - A + V = 2 \qquad (V.3)$$

Si reemplazamos en $(V.3)$ las igualdades $(V.1)$ y $(V.2)$, se obtiene:

$$\frac{2A}{p} - A + \frac{2A}{q} = 2 \qquad (V.4)$$

Como A es un número positivo, dividiremos la ecuación $(V.4)$ por A, y obtendremos:

$$\frac{2}{p} - 1 + \frac{2}{q} = \frac{2}{A} \qquad (V.5)$$

Sumando 1 y dividiendo por 2 la ecuación $(V.5)$ resulta:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

Como A es positivo, entonces $\frac{1}{2} + \frac{1}{A} > \frac{1}{2}$, entonces se tiene que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \qquad (V.6)$$

Recordemos ahora qué es p y qué es q. El número p es un número entero positivo que denota la cantidad de lados que tiene el polígono regular que forma el poliedro, por lo tanto, $p \geq 3$. Del mismo modo, podemos argumentar que q es un número entero positivo mayor o igual a 3.

Antes de analizar cada caso posible, acotemos los casos a un número finito de ellos. Si $q \geq 6$, entonces:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{6} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Entonces, $3 \leq q < 6$. Del mismo modo se puede probar que $3 \leq p < 6$.

Por lo tanto, los posibles valores de (p,q) son (3, 3), (3, 4), (3, 5) (4, 3),(4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4) (5, 5). En particular, podemos decir que si un polígono regular es la cara de un poliedro regular, entonces solo puede ser un triángulo equilátero, un cuadrado o un pentágono regular. Esos tres casos se dan, efectivamente, en el tetraedro regular, el cubo y el dodecaedro, respectivamente. Más particularmente, el caso (3, 3) corresponde al tetraedro regular, el caso (3, 4) corresponde al octaedro regular, el caso (3, 5) corresponde al icosaedro regular, el caso (4, 3) corresponde al cubo, y el caso (5, 3) corresponde al dodecaedro regular, que son los cinco sólidos platónicos. Para terminar de probar que esos cinco son los únicos casos de poliedros regulares, debemos mostrar que los casos (4, 4), (4, 5), (5, 4) y (5, 5) no son posibles, es decir, que en estos casos no se cumple que:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

Caso 1: Si $(p, q) = (4, 4)$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Entonces, $p = 4 = q$, no se cumple V.6. Por lo tanto, no existe un poliedro regular en que cada cara sea un cuadrado y que en cada vértice converjan 4 aristas.

Caso 2: Si $(p, q) = (4, 5)$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}<\frac{1}{2}$$

Entonces, si $p = 4$ y $q = 5$, no se cumple V.6. Por lo tanto, no existe un poliedro regular en que cada cara sea un cuadrado y que en cada vértice converjan 5 aristas.

Caso 3: Si $(p, q) = (5, 4)$

Por simetría con el Caso 2, también es un caso imposible. Es decir, no existe un poliedro regular en que cada cara sea un pentágono regular y que en cada vértice converjan 4 aristas.

Caso 4: Si $(p, q) = (5,5)$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$$

Entonces, si $p = q = 5$, no se cumple V.6. Por lo tanto, no existe un poliedro regular en que cada cara sea un pentágono regular y que en cada vértice converjan 5 aristas.

Finalmente, hemos comprobado que solo existen cinco poliedros regulares.

En resumen

Un poliedro regular es un poliedro cuyas caras son polígonos regulares y congruentes entre sí y que en cada vértice converge la misma cantidad de aristas.
Solo existen 5 poliedros regulares, que son:

- El tetraedro regular: poliedro de 4 caras, las cuales son triángulos equiláteros congruentes, en que cada vértice convergen 3 aristas.
- El hexágono regular o cubo: poliedro de 6 caras, las cuales son cuadrados congruentes, en que cada vértice convergen 3 aristas.
- El octaedro regular: poliedro de 8 caras, las cuales son triángulos equiláteros congruentes, en que cada vértice convergen 4 aristas.
- El dodecaedro regular: poliedro de 12 caras, las cuales son pentágonos regulares congruentes, en que cada vértice convergen 3 aristas.
- El icosaedro regular: poliedro de 20 caras, las cuales son triángulos equiláteros congruentes, en que cada vértice convergen 5 aristas.

Ejercicios

1. Claramente, un polígono no es un poliedro. Al unir dos polígonos no coplanares por un lado se forma un ángulo diedro, pero no se encierra una porción de espacio, por lo que no existen poliedros con dos caras.

   ¿Es posible construir un poliedro con tres caras?

2. Corte 20 triángulos equiláteros congruentes en cartón grueso, de modo que puedan ser pegados por sus lados (por ejemplo, con cinta adhesiva).

   a. Pegue 3 de ellos por un vértice, uniendo sus lados. Se forma una pirámide de base triangular incompleta. Note que la única forma de pegar triángulos a los lados que no están unidos, de modo que en cada vértice se junten 3 triángulos, es pegar un triángulo que complete la pirámide (un tetraedro regular).
   b. Pegue ahora 4 de ellos en un vértice y vaya agregando triángulos en cada vértice incompleto, cuidando que en cada vértice se junten exactamente 4 triángulos. ¿Qué figura se forma al completar este proceso?
   c. Repita el proceso anterior, ahora con 5 triángulos en cada vértice. ¿Es posible formar un poliedro en este caso? De ser así, ¿cuál?
   d. ¿Es posible repetir el proceso anterior con 6 triángulos en cada vértice? y ¿con más triángulos por vértice?
   e. Reemplace los triángulos por cuadrados. ¿Cuántos puede poner en cada vértice?, ¿por qué? ¿Qué poliedro o poliedros es posible formar con este proceso?
   f. ¿Es posible reemplazar los cuadrados del punto anterior por pentágonos regulares?, ¿por qué? De ser así, ¿cuántos puede poner en cada vértice?, ¿por qué? ¿Qué poliedro o poliedros es posible formar con este proceso?
   g. ¿Es posible reemplazar los pentágonos del punto anterior por hexágonos regulares?, ¿por qué? De ser así, ¿cuántos puede poner en cada vértice?, ¿por qué? ¿Qué poliedro o poliedros es posible formar con este proceso?

2.3 Cilindros

Consideremos dos planos paralelos α y π y un segmento que une un punto de un plano y un punto del otro plano.

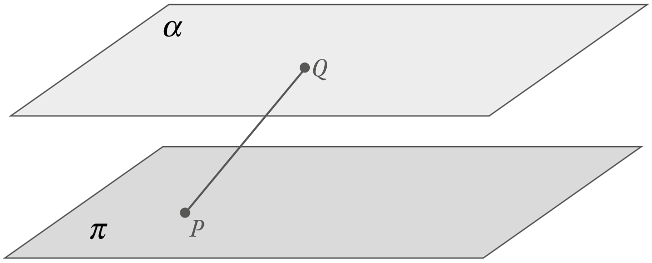


Figura V.48.

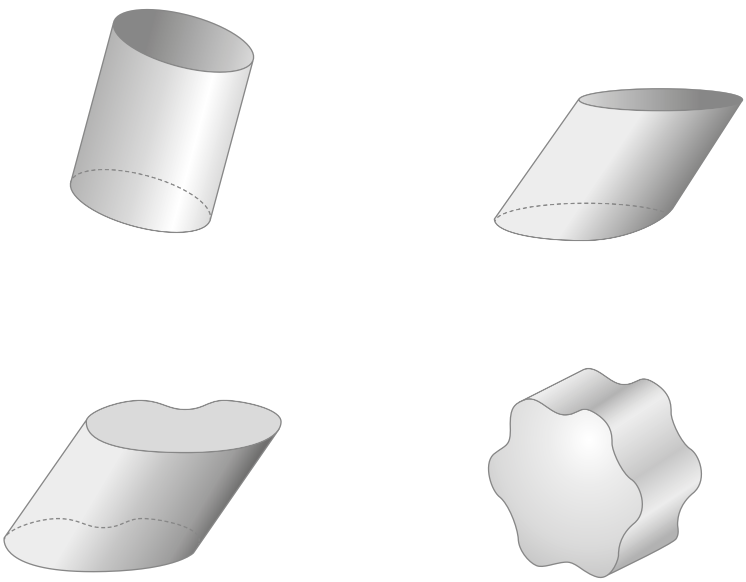
Diremos que un punto Q' del plano α es la traslación del punto P' del plano π según el segmento $\overline{PQ}$, si la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y la recta $\overleftrightarrow{P'Q'}$ son paralelas y $PQ = P'Q'$. El segmento $\overline{PQ}$ se llama la *dirección de la traslación*. Los puntos P' y Q' se llaman *puntos correspondientes.*

Un cilindro es un sólido delimitado por:

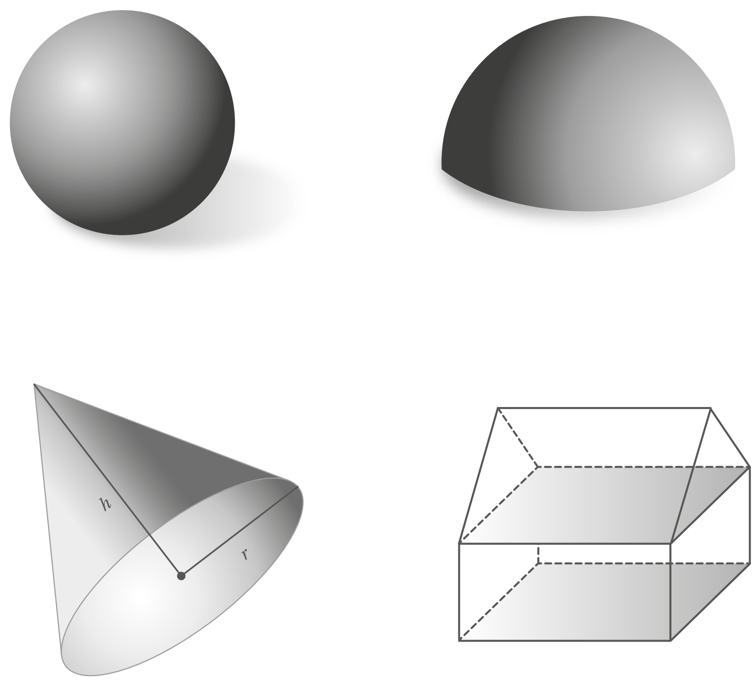
- Dos figuras cerradas congruentes (las *bases* del cilindro), contenidas en planos paralelos, y tales que una puede ser transformada en la otra por una traslación.
- Una superficie (llamada el *manto* del cilindro), que está formada por la unión de todos los segmentos de recta que unen los puntos del borde de una de las bases con el punto correspondiente (en términos de la traslación) en el borde de la otra.

Ejemplos

1) Las siguientes figuras representan cilindros:



2) Las siguientes figuras representan cuerpos que no son cilindros:



Ejercicio

Explique por qué los cuerpos indicados en la parte 2 del ejemplo anterior no son cilindros.

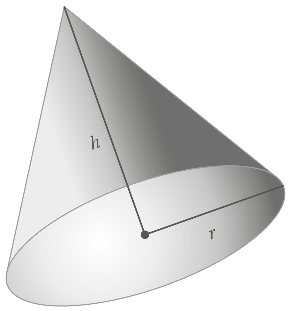
Los cilindros se clasifican en *rectos* (cuando la dirección de la traslación es perpendicular a las bases) y *oblicuos* (en caso contrario). Además, si la base de un cilindro tiene un nombre especial (círculo, rectángulo, etc.), entonces el cilindro recibe un nombre de acuerdo al nombre de su base; así, por ejemplo, la figura que comúnmente llamamos cilindro es en realidad un "cilindro circular recto".

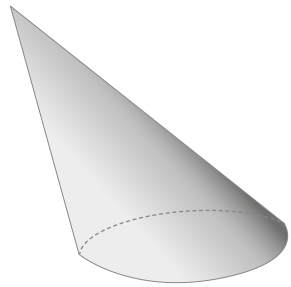
2.4 Conos

Un *cono* es un sólido delimitado por dos superficies, una plana (llamada *base*) y otra (el *manto*) que está formada por la unión de los segmentos que unen los puntos del borde de la base con un punto fijo que no está en la base (llamado la *cúspide*, el *ápice* o el *vértice* del cono).

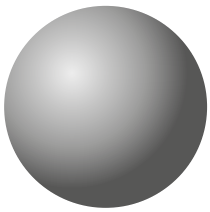
Ejemplos

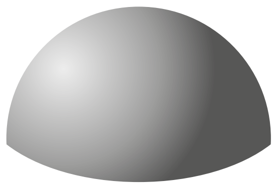
1) Las siguientes figuras representan conos:





2) Las siguientes figuras representan cuerpos que no son conos:





Al igual que con los cilindros, los conos reciben nombres de acuerdo a la figura que tienen por base; si esta es un círculo y la recta que pasa por la cúspide del cono y el centro del círculo es perpendicular a la base, entonces el cono es un *cono circular recto*.

Ejercicios

1. Explique por qué los cuerpos indicados en la parte 2 del ejemplo anterior no son conos.

2. Decida si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:
   a. Las caras laterales de un prisma son rectángulos.
   b. No existe un prisma que a la vez sea una pirámide.
   c. Toda pirámide es un cono.
   d. Todo cilindro es un prisma.
   e. Las bases de un prisma están en planos paralelos.

2.5 Sólidos de revolución

Un sólido es *de revolución* si se obtiene rotando una figura plana alrededor de un eje. Por ejemplo:

- La esfera se obtiene rotando un semicírculo en torno a su diámetro.
- Un cilindro circular recto se obtiene rotando un rectángulo en torno a uno de sus lados
- Un cono circular recto se obtiene rotando un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.

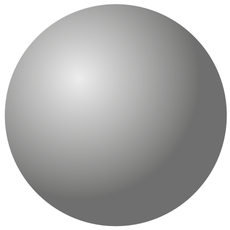


Figura V.49.

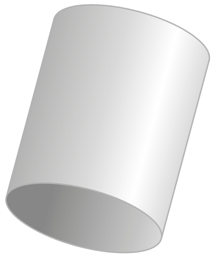


Figura V.50.

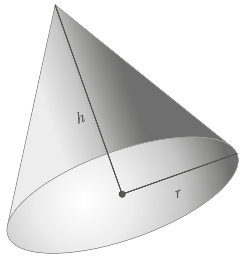


Figura V.51.

Otros ejemplos:


Figura V.52.


Figura V.53.


Figura V.54.

Es importante notar que si cortamos un sólido de revolución con un plano perpendicular al eje de rotación, la intersección resulta un círculo.

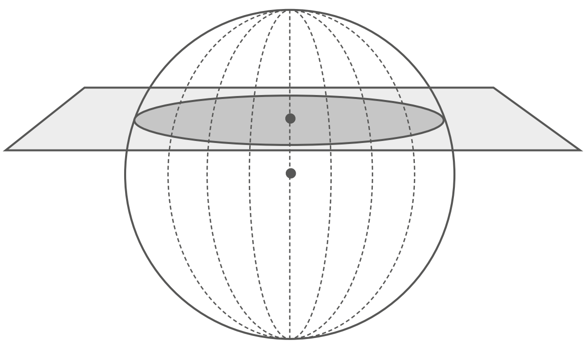


Figura V.55.

Note que, por ejemplo, la siguiente figura no es un sólido de revolución, pues al hacer un corte plano no se obtiene un círculo.

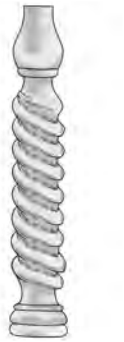


Figura V.56.

Los sólidos de revolución están delimitados por *superficies de revolución*, que son el resultado de rotar una curva (la *generatriz*) en torno a un eje.

Algunas superficies de revolución son:

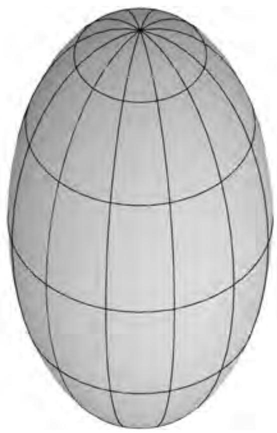


Figura V.57.

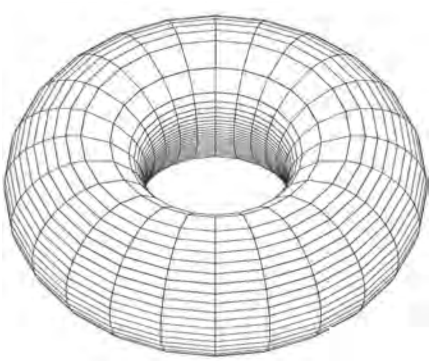


Figura V.58.

2.6 Discusión sobre las clases de sólidos

Como mencionamos al comenzar a discutir los cuerpos sólidos, las clases aquí presentadas no constituyen una clasificación exhaustiva de ellos; por ejemplo, un cilindro circular recto al que se le quita un trozo con un corte plano no pertenece a ninguna de estas clases.

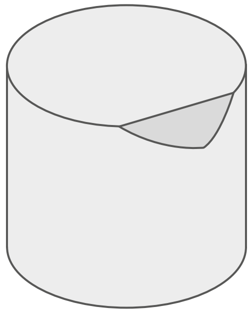


Figura V.59: cilindro cortado por un plano.

Nuestras clases tampoco son mutuamente excluyentes: por ejemplo, un prisma es a la vez un poliedro y un cilindro (en el sentido más general aquí presentado); el cilindro circular recto es, además de un cilindro, un sólido de revolución; algo similar ocurre con el cono circular recto.

Aparte de haber sólidos que pertenecen a dos clases simultáneamente (o sea, clases con intersección no vacía), también hay clases que están completamente contenidas en otras. Así, por ejemplo, los prismas son casos particulares de cilindros.

Un nombre ampliamente difundido en los textos escolares, refiriéndose a una clase especial de sólidos, es el de "cuerpos redondos". Lamentablemente, no existe un consenso respecto a la definición precisa de esta clase.

Algunos textos definen los cuerpos redondos como aquellos que tienen al menos una cara que no es plana (o una cara que es curva). Para otros, los cuerpos redondos comprenden exactamente las clases: cilindros, conos y sólidos de revolución. Otros, por cuerpos redondos se refieren solo a los sólidos de revolución. Incluso algunos textos definen los cuerpos redondos como "aquellos que pueden rodar". Ninguna de las definiciones que hemos analizado es satisfactoria, por esto no usaremos esa nomenclatura en este libro.

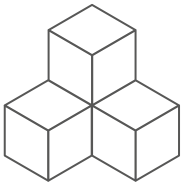
Ejercicios de la sección

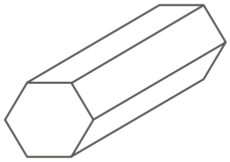
1. Si se define cuerpo redondo como "aquellos que rotan", ¿el icosaedro regular es o no un cuerpo redondo?
2. Si se define cuerpo redondo como "aquellos que no se pueden apilar", ¿el cilindro es o no un cuerpo redondo? ¿Las pirámides son o no cuerpos redondos?
3. Explique por qué un prisma de base triangular podría ser llamado cilindro triangular.
4. Explique por qué una pirámide de base cuadrada podría ser llamada cono de base cuadrada.
5. ¿Es una pirámide un sólido de revolución?

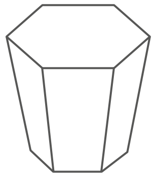
6. Si un cubo es intersectado por un plano, qué posibles figuras pueden ser obtenidas por esa intersección. Haga un bosquejo de la intersección.

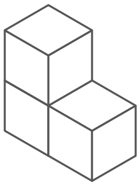
7. Si una pirámide tiene un octógono como base, ¿cuántas caras laterales tiene?

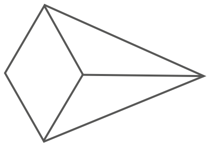
8. En cada caso trace líneas punteadas para las aristas que no se ven.

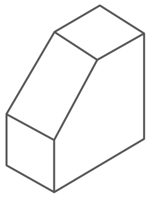
a.


c.


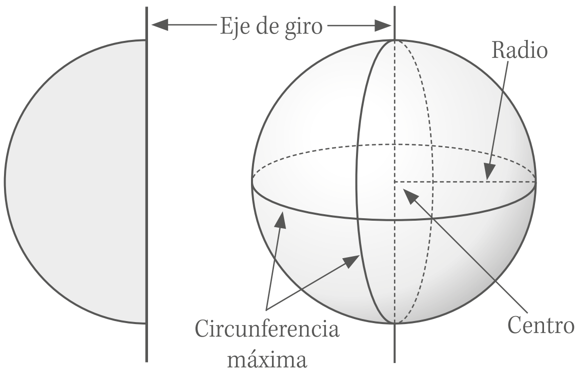
e.


b.


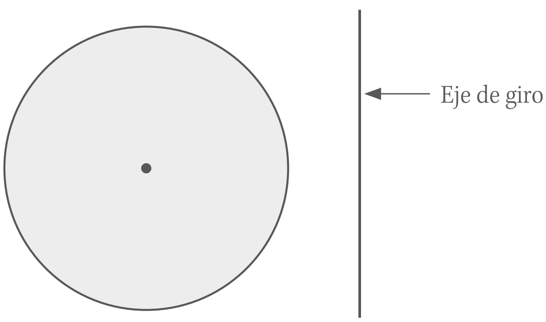
d.


f.


9. Si se gira en el espacio medio círculo en torno al diámetro, se obtiene una esfera:



¿Qué resulta si giramos un círculo completo en torno a un eje que está fuera del círculo?



3. Visualización

Todas las imágenes que vemos en el cine y la televisión convencionales, y las fotografías que aparecen en los libros son imágenes en 2D, que representan objetos en 3D. Por ejemplo, cuando vemos una figura como la **Figura V.60**, nos hacemos la imagen de un paralelepípedo.

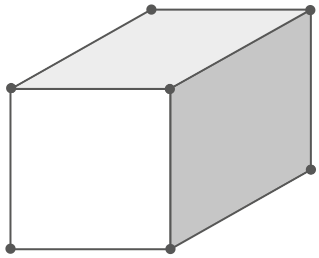


Figura V.60

Sin embargo, el dibujo está hecho en el plano, con un cuadrado y dos paralelogramos.

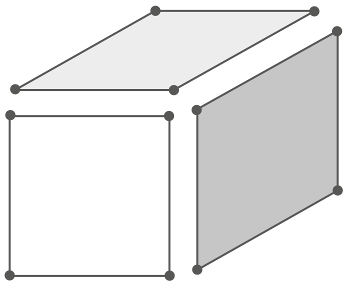


Figura V.61

Nuestro cerebro tiene la capacidad de "ver" objetos tridimensionales, mediante representaciones planas. Esto nos permite visualizar las 3 figuras planas anteriores como un prisma recto y nos podemos imaginar 6 caras, 8 vértices y 12 aristas, aunque ni siquiera estén representados.

Por ejemplo, consideremos la siguiente actividad:

En una esquina de un cuarto se han apilado varios cubos, como muestra la ***Figura V.62****.*

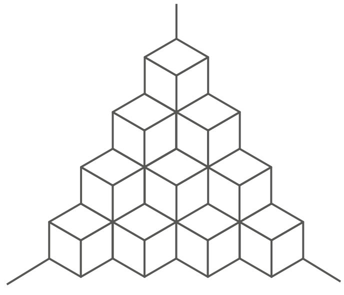


Figura V.62

¿Cuántos cubos hay en la figura?

Una estrategia, que usa fuertemente la idea de visualización, consiste en ir contando los cubos en cada nivel, e ir mentalmente[5] eliminándolos de la figura:

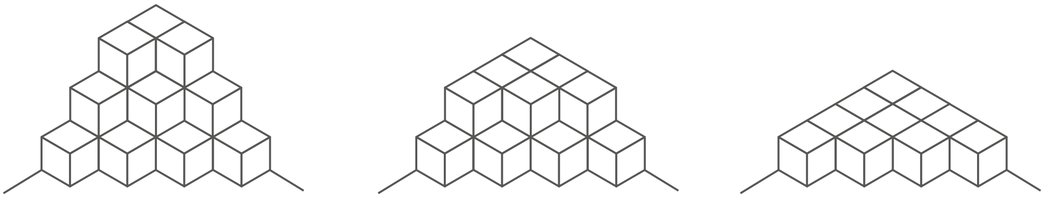


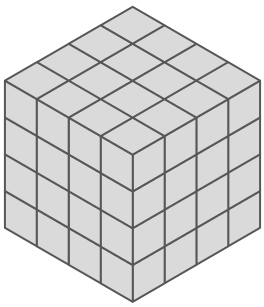
Figura V.63

Esta actividad se podría relacionar con secuencias numéricas, por ejemplo, considerando las siguientes preguntas:

- ¿En cuántos cubos difieren dos niveles consecutivos?
- ¿Cuántos cubos tendría un nuevo nivel puesto debajo de los anteriores? ¿Y otro?

Ejercicios

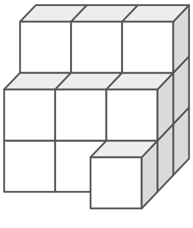
1. Un cubo de madera, cuya arista mide **4 cm** es pintado de azul y después es cortado en cubitos de **1 cm** de arista.

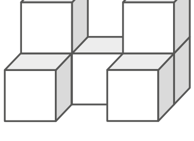


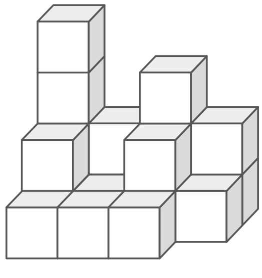
¿Cuántos cubitos tienen **3** de sus caras pintadas?, ¿cuántos tienen **2** caras pintadas?, ¿cuántos tienen una?, ¿cuántos ninguna?

2. Extienda el problema anterior a cubos de arista **5 cm**, **6 cm**, etc., e incluso en el caso general de un cubo de ***n* cm** de arista.

3. Determine cuántos cubos hay en cada una de las siguientes figuras:

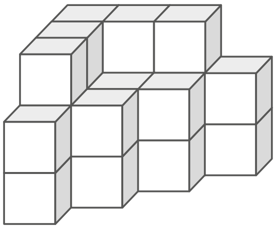
a. 

b. 

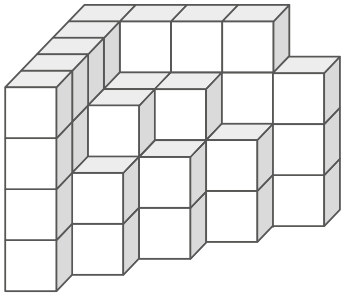
c. 

[5] O sea, sin necesidad de ver las figuras que se muestran a continuación.

d.

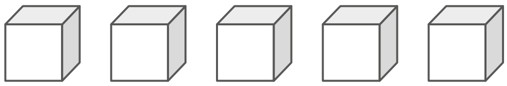


e.



¿Podría haber menos cubos en cada una de ellas y que la figura continuara viéndose igual desde esta misma perspectiva? Explique.

4. Determine cuántas estructuras diferentes puede formar con estos 5 cubos, si cada pareja de cubos que estén en contacto deben compartir una cara completa o una arista completa.



3.1 Perspectiva

Uno de los temas que debemos tener en cuenta son las imágenes en perspectiva. Entenderemos *perspectiva* como: "El arte que enseña el modo de representar, en una superficie, los objetos en la forma y disposición con que aparecen a la vista". Es decir, es el arte que enseña a representar objetos en el plano, permitiendo que el observador reconozca las posiciones relativas y las distancias relativas. Por ejemplo, el siguiente es un dibujo en perspectiva:

Figura V.64.

La perspectiva hace que en el dibujo, en el plano, el túnel se vea lejano. Por otra parte, las líneas que representan los rieles del tren, que son en la realidad paralelos, en el dibujo en el plano no son paralelas, sino que se intersectan en la línea del *horizonte*.

En clases de geometría usamos la perspectiva, para dibujar cuerpos 3D en el plano. Por ejemplo, a continuación mostramos un cubo dibujado en perspectiva.

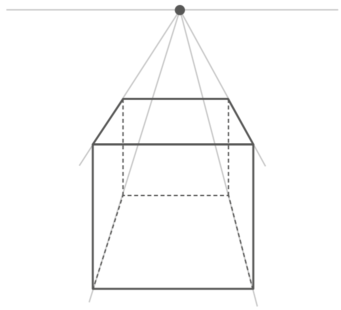


Figura V.65.

Al punto marcado, donde se intersectan las rectas que representan líneas paralelas, se le llama *punto de fuga*. También podemos dibujar el cubo con 2 puntos de fuga, como se muestra abajo.

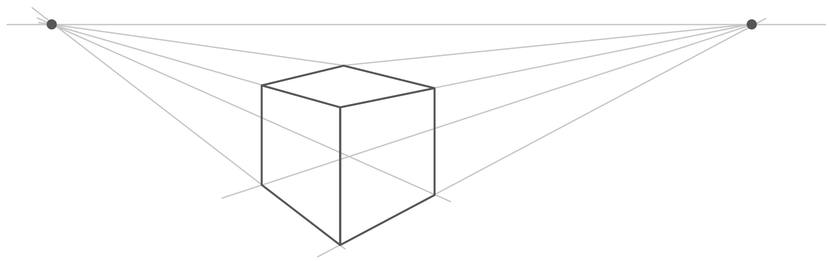


Figura V.66.

Esa capacidad que tenemos para ver objetos 3D en el plano nos puede jugar en contra. Por ejemplo la **Figura V.67** pretende mostrar tres triángulos, pero es casi imposible que nuestra mente no vea un tetraedro regular.

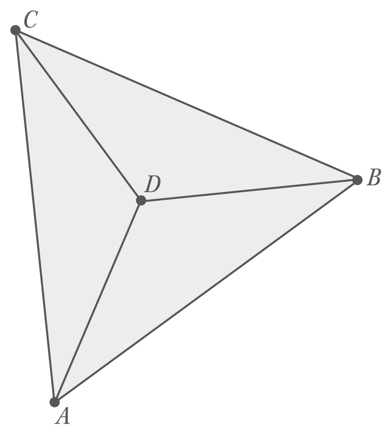


Figura V.67.

También nuestro cerebro puede creer ver más de una cosa en una imagen plana, o ver la misma imagen pero desde diferentes vistas. Por ejemplo, en la **Figura V.68** podemos ver una pirámide trunca o algo así como un pasillo.

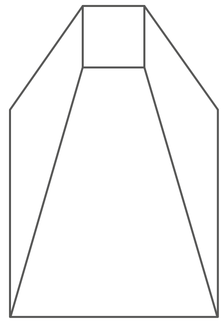


Figura V.68.

En la **Figura V.69**, que muestra un hexágono regular dividido en **6** triángulos equiláteros, también podemos ver un cubo en perspectiva.

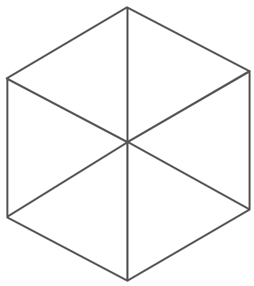


Figura V.69.

En general, si la figura plana es muy simétrica, como el hexágono regular de arriba, tendemos a ver la figura en **2D**, y mientras menos simétrica es la figura en el plano, tendemos a no ver la figura plana, sino que en **3D**. La **Figura V.70** muestra una imagen poco simétrica en el plano, por eso todos vemos la imagen de un cuerpo en **3D**.

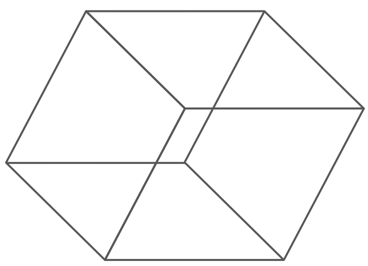


Figura V.70.

Es por esto que es necesario ser muy precisos en las instrucciones que se les dan a los alumnos al referirse a figuras en perspectiva, para que no haya ambigüedad. Si respecto a la **Figura V.69** preguntamos ¿cuántos vértices tiene?, así, a secas, nos pueden responder **6**, **7** u **8**, dependiendo de que vean un hexágono o la unión de **6** triángulos o de que vean un cubo. O si, por ejemplo, utilizamos la **Figura V.68**, debemos mencionar explícitamente el cuerpo en la instrucción, por ejemplo: "¿Cuántas caras tiene la pirámide de trunca?".

Una actividad que se sugiere para que los alumnos desarrollen habilidades de la vista en perspectiva es mostrarles una imagen plana de cubos dispuestos en perspectiva, y que ellos mismos formen, con cubos reales (de madera, por ejemplo), el cuerpo que se les muestra. Por ejemplo, se le puede mostrar a una niña la imagen de abajo, para que ella la reproduzca con sus propios cubos.

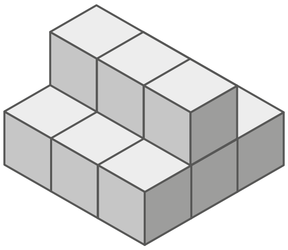


Figura V.71.

Figura V.72.

A medida que se avanza en el desarrollo de estas actividades, se puede ir avanzando en el nivel de complejidad de la imagen a reproducir. Por ejemplo:

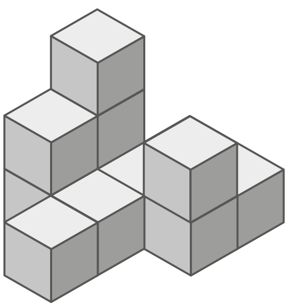


Figura V.73.

Figura V.74.

En una primera etapa, los niños tienen una mirada holística de los cuerpos tridimensionales[6]. Ven un cubo como un todo y no distinguen, en primera instancia, las caras, ni las aristas, estas deben ser mostradas por el profesor. Actividades con material concreto suelen ayudar en esto; por ejemplo, es recomendable hacer dibujar a los niños en una hoja el contorno de un cuerpo, como cilindros, cubos o pirámides. Así, abajo vemos a una niña marcando el contorno de un cubo, para que reconozca que la cara se trata de un cuadrado.

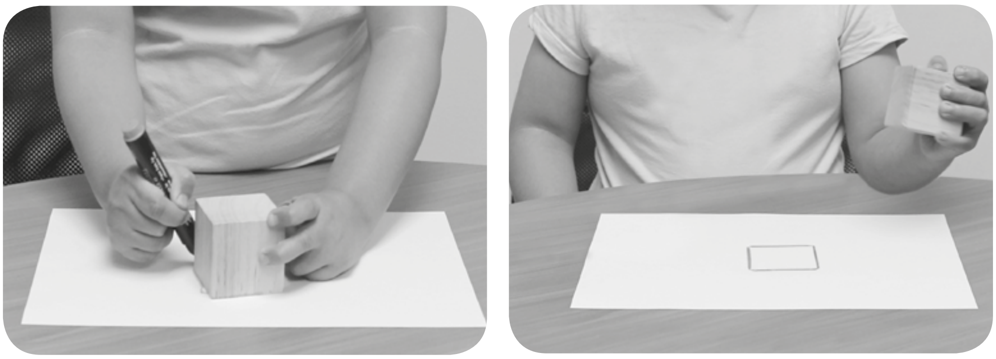


Figura V.75.

Lo mismo ocurre con cilindros o pirámides.

Figura V.76.

---

[6] Cross, C., Woods, T,.Schweingruber (Eds.). Mathematics learning in early chilhood. Paths towards excellence and equity. Commitee on early childhood mathematics, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. National Research Council of National Academies. Washington D.C. USA. 2009.

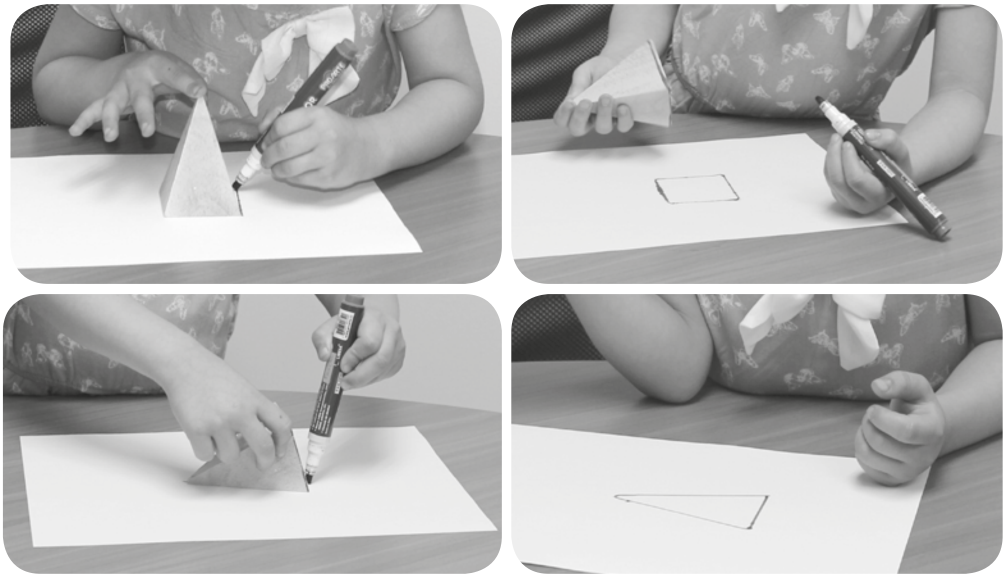


Figura V.77.

Cuando ya se han realizado varias de estas actividades, se puede pasar a actividades icónicas y se le pide al niño que se anticipe al resultado de pasar el lápiz por el contorno de la figura. Por ejemplo: ¿Qué se obtiene al pasar el lápiz por el contorno de cada una de las figuras?[7]

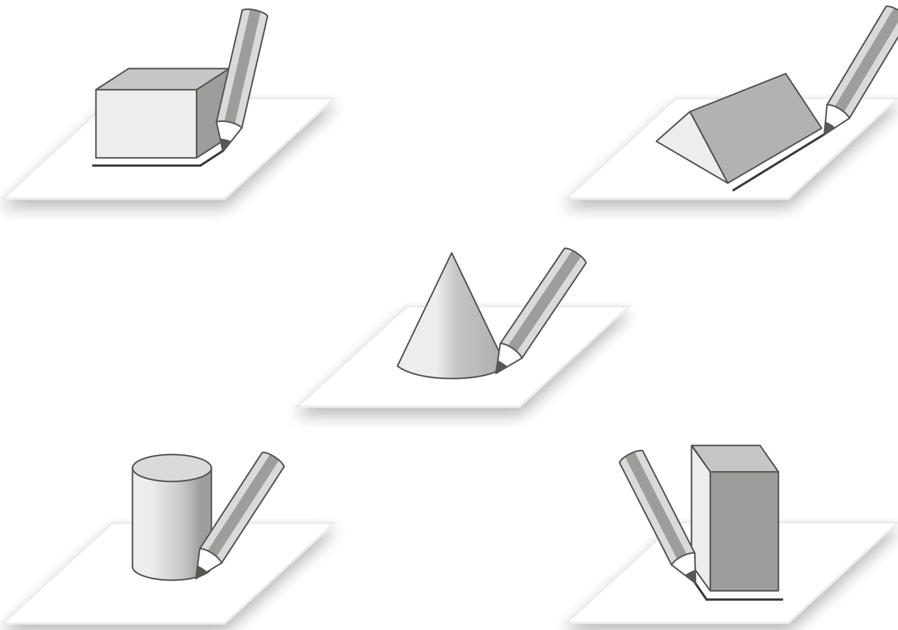


Figura V.78.

Estas actividades sugeridas son solo ejemplos, es necesario realizar varias experiencias con niños de diferentes edades, para determinar cuál es más eficiente en cada contexto y nivel.

[7] Estas actividades han sido realizadas en forma experimental en niños de 5 y 6 años.

3.2 Vistas

Otra habilidad a desarrollar en los niños es la de imaginar cómo se ve un cuerpo si solo podemos ver alguno de sus flancos (vista lateral, vista de frente, vista superior, vista de planta, etc.) Esto contradice un poco la idea de perspectiva, pues supone que el objeto se ve "perpendicularmente" y desde una posición "infinitamente lejana"; vemos una cara y solo una, y no reconocemos distancias relativas. Por ejemplo, abajo se muestra un objeto y su vista desde arriba. Es importante notar que, en este caso, desde arriba, infinitamente lejos, vemos solo 3 rectángulos y no distinguimos cuál está más arriba o más abajo. Ya que esto no se condice con nuestra experiencia, es necesario acordar estas reglas con los alumnos.

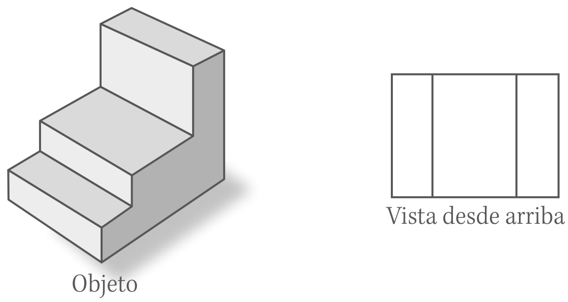


Figura V.79.

La persona, en realidad, no se puede poner infinitamente lejos para ver este cuerpo. Cuando lo ve en la realidad, notará que los 3 rectángulos están en diferentes planos y es posible también que vea parte de las caras laterales. Sin embargo, uno hace un ejercicio de imaginación y se abstrae de la perspectiva, para declarar que, en este contexto, la vista superior del cuerpo corresponde a 3 rectángulos. Es un convenio.

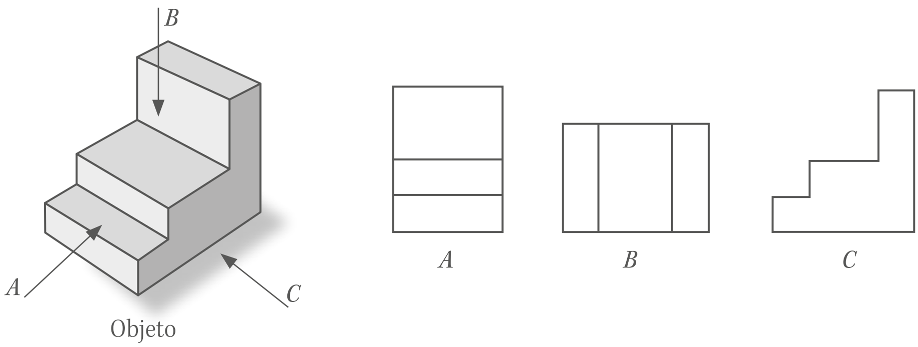


Figura V.80.

Las actividades relativas a reconocer las vistas de un cuerpo están muy relacionadas con el reconocimiento de caras de poliedros. Si un niño reconoce las vistas de un poliedro, también se puede afirmar que sabe a qué clase de polígonos corresponden sus caras.

Para comenzar, se sugiere mostrar poliedros formados por la composición de prismas o pirámides. Por ejemplo, se le puede mostrar al niño un cuerpo formado por cubos, y las vistas, y se le pide al niño reconocer la posición del observador para obtener las distintas vistas.

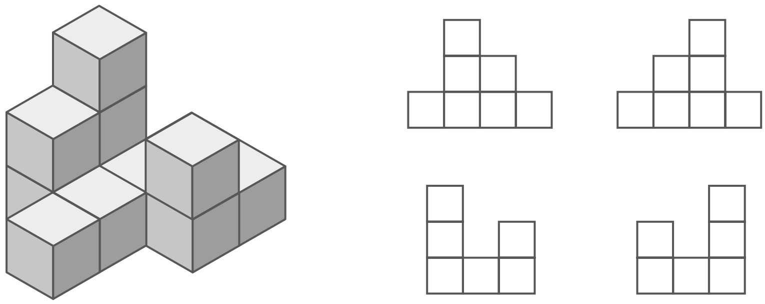


Figura V.81.

Más tarde, se puede pasar a poliedros formados por cubos, pero sin mostrar la composición del mismo. Por ejemplo, ¿cuáles son las vistas del cuerpo de la siguiente imagen?

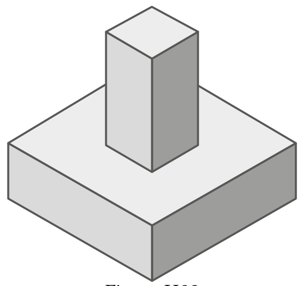


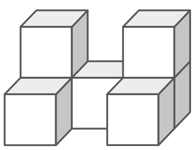
Figura V.82.

Una vez realizadas estas actividades, se sugiere pasar a pirámides y, al final, a cuerpos que no son poliedros.

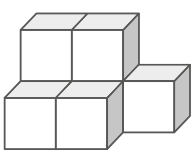
Ejercicios

1. Dibuje las vistas lateral, de frente y superior de cada una de las siguientes construcciones con cubos:

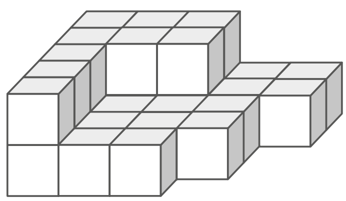
a.



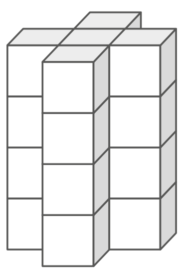
b.



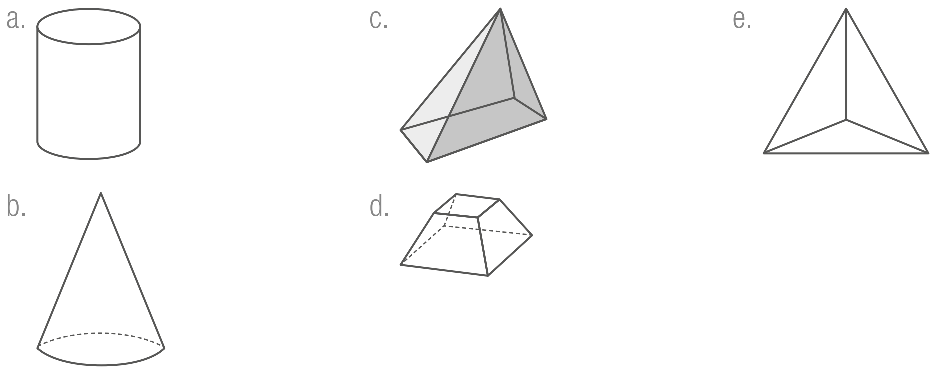
c.



d.



2. Dibuje las vistas lateral, de frente y superior de cada uno de los siguientes cuerpos:



3.3 Cortes de poliedros y otros cuerpos

Una actividad interesante es la de construir distintas secciones de un cubo o de algún otro poliedro, de esferas, de conos o de cilindros. Se puede hacer cortando con un alambre caliente un cubo (u otro cuerpo) hecho de alguna espuma plástica[8] y mostrando las caras que resultaron luego del corte. Se les puede preguntar a los estudiantes por la cantidad de aristas, vértices y caras de los nuevos cuerpos.

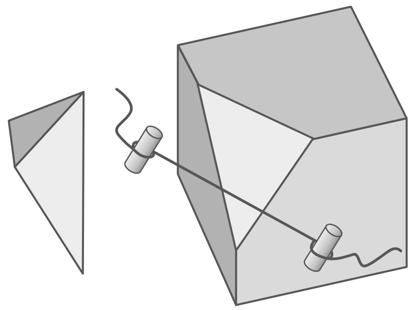


Figura V.83.

Luego de hacer varias actividades de indagación de este tipo, se suelen hacer actividades para que el estudiante prediga que ocurrirá luego de realizar un corte a cierto cuerpo. Por ejemplo, luego de que se hace un corte por la diagonal del cubo, como muestra la Figura V.84, ¿qué cuerpos se obtienen?, ¿cuántos vértices, caras y aristas tienen los nuevos cuerpos? y ¿qué forma tiene la cara por donde se hace el corte?

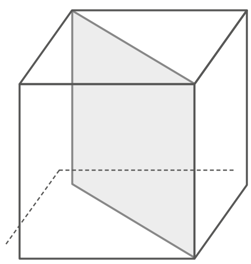


Figura V.84.

[8] Conocido en Chile como "Plumavit" o "Aislapol" que son marcas registradas.

Se puede hacer lo mismo, salvo dar los nombres de las figuras resultantes, con la siguiente pirámide.

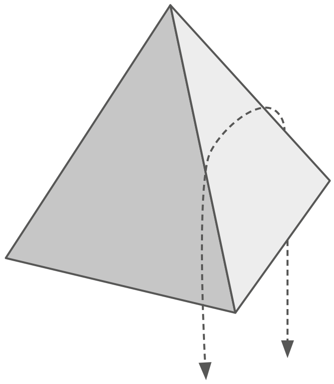


Figura V.85.

y también con un cono.

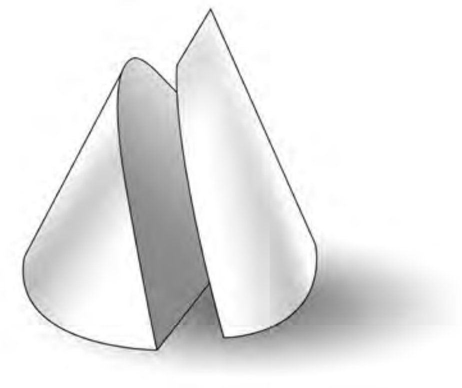
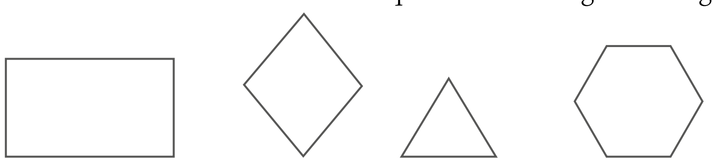


Figura V.86.

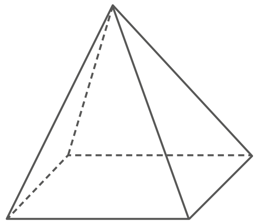
Ejercicios

1. Si corta el cono por un plano perpendicular a su eje de rotación, ¿qué figura geométrica se formó en el lugar del corte? Si corta el cono por un plano que contenga al eje de rotación del cono, ¿qué figura geométrica se formó en el lugar del corte?

2. Con plasticina u otro tipo de masa de modelar, forme un cubo y realice lo siguiente:
   a. Utilizando hilo de nailon o un cuchillo, realice un corte recto que atraviese el cubo verticalmente y de manera paralela a una de las caras del cubo, como si lo estuviera atravesando con un plano. ¿Qué figura se formó en el lugar del corte?
   b. Vuelva a unir el cubo e intente nuevos cortes que formen las siguientes figuras:



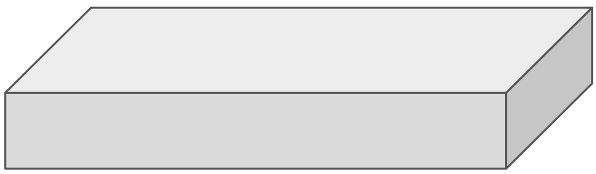
3. Ahora, con la plasticina o masa, forme una pirámide como la de la figura y realice lo siguiente:



a. Utilizando hilo de nailon o un cuchillo, realice un corte recto que atraviese la pirámide, como si la estuviera atravesando con un plano. ¿Qué figura geométrica se formó en el lugar del corte?

b. Vuelva a unir las piezas de la pirámide y realice un nuevo corte, distinto al anterior. ¿Qué figura obtuvo esta vez? Encuentre todas las figuras distintas que se pueden lograr con los cortes.

4. Finalmente, con la plasticina o masa, construya un poliedro de **2 cm** de alto, **4 cm** de ancho y **10 cm** de largo, como el de la figura. Al igual que con la pirámide, se pueden realizar cortes y formar diversas figuras.



a. Utilizando hilo de nailon o un cuchillo, realice un corte recto que atraviese el poliedro, como si lo estuviera atravesando con un plano. ¿Qué figura geométrica se formó en el lugar del corte?

b. ¿Es posible formar un cuadrado realizando un corte recto al poliedro? Antes de intentarlo, trate de visualizar si es o no posible.

c. ¿Es posible formar una figura que no sea un rectángulo realizando un corte recto al poliedro? (Recuerde que un cuadrado es un tipo especial de rectángulo). Antes de intentarlo, trate de visualizar si es o no posible. Si su respuesta es afirmativa, ¿qué tipo de figura distinta a un rectángulo se puede formar?

3.4 Redes

La siguiente imagen es una caja de cereales despegada y estirada. Corresponde a un pedazo de cartón dividido en varias figuras, algunas se reconocen como las que fueron las caras de la caja, pero otras son solo aletas para el ensamblado.

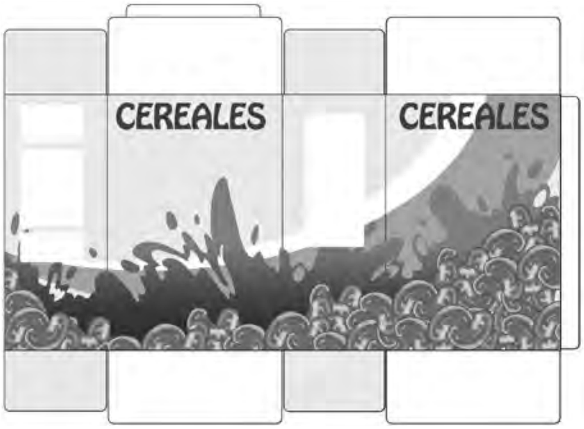


Figura V.87.

En este libro, la *red* de un poliedro es la figura plana que resulta de desarmar el poliedro; en ella aparecen marcados los polígonos que corresponden a las caras del poliedro. Por ejemplo, las de abajo corresponden a redes de un tetraedro y de un cubo.

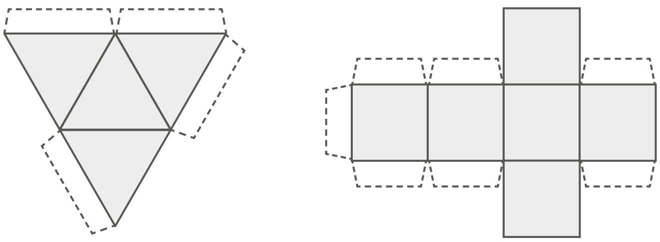


Figura V.88.

Las líneas punteadas denotan las aletas necesarias para pegar las diferentes caras del poliedro. En lo sucesivo, dejaremos de marcar las aletas y nos fijaremos solamente en las caras del poliedro. Entonces, en el caso de la red del cubo que se muestra en la **Figura V.88**, nos concentraremos en los 6 cuadrados de la red, que corresponden a las 6 caras del cubo. Es importante notar que la suma de todos los lados de los polígonos de la red no es la cantidad de aristas del poliedro, pues hay lados que se unen para formar una sola arista; lo mismo pasa con algunos de los vértices.

La red de cubo que se mostró arriba está formada por 6 cuadrados. Cada cuadrado comparte solo un lado con otro cuadrado; entonces, uno se podría preguntar si toda configuración con esas condiciones corresponde a la red de un cubo, y la respuesta es no. Las siguientes imágenes son contraejemplos.

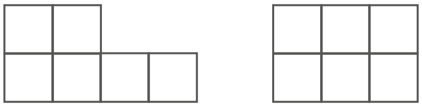


Figura V.89.

Ejercicio

Explique por qué las imágenes de la **Figura V.89** no corresponden a la red de un cubo.

Entonces, la pregunta que surge es: ¿Cuáles son todas las redes de un cubo? Por ejemplo, las de abajo son redes distintas del cubo.

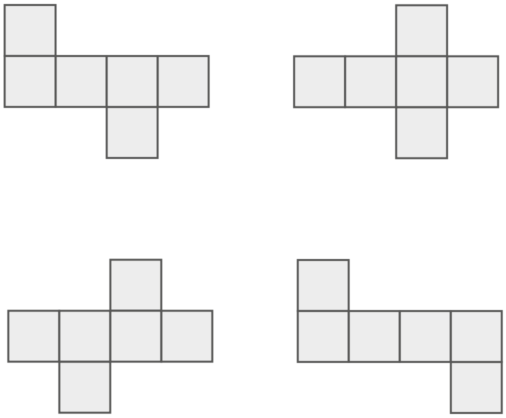


Figura V.90.

Ejercicio

Explique por qué las redes de la **Figura V.90** son distintas.

Otra cosa que es importante notar es que dos redes pueden parecer distintas a primera vista, pero en realidad es la misma puesta en otra posición, como las de abajo:

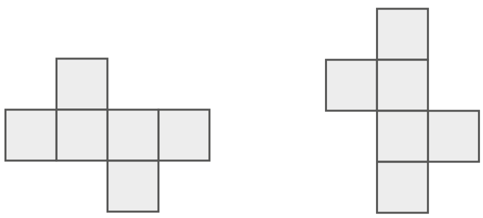


Figura V.91.

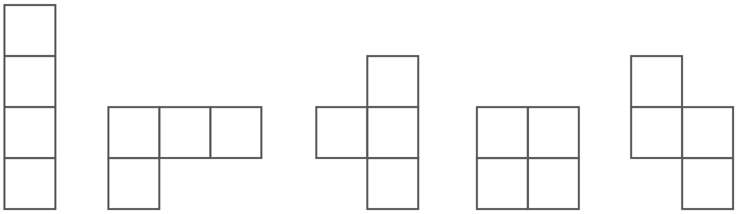
Para darse cuenta de que son la misma red, basta rotar la de la izquierda en **90°** y luego la figura resultante reflejarla respecto a un eje vertical, y se verá que corresponde a la red de la derecha (ver la **Figura V.91**).

Ejercicios de la sección

1. Considere las figuras de abajo. Ellas cumplen las siguientes condiciones

   R1. Cada una de ellas está compuesta por 4 cuadrados congruentes

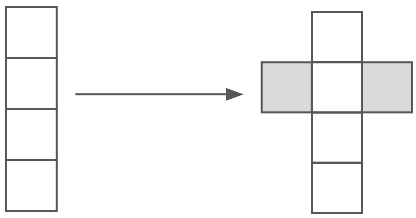
   R2. Cada cuadrado comparte al menos un lado con algún otro cuadrado



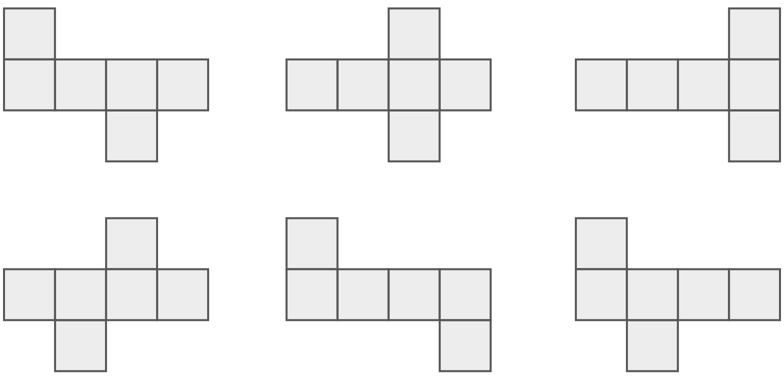
   a. ¿Existen otras figuras que cumplan con las condiciones (R1) y (R2) descritas arriba? Argumente.
   b. ¿Cuáles de ellas se pueden completar hasta formar una red de un cubo? Argumente.

2. Entre las figuras anteriores, consideremos la de la izquierda y denotémosla con *T*.

T



   Agregamos 2 cuadrados hasta formar la red de un cubo. A continuación, mostramos todas las redes del cubo que surgen de *T* agregándoles 2 cuadrados.



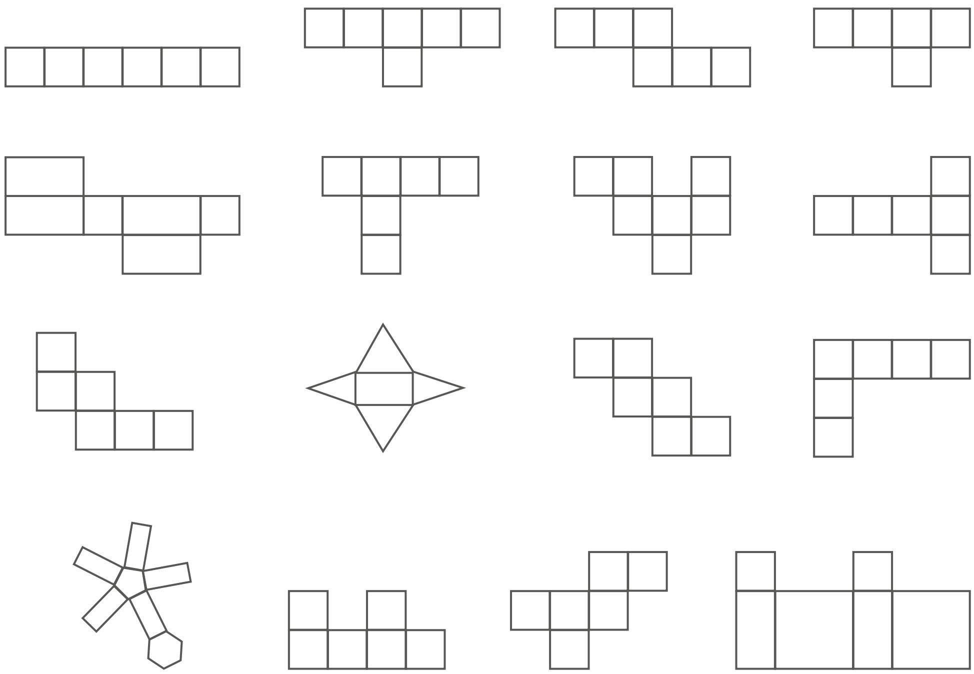
   Explique por qué todas las redes de arriba son distintas y también por qué no hay más redes del cubo que nazcan de *T*.

3. Haga lo mismo que en la actividad anterior, pero con las otras figuras de la actividad 1 que usted cree que se pueden completar hasta formar la red de un cubo.

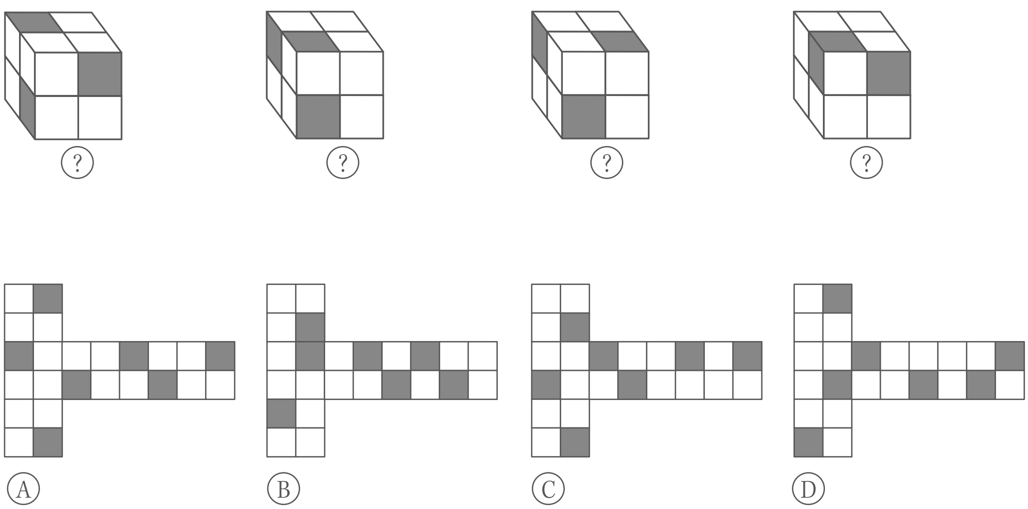
4. Dibuje todas las redes del cubo. ¿Cuántas son?

5. Encuentre todas las redes del tetraedro regular.

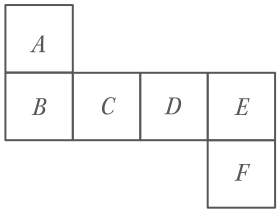
6. Decida cuál de las siguientes figuras corresponden a una red de un poliedro. En los casos negativos argumente y en los casos positivos describa el poliedro que forma.

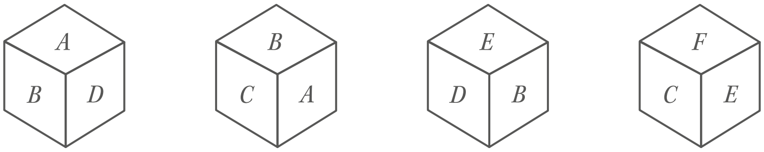


7. Para cada red, asocie el cubo correspondiente.

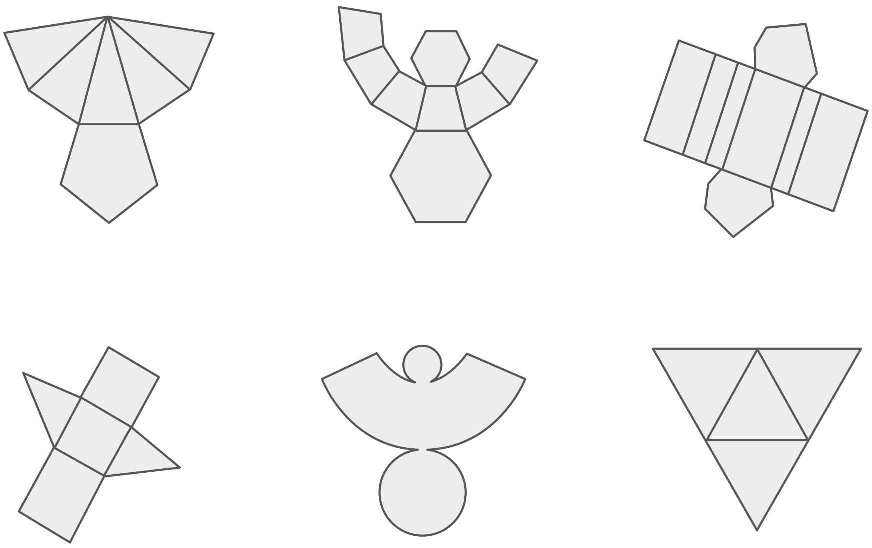


8. ¿Cuál o cuáles de los 4 cubos de abajo se puede formar con la red que se muestra?





9. Observe las siguientes redes de cuerpos geométricos e intente visualizar cómo sería el proceso de armado y cuál será el cuerpo que se forma en cada caso.



4. Volumen de cuerpos geométricos

Recordemos que, en el caso del área, dijimos que el área de una superficie era el número de veces que cabe una unidad de área dentro de la superficie. La unidad de área que usamos fue un cuadrado.

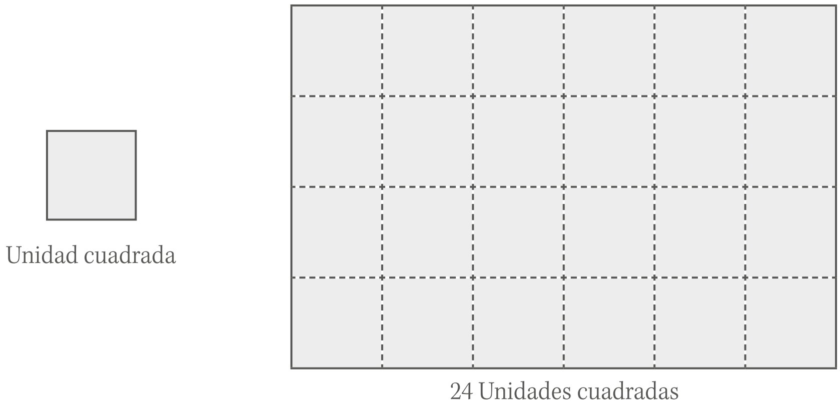


Figura V.92.

En el caso del volumen, usaremos como unidad un cubo y más precisamente usaremos un cubo de 1 cm de arista.

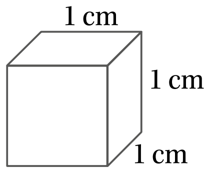


Figura V.93.

Si en un cuerpo caben 16 de estos cubos, diremos que el volumen del cuerpo es de 16 centímetros cúbicos y anotaremos 16 cm^3.

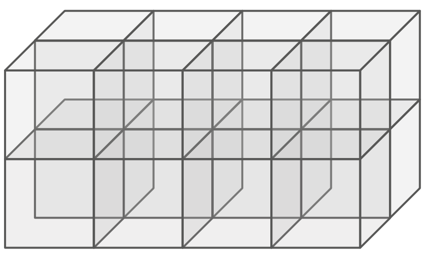


Figura V.94.

Si tenemos un paralelepípedo recto cuyas dimensiones son 1 cm, 1 cm y n cm, donde n es un número natural, entonces su volumen es n cm^3

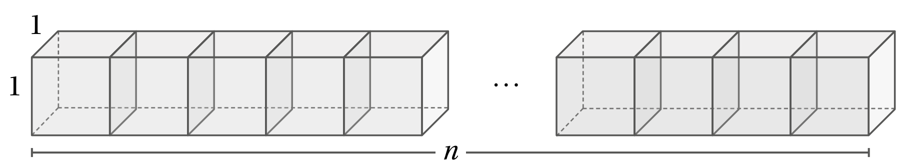


Figura V.95.

Para un paralelepípedo recto cuyas dimensiones son 1 cm, m cm, n cm, donde n y m son números naturales, se tienen m hileras de cubos como en la **Figura V.95**. Entonces, el volumen sería $m \cdot n$ cm^3.

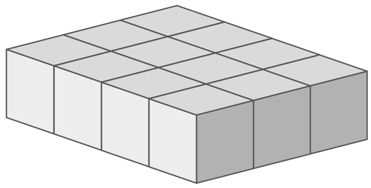


Figura V.96.

Ahora si ponemos encima de la figura anterior k cuerpos idénticas a ella, tendremos un paralelepípedo recto de dimensiones k cm, m cm y n cm. Entonces su volumen es $k\,(mn)$ cm^3 = $k \cdot m \cdot n$ cm^3.

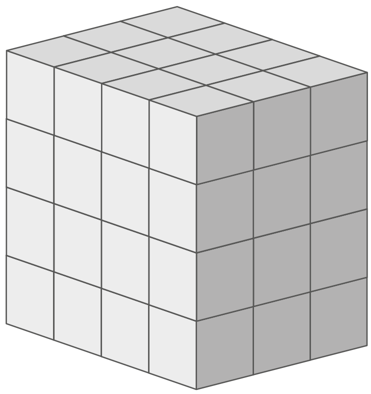


Figura V.97.

Haciendo un estudio similar al realizado con el área, podemos verificar que el volumen de un paralelepípedo recto de dimensiones r cm, s cm y t cm, donde r, s, t son números racionales positivos, es:

$$r \cdot s \cdot t \text{ cm}^3$$

Si las medidas de un paralelepípedo recto son a, b y c cm, donde a, b y c no son necesariamente fracciones, es natural pensar que el área de ese cuerpo es abc cm^3, como una extensión de lo que ocurre en las fracciones, y es así como lo asumiremos de aquí en adelante.

En resumen

El volumen de un paralelepípedo recto cuyas aristas miden r, s y t cm es:

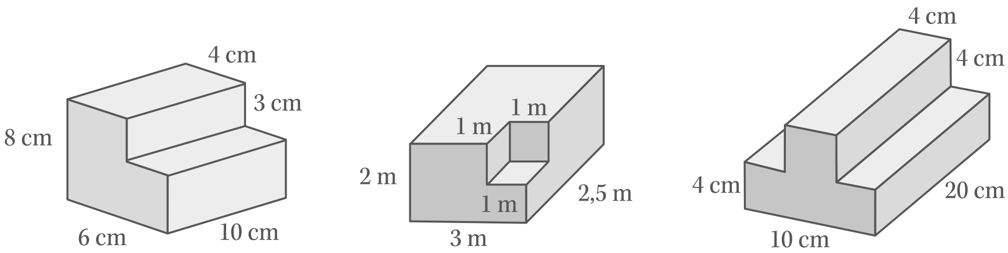
$$r \cdot s \cdot t \text{ cm}^3$$

En particular, el volumen de un cubo cuya arista mide a es:

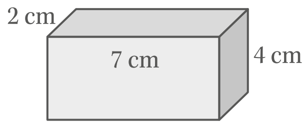
$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

Ejercicios

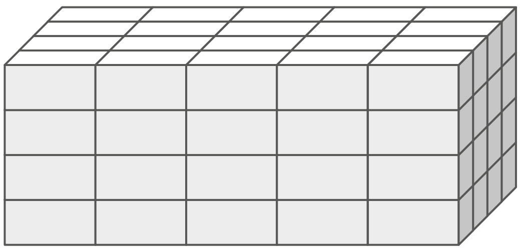
1. Calcule el volumen de los siguientes cuerpos:



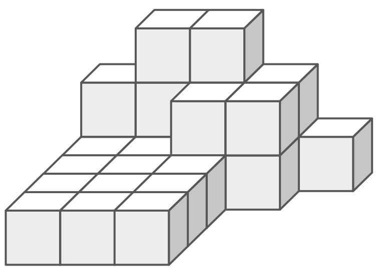
2. Dado el siguiente paralelepípedo, cuyas dimensiones se muestran a continuación:



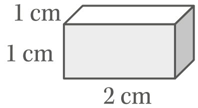
¿Cuál es el volumen del siguiente cuerpo, si está conformado solo por paralelepípedos como el anterior?



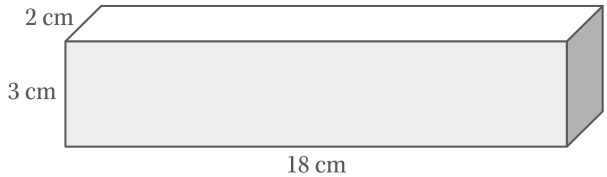
3. Considerando que todos los cubos que conforman el cuerpo tienen una arista de 1 cm, calcule el volumen total de la figura.



4. Considere el siguiente paralelepípedo:



¿Cuántos de los paralelepípedos anteriores caben en la siguiente figura?



4.1 Volumen de un cilindro

Para calcular el volumen de un cilindro, podemos pensar que está formado por capas.

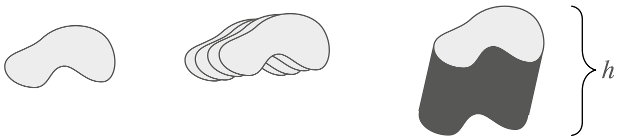


Figura V.98

Si apilamos capas, tendremos el cilindro completo. La altura, en cierto sentido, mide la cantidad de capas que se van apilando.

Notemos que el volumen es el mismo si las capas se agregan perpendicularmente hacia arriba o si se ponen en forma oblicua. Es importante notar que, en el caso recto, la altura coincide con la medida del borde lateral y, en cambio, en el caso oblicuo, la altura no es eso. Esto puede producir confusión en algunos niños.

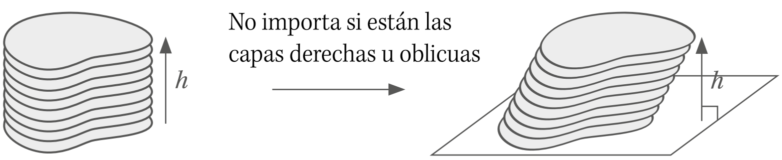
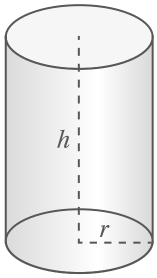


Figura V.99.

Entonces, para el caso del cilindro, el volumen es el área de la base multiplicada por la altura del cilindro.

Por ejemplo, para el caso del cilindro de base circular de radio r cm y altura h cm, su volumen es $\pi r^2 \cdot h$ cm^3.



$$v = \pi r^2 h$$

Figura V.100.

Así, si un cilindro tiene un radio de 10 cm y una altura de 50 cm, entonces su volumen es: $\pi \cdot 10^2 \cdot 50$ cm^3 = 5000 π cm^3.

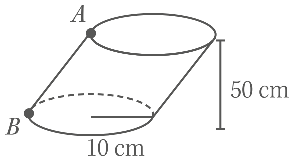
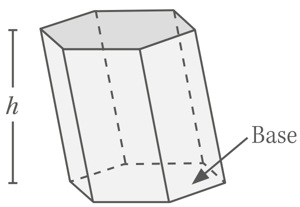


Figura V.101.

Note que, para el caso del cilindro oblicuo, la altura no es la medida del segmento $\overline{AB}$, si no que la distancia desde la base hasta la parte más alta del cilindro.

Recordemos que un prisma es un caso particular de un cilindro, por lo tanto, el volumen de un prisma es el área del polígono de la base multiplicado por la altura del prisma.



v = (área de la base)·h

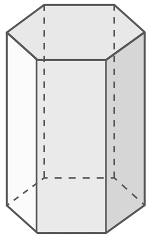
Figura V.102.

En resumen

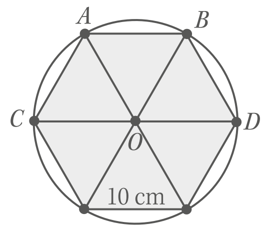
El volumen de un prisma de área basal A y altura h es: $A \cdot h$.

Ejemplo

Calculemos el volumen de un prisma cuya base es un hexágono regular de lado 10 cm y altura 20 cm.



Para ello, necesitamos calcular el área del hexágono regular y multiplicar por la altura. Consideremos, entonces, un hexágono regular cuyo lado mide 10 cm.



El segmento $\overline{OA}$ mide lo mismo que los segmento $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$, pues corresponden a la medida del radio de la circunferencia circunscrita al hexágono. Además, el ángulo $\measuredangle DOC$ es extendido y como $m(\measuredangle DOB) = m(\measuredangle BOA) = m(\measuredangle AOC)$, se tiene que:

$$m(\measuredangle DOB) + m(\measuredangle BOA) + m(\measuredangle AOC) = 180°.$$

Luego $m(\measuredangle AOB) = 60°$, y como el triángulo ΔAOB es isósceles entonces los ángulos $\measuredangle OAB$ y $\measuredangle OBA$ son congruentes, por lo tanto el triángulo ΔABO es equilátero cuyo lado mide 10 cm. En el **Capítulo IX** demostraremos que el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide ***a*** es:

$$a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Entonces, en nuestro caso, el área del triángulo ΔABO es:

$$10^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} cm^2$$

Así, el área del hexágono de la base es 6 veces ese valor[9], es decir:

$$\acute{A} = 6 \cdot 10^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} cm^2$$

Por lo tanto, el volumen del prisma es:

$$V = \acute{A} \cdot h$$

$$V = 6 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 20\ cm^3$$

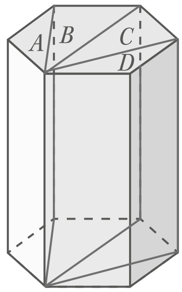
$$V = 3000 \cdot \sqrt{3}\ cm^3$$

[9] En general, el área del hexágono regular cuyo lado mide a es $6 \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \cdot a^2 \sqrt{3}$.

Ejercicios

1. Calcule el volumen de un prisma cuya base es un cuadrado de lado 2 cm y su altura es de 7 cm.

2. Si al siguiente prisma cuya base es un hexágono regular cuyo lado mide 10 cm y altura 20 cm, se le hacen los cortes que se muestran en la figura, se generan 4 cuerpos; *A*, *B*, *C* y *D*, ¿cuál es la relación entre sus volúmenes?



4.2 Volumen de una pirámide y del cono circular recto

Comencemos con un ejemplo: consideremos un cubo cuya arista mide a y consideremos una pirámide de base cuadrada y altura $\frac{1}{2}a$, que está dentro del cubo.

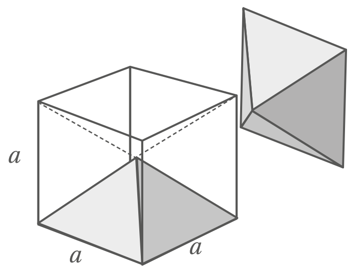


Figura V.103.

Por cada cara del cubo, hay una pirámide como la descrita arriba, y esas 6 pirámides completan al cubo sin traslaparse. Entonces, el volumen de esa pirámide es un sexto del volumen del cubo, es decir:

$$V = \frac{1}{6} \cdot a^3$$

Pero también podemos pensar en un prisma recto cuya base es un cuadrado de lado a y la altura es $\frac{1}{2}a$. En este caso la pirámide tiene la misma base que el prisma y la misma altura que el prisma (aquí se trata del mínimo prisma que contiene a la pirámide y que comparte una base con ella).

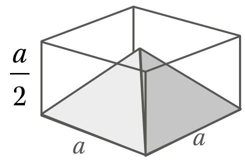


Figura V.104.

El volumen de ese prisma es la mitad del volumen del cubo cuya arista mide a, es decir, el volumen del prisma es:

$$v=\frac{1}{2}\cdot a^3$$

Entonces tenemos que:

$$V=\frac{1}{6}\cdot a^3=\frac{1}{3}\cdot\ \frac{1}{2}\cdot a^3\ =\frac{1}{3}v$$

Es decir, el volumen de la pirámide de altura $\frac{a}{2}$ y de base cuadrada cuyo lado mide a, es un tercio del volumen del prisma que tiene igual base e igual altura que la pirámide. Entonces, las preguntas que surgen son: ¿Qué pasa en el caso general? y ¿será cierto que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma que tiene igual base e igual altura?

Para responder esa pregunta utilizaremos el siguiente principio, que no demostraremos, pues escapa al contenido de este libro.

Principio V.1 **De las secciones paralelas de la pirámide**

Dada una pirámide con base B y altura h, si A es una sección transversal paralela a la base y la distancia desde el vértice de la pirámide a la sección transversal es k, entonces se cumple que

$$\frac{Área(A)}{Área(B)}=\frac{k^2}{h^2}$$

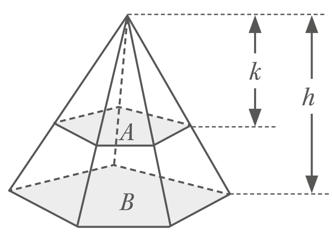


Figura V.105

Usando ese principio, podemos demostrar el siguiente teorema, que es necesario para calcular el volumen de la pirámide.

Teorema V.1

Si 2 pirámides tienen la misma altura y el área de sus bases es la misma, entonces las secciones transversales equidistantes de los vértices tienen la misma área.

Demostración

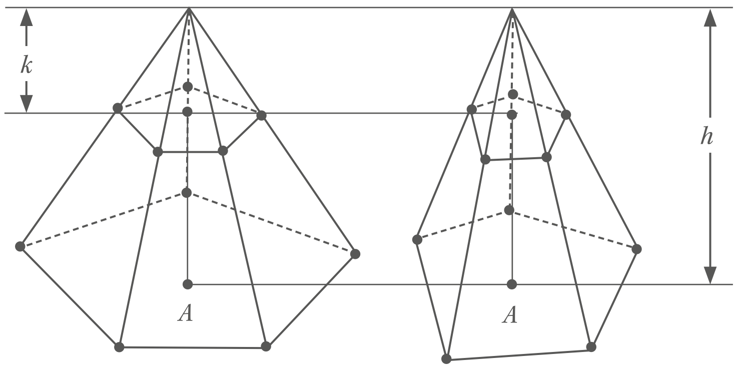


Figura V.106.

Considere las pirámides de la **Figura V.106**. El área de las bases está denotada por A, la altura de ambas pirámides mide h y k es la distancia de cada una de las cúspides a las secciones respectivas. Denotemos por A_1 el área de la sección de la primera pirámide y por A_2 el área de la sección de la segunda pirámide. Por el teorema anterior, se tiene que:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{k^2}{h^2}$$

Y que:

$$\frac{A_2}{A} = \frac{k^2}{h^2}$$

Por lo tanto:

$$A_1 = \frac{k^2}{h^2} A = A_2$$

Que es lo que queríamos demostrar. ❑[10]

En la siguiente sección, enunciaremos otro principio que utilizaremos para dar respuesta a la pregunta: ¿Cuál es la relación entre el volumen de la pirámide y el volumen del prisma que tiene igual base y altura que la pirámide?

[10]El símbolo ❑ denotará fin de la demostración.

4.3 Principio de Cavalieri

En muchos contextos, la idea de apilar capas es muy útil para calcular el volumen de cuerpos, existe otra idea conocida como el Principio de Cavalieri para hacerlo.

Principio V.1 De Cavalieri

Denominado así en honor a su descubridor, Bonaventura Cavalieri, en el siglo XVII, este principio establece que:

Si 2 cuerpos están entre 2 planos paralelos y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, entonces poseen igual volumen.

Cuando un sólido está entre 2 planos paralelos π y π', entonces la intersección del cuerpo con cualquier plano paralelo a los anteriores y que está entre ellos se llama una sección plana del cuerpo.

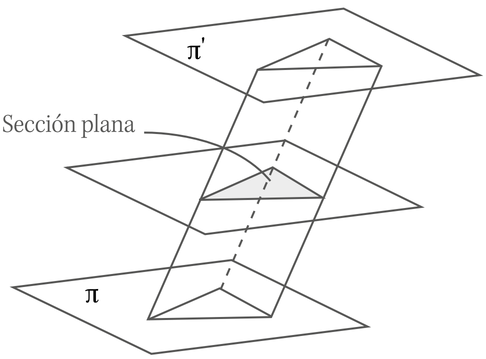


Figura V.107.

Es importante notar que en el Principio de Cavalieri se lee "2 cuerpos están entre dos planos paralelos y además tienen *igual área* en sus secciones planas…", solo se pide que las secciones planas tengan igual área, no se necesita que sean congruentes. Desde luego que si los cortes transversales son congruentes, entonces también se cumple que los sólidos tienen el mismo volumen, pero para el principio esto no es necesario, basta que tengan la misma área y no es necesario que tengan la misma forma.

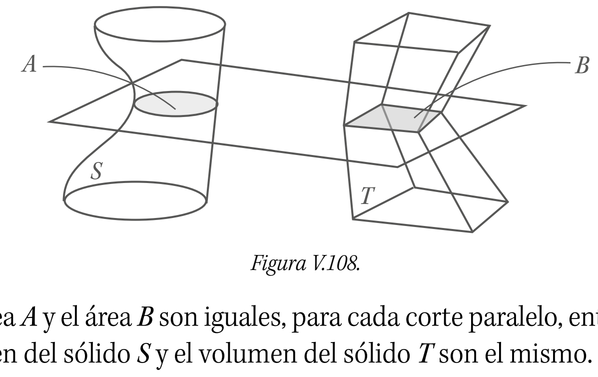


Figura V.108.

Si el área A y el área B son iguales, para cada corte paralelo, entonces el volumen del sólido S y el volumen del sólido T son el mismo.

Ejercicio

Demuestre que el volumen de un cilindro de base cuadrada de lado **3 cm**, y altura **7 cm** es igual a la mitad del volumen de un cilindro cuya base es un triángulo rectángulo isoscéles cuyos lados congruentes miden **6 cm**, y la altura del cilindro es **7 cm**.

Recordemos que el **Teorema V.1** dice que si **2** pirámides tienen bases de la misma área y sus alturas miden lo mismo, entonces las secciones transversales equidistantes de los vértices tienen la misma área. Esto, junto al Principio de Cavalieri, nos permite deducir el siguiente corolario.

Corolario V.1 Si **2** pirámides tienen bases de la misma área y sus alturas miden lo mismo, entonces tienen el mismo volumen.

Un corolario más restrictivo que el anterior es el siguiente.

Corolario V.2 Si **2** pirámides tienen bases congruentes y sus alturas miden lo mismo, entonces tienen el mismo volumen.

Con todo esto en mente, podemos dar un argumento plausible, aunque no es una demostración formal del siguiente teorema.

Teorema V.2:

El volumen de una pirámide de área basal A y altura h es igual a un tercio del volumen del prisma de base A y altura h.

Como dijimos antes, no daremos una demostración formal de este resultado, pero nos aproximaremos a él, mediante material concreto. Hagamos primero la explicación para el caso de la pirámide de base triangular.

Plan: primero, tendremos una pirámide de base triangular. Luego le agregaremos otras **2** pirámides, hasta formar un prisma que tiene la misma base y la misma altura que la pirámide. Finalmente, mostraremos que las **3** pirámides tienen el mismo volumen; entonces podremos concluir que el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma.

Consideremos una pirámide de base triangular.

Figura V.108: un triángulo y una pirámide cuya base es aquel triángulo.

Ahora, formemos un prisma cuya base sea la misma que la de la pirámide y que tenga la misma altura que la de la pirámide. Este prisma está formado por 3 pirámides, donde una de ellas es la pirámide original.

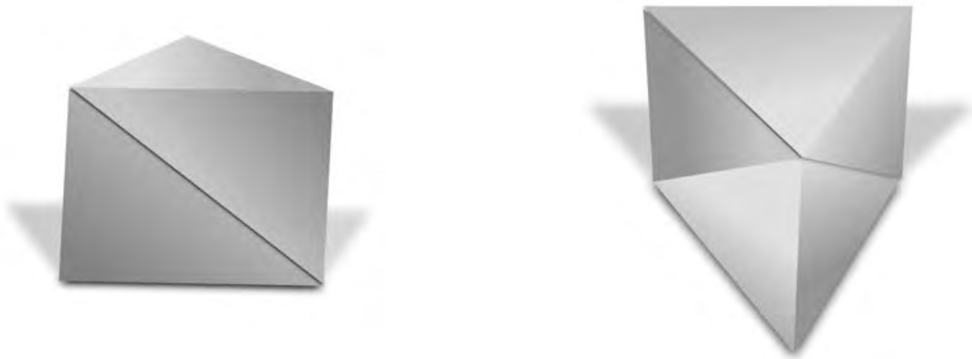


Figura V.109: dos vistas del prisma de base triangular, formado por 3 pirámides.

Entonces, mostraremos que las pirámides que forman el prisma tienen el mismo volumen, y para eso utilizaremos el **Corolario V.2.** Como vemos en la **Figura V.109**, 2 pirámides que forman el prisma tienen una cara en común, es decir, una pirámide tiene una cara congruente a una cara de otra pirámide. Pero, además, tienen la misma altura, por lo tanto, tienen el mismo volumen.

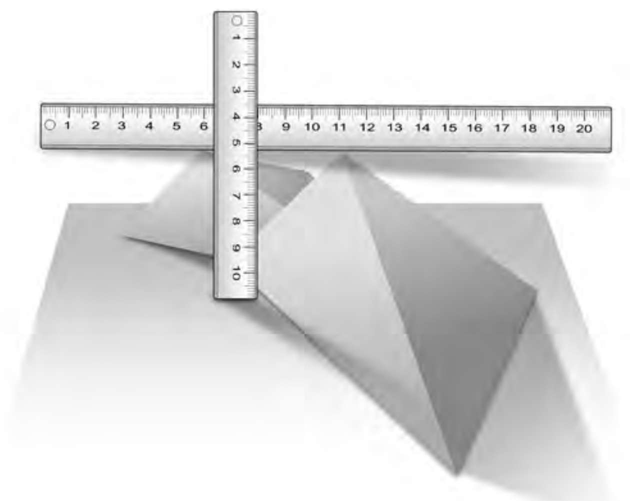


Figura V.110: pirámides que tienen la misma altura.

Entonces, si denotamos por V_1, V_2 y V_3 los volúmenes de cada una de las pirámides:

$$V_1 = V_2 = V_3$$

Si denotamos por V el volumen del prisma, se tiene que:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Por lo tanto:

$$V = 3V_1$$

O lo que es lo mismo

$$V_1 = \frac{1}{3}V$$

Qué es exactamente lo que queríamos probar: que el volumen de la pirámide (de base triangular) es un tercio del volumen del prisma que tiene la misma base y altura que la pirámide.

Ahora bien, ¿qué pasa cuando la base no es un triángulo? Si tenemos cualquier polígono convexo, este se puede triangular, lo que significa que se puede dividir el polígono en un número finito de triángulos que no se traslapen y cubran toda la superficie del polígono. Para ver esto, basta fijar un vértice del polígono y trazar todas las diagonales que pasan por aquel vértice. Para fijar ideas, pensemos en un polígono de 7 lados, como muestra la **Figura V.111**.

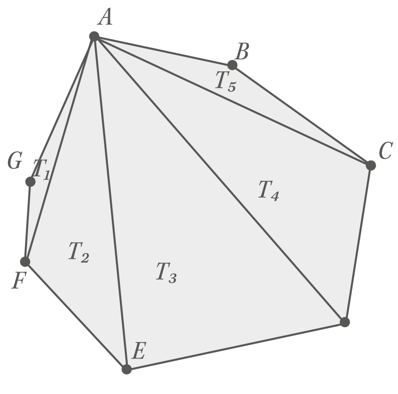


Figura V.111.

Si el área del polígono es Á y T_1, T_2, T_3, T_4, y T_5, denotan las áreas de los triángulos que particionan al polígono, entonces

$$Á = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$$

Pues, para el caso general, consideremos una pirámide cuya base es un polígono convexo cualquiera. Entonces, triangulamos la base y formamos todas las pirámides que tienen como base los triángulos que nacieron de la triangulación del polígono. Es importante notar que el área del polígono de la base es la suma de las áreas de los triángulos y además la altura de la pirámide original es igual a la altura de todas las pirámides que se forman al triangular la base. Entonces, en nuestro caso tenemos 5 pirámides de base triangular. Si denotamos por V_1 el volumen de la pirámide triangular que tiene como base el triángulo de área T_1, por V_2 el volumen de la pirámide triangular que tiene como base el triángulo de área T_2 y así sucesivamente, hasta llegar a V_5, el volumen de la pirámide triangular que tiene como base el triángulo de área T_5, entonces:

$$V_{pirámide} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$$

Pero tenemos que

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot T_1 \cdot h$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot T_2 \cdot h$$

$$\vdots$$

$$V_5 = \frac{1}{3} \cdot T_5 \cdot h$$

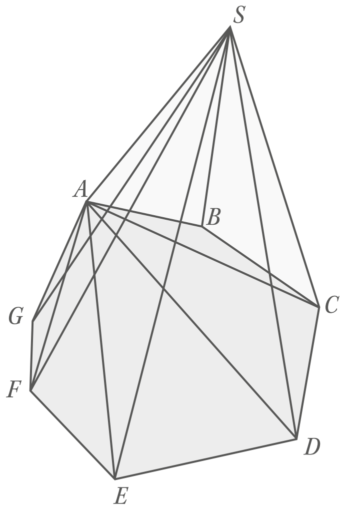


Figura V.112

De lo que resulta que:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5) \cdot h$$

Pero como el área del polígono de la base es $Á = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$, se tiene que:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot Á \cdot h$$

De esta forma, el argumento para el caso de un polígono basal de n lados es el mismo.

Ejercicios

1. Construya la red de una pirámide de base cuadrada cuyo lado mide 10 cm, y cuya altura mide 30 cm. Construya también la red de un prisma de base cuadrada cuyo lado mide 10 cm y cuya altura mide 30 cm. Arme el prisma y la pirámide y a ambos quíteles una cara. Llene la pirámide de arena muy fina y luego vacíela al prisma, ¿se verifica que el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma?

2. Construya la red de un cono circular recto. Construya también la red de un cilindro de base circular que tenga el mismo radio que el radio del cono y la misma altura que el cono. Arme el cono y el cilindro y quíteles la base. Llene el cilindro de arena muy fina y luego vacíela al cono. Una vez lleno el cono, vacíelo y vuélvalo a llenar con la arena que queda en el cilindro. Repita el proceso todas las veces necesarias hasta que se acabe la arena del cilindro. ¿Es cierto que el volumen del cilindro es 3 veces el volumen del cono?

Ahora que ya tenemos el volumen de la pirámide, podemos calcular el volumen del cono circular recto, a través del mismo razonamiento que hicimos para calcular el área del círculo. Lo que hicimos en ese momento fue aproximar el área del círculo mediante polígonos. Entonces, consideremos un cono circular recto de radio basal r y altura h.

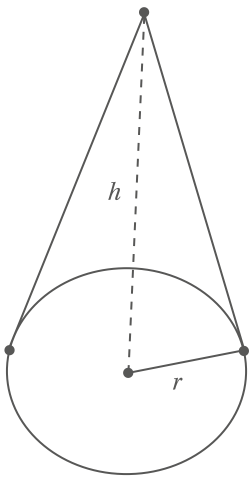


Figura V.113.

Así, podemos inscribir en la circunferencia de la base un polígono regular de una cantidad muy grande de lados.

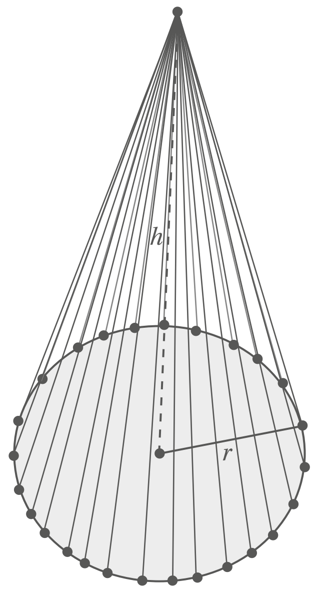


Figura V.114.

Pues bien, el volumen de la pirámide que tiene por base el polígono inscrito en la circunferencia es

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot A_{polígono} \cdot h$$

Como el área del polígono es una buena aproximación del área del círculo, es lógico pensar que el volumen de la pirámide es una buena aproximación del volumen del cono, cuando el polígono tiene un número muy grande de lados.

$$V_{cono} \approx V_{pirámide}$$

Por lo tanto, como el área del polígono es una aproximación de πr^2, entonces no es tan descabellado pensar que el volumen del cono es

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Lo cual es cierto, pero no tenemos las herramientas para dar la demostración en este libro.

En resumen

El volumen de la pirámide de área basal A y altura h es

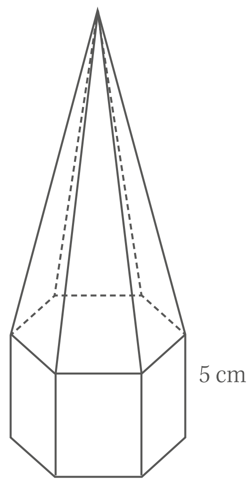
$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$$

El volumen del cono circular recto de radio basal r y altura h es:

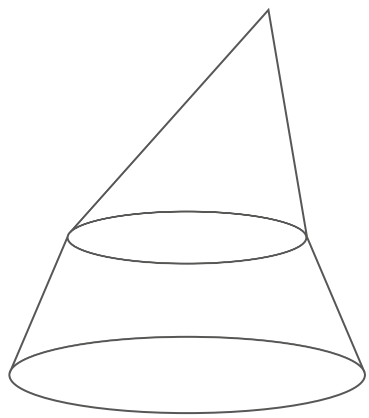
$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejercicios de la sección

1. Considere que la altura total del cuerpo es de **15 cm** y que el lado del hexágono regular mide **2 cm**, encuentre el volumen del siguiente cuerpo.

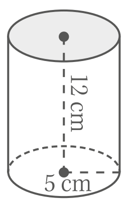


2. Encuentre el volumen del siguiente cuerpo considerando que el radio de la circunferencia mayor mide **7 cm** y la altura total del cuerpo es de **9 cm**.

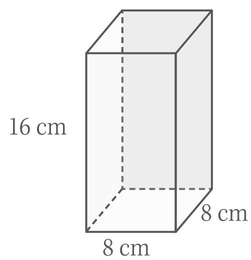


3. Calcule el volumen de estos cuerpos:

a.



b.



4. Suponga que un litro de agua pesa **1 kg**. ¿Cuánto pesa una columna cilíndrica de agua de radio **40 cm** y altura de **2 m**.

5. Suponga que un recipiente cónico de altura 3 m y radio 50 cm está lleno de agua. Un mecanismo hace caer agua del recipiente a razón de 2 cm^3 por segundo.

   a. ¿Cuánto demora en vaciarse el recipiente?

   b. ¿Cuánto se demora hasta el momento en que el nivel del agua tiene una altura de 25 cm? ¿Es la mitad del tiempo que demora en vaciarse?

6. Con un pie de metro estime las medidas de una moneda. Estime el volumen de esa moneda.

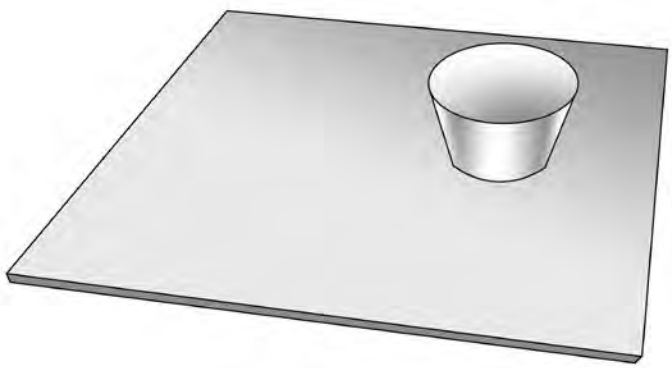
7. Responda los siguientes ejercicio considerando un cono recto de volumen 567π cm^3:

   a. Si el radio mide 9 cm, ¿cuánto mide la altura?

   b. Si la altura mide 9 cm, ¿cuánto mide el radio?

8. Un recipiente cónico de 3 m de altura y 1 m de radio se llena a razón de 200 cm^3 por segundo. ¿Cuánto tarda en que el nivel del agua llegue a la mitad de la altura del recipiente? y ¿cuánto tarda en llenarse?

9. El recipiente de la imagen tiene 10 cm de altura y los radios de su bases son 3 y 5 cm. ¿En el recipiente cabe más de un litro de agua?



5. Área superficial de cuerpos

Consideremos un trompo y una soga enrollada en él.

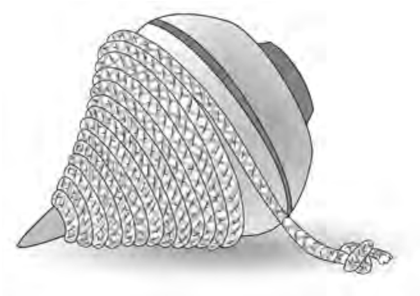


Figura V.115.

Si desenrollamos la soga y luego la ponemos en una hoja rectangular, poniendo cada trozo pegado al siguiente (cortando cuando se necesite), podremos estimar el área superficial del trompo.

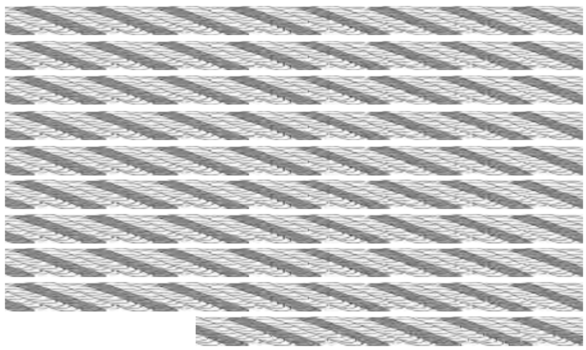


Figura V.116.

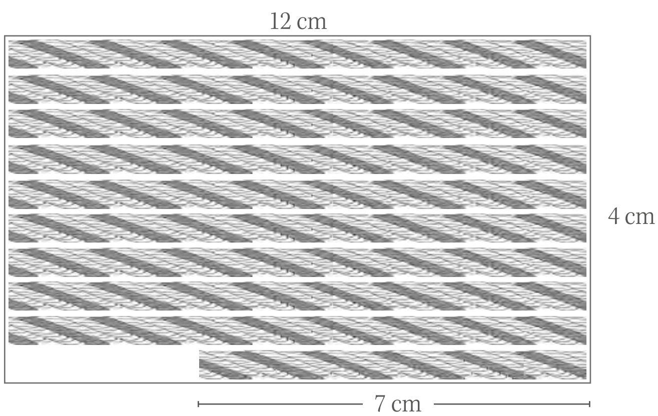


Figura V.117.

Si el ancho de la soga es 0,4 cm entonces el área superficial del trompo es aproximadamente:

$$12 \cdot 10 \cdot 0{,}4 \text{ cm}^2 - 0{,}4 \cdot 5 \text{ cm}^2 =$$

$$12 \cdot 4 \text{ cm}^2 - 2 \text{ cm}^2 =$$

$$(48-2)\text{cm}^2=$$

$$46 \text{ cm}^2$$

La idea del área de la superficie de un cuerpo consiste en suponer que localmente la superficie es plana, es decir, hacer un zoom a la superficie de forma tal de verla plana en un pedacito de ella, y poder llenar de cuadraditos unidad y calcular la cantidad total de esos cuadraditos que se pusieron en la superficie. Suponer que la superficie es plana localmente es lo mismo que sentimos nosotros estando parados en la superficie de la Tierra, la cual es aproximadamente esférica. De hecho, cuando tomamos medidas, para construir, por ejemplo, no tomamos en cuenta la curvatura de la Tierra.

Hay casos en que la superficie efectivamente es plana localmente, como en el caso de poliedros. En el caso de un poliedro, el área superficial corresponde a la suma de las áreas de sus caras.

Por ejemplo, consideremos un prisma recto cuya base es un hexágono regular.

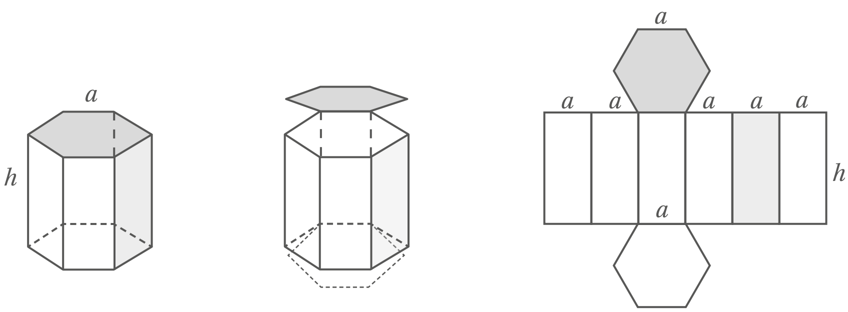


Figura V.118.

Entonces, el área superficial del cuerpo es

$$S = 2\acute{A}_{hexágono} + 6\acute{A}_{rectángulo}$$

Recordemos que el área del hexágono regular cuyo lado mide a es $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, entonces:

$$S = 2 \cdot \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} + 6 \cdot a \cdot h$$

$$S = 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot a \cdot h$$

Por ejemplo, el área superficial del cubo de arista a es $6a^2$.

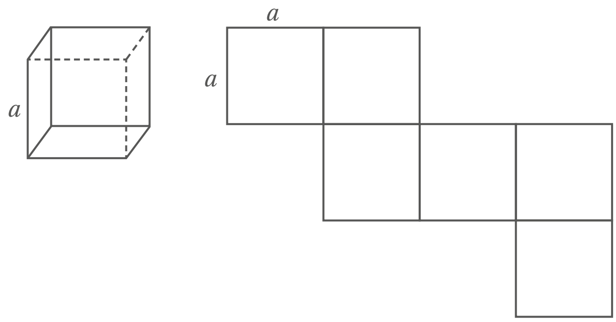


Figura V.119.

Consideremos una pirámide recta cuya base es un cuadrado, cuyo lado mide **10 cm** y la altura de la pirámide es de **30 cm**.

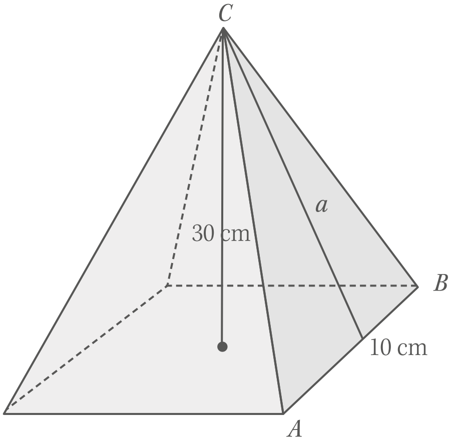


Figura V.120.

Denotamos por ***a*** la medida de la altura (o mediatriz) del triángulo isósceles ΔABC

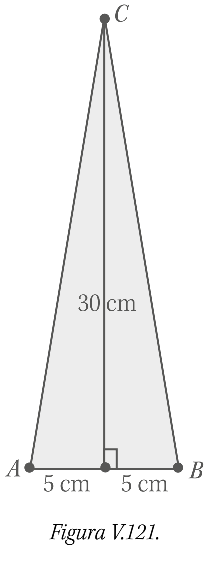


Figura V.121.

Hagamos un corte perpendicular a la base y que contenga a la altura. Observaremos lo siguiente:

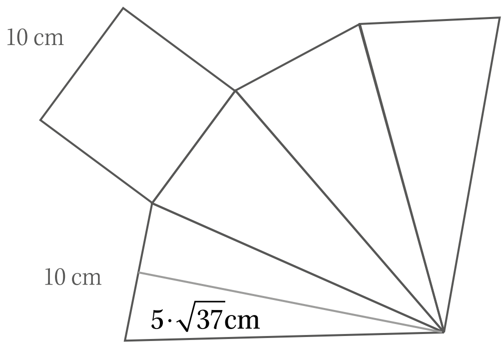


Figura V.122.

La altura del triángulo ΔABC es $5\cdot\sqrt{37}\,\text{cm}$, por una aplicación directa del Teorema de Pitágoras[11].

Por lo tanto, el área del triángulo ΔABC es:

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\sqrt{37}\,\text{cm}^2 = 25\cdot\sqrt{37}\,\text{cm}^2$$

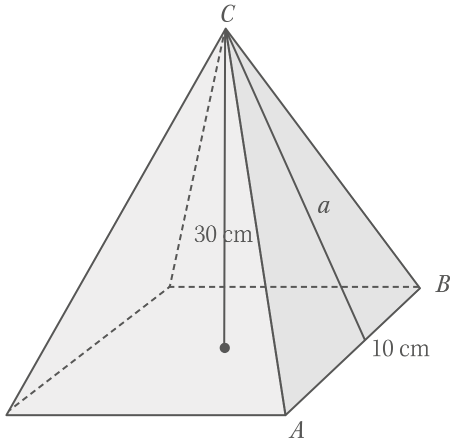


Figura V.123.

Entonces, el área superficial de la pirámide es:

$$S = (10^2 + 4\cdot 25\cdot\sqrt{37}\,)\text{cm}^2$$
$$S = 100(1+\sqrt{37}\,)\text{cm}^2 \approx 708\ \text{cm}^2$$

[11] El cual demostraremos en el **Capítulo IX.**

Consideremos ahora un cilindro recto de altura h y radio basal r.

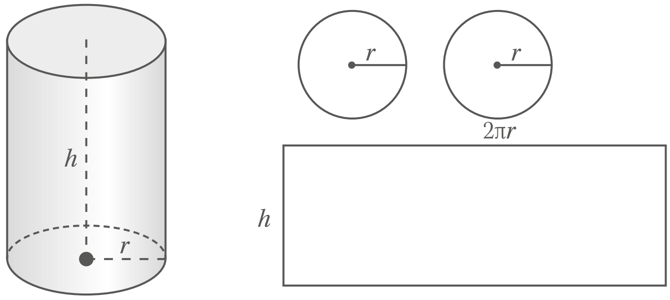


Figura V. 124.

El área superficial es la suma del área de las bases más el área del manto:

$$S = 2 \cdot \acute{A}_{base} + \acute{A}_{manto}$$

El área de la base es πr^2 y el área del manto es el área de un rectángulo cuyos lados miden h y $2\pi r$, entonces el área del manto es $2\pi r \cdot h$; por lo tanto el área superficial del cilindro recto de base circular es:

$$S_{cilindro} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r+h)$$

Para el caso del cono recto de base circular de radio r y altura h, podemos hacer lo siguiente

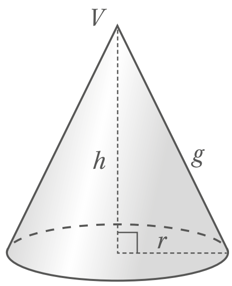


Figura V.125.

Notamos que el área superficial del cono es el área del círculo basal más el área del manto:

$$S = \acute{A}_{base} + \acute{A}_{manto}$$

Denotemos por g la distancia que hay entre la cúspide y el borde del círculo basal.

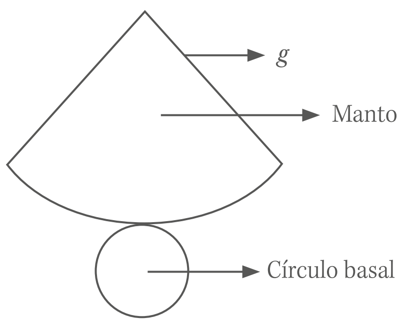


Figura V.126.

La relación entre g, h y r es la siguiente: $h^2 + r^2 = g^2$, por el Teorema de Pitágoras. Entonces se tiene que $g = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Notamos que el manto es una parte de un círculo de radio g y centro en el vértice del cono:

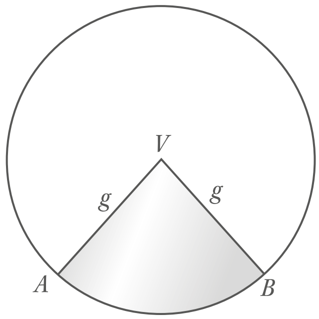


Figura V.127

La medida del arco $\overset{\frown}{AB}$ es el perímetro de la circunferencia de radio r, es decir, la medida del arco $\overset{\frown}{AB}$ es $2\pi r$, entonces

$$\frac{2\pi r}{Á_{manto}} = \frac{2\pi g}{\pi g^2}$$

Por lo tanto, el área del manto es:

$$Á_{manto} = \pi \cdot r \cdot g$$

Y el área superficial del cono de radio basal r y altura h es:

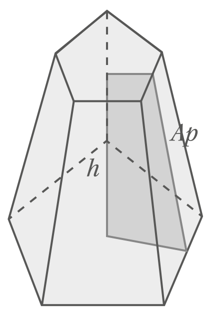
$$S_{cono} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$$

$$S_{cono} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

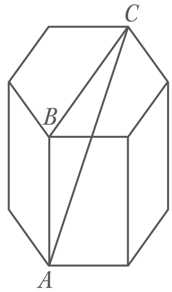
Ejercicios de la sección

1. ¿Cuál es área superficial de un cono circular recto de radio basal 5 m y altura 7 m?

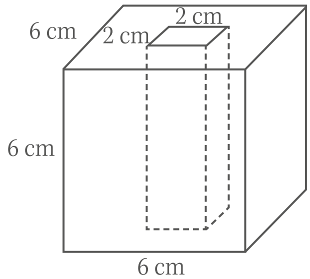
2. Calcule el volumen de la pirámide trunca, cuya base es un pentágono regular de área 65 cm^2, de altura de 10 cm y área superior igual a 32 cm^2 y Ap = 12 cm.



3. Si las bases del poliedro son hexágonos regulares de área $216\ \text{cm}^2$ y la altura del poliedro es de 25 cm, ¿cuál es el área del triángulo ΔABC?

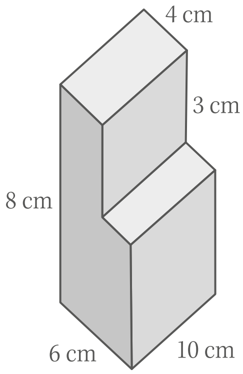


4. Calcule el área de la siguiente figura.

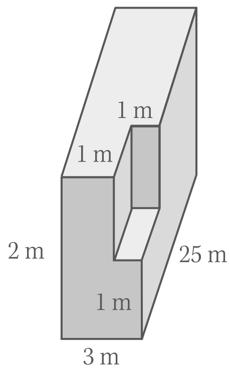


5. Dibuje las redes para cada una de las figuras y calcule su área.

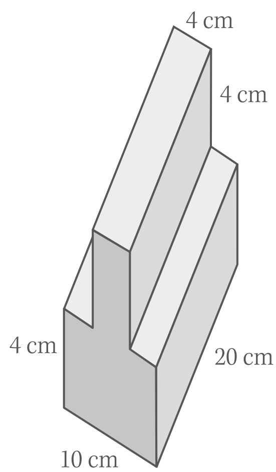
a.



b.

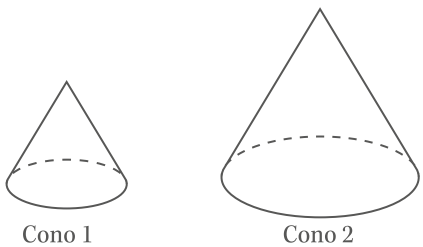


c.



6. El diámetro del Cono 2 es el triple del diámetro del Cono 1 y la altura del Cono 2 es el doble de la altura del Cono 1. Si el volumen del Cono 1 es V, ¿cuál es el volumen del Cono 2?

a. $6V$ b. $9V$ c. $18V$ d. $27V$



6. Dificultades asociadas a la enseñanza de cuerpos geométricos

Como en capítulos anteriores, en esta sección analizaremos algunas de las dificultades y los errores que pueden cometer los alumnos en el estudio de cuerpos geométricos. Algunos problemas se relacionan con el uso del vocabulario, ya que hay niños que al cubo le llaman cuadrado, a la esfera le dicen circunferencia y al tetraedro le dicen triángulo. Los profesores pueden ayudar a superar esta dificultad otorgando a los niños múltiples oportunidades para comparar figuras 2D y objetos 3D. Hacer actividades en las cuales los niños dibujen el contorno del cuerpo pueden ayudar a que los niños reconozcan la diferencia entre un cubo y un cuadrado.

Figura V. 128.

Otra dificultad con la que se encuentran los alumnos es la confusión que se genera al intentar reconocer los elementos básicos de los poliedros, principalmente cuando tienen que hacerlo a partir de una representación plana de los cuerpos. Por ejemplo, dada la representación de una pirámide de base cuadrada, los alumnos pueden contar solo 5 aristas y 4 vértices, pues son los evidentes.

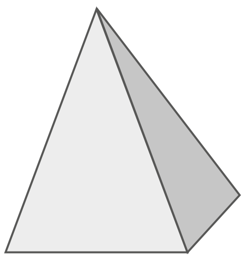


Figura V.129.

En este caso, se vuelve una actividad importante manipular objetos concretos que permitan observarlos desde varias posiciones. Luego de eso, es necesario acordar con los estudiantes que, por ejemplo, en el caso de representaciones en perspectiva de cuerpos, las líneas punteadas significan las aristas que no se ven en la imagen en perspectiva.

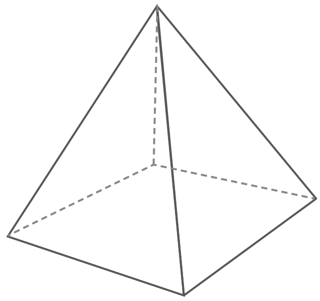


Figura V.130.

Para luego, al final, pasar a la **Figura V.129.**

Otra dificultad que puede observarse en aulas escolares es que, al trabajar con prismas, algunos estudiantes presentan dificultades al momento de identificar las bases de estos cuerpos. Por ejemplo, en el prisma de la **Figura V.131**, los alumnos suelen confundir sus bases, ya que el cuerpo está apoyado en una de sus caras laterales.

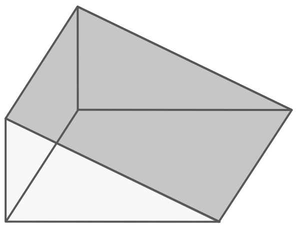


Figura V.131.

Para superar esta dificultad, puede ayudar revisar en detalle con los alumnos la definición de prisma, en la que se señala que es un cuerpo que tiene 2 caras basales congruentes y paralelas. También es de gran ayuda el trabajo con material concreto, que permite manipular los objetos y girarlos para reconocer las bases correctamente.

Respecto a la redes, existe la creencia de que cada cuerpo posee una única red, por ejemplo la imagen de la **Figura V.132** suele ser reconocida como *la* red del cubo.

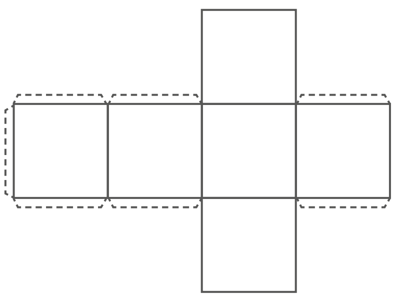


Figura V.132

Pero sabemos que existen 11 redes del cubo, salvo isometrías. Una actividad que suele ayudar a reconocer que hay más de una red del cubo es pedirles explícitamente que construyan más de una. Otra actividad interesante es proveer a los estudiantes de cubos de cartulina o papel y que ellos los desarmen en parejas con la condición de que la red resultante sea distinta a la del compañero.

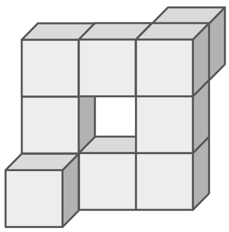
Respecto al área superficial y al volumen de un cuerpo, surgen las mismas dificultades que existen en el caso del área y el perímetro de figuras planas. Por ejemplo, los alumnos pueden usar la fórmula:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

para calcular la superficie de un cono recto de radio r y altura h. Una estrategia que ayuda a determinar si se ha cometido un error de ese tipo es verificar las unidades de medidas. Es decir, si se sabe que el área superficial debe ser expresada en centímetros cuadrados y el resultado está expresado en centímetros cúbicos, entonces el resultado posee un error.

Ejercicios del capítulo

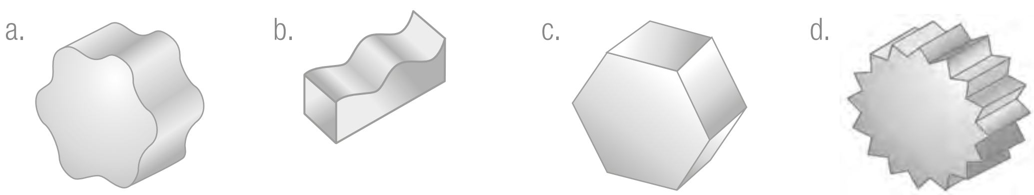
1. Suponga que el siguiente cuerpo está compuesto por cubos cuya aristas miden **1 cm**, donde cada uno de ellos tiene al menos unas de sus caras pegada completamente a la cara de otro cubo:



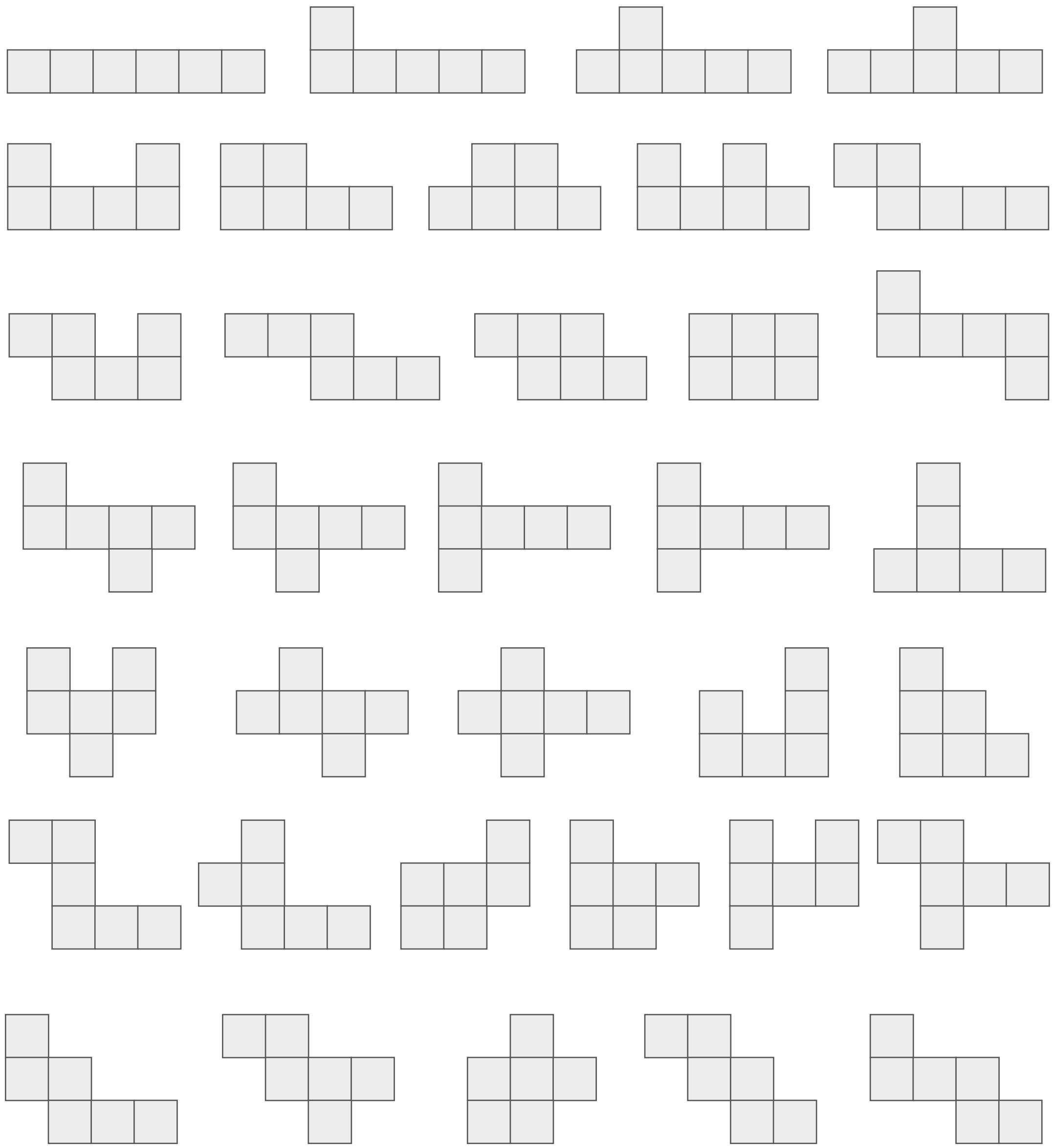
   a. Calcule el área superficial del cuerpo.
   b. Calcule el volumen del cuerpo.
   c. Si se agrega un cubo de **1 cm** de arista al cuerpo, de tal forma que tenga al menos una cara totalmente pegada a uno de los cubos ya dispuestos. ¿Cuál es la máxima área superficial que tiene el cuerpo que resulta?
   d. Si se agrega un cubo de **1 cm** de arista al cuerpo, de tal forma que tenga al menos una cara totalmente pegada a uno de los cubos ya dispuestos. ¿Cuál es la mínima área superficial que tiene el cuerpo que resulta?
   e. ¿Puede crear un cuerpo con la misma condición que el de arriba, de tal suerte que al agregar un cubo no cambie su área superficial?. Explique.

2. ¿Es cierto que, salvo isometrías, solo existe una red del tetraedro regular?

3. ¿Cuál de las siguientes figuras no es un cilindro?



4. Se suele llamar *hexaminó* a **6** cuadrados congruentes, unidos de tal suerte que todo cuadrado comparta completamente al menos un lado con el lado de otro cuadrado. Los siguientes son hexaminós.

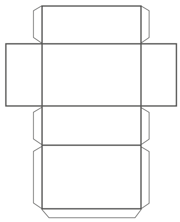


Se dice que **2** hexaminós son iguales, si hay una isometría que transforma a uno en el otro.

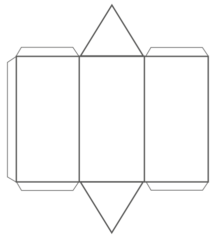
a. Decida si todos los hexaminós aquí presentados son diferentes.
b. Decida si esta es la lista completa de todos los hexaminós.
c. Decida cuál de ellos es una red de cubo.
d. Describa características de los hexaminós que no son redes de cubo.

5. Nombre los cuerpos que forman cada una de las siguientes redes.

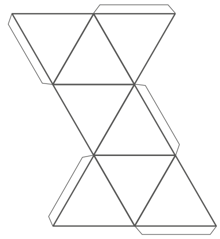
a.



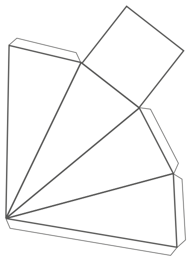
d.



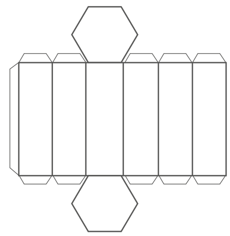
g.



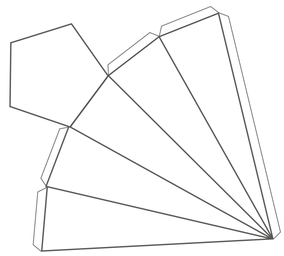
b.



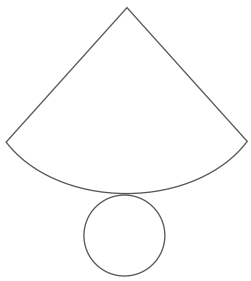
e.



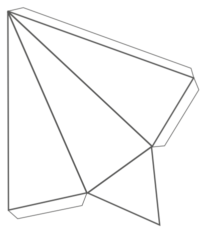
h.



c.



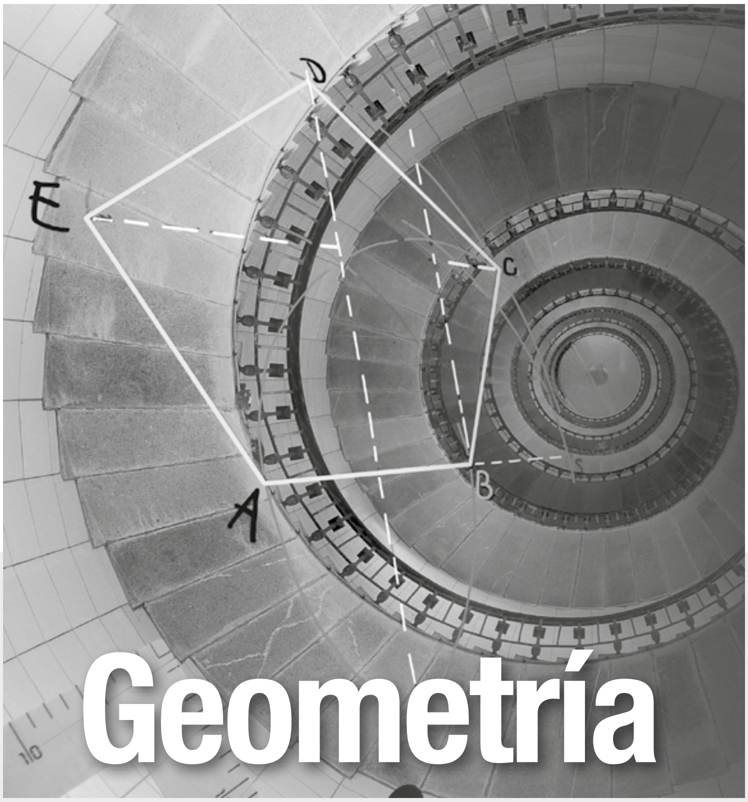
f.



6. Suponga que un estudiante afirma que un $1\ m^3$ equivale a $100\ cm^3$, y argumenta diciendo que como $1\ m$ equivale a $100\ cm$, entonces $1\ m^3$ equivale a $100\ cm^3$. La profesora forma una hilera de 100 dados y le dice, si cada dado tiene una arista de un centímetro, entonces esta hilera representa $100\ cm^3$. El alumno dice: entonces, $1\ m^3$ equivale a $1.000\ cm^3$. Sugiera una estrategia a la profesora para que el alumno reconozca su error.

7. Un alumno dice que el siguiente prisma es una pirámide, pues tiene caras que son triangulares.

La profesora le dice que eso no es una pirámide, sino que es un prisma; el niño le dice que si acaso un cuerpo no puede ser a la vez un prisma y una pirámide. Sugiera una respuesta que pueda dar la profesora al niño. Dé al menos 2 condiciones que cumple una pirámide que no cumple este prisma.



Geometría

Parte II

Geometría deductiva

CAPÍTULO 6 Razonamiento en geometría

CAPÍTULO 7 Triángulos

CAPÍTULO 8 Paralelismo y cuadriláteros

CAPÍTULO 9 Proporcionalidad en geometría

Capítulo VI

Razonamiento en geometría

> "La geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal."
>
> H. Poincaré

Introducción

Hace más de 2.000 años, frente a resultados matemáticos que se tenían como verdaderos, como el Teorema de Pitágoras, surge la inquietud por saber por qué son efectivamente ciertos. Para responder a eso, se trabajó en base a las justificaciones que permiten convencer sobre la veracidad de estos resultados. La forma de justificación utilizada en matemática es la *demostración*, que es una argumentación que respeta ciertas formalidades, de manera de evitar argumentos engañosos. El nacimiento de la demostración como forma de argumentación ocurre cuando la civilización griega comienza a desarrollar la lógica, e incluso cuando se gesta el concepto de democracia (si todos somos iguales, la forma de convencer al otro es la argumentación y no la autoridad).

Las ideas matemáticas no se imponen por la fuerza de la tradición, ni por la importancia de quienes las transmiten, sino por el poder del razonamiento. Esta es la idea fundadora de la geometría deductiva y el razonamiento en geometría. Los resultados no serán necesariamente distintos de los que ya conocíamos, pero ahora entenderemos por qué son verdaderos.

La estructura matemática que nos permite conjeturar resultados y luego demostrarlos es una parte esencial de la matemática. Esta no solo sirve para resolver problemas, también es un área del conocimiento que posee sus propias motivaciones y formas de crecer. En este y los siguientes capítulos, se revisarán, entre otras, las ideas vistas en la parte intuitiva, pero ahora desde un punto de vista constructivo. Por lo tanto, la mirada que se debe dar a este capítulo es la de una estructura que permite convencerse de que las ideas matemáticas tienen un orden y una razón de ser.

La primera parte de este capítulo aborda el razonamiento inductivo y el deductivo. Nos concentraremos en este último, pero antes revisaremos qué entendemos por inducción y por deducción.

En la segunda parte, veremos cómo se materializa todo esto en el caso concreto de la geometría plana. Iniciamos este recorrido con los conceptos y propiedades básicas: puntos, rectas, conceptos basados en ellos y sus relaciones. La siguiente sección introduce la idea de construcción geométrica "con regla y compás", que se asocia con la forma más pura de la geometría, en la cual se excluyen los números. La sección final del capítulo trata de semiplanos, ángulos y perpendicularidad.

1. Razonamiento matemático

Una habilidad que compartimos todos los seres humanos es la capacidad de generalizar. Si algo se repite muchas veces, concluimos rápidamente (quizás demasiado rápido) “esto es siempre así”. Generamos reglas de cómo nos parece que se comporta el mundo, le asociamos una lógica, leyes de comportamiento y, de este modo desarrollamos una capacidad para anticipar lo que puede suceder ante determinadas condiciones. Podemos llegar a ser capaces, en alguna medida, de prever cuáles serían las consecuencias de nuestras acciones.

Pero esta capacidad de generalizar nos puede llevar a conclusiones erróneas, pues las regularidades que creemos reconocer no siempre son tales o, al menos, requieren ajustes. Nuestras predicciones no siempre son acertadas. Más aún, si las reglas nos son sugeridas por otro, sin haber sido nosotros quienes las hemos generado a partir de la experiencia, nos resulta natural ponerlas en duda, según el llamado “espíritu crítico”.

Llamamos inducción[1] al proceso de pasar de ejemplos particulares a formular reglas generales. Este proceso es la base del llamado “método científico” que consiste gruesamente en 4 etapas:

- **Observación:** se recolecta y ordena una serie de observaciones del fenómeno que interesa comprender. En esta etapa, se realizan experimentos para la generación de datos de interés para el fenómeno estudiado.
- **Formulación de Hipótesis**: se explicita alguna regularidad verificada por las observaciones y se propone una regla general, que puede estar presentada como fórmula matemática. Es en esta etapa cuando se utiliza el razonamiento inductivo.
- **Predicción**: se hace uso de la ley propuesta para predecir o anticipar el resultado de nuevos experimentos.
- **Experimentación y validación**: se realizan los nuevos experimentos para los cuales somos capaces de predecir el resultado, comprobando que haya concordancia entre predicción y resultado experimental. Si no se obtiene concordancia, la hipótesis se rechaza.

En ciencia, las hipótesis se mantienen mientras no aparezca evidencia de que falla en determinados casos. Es por eso que se evita hablar de “verdad”. Una hipótesis puede ser una explicación efectiva para un fenómeno, pero de aparecer nueva evidencia que no se alinee con la actual hipótesis, dejará de serlo y se buscará una nueva hipótesis.

En matemática se sigue un camino similar. Como punto de partida, se revisan y analizan muchos ejemplos. El razonamiento inductivo es el que nos puede llevar a constatar que se produce una regularidad. Entonces, quisiéramos concluir que la regla se cumple siempre, que se trata de una propiedad general, que es un teorema. Esta etapa se llama *generalización* y lo que se formula es una conjetura, es decir, una propiedad para la cual tenemos bastante evidencia de que se cumple siempre, pero sin certeza absoluta. Una última etapa, propia de la matemática, es la *argumentación* razonada de por qué la propiedad es efectivamente verdadera.

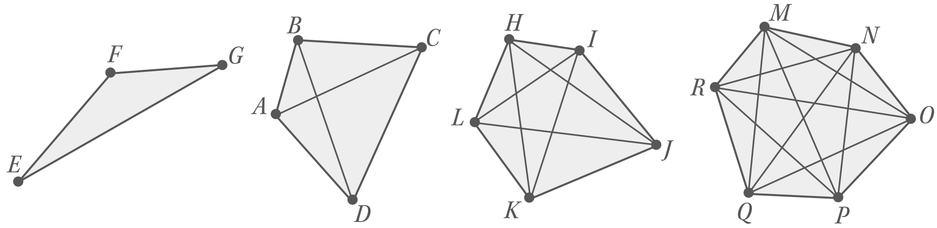
[1] También se le llama razonamiento inductivo.

1.1 El razonamiento inductivo y las generalizaciones

Veamos algunos ejemplos de razonamiento inductivo.

Ejemplo: número de diagonales de un polígono convexo

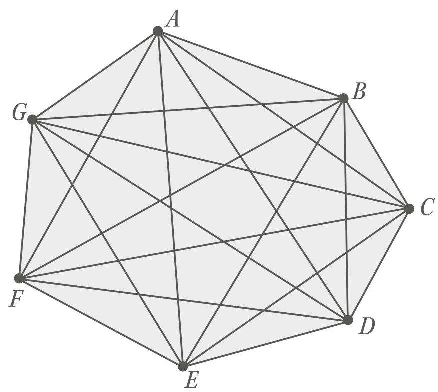
Una diagonal de un polígono convexo es el segmento que une 2 vértices distintos y no adyacentes del polígono. Por ejemplo, el triángulo no tiene diagonales, el cuadrilátero tiene 2 diagonales, un pentágono tiene 5 diagonales y un hexágono tiene 9 diagonales.



Hagamos una tabla con esos valores:

Figura	Número de vértices	Número de diagonales
Triángulo	3	0
Cuadrilátero	4	2
Pentágono	5	5
Hexágono	6	9

¿Cuántas diagonales tiene el polígono convexo de 7 lados?, ¿puede hacer una conjetura?



Son 14, pero no es fácil contarlas. Alguien pudo conjeturar que son 14 usando el siguiente razonamiento: el número de diagonales del triángulo, cuadrilátero, pentágono y hexágono son 0, 2, 5 y 9 respectivamente:

$$\boxed{0} \xrightarrow[+2]{} \boxed{2} \xrightarrow[+3]{} \boxed{5} \xrightarrow[+4]{} \boxed{9}$$

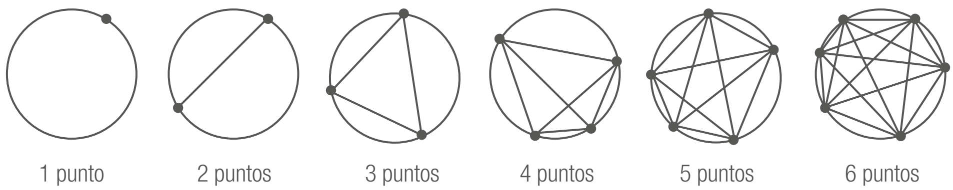
Al parecer, la secuencia va aumentando, sumando el sucesor del que se sumó en el paso anterior; entonces, si del pentágono al hexágono se sumó 4, entonces del hexágono al heptágono sumamos 5, y el heptágono tiene $9 + 5 = 14$ diagonales. Lo cual es cierto. ¿Será cierto siempre?

¿Qué pasa si tuviéramos que calcular el número de diagonales de un polígono convexo de 20 lados? Tendríamos que hacer la secuencia 19 veces y confiar en que nuestra conjetura es cierta.

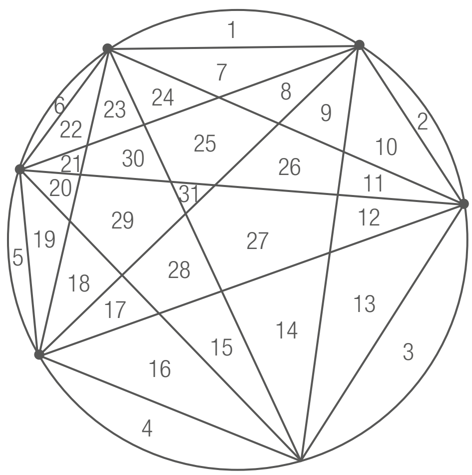
Ejemplo: regiones en el círculo

Dado un círculo, se ubican n puntos sobre la circunferencia y luego se conectan todos los pares de puntos mediante un segmento recto. Debemos suponer, además, que no ocurre que 3 segmentos se corten en un mismo punto. La pregunta ahora es ¿en cuántas regiones queda descompuesto el círculo?

Aquí están las primeras configuraciones:



Con las primeras 5, nos percatamos de que se trata siempre de potencias de 2, $1 = 2^0$ regiones, $2 = 2^1$ regiones, $4 = 2^2$ regiones, $8 = 2^3$ regiones y $16 = 2^4$ regiones. Para la última, podemos conjeturar que tiene $2^5 = 32$ regiones. Si hacemos el dibujo más grande, podemos intentar una comprobación.



Podemos verificar que solo tenemos 31 regiones. ¡Nuestra conjetura falló! Este es un caso en el que fuimos capaces de encontrar un ejemplo en el que la regla no funciona. La regularidad, si es que existe, no es evidente en este ejemplo[2].

[2] Con algo de paciencia, podemos obtener algunos términos adicionales de esta secuencia: 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163 y 256.

Algunos ejemplos que se pueden trabajar dentro del tema de la geometría son los siguientes.

- Mida los 3 ángulos y los 3 lados de un triángulo cualquiera. Empareje la medida de cada lado con la medida del ángulo opuesto a él. ¿Qué observa?
- En una circunferencia, inscriba un cuadrilátero y mida sus ángulos. Sume las medidas de los ángulos opuestos. ¿Qué observa?

Intente obtener conclusiones o reglas generales.

En matemática, el proceso de razonar por inducción (partir de ejemplos particulares y formular una regla general) nos permite llegar a afirmaciones que posiblemente sean verdaderas, pero no nos permite estar seguros de ellas. El método inductivo es muy interesante y nos permite darnos cuenta de numerosas regularidades en nuestro alrededor. Pero las verdades que descubrimos no parecen definitivas, pues siempre están en peligro de fallar, si aparece el ejemplo indeseado. O puede ser que ese ejemplo indeseado no aparezca nunca o también que simplemente no exista tal ejemplo indeseado.

Para pensar

¿Cómo podemos establecer la veracidad de una ley de una manera que no involucre verificar todos los casos posibles?

1.2 El razonamiento deductivo y las demostraciones

Toda afirmación matemática debe ser posible de clasificar en verdadera o falsa. Tales afirmaciones reciben el nombre de *proposiciones*. Estudiando las diversas formas que puede adoptar una proposición, podemos intentar comprender qué se requiere para lograr demostrarlas.

Una demostración es un argumento que nos convence (a nosotros y a los demás) de la veracidad de una afirmación, pero sin descansar en ejemplos, sino que en principios generales que ya sabemos ciertamente que son verdaderos.

En la historia de la matemática, no siempre se avanzó en base a demostraciones. La pregunta inicial fue "¿Qué?", preguntando qué es lo verdadero y cuáles son las reglas.

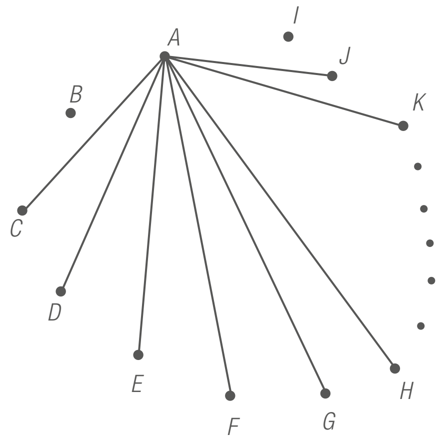
En una segunda etapa, se consideró la pregunta "¿Por qué?", preguntando por la razón de que algo sea verdadero. La demostración será, entonces, un argumento que se utiliza para convencer a otro que algo es cierto. Debe ser un argumento general, que no se base en algunos casos particulares.

Este gusto por la argumentación y por la búsqueda de razones que puedan convencer se relaciona, según algunos, con el nacimiento de la democracia en la antigua Grecia. Si se usa la jerarquía y la autoridad para imponer una verdad, no se requieren las demostraciones, pero si todos somos considerados iguales, debo argumentar con los demás para acordar una verdad.

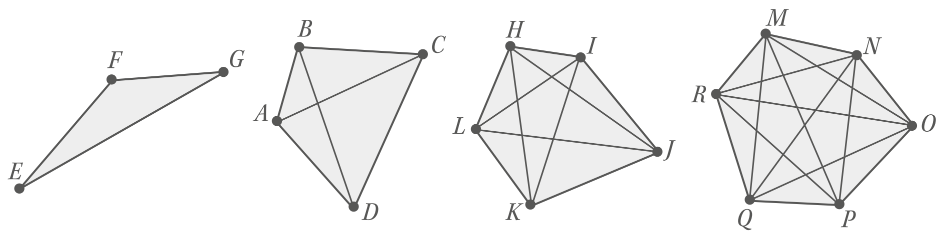
Retomemos uno de los primeros 2 ejemplos de la introducción e intentemos razonar para convencernos de su veracidad. Obviamente, la demostración como argumento para convencer a otro también nos debe convencer a nosotros mismos.

Ejemplo: las diagonales de un polígono convexo

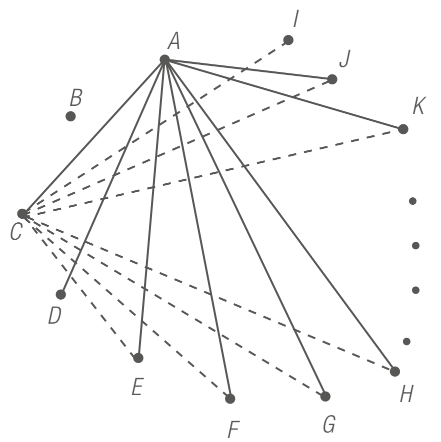
Si un polígono tiene n vértices, entonces de cada vértice salen (o llegan) todas las diagonales posibles. ¿Cuántas son esas diagonales posibles?, ¿hay tantas como vértices? No hay diagonales de un vértice a sí mismo, tampoco hay diagonales de un vértice a los 2 vértices adyacentes; entonces, de un vértice salen (o llegan) n–3 diagonales.



Por ejemplo, en el caso del triángulo, de cada vértice salen 3 – 3 = 0 diagonales, en el caso del cuadrado por cada vértice salen 4 – 3 = 1 diagonales, en el caso del pentágono por cada vértice salen 5 – 3 = 2 diagonales y en el caso del hexágono salen 6 – 3 = 3 diagonales.



Notemos que si contamos las diagonales que salen de un vértice y las diagonales que salen de un vértice no contiguo al primero, entonces una de esas diagonales está contada 2 veces. Por ejemplo, en la siguiente imagen se ven las diagonales que salen de A y las diagonales que salen de C. La diagonal $\overline{AC}$ estaría contada 2 veces.



Entonces, como por cada vértice salen $n-3$ diagonales, como la cantidad de vértices es n y como la diagonal sale de 2 vértices:

(La cantidad de vértices) x (la cantidad de diagonales que salen de un vértice)

Es el doble de la cantidad de diagonales que tiene un polígono convexo de n vértices, y la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Podemos verificar que esta fórmula funciona para el caso de los polígonos ya estudiados. Si $n = 3$, en el caso del triángulo, tenemos $\frac{3\cdot(3-3)}{2}=\frac{3\cdot 0}{2}=0$ diagonales, en el caso del cuadrilátero, $n = 4$, tenemos $\frac{4\cdot(4-3)}{2}=\frac{4\cdot 1}{2}=2$, para el caso del pentágono, $n = 5$, se tiene $\frac{5\cdot(5-3)}{2}=\frac{5\cdot 2}{2}=5$.

En resumen

El razonamiento deductivo va desde lo general a lo particular.
Permite justificar un caso particular por la aplicación de principios generales.

1.3 La deducción: de lo general a lo particular

Una demostración está basada en la deducción lógica. Algunos dicen que se trata de una *cadena de deducciones*. ¿Qué es entonces una deducción? Una deducción será la aplicación de una ley general a un caso particular. Por ejemplo, si sabemos que (1) "Todo rectángulo tiene las diagonales iguales" y (2) "Todo cuadrado es un rectángulo", podemos deducir que, en particular, (3) "En todo cuadrado, las diagonales son iguales".

En términos conjuntistas, esto se puede decir de la siguiente manera:

Podemos individualizar 3 familias de objetos geométricos, 3 *conjuntos*:

R = conjunto de todos los rectángulos

C = conjunto de todos los cuadrados

D = conjunto de todos los cuadriláteros cuyas diagonales son iguales

Con esto, la primera afirmación dice:

(1) El conjunto R es una parte de D

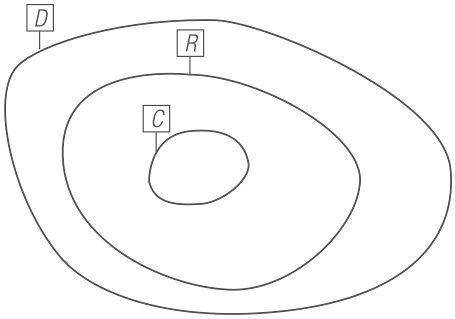
Y la segunda dice

(2) El conjunto C es una parte de R

De lo que se deduce que:

(3) El conjunto C es una parte de D.

Esto se puede hacer aún más evidente si utilizamos un diagrama para ilustrar estas ideas



Dónde: *D*: cuadriláteros con las diagonales iguales

R: rectángulos

C: cuadrados

Figura VI.1.

1.4 Proposiciones, implicaciones y deducciones

Usaremos el término *proposición* para referirnos a una afirmación que es o bien verdadera, o bien falsa, esto es, una afirmación para la cual se puede verificar, en principio, su veracidad. Por ejemplo, "el triángulo ΔABC es equilátero" es una proposición, también es una proposición la siguiente "los ángulos $\measuredangle ABC$, $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle BAC$ son congruentes", pues podríamos, dado el caso, verificar si se trata de proposiciones falsas o verdaderas.

Una *implicación* es una combinación de 2 proposiciones, de la forma "la primera implica la segunda", significando que siempre que la primera sea verdadera, la segunda también lo será. Por ejemplo "*Si* el triángulo ΔABC es equilátero, *entonces* los ángulos $\measuredangle ABC$, $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle BAC$ son congruentes". Dicho de otra manera, si la implicación es verdadera, entonces es suficiente que además la primera proposición sea a su vez verdadera para concluir (o deducir) que la segunda es también verdadera. Esto parece ser muy adecuado para comprender las deducciones. En el ejemplo anterior, si la implicación es cierta, entonces cada vez que tengamos un triángulo equilátero podemos afirmar que sus ángulos interiores son congruentes.

Si denotamos por P la proposición "El triángulo ΔABC es equilátero" y por Q la proposición "los ángulos $\measuredangle ABC$, $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle BAC$ son congruentes", entonces la implicancia "si el triángulo ΔABC es equilátero, entonces los ángulos $\measuredangle ABC$, $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle BAC$ son congruentes", la denotamos por $P \Rightarrow Q$.

Una implicación $P \Rightarrow Q$ falla, o es Falsa si siendo P verdadero, resulta que Q es falso. Por lo tanto, desde el punto de vista del cumplimiento de la regla, cuando P es falso no importa. La regla no puede ser quebrantada. En cambio, si P es verdadero, Q también debe serlo.

La implicación se llama también *proposición condicional*, pues en ella se establece una condición P que si es verdadera permite garantizar la veracidad de la conclusión Q. Por esto, las implicancias parten con un "Si" condicional. Se suelen escribir en la forma "Si…, entonces…".

En resumen

Una *proposición* es una afirmación que solo puede ser verdadera o falsa
La *proposición condicional* $P \Rightarrow Q$ es falsa solo si ocurre simultáneamente que la proposición P sea verdadera y Q falsa. En todos los otros casos, es verdadera.

1.5 Hay muchos tipos de proposiciones

¿Qué estructura (qué forma) tienen las proposiciones con las que trabajaremos? Nos interesan, sobre todo, aunque no en forma exclusiva, las llamadas proposiciones *categóricas* y las proposiciones *condicionales.*

Una proposición categórica es una que afirma algo sobre los miembros de un conjunto, que llamaremos *conjunto de referencia.*

Ejemplo

- Todos los números primos son impares.
- La raíz de 2 es un número irracional.
- Todos los triángulos isósceles tienen 2 ángulos congruentes.
- Algunos triángulos son isósceles.
- Existe una única circunferencia circunscrita a un triángulo dado.

¿Cuál es el conjunto de referencia en cada caso? y ¿qué se afirma de los elementos de ese conjunto?

Como vimos al hablar del proceso de razonamiento inductivo, para demostrar una afirmación categórica que asegure algo sobre todos los elementos del conjunto de referencia, no basta con probarla solo para algunos elementos. Por el contrario, si alguien quiere *refutarla* (o sea, demostrar que es falsa), basta con encontrar un *contraejemplo*. Por ejemplo, si queremos refutar la afirmación "Todos los triángulos son equiláteros", nos basta mostrar un ejemplo de un triángulo no equilátero. Estas últimas corresponden a las técnicas de demostración que pueden resultar en argumentos muy simples (aunque algunos contraejemplos pueden ser de una tremenda dificultad). Por otro lado, si la proposición afirma que algo es verdadero sobre, a lo menos un elemento del conjunto de referencia, basta con probarla para alguno en particular (nuevamente, una demostración puede resultar muy simple.), pero refutarla requiere probar que para todos los elementos del conjunto de referencia la proposición es falsa.

Ejercicios

1. Refute la afirmación "todos los triángulos isósceles son equiláteros".
2. Demuestre la afirmación "algunas circunferencias se intersectan en dos puntos".

Una proposición condicional corresponde a una implicación lógica y afirma que los valores de verdad de 2 proposiciones están relacionados. Esta es la forma más común en que se presentan los teoremas matemáticos. Según vimos, no es posible que la primera proposición sea verdadera y la segunda falsa. En general, escribiremos estas proposiciones en la forma: "si ... , entonces ...".

Esto indica que si la primera proposición (la que va entre el "si" y el "entonces") es verdadera, entonces la segunda necesariamente es también verdadera. Las 2 proposiciones involucradas en una implicación reciben distintos nombres, dependiendo del contexto en que aparecen. Así, por ejemplo, pueden ser llamadas, respectivamente, hipótesis y tesis, antecedente y consecuente, premisa y conclusión, etc.

Las proposiciones condicionales son una fuente frecuente de dificultades. Sucede a menudo que no queda claro en qué casos son verdaderas (y en cuáles falsas); se confunde el valor de verdad de las proposiciones que la constituyen con el valor de verdad de la implicación. O más generalmente, la conclusión pasa a tomar el rol de premisa, y la premisa, de conclusión.

Ejemplo

Consideremos la siguiente proposición condicional:

P: "Si *ABCD* es un cuadrado, entonces su perímetro es 4 veces la medida de uno de sus lados".

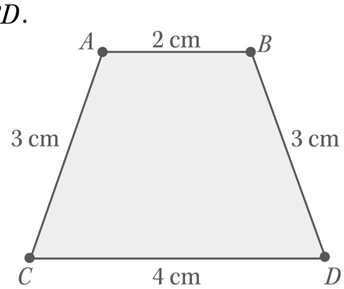
Algunas conclusiones que no se desprenden de esa proposición son:

- Si tengo un cuadrilátero *ABCD* cuyo perímetro mide 4 veces la medida de uno de sus lados, entonces *ABCD* es un cuadrado.
- Si tengo un cuadrilátero que no es un cuadrado, entonces su perímetro no es igual a 4 veces la medida de uno de sus lados.

La primera no se desprende de la proposición *P*, pues esta dice "Si *ABCD* es un cuadrado…", entonces si a priori no sé si *ABCD* es o no un cuadrado no puedo concluir nada, invocando a la proposición *P*.

La segunda, no se desprende de *P*, por la misma razón que la primera.

En este caso particular, además de no desprenderse de *P*, son falsas. De hecho, el cuadrilátero de la siguiente figura tiene un perímetro que mide 12 cm y es igual a 4 veces la medida del lado $\overline{BD}$.



El mismo ejemplo muestra que la segunda conclusión también es falsa.

Hay veces que una afirmación no se desprende de una proposición condicional, sin embargo, eso no significa que sea falsa. Por ejemplo, consideremos la siguiente proposición *Q*.

Q: "Si ΔABC es un triángulo isósceles, entonces tiene 2 ángulos congruentes". Por lo tanto, la siguiente afirmación no se desprende de *Q*.

- Si ΔABC es un triángulo que tiene 2 ángulos congruentes, entonces ΔABC es isósceles.

Esta afirmación no se desprende de la anterior, pues no supone como antecedente que el triángulo ΔABC es isósceles; sin embargo es verdadera.

1.5.1 Recíproca de una proposición condicional

Consideremos una afirmación condicional del tipo:

"Si *P*, entonces *Q*".

¿Qué ocurre si cambiamos de lugar –y de rol– tesis e hipótesis, vale decir, si consideramos la siguiente afirmación?

"Si *Q*, entonces *P*".

A esta afirmación la llamamos la *recíproca* de la afirmación original. Por ejemplo, si tenemos la proposición *P*: "Si un triángulo es equilátero, entonces tiene un par de ángulos congruentes" su recíproca sería *P*":"Si un triángulo tiene un par de ángulos congruentes, entonces es equilátero". En general si una proposición condicional es verdadera, su recíproca no necesariamente lo es. Por ejemplo, la proposición *P* es verdadera, pero su recíproca *P*" es falsa.

Note que, *a priori*, parece haber 4 combinaciones posibles de valores de verdad, a saber: que la proposición original sea verdadera y su recíproca falsa, o viceversa; que ambas sean verdaderas, o que ambas sean falsas.

Ejercicios

1. Para cada una de las proposiciones siguientes, escriba la recíproca e indique si ella o su recíproca son verdaderas.
   a. Todo triángulo isósceles es equilátero.
   b. Si un triángulo es rectángulo, entonces es acutángulo.
   c. Si 2 rectas son perpendiculares, entonces se cortan en un único punto.

1.5.2 Proposiciones equivalentes

Una proposición que expresa que tanto una proposición condicional como su recíproca son verdaderas es llamada una *equivalencia*[3] entre las 2 proposiciones que forman ambas condicionales (o sea, las que son hipótesis en una y tesis, en la otra).

Si las condicionales que forman esta nueva proposición son "si *P* entonces *Q*" y "si *Q* entonces *P*", la equivalencia entre *P* y *Q* es escrita como "*P* si y solo si *Q*". En lugar de la frase "si y solo si", también se puede utilizar "*Q* es condición necesaria y suficiente para *P* ".

[3] También se llama *proposición bicondicional.*

Ejemplo

El Teorema de Pitágoras afirma que si un triángulo es rectángulo, entonces la suma de los cuadrados de sus catetos (los lados que forman el ángulo recto) es igual al cuadrado de la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto).

Por otra parte, el recíproco del Teorema de Pitágoras afirma que si en un triángulo se cumple que la suma de los cuadrados de 2 de sus lados es igual al cuadrado del tercero, entonces el triángulo es rectángulo.

Una forma de resumir estas 2 afirmaciones es la siguiente:

"Un triángulo es rectángulo si y solo si la suma de los cuadrados de 2 de sus lados es igual al cuadrado del tercero".

Note que la equivalencia entre P y Q es verdadera exactamente en los casos en que P y Q son ambas verdaderas o ambas falsas, o sea, cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Muchas de las proposiciones que nos interesan que afirman que una determinada proposición condicional (o equivalencia) es verdadera para todos los elementos de cierto conjunto. A continuación, damos ejemplos de proposiciones que tienen esta estructura o que pueden ser reescritas para adaptarlas a ella.

Ejemplo

a. Dado cualquier paralelogramo, sus diagonales miden lo mismo si y solo si el paralelogramo es un rombo.
b. Todos los triángulos rectángulos son isósceles.
c. Dado cualquier triángulo, el punto donde concurren las alturas es el centro de una circunferencia tangente a los 3 lados.
d. En todo paralelogramo, las diagonales se dimidian mutuamente.
e. Dado un triángulo arbitrario, la suma de las longitudes de 2 de sus lados es siempre mayor que la longitud del tercer lado.
f. Los cuadriláteros que tienen 2 lados paralelos y congruentes son paralelogramos.
g. Si dos circunferencias son tangentes exteriormente, entonces la distancia entre sus centros es igual a la diferencia de sus radios.

Note que no siempre el enunciado de una de estas proposiciones contiene de manera explícita la condicionalidad o equivalencia. Por ejemplo, la afirmación (b) puede ser reescrita como "dado cualquier triángulo T, si T es un triángulo rectángulo, entonces T es isósceles". Por su parte, (d) puede ser formulado como "dado cualquier cuadrilátero, si este es un paralelogramo, entonces sus diagonales se dimidian mutuamente".

También es posible que el enunciado de la proposición no incluya, explícitamente, palabras como “todos” o “cualquiera” o “arbitrario”: la convención generalmente aceptada es que, si se afirma algo acerca de un objeto sin particularizarlo (un triángulo, un cuadrilátero, dos circunferencias), entonces se da por sentado que nos referimos a un objeto *cualquiera*. Así, los 2 últimos ejemplos pueden ser reescritos como proposiciones condicionales o equivalencias verdaderas para todos los elementos de un conjunto referencial:

- En todo cuadrilátero, este tiene 2 lados paralelos y congruentes si y solo si es un paralelogramo.
- Dadas 2 circunferencias cualesquiera, si ellas son tangentes exteriormente, entonces la distancia entre sus centros es igual a la diferencia de sus radios.

Ejercicios

1. Reformule todas las proposiciones mostradas en el ejemplo anterior en la forma de proposiciones condicionales validas en un conjunto referencial (que debe quedar explícito).
2. ¿Cuáles de las proposiciones del ejemplo le parecen verdaderas? Trate de dar argumentos que sustenten su posición, en el caso de que crea que son verdaderas, o de dar contraejemplos en caso contrario.

1.5.3 Contrarrecíproca de una proposición condicional

A partir de una proposición condicional del tipo “Si P, entonces Q” se puede construir otra proposición llamada *contrarrecíproca*[4] y que corresponde a “Si no se tiene Q, entonces no se tiene P”, o más breve, “Si no Q, entonces no P”. Desde el punto de vista lógico, ambas proposiciones son equivalentes y, por lo tanto, si una de ellas es verdadera, la otra también lo será. No confundir con la recíproca, que puede ser falsa aunque la proposición original sea verdadera.

Para entender esta equivalencia, recordemos que la proposición condicional “Si P, entonces Q” es falsa cuando simultáneamente P es verdadero y Q falso. Considerando ahora la contrareciproca “Si no Q, entonces no P”, esta será falsa cuando simultáneamente no Q sea verdadera y no P falsa, lo que es exactamente igual a afirmar que P es verdadera y Q falsa.

En resumen

Dada una proposición condicional original $P \Rightarrow Q$, podemos formar otras proposiciones:

- Contrarrecíproca (o contrapositiva): no $Q \Rightarrow$ no P. Es equivalente a la original.
- Recíproca: $Q \Rightarrow P$. No es equivalente a la original.
- Equivalencia: $P \Leftrightarrow Q$ que corresponde a $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$. Esta combina la original y su recíproca. Ambas deben ser verdaderas.

[4] Llamada también *contrapositiva*.

1.6. Fundamentos de las demostraciones

Una característica importante que exigimos a la demostración de una proposición para que sea considerada válida es que todas las proposiciones utilizadas en la argumentación lógica sean, a su vez, verdaderas. Así que nos gustaría que todas las afirmaciones de las que depende una demostración hayan sido demostradas previamente. Una cadena de deducciones requiere que cada uno de sus eslabones sea verdadero.

Así, por ejemplo, más adelante demostraremos que el segmento que une los puntos medios de 2 lados de un triángulo es paralelo al tercer lado, basándonos en propiedades de los paralelogramos que habremos demostrado con anterioridad.

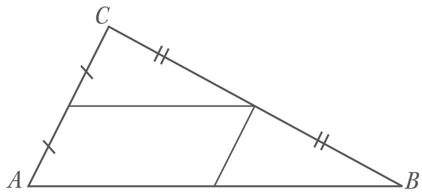


Figura VI.3.

Del mismo modo que deseamos que cada afirmación esté basada solo en afirmaciones previamente demostradas, queremos que cada uno de los conceptos con los que trabajemos tenga una definición precisa, y si para enunciar dicha definición necesitamos utilizar otros conceptos, estos hayan sido, a su vez, previamente definidos. Así, por ejemplo, definiremos un ángulo como una unión de dos rayos con el mismo origen, y previamente a esto habremos definido la idea de rayo. También definiremos un polígono como una unión de segmentos que cumplen ciertas condiciones, y antes de esta definición habremos definido el concepto de segmento.

Nuestras definiciones no solo hablarán de tipos de objetos, en ocasiones también deberemos definir ciertas *relaciones* entre ellos. Por ejemplo, definiremos la noción de que 2 triángulos sean semejantes en base a que (de acuerdo a cierto ordenamiento dado a sus vértices) sus ángulos respectivos sean congruentes, y a que las longitudes de sus lados respectivos sean proporcionales (por supuesto, previamente a esto habremos definido las nociones de congruencia de ángulos y de longitud de un segmento).

De esta forma, nuestro razonamiento utiliza 2 tipos de elementos: por una parte, tenemos los conceptos (objetos y relaciones) que usamos en nuestro discurso y, por otra, tenemos afirmaciones acerca de dichos conceptos. Nuestro ideal es que nada quede "en el aire", ya que aspiramos a que cada afirmación que tenemos por verdadera sea demostrada y a que toda definición de un nuevo concepto esté basada solo en conceptos ya claramente definidos.

Sin embargo, una breve reflexión nos lleva a darnos cuenta de que ese ideal de definirlo todo y demostrarlo todo es imposible de realizar, porque si le siguiéramos la pista a las afirmaciones de las cuales depende (directa o indirectamente) una demostración, o a los conceptos de los cuales depende (directa o indirectamente) una definición, ¡no terminaríamos nunca! Por esta razón, llegamos a la conclusión de que, para que estos procesos de seguimiento de una demostración o definición sean practicables, debemos aceptar que ciertos conceptos no sean definidos y, el que ciertas afirmaciones no sean demostradas. Sin embargo, esta elección no es arbitraria, se requiere que la cantidad de esos objetos no definidos y esas afirmaciones no demostradas sean mínimas, en cierto sentido, y consensuadas por la comunidad matemática, y que permitan desarrollar la teoría que se pretende construir.

1.6.1 Definiciones y conceptos primitivos

Aquellos conceptos para los cuales no daremos definiciones serán llamados *conceptos primitivos*. Supondremos que todos entendemos lo mismo por ellos y, probablemente podamos describirlos informalmente, pero no daremos una definición formal y precisa de ellos.

Todos los demás conceptos (objetos, y/o relaciones entre ellos) serán definidos, al principio, solo en términos de conceptos primitivos y, posteriormente, en términos de estos y de los nuevos conceptos definidos.

1.6.2 Teoremas y axiomas

Las afirmaciones que no demostraremos, y que tomaremos como puntos de partida de nuestro razonamiento serán llamadas *axiomas* o *postulados*[5].

En general, tomaremos como axiomas algunas afirmaciones cuya verdad sea tan evidente que no consideramos necesario demostrarla (por ejemplo: cada recta tiene por lo menos 2 puntos, por 2 puntos pasa exactamente una recta, en el espacio existen al menos 4 puntos que no están contenidos en un mismo plano).

Otro tipo de axiomas serán afirmaciones que, aunque su verdad no sea evidente, consideraremos conveniente tener como base de nuestro proceso deductivo. Este segundo tipo de axioma –cuya verdad no es evidente– nos muestra un poco el aspecto de *convención* que muchas veces aparece en la matemática. En muchas áreas de esta disciplina, es común partir la discusión con frases como "supongamos que tenemos un objeto de tipo A que satisface la propiedad P. Entonces ...". Así, se obtiene uno o más resultados que están condicionados a que se cumplan los supuestos, que juegan el rol de axiomas. Las afirmaciones que son demostradas a partir de otras son llamadas *teoremas*. Los primeros teoremas deberán ser probados usando solo definiciones, conceptos primitivos ya definidos, y axiomas; más adelante se van agregando a esta lista los distintos teoremas que iremos demostrando.

Las afirmaciones que analizaremos en nuestro estudio reciben el nombre de *proposiciones*. A contar de ahora, usaremos ambos nombres indistintamente. Lo esencial es saber que una proposición es, o bien verdadera, o bien falsa.

Al estudiar proposiciones, estaremos interesados, principalmente, en su *valor de verdad*, vale decir si son verdaderas o falsas.

En resumen

En una demostración podemos recurrir a:

- Conceptos primitivos.
- Conceptos definidos previamente.
- Axiomas.
- Propiedades demostradas previamente.

[5] Consideramos ambas palabras como sinónimos, aunque algunos establecen sutiles diferencias entre ellas.

Ejercicios de la sección

1. Para calcular el área de un cuadrilátero de lados *a*, *b*, *c* y *d*, antiguos geómetras egipcios utilizaban la fórmula $\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$. ¿Estaban en lo correcto? Compruebe la fórmula para distintos cuadriláteros, como por ejemplo: cuadrados, rectángulos, rombos y paralelogramos.

2. ¿Qué puede decir, para un polígono convexo, de la suma de sus ángulos interiores o de la suma de sus ángulos exteriores? Estudie estas sumas en varios ejemplos de polígonos de n lados, tomando por ejemplo $n = 3, 4, 5$ y 6. ¿Puede aventurar algunas propiedades o reglas generales?

3. Reformule las siguientes afirmaciones en forma de proposiciones condicionales, esto es, de la forma "Si…, entonces...".

   a. Las rectas perpendiculares se intersecan.

   b. 2 rectas que tienen más de un punto en común son iguales.

   c. La intersección de las alturas de un triángulo obtusángulo cae fuera del triángulo.

4. Encuentre un contraejemplo, si es posible, para la siguiente regla.

   4 puntos del plano siempre serán los vértices de algún cuadrilátero convexo.

2. Primeros conceptos primitivos, axiomas y definiciones

A continuación, indicamos los primeros conceptos primitivos, axiomas y las primeras definiciones que nos permitirán iniciar nuestro estudio deductivo de la geometría. Dado que nos concentraremos en geometría plana, no tomaremos en cuenta los conceptos relacionados con geometría espacial. Así, en lo que sigue, nuestro universo es un plano.

Nuestros (primeros) conceptos primitivos son los de punto, recta y plano. Como estamos trabajando en geometría plana, supondremos que existe solo un plano. De las rectas y el plano, solo sabemos que son conjuntos de puntos.

Para pensar

Esta definición fue extraída de la web.
"Una línea recta es la figura geométrica en el plano formada por una sucesión de puntos que tienen la misma dirección".
¿Define esto a una recta? ¿Qué falencias tiene para calificar como definición?

2.1 Rectas y puntos

Como no podemos definir estos conceptos, nos conformaremos con manejar las nociones intuitivas de ellos que desarrollamos en la primera parte.

Estamos en condiciones de dar nuestro primer axioma:

Axioma VI.1. [Punto-Recta]: 2 puntos distintos están contenidos en exactamente una recta.

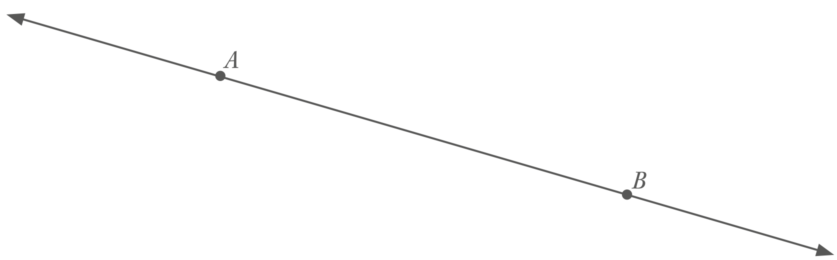


Figura VI.4.

Si A y B son puntos distintos, entonces exactamente una recta los contiene. Esa única recta que los contiene es denotada por $\overleftrightarrow{AB}$.

Nuestra primera definición es:

Definición VI. 1 2 o más puntos son *colineales* si existe una recta que los contiene. De hecho, por el **Axioma VI.1**, 2 puntos son siempre colineales.

Ejemplo

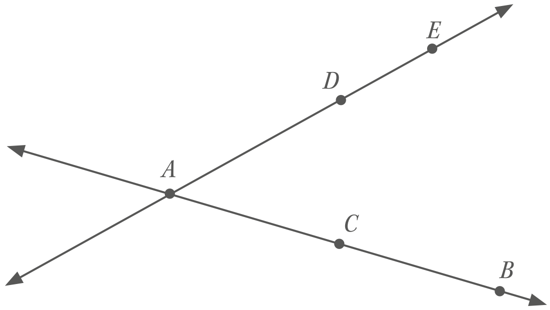


Figura VI.5

En la **Figura VI.5**, los puntos A, D y E son colineales y los puntos A, C y D, también, pero los puntos C, B y D no son colineales.

Nota: El propósito de una definición es introducir un nuevo término en la teoría. Aquí, el término es *colineales*, y la definición nos dice cuándo podemos usarlo: bajo qué condición 2 puntos o más serán llamados colineales. Antes de enunciar la definición, ser colineales no tiene significado. Es, por lo tanto, falto de sentido intentar demostrar la definición (esta o cualquier otra). Dados algunos puntos, si existe una recta que los contiene, estamos autorizados a decir que son colineales. Pasa a ser la misma cosa ser colineales y estar en la misma recta.

Definición VI. 2 2 rectas distintas son *secantes* o se *intersecan*, si tienen exactamente un punto en común.

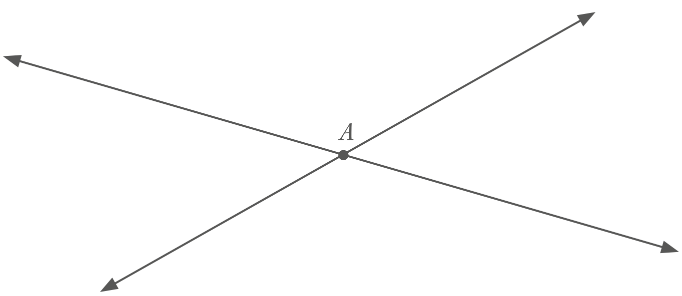


Figura VI.6

Cómo se dice: ¿Intersecan o intersectan?

Como las rectas son conjuntos de puntos, también tiene sentido decir que 2 rectas se intersectan, lo cual se refiere a que su intersección es no vacía, que tienen al menos un punto en común. Si la intersección está formada por un solo punto, las rectas aludidas se intersecan y también se intersectan. Pero si la intersección contiene 2 o más puntos, ya no se intersecan, solo se intersectan. Puede demostrarse en este último caso que las 2 rectas son la misma.

Con estos primeros elementos (Conceptos primitivos, axiomas y definiciones), estamos en condiciones de probar las primeras proposiciones geométricas.

Teorema VI.1

Si 2 rectas tienen 2 puntos en común, entonces son iguales.

Demostración

Llamando l_1 y l_2 a estas 2 rectas, y llamando A y B a los puntos comunes, podemos argumentar como sigue:

Según el **Axioma VI.1**, por A y B pasa una única recta, $\overleftrightarrow{AB}$. Por hipótesis, A y B son puntos de l_1 por lo tanto, esa única recta es $l_1 = \overleftrightarrow{AB}$. También por hipótesis, A y B son puntos de l_2, por la misma razón anterior, $l_2 = \overleftrightarrow{AB}$. De lo anterior, podemos concluir que $l_1 = l_2$.□

Comentario: Notemos que la proposición es condicional, de la forma "si P, entonces Q", donde P es 2 rectas tienen 2 puntos en común", y Q es "las rectas son iguales". Este método para demostrar una proposición es llamado *método directo,* pues vamos organizando la cadena de deducciones en forma directa, desde la hipótesis (P) hacia la tesis (Q). En esta cadena tenemos derecho a utilizar los axiomas (por ejemplo, el **Axioma VI.1**), las definiciones y las notaciones (por ejemplo, la recta $\overleftrightarrow{AB}$) previamente introducidas. También podemos asociar nombres a objetos que se originen en axiomas, definiciones o propiedades previas. Este es el caso de las rectas l_1 y l_2 que resultan de utilizar el **Axioma VI.1**. El final de la demostración, tradicionalmente, se indica poniendo las letras *QED*, lo que proviene del latín[6]. Aquí utilizaremos una forma de indicarlo más simple: Pondremos al final solo el símbolo[7]□.

Teorema VI. 2

2 rectas distintas pueden tener a lo más un punto en común.

Demostración

Llamemos l_1 y l_2 a estas 2 rectas. Si estas 2 rectas tuvieran más de un punto en común, digamos, tienen al menos 2 puntos, A y B, comunes, entonces, según el **Teorema VI.1**, l_1 y l_2 serán iguales. Por lo tanto, si l_1 y l_2 son distintas, no pueden tener más de un punto en común.

[6] Quod erat demonstrandum (lo que se quería demostrar).

[7] Paul Halmos (1916–2006), fue un matemático de origen húngaro quien introdujo su uso en matemática.

Comentario: En esta demostración se utilizó un método diferente al anterior, llamado *método indirecto*. Lo que se hizo fue construir una cadena de deducciones partiendo de suponer que la tesis es falsa (o lo que es lo mismo, que su negación es verdadera), que en este caso corresponde a afirmar que las 2 rectas tienen más de un punto en común, y deducir que la hipótesis es falsa (o que su negación es verdadera), en este caso, que las 2 rectas son iguales. O sea, se probó la contrarrecíproca de la proposición original que, como vimos en la **Sección 1.5.3** es equivalente a ella.

Ejercicios

1. Reescriba el enunciado del **Teorema VI.2** en forma de proposición condicional (si,... entonces ...) y demuéstrela.

2. Según la **Definición VI.2**, ¿una recta se interseca a sí misma?

Definición VI. 3 2 rectas se dicen paralelas si no tienen puntos en común.

Hay que poner atención en que, con esta definición de paralelismo de rectas, una recta no es paralela a sí misma.

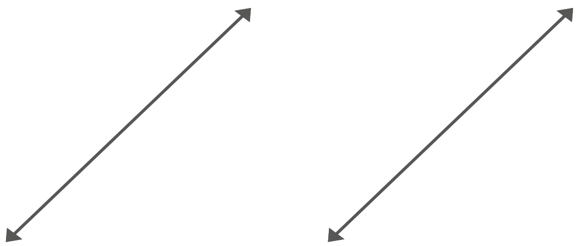


Figura VI.7.

Definición VI. 4 3 o más rectas se dicen *concurrentes* si existe un punto común a todas. El conjunto de todas las rectas que pasan por un punto dado es llamado un *haz*.

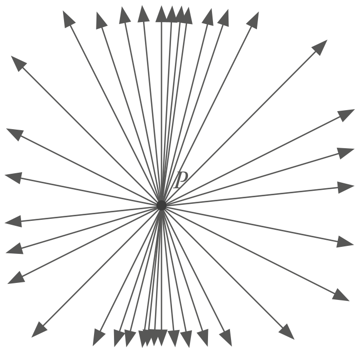


Figura VI. 8.

> *En resumen*
>
> Este primer axioma establece la relación entre puntos y rectas: Por 2 puntos pasa una única recta. En particular, 2 rectas:
>
> - Sin puntos en común se llaman *paralelas* (Def VI.3).
> - Con un único punto en común se llaman *secantes* (Def VI.2).
> - Con 2 o más puntos en común son iguales (Proposición demostrada).

2.2 Distancia entre puntos, “estar entre”, segmentos y rayos

El siguiente axioma introduce la noción de distancia entre puntos:

Axioma VI. 2	[Distancia entre puntos]: a cada par de puntos distintos le corresponde un único número positivo, denominado *distancia entre los puntos*. La distancia entre 2 puntos A y B es denotada por AB, y satisface que dados 2 puntos distintos A y B, $AB = BA$.

Note que al enunciar este axioma no hemos definido una unidad de medida de distancias: no hemos dicho si la distancia entre 2 puntos se mide en milímetros, kilómetros o años luz. Solo sabemos que existe una medida (abstracta) de la distancia entre puntos; entonces, para todos los efectos, la distancia entre puntos es simplemente un número. De hecho, la noción de distancia es un nuevo concepto primitivo que ya conocemos en forma práctica e intuitiva, pero que dotaremos de algunas propiedades evidentes, por medio de axiomas.

El siguiente axioma nos permite asociar números reales a los puntos de una recta, lo que servirá para medir las distancias entre ellos:

Axioma VI. 3	[De la recta numérica[8]]: dada una recta cualquiera, es posible establecer una biyección[9] entre los puntos de la recta y los números reales, de modo que la distancia entre 2 puntos cualesquiera sea el valor absoluto de la diferencia entre los números asociados a dichos puntos.

Una forma de visualizar este axioma es considerar que toda recta puede ser vista como una recta numérica:

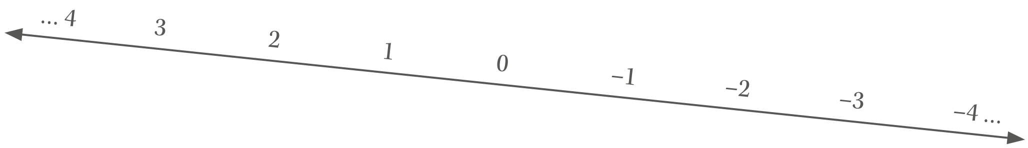


Figura VI.9

[8] En muchos textos de geometría, este axioma es llamado postulado de la regla.

[9] Una biyección entre los puntos de la recta y los números reales quiere decir que a cada punto de la recta le corresponde un único número real, y a cada número real le corresponde un único punto de la recta.

Dada una recta, este axioma asegura que podemos numerar todos sus puntos. Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales, de modo que cada punto corresponda con un único número real y cada número real, con un único punto. Además, esta asociación debe ser consistente con la distancia entre puntos.

Que la biyección sea entre la recta y los números reales y no otro conjunto numérico es de la mayor importancia. Por ejemplo, una recta que pasa por el centro de una circunferencia pasa necesariamente por la circunferencia propiamente tal. Si la biyección se hiciera con los racionales, esto ya no puede garantizarse.

Estamos en condiciones de definir algunas figuras básicas: segmento, rayo y circunferencia. Para las dos primeras, necesitamos previamente la noción de "estar entre":

Definición VI. 5 Dados 2 puntos distintos A, B y C, decimos que B *está entre* A y C si B está en $\overleftrightarrow{AC}$ y $AB + BC = AC$.

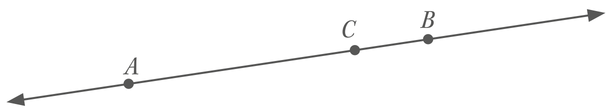


Figura VI.10

Para pensar

Considere 3 puntos A, B, C colineales y distintos. ¿Cómo descubrir, solo a partir de la biyección entre esta recta y los números reales cuál de ellos está entre los otros 2 puntos?

Definición VI. 6 Dados 2 puntos distintos A y B, el *segmento* $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos formado por A, B y los puntos de $\overleftrightarrow{AB}$ que están entre A y B.

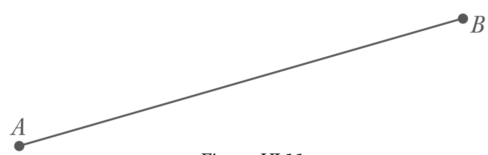


Figura VI.11

Definición VI. 7 2 segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se dicen *congruentes* (lo que anotamos como $\overline{AB} \cong \overline{CD}$) si $AB = CD$.

Recordemos que, en la primera parte del libro, dijimos que 2 segmentos eran congruentes si existía una isometría que transforma el uno en el otro. Según aquella definición, si un segmento $\overline{AB}$ es transformado por una isometría en otro $\overline{CD}$ y como las isometrías preservan distancias, entonces $AB = CD$. Recíprocamente, si 2 segmentos miden lo mismo, entonces mediante una traslación y una rotación se puede llevará uno al otro.

Ejercicio

1. Dados 2 segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tales que $AB = CD$, muestre explícitamente una estrategia para transformar uno en el otro mediante una isometría.

Entre los puntos de un segmento, destacamos su punto medio:

Definición VI. 8 El *punto medio* de un segmento $\overline{AB}$ es aquel de sus puntos que lo divide en 2 segmentos congruentes. Así, M es el punto medio de $\overline{AB}$ si y solo M está en $\overline{AB}$ y $AM = BM$.

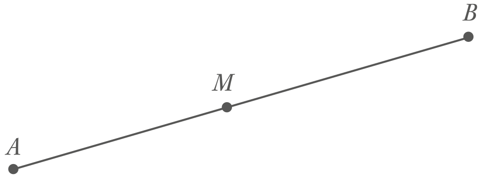


Figura VI.12

Esta definición nos permite reconocer cual es el punto medio de un segmento. Pero, ¿tendrá punto medio cualquier segmento? Aquí la intuición nos dice con fuerza que sí, pero la existencia de un punto M que cumpla con la propiedad $AM = BM$ debe ser demostrada.

Ejercicio

1. Si se establece una recta numérica sobre el segmento $\overline{AB}$, de manera que a corresponda con el punto A y b con el punto B, demuestre que M, el punto medio, está en la posición que corresponde al promedio de a y b, es decir, en $m = \dfrac{a+b}{2}$.

Definición VI. 9 Dados 2 puntos distintos A y B, el ***rayo*** $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos C de $\overleftrightarrow{AB}$ tales que A no está entre B y C.

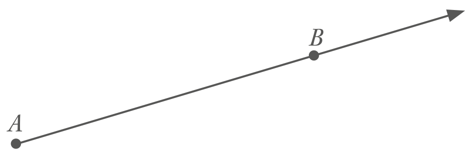
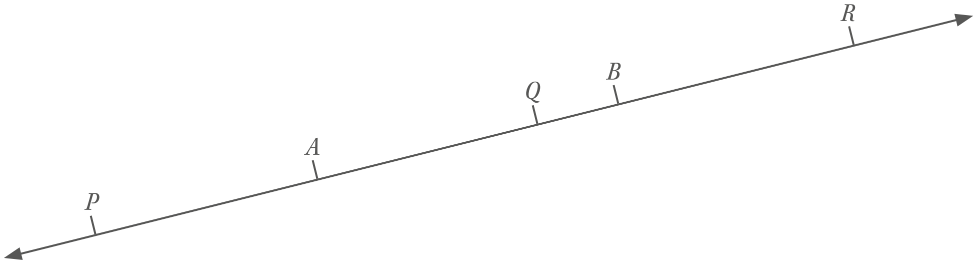


Figura VI.13.

El punto A es llamado el origen del rayo $\overrightarrow{AB}$.

Ejercicios

1. Considere la recta $\overleftrightarrow{AB}$ mostrada en la figura siguiente. Argumente por qué el punto P no pertenece al rayo $\overrightarrow{AB}$, mientras que A, B, Q y R sí pertenecen a él.



2. Considere la siguiente definición "el rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos C de $\overleftrightarrow{AB}$, tales que C está en $\overline{AB}$ o B está en $\overline{AC}$". ¿Esta definición de rayo define el mismo objeto que la Definición VI.9?

Definición VI.10 Dados un punto P y un número positivo r, llamamos *circunferencia de centro* en P y *radio* r (que denotaremos por $C(P, r)$) al conjunto de puntos del plano que están a distancia r de P.

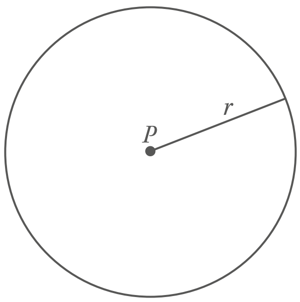


Figura VI.14.

En resumen

Una recta se puede poner en biyección con los números reales escogiendo en forma arbitraria el punto que corresponde con el 0.
La distancia entre 2 puntos se puede calcular como la diferencia, en valor absoluto, de los reales correspondientes.
A partir de la noción de distancia, se ha definido
- La circunferencia de centro en un punto P y radio $r > 0$.
- Que un punto C esté entre otros 2 puntos A y B.

Y con esta última:
- El segmento $\overline{AB}$.
- El rayo $\overrightarrow{AB}$.

3. Construcciones con regla y compás

Las construcciones geométricas con regla y compás corresponden a un tipo particular de figura trazada solo con el uso de una regla no graduada (sin marcas) y un compás también sin medidas. En realidad, el fin no es el que parece, esto es, producir un dibujo, una figura. Se trata más bien de diseñar un procedimiento que involucre solo estos 2 elementos para producir una cierta figura. Como aplicación, podrían utilizarse estos procedimientos para dibujar.

Para ponernos de acuerdo acerca de la noción de construcción con regla y compas, vamos a detallar qué tipo de trazados se permiten y qué operaciones de trazado son válidas. Denominaremos *principios* a estas operaciones básicas.

Principio VI. 1	[De la regla]: dados 2 puntos distintos A y B, previamente marcados, es posible trazar el segmento $\overline{AB}$. Además, dado cualquier segmento, es posible prolongarlo tanto como se quiera en cualquiera de sus 2 sentidos.

Este principio ideal se corresponde con una acción concreta: apoyar la regla sobre el papel (que representa al plano), de forma que su borde recto este alineado con los 2 puntos A y B, previamente marcados en el papel, y manteniendo la regla fija en esa posición trazar con un lápiz el segmento que pasa sobre ambos puntos.

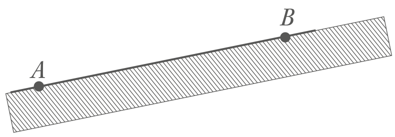


Figura VI.15.

Principio VI. 2	[Del compás]: dados 3 puntos P, Q y R (con $Q \neq R$), previamente marcados, es posible trazar la circunferencia de centro en P cuyo radio es la distancia QR (o sea, $C(P,QR)$).

Este principio ideal se corresponde con la acción concreta siguiente: abrir el compás, de manera que su abertura sea exactamente la que corresponde a los puntos Q y R, previamente marcados en el papel. Luego, sin modificar la abertura, apoyar la punta del compás en el punto P, también previamente marcado, y trazar la circunferencia que resulta. Esta circunferencia tendrá claramente su centro en P y su radio será QR (distancia de Q a R).

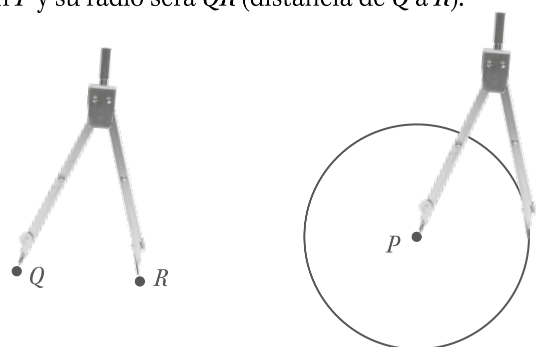


Figura VI.16.

Una construcción con regla y compás consistirá en trazar rectas (segmentos o rayos) y circunferencias (o arcos), y en marcar puntos.

El marcado de puntos será posible como consecuencia de intersecar 2 rectas secantes, o como intersección de una circunferencia con una recta o de una circunferencia con una circunferencia. En estos últimos 2 casos, los resultados pueden ser 2 puntos, un punto o ningún punto (intersección vacía). Por último, una construcción puede iniciarse con ciertos elementos ya presentes.

Ejercicios

1. ¿Cómo podemos argumentar que un rayo, cuyo origen es el centro de una circunferencia, la interseca en un punto?
2. ¿Por qué una recta que pasa por el centro de una circunferencia la corta en 2 puntos? Explique.
3. ¿Cómo argumentaríamos que la recta interseca en 2 puntos a la circunferencia si en lugar de pasar por el centro, solo sabemos que pasa por un punto interior?

Estos principios nos permiten realizar nuestra primera construcción con regla y compás.

Construcción VI. 1. Dado un segmento $\overline{AB}$ y un rayo $\overrightarrow{CD}$, trazar un segundo segmento que sea congruente con $\overline{AB}$, con uno de sus extremos en C y el otro extremo sobre el rayo.

En otros términos, dados un segmento $\overline{AB}$ y un rayo de origen C, encontrar un punto E en él tal que $CE = AB$.

En este caso, ya hemos marcado 4 puntos, A, B, C y D, y trazamos el rayo $\overrightarrow{CD}$ y el segmento $\overline{AB}$. El rayo y el segmento no son estrictamente necesarios, pues podemos trazarlos directamente, según lo indica el **Principio VI.1.** Pero nos interesa concentrarnos en el aspecto esencial de esta construcción, que consiste en trazar un segmento congruente con $\overline{AB}$.

Solución:

- Según el **Principio VI. 2,** trazamos la circunferencia con centro en C y radio AB.
- Esta circunferencia corta al rayo en exactamente un punto, ese es el punto E buscado.

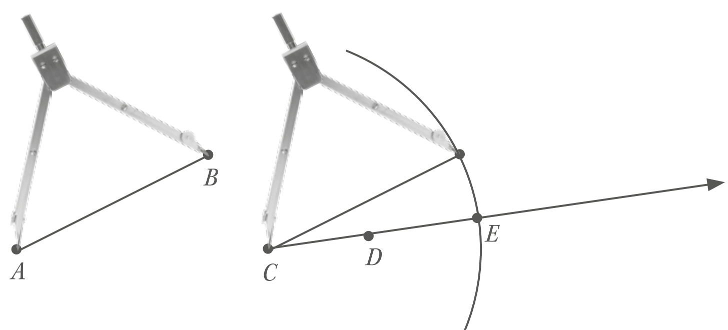


Figura VI.17.

En general, se debe justificar que la construcción permite obtener la figura solicitada. En este caso se dejará como ejercicio al lector.

Ejercicio

1. ¿Cómo justificaría que $\overline{CE}$ está sobre el rayo $\overrightarrow{CD}$ y es congruente con $\overline{AB}$?

En resumen

Una construcción con regla y compás es un procedimiento, en el cual solo se permite:

- Trazar un segmento, a partir de 2 puntos marcados (Principio VI.1)
- Trazar una circunferencia, a partir de un punto marcado P correspondiente a su centro y un radio AB, distancia entre los 2 puntos marcados A y B (Principio VI.2)
- Obtener nuevos puntos marcados por el corte entre rectas secantes, o entre una recta y una circunferencia, o entre circunferencias.

4. Separación del plano, ángulos y perpendicularidad

Para acordar la forma en que mediremos ángulos, necesitaremos definir el interior del ángulo y la definición de conjunto convexo.

Definición VI. 11 Un conjunto de puntos se dice *convexo* si, dados 2 puntos distintos cualesquiera de él, el segmento que los une está completamente contenido en el conjunto.

De las 2 figuras que se muestran a continuación, la de la izquierda es convexa, mientras que la de la derecha no lo es, pues el segmento que se muestra no está totalmente contenido en ella.

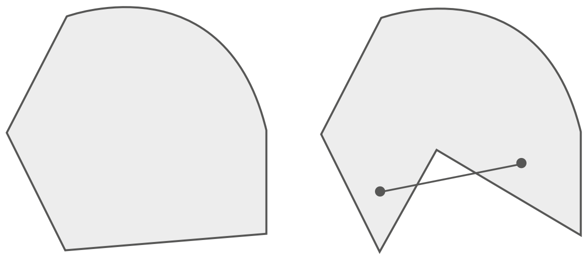


Figura VI.18.

Para pensar

Dados 2 conjuntos convexos, ¿es necesariamente convexa su unión?, ¿o su intersección?

Axioma VI. 4 [**Separación de planos**]: dada una recta *l* contenida en el plano, los puntos del plano que no están en *l* forman 2 conjuntos convexos disjuntos y no vacíos, llamados *semiplanos*. Estos semiplanos tienen la propiedad de que todo segmento con un extremo en cada uno de ellos interseca a *l*. La recta *l* es llamada la *arista* de cada semiplano.

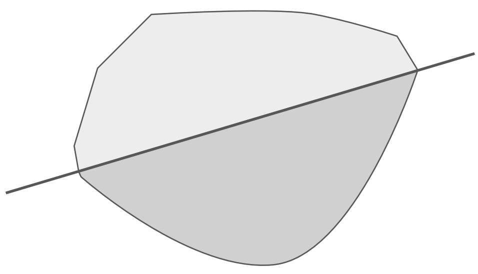


Figura VI.19.

En este axioma se introdujo un concepto primitivo, el semiplano y sus propiedades. Dada una recta *l*, el plano se puede descomponer en 3 conjuntos no vacíos: la recta *l* y los dos semiplanos que la tienen por arista.

Ejercicios

1. Demuestre que:
   a. Toda recta es un conjunto convexo.
   b. El plano sin una recta no es convexo.
   c. Dada una recta l, toda recta paralela a l se encuentra totalmente contenida en uno de los semiplanos que define l.

Definición VI. 12 Un *ángulo* es la unión de 2 rayos distintos con un origen común, que no forman una recta. El origen común de los rayos es llamado el *vértice* del ángulo, y los rayos son los *lados* del ángulo. Si el ángulo está formado por los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, el ángulo es denotado indistintamente por $\measuredangle BAC$ o $\measuredangle CAB$.

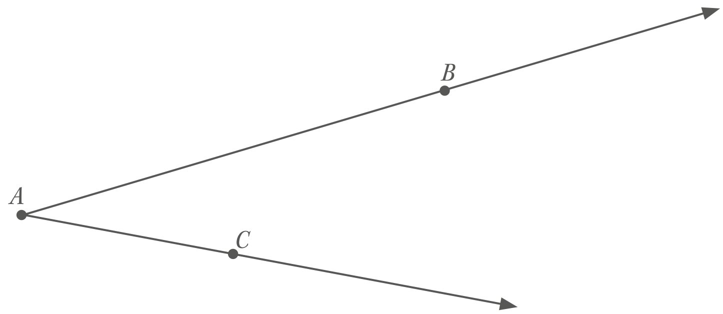


Figura VI.20.

Nota: El ángulo extendido que estudiamos en la primera parte de este libro, según la **Definición VI.12** no es propiamente un ángulo. Euclides en su famoso libro *Los Elementos* no los estudió, pues su estudio coincide con el estudio de las rectas. En la **Figura VI.21**, el ángulo extendido sería el ángulo $\measuredangle BCA$, pero para Euclides eso no era un ángulo, no hay una abertura que estudiar, no hay un cambio en la inclinación, que era lo que estudiaba Euclides, la "inclinación mutua entre dos rectas". Basados en esto hemos optado por que nuestra definición no incluya ángulos extendidos, ni tampoco al ángulo nulo. En la **Figura VI.22**, el ángulo nulo sería $\measuredangle PQR$ que no muestra ningún cambio de inclinación y coincide con el estudio de un rayo.

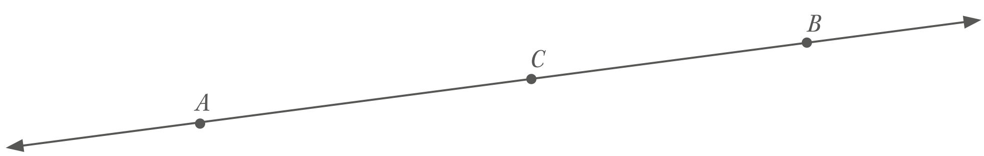


Figura VI.21.

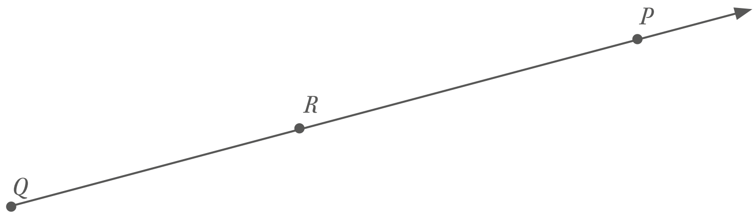


Figura VI.22.

Definición VI. 13 Dado un ángulo $\measuredangle ABC$, su *interior* consiste en la intersección de 2 semiplanos: el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a A:

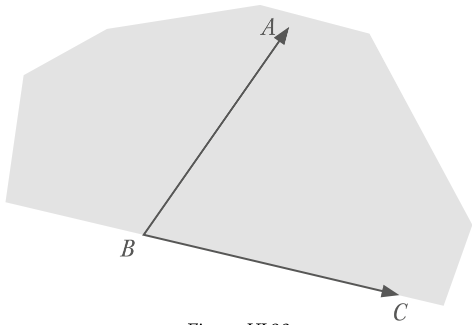


Figura VI.23.

Y el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a C,

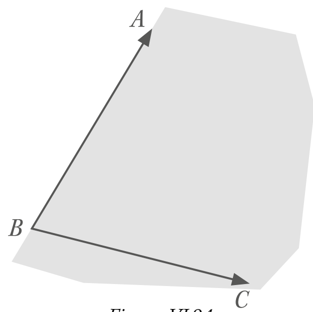


Figura VI.24.

El interior del ángulo es la región marcada más oscura en la figura siguiente:

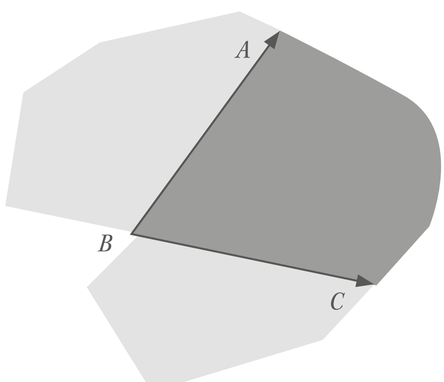


Figura VI.25.

Consideremos un ángulo $\measuredangle CAB$,en el interior de él consideremos el punto D y tracemos el rayo $\overrightarrow{AD}$ como muestra la **Figura VI.26**.

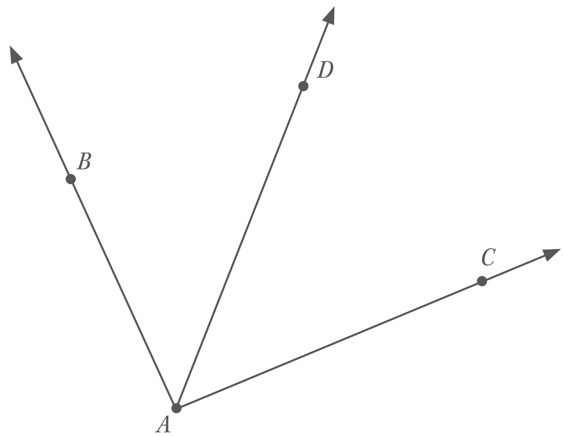


Figura VI.26.

Entonces, tenemos los ángulos $\measuredangle CAD$ y $\measuredangle DAB$. Si quisiéramos asignar una medida, un número positivo, a los ángulos, quisiéramos que se cumpliera que la suma de las medidas de los ángulo $\measuredangle CAD$ *y* $\measuredangle DAB$ sea igual a la medida del ángulo $\measuredangle CAB$. Esa propiedad se llama la *propiedad aditiva de la medida*.

Axioma VI. 5 [**Medida de ángulos**]: a cada ángulo le corresponde un único número positivo, menor que 180, denominado *medida del ángulo* y que satisface la propiedad aditiva. Denotamos la medida del ángulo formado por los rayos $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ por $m\measuredangle APB$ (que es igual a $m\measuredangle BPA$).

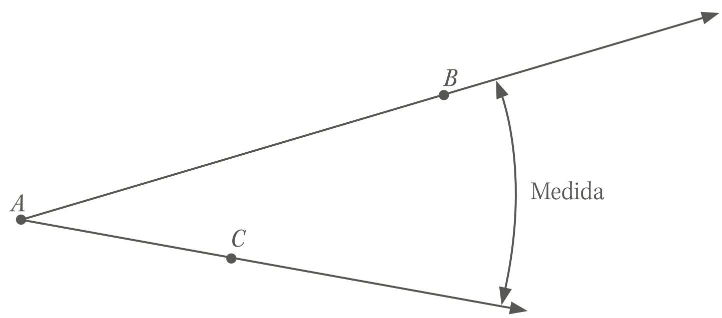


Figura VI.27.

Este concepto de medida de un ángulo es el último término primitivo que vamos a requerir. Es similar al concepto de distancia definida entre 2 puntos que forman un segmento, pero esta vez se aplica a 2 rayos que forman un ángulo.

Definición VI. 14 Dos ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle DEF$ se dicen *congruentes* (lo que anotamos $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$) si $m\measuredangle ABC = m\measuredangle DEF$.

El siguiente axioma nos dice que, dada una recta y un punto cualquiera en ella, podemos usar un transportador para medir los ángulos que se forman a un lado de la recta, con vértice en el punto dado:

Axioma VI. 6	**[Del transportador]**: dado un punto P cualquiera en la arista de un semiplano H, es posible establecer una biyección entre los rayos con origen P que están contenidos en H o en la arista de H, y los números entre **0** y **180** inclusive, de modo que la medida de cada ángulo con vértice P formado por **2** rayos sea el valor absoluto de la diferencia entre los números asociados a dichos rayos.

En este momento, haremos una convención: los ángulos los mediremos en sentido antihorario, es decir, en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, solo para evitar usar el valor absoluto y así simplificar algunos argumentos.

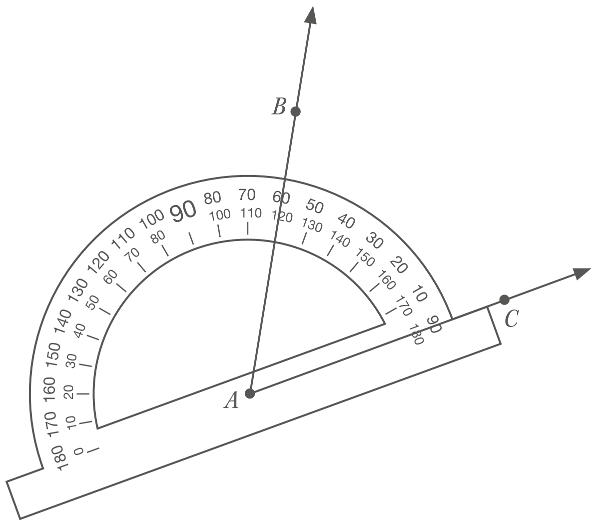


Figura VI.28.

En la **Figura VI.28**, al ángulo $\measuredangle CAB$ le corresponde el número **60**.

Demostremos que, en la situación descrita por el axioma del transportador, los números asignados a los rayos colineales cuya unión es la arista del semiplano son (en algún orden) **0** y **180**.

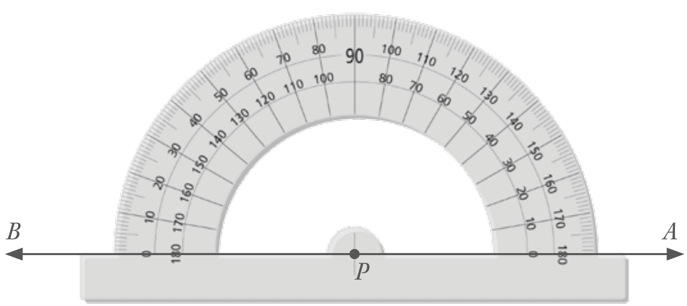


Figura VI.29.

Sean $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ los 2 rayos a los que se les asigna, respectivamente, 0 y 180; estos rayos no pueden formar un ángulo (si así fuera, la medida de dicho ángulo sería 180 – 0 = 180, lo que no es posible, ya que el **Axioma VI.5** solo permite medidas menores que 180).

Pero la única pareja de rayos entre los considerados que no forma un ángulo son los rayos cuya unión es la arista del semiplano (en cualquier otra pareja, los rayos no son colineales, y por lo tanto, forman un ángulo).

Construcción VI. 2 Dado un ángulo $\measuredangle ABC$, un semiplano S con arista la recta l y 2 puntos P, y Q en l, encontrar un punto R en S tal que $m\measuredangle ABC = m\measuredangle PQR$.

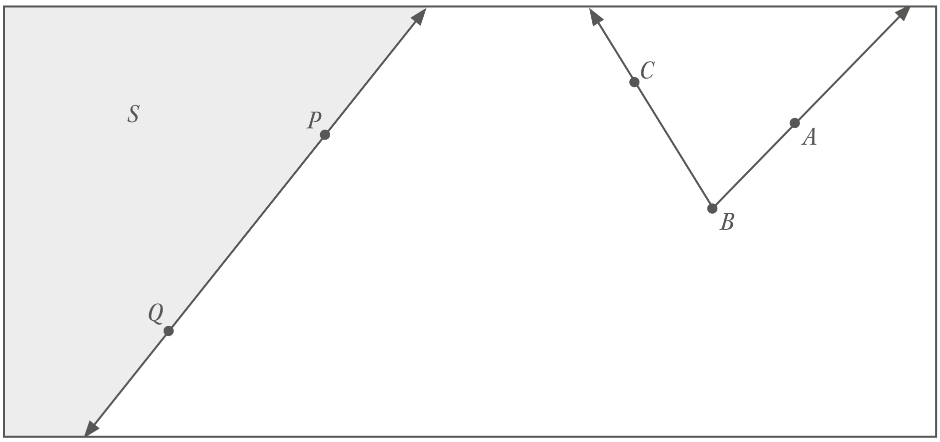


Figura VI.30.

Solución:

- Con centro en Q, dibújese la circunferencia de radio AB.
- Esta circunferencia corta a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ en 2 puntos, de los cuales uno (que denotaremos por X) está en el rayo $\overrightarrow{QP}$, y el otro no.

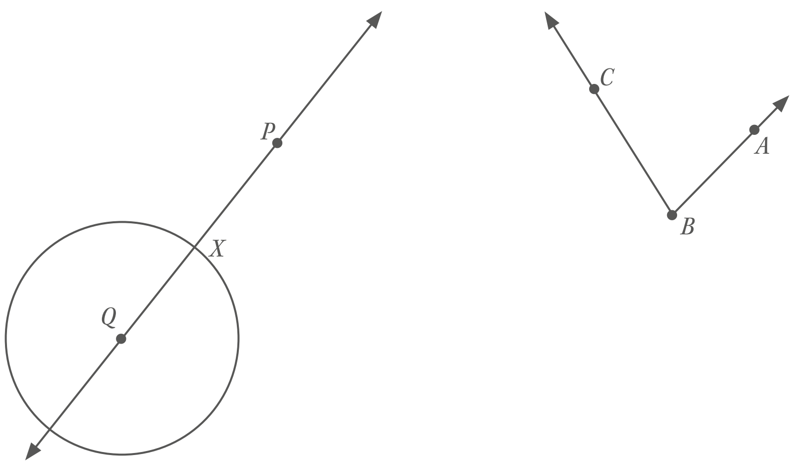


Figura VI.31.

- Con centro en Q, dibújese la circunferencia de radio BC.
- Con centro en X, dibújese la circunferencia de radio AC.
- Las 2 últimas circunferencias se cortan en 2 puntos, de los cuales exactamente uno está en el semiplano S.

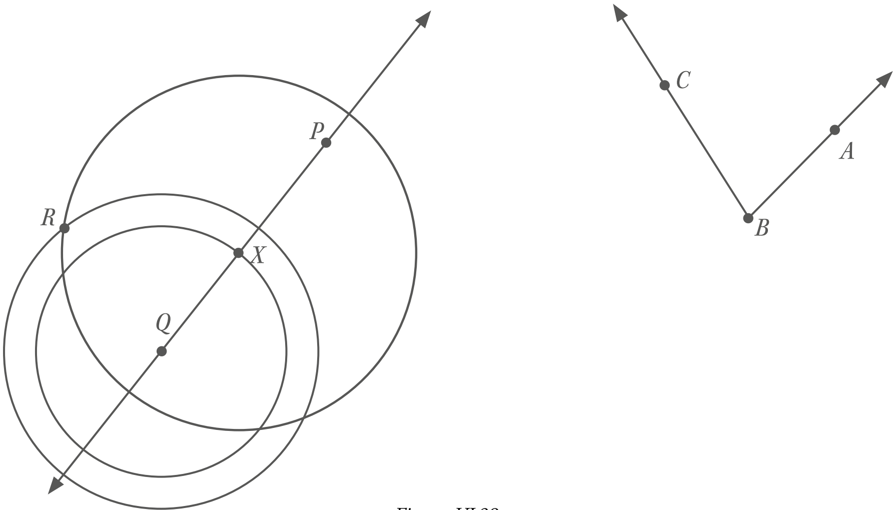


Figura VI.32.

Este último punto es el R buscado. La justificación de esta construcción la veremos en el siguiente capítulo.

Note que esta construcción además mantuvo la distancia de los segmentos, es decir, $AB = PQ$, $AC = PR$ y $BC = QR$. Como la medida de un ángulo depende de rayos y no de la medida de segmentos, es posible hacer otra construcción que copie el ángulo, pero no la medida de los segmentos. Dejamos como ejercicio para el lector hacer alguna de esas construcciones alternativas.

Definición VI. 15	Dado un ángulo, su *bisectriz* es un rayo que tiene como origen el vértice del ángulo, que está contenido en el interior de este y que lo divide en 2 ángulos congruentes.

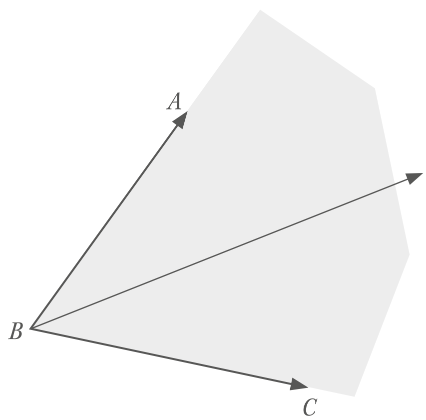


Figura VI.33.

A continuación, daremos algunos nombres que reciben los ángulos según su posición y sus medidas.

Definición VI. 16	2 ángulos son llamados *complementarios* si sus medidas suman 90. 2 ángulos son llamados *suplementarios* si sus medidas suman 180. 2 ángulos son llamados *adyacentes*[10] si tienen el mismo vértice, comparten un lado y la unión de sus otros lados es una recta. Dos ángulos son llamados *opuestos por el vértice* si al unir los 4 rayos que los forman, se obtienen 2 rectas.

Estas definiciones nos permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema VI. 3

Los ángulos adyacentes son suplementarios.

Demostración

Primero, dibujemos 2 ángulos adyacentes, digamos $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOC$.

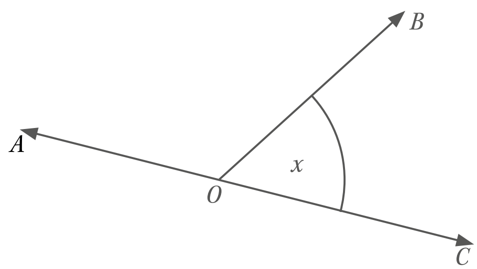


Figura VI.34.

Así, A, O y C son colineales, o sea, O está en $\overleftrightarrow{AC}$. Aplicando el axioma del transportador (tomando como P al punto O, y como semiplano H al determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a B), sabemos que la biyección dada por el axioma le asigna 180 a $\overleftrightarrow{OA}$ y 0 a $\overleftrightarrow{OC}$. Sea x el número asignado a $\overleftrightarrow{OB}$; así, $m\measuredangle AOB = 180 - x$ y $m\measuredangle BOC = x$. Por lo tanto, se tiene que $m\measuredangle AOB + m\measuredangle BOC = 180$.

Nota: la demostración de este teorema es de una complejidad mayor que la de los resultados anteriores y se ha realizado después de la introducción de 4 términos primitivos, 19 definiciones y 6 axiomas. Es el alto precio que hay que pagar para poder ingresar al terreno de la geometría deductiva. A esto se refería, seguramente, Euclides cuando le respondió a Ptolomeo I. “Señor, no existe un camino real para la geometría”.

Comentario: El método de demostración utilizado es el método directo. Se utilizaron las hipótesis (2 ángulos adyacentes) y el **Axioma VI.5** (del transportador) para obtener la conclusión. En geometría es una práctica habitual el uso de una figura de referencia para fijar las ideas. Si bien esto facilita las cosas, pues lleva la demostración a un nivel más concreto, introduce también un riesgo. La figura puede llevarnos a ver que cierta propiedad se cumple, pero puede ocurrir que lo

[10] En otras latitudes se dice que los ángulos forman un par lineal.

que vemos es una particularidad del dibujo y en ningún modo una propiedad general. La figura solo debe entenderse como un mapa para guiar la argumentación, pero los argumentos se deben referir a las hipótesis que nos hemos dado, así como a otras propiedades generales que sabemos que son verdaderas (a saber, los axiomas y los teoremas previamente demostrados).

Demostremos, a continuación, el siguiente teorema:

Teorema VI.4

Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Demostración

Considérese una pareja de ángulos opuestos por el vértice en la siguiente figura, por ejemplo, la pareja formada por los ángulos 1 y 3. Lo que tenemos que demostrar es que la medida de esos ángulos es la misma.

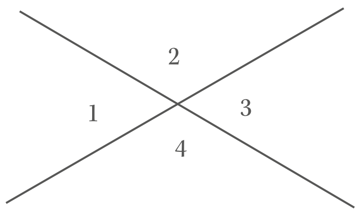


Figura VI.35.

Ambos ángulos son adyacentes al ángulo 2 y, por lo anterior, ambos son suplementarios con el ángulo 2. Así, $m\measuredangle 1 = 180 - m\measuredangle 2 = m\measuredangle 3$. Que es exactamente lo que debíamos probar. ☐

Comentario: Como en el caso anterior, el método de demostración es el método directo, y se aprovecha la hipótesis (ángulos opuestos por el vértice) y el teorema anterior.

Definición VI. 17 2 rectas se dicen *perpendiculares* si se intersecan formando ángulos adyacentes congruentes.

Note que, por lo demostrado anteriormente, si esto ocurre, entonces los 4 ángulos que forman las rectas al intersecarse son congruentes.

La noción de perpendicularidad puede ser extendida a segmentos y rayos; por ejemplo, 2 segmentos se dicen perpendiculares si las rectas que los contienen son perpendiculares.

Definición VI. 18 Decimos que un ángulo es *recto* si está formado por 2 rayos perpendiculares.

Ejercicio

1. Demuestre que la medida de un ángulo recto es necesariamente 90.

Note que en el aula escolar esta última suele ser la definición de ángulo recto. Sin embargo, la propiedad de perpendicularidad y, por ende, la de ángulo recto son independientes de las medidas. De hecho, en otros sistemas de medidas, el ángulo recto tiene otros valores; por ejemplo en el sistema centesimal el ángulo recto mide 100, y en radianes el ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$, lo que explica por qué hemos optado en este libro por la definición dada.

De todas las rectas perpendiculares a un segmento dado, una que será especialmente importante es su mediatriz:

Definición VI. 19 Dado un segmento cualquiera, su *mediatriz* es la recta perpendicular a él que pasa por su punto medio.

Note que preferimos el término mediatriz al de simetral, ya que el segundo, pese a estar más difundido en Chile, al parecer habría sido acuñado localmente (a partir de conceptos como "eje de simetría" del segmento), y no es muy usado fuera de nuestras fronteras. Pensando en que nuestros futuros estudiantes y profesores están inmersos en un mundo globalizado, hemos decidido dar preferencia al uso de términos más aceptados en castellano, por sobre aquellos de uso local, para así facilitar el uso de fuentes alternativas a textos nacionales.

En resumen

Un ángulo es la unión de 2 rayos no colineales con un vértice común. Según nuestra definición, la medida de un ángulo es un número real entre 0 y 180.
Se han demostrado los primeros 2 teoremas importantes

- Las medidas de ángulos adyacentes suman 180.
- Las medidas de ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Ejercicios del capítulo

1. Dados una recta l y un punto P que no está en l. Si Q y R son 2 puntos distintos sobre la recta l, demuestre que las rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{PR}$ son distintas.

2. Demuestre que si l y m son 2 rectas y si existe un punto A que está en ambas rectas y un punto B que está en l y no en m, entonces l y m son secantes (es decir, tienen exactamente un punto en común).

3. Demuestre que la distancia entre puntos del plano verifica que:

   a. $AA = 0$

   b. $AB = BA$

   c. Si $AB = 0$, entonces $A = B$

4. Para este problema, debe suponer que se cumple la siguiente propiedad:

   Propiedad de la desigualdad triangular: dados 3 puntos cualquiera A, B y C se cumple que AC es menor o igual que $AB + BC$. Esto dice que la distancia de A a C es menor que la distancia entre A y B sumada con la distancia entre B y C.

   Usando esta propiedad y lo visto en este capítulo, pruebe que los círculos son conjuntos convexos.

   Nota: la definición de círculo de centro P y radio r es "todos los puntos del plano cuya distancia a P es menor o igual que r".

5. Si C es un punto del rayo $\overrightarrow{AB}$ distinto de A, demuestre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

6. Muestre un ejemplo de 3 puntos colineales A, B y C, que no cumplan $AB + BC = AC$.

7. Demuestre que si M es el punto medio de AB, entonces $AM = \frac{1}{2}AB$ y $BM = \frac{1}{2}AB$.

8. Demuestre que en un polígono convexo[11], el ángulo interior y el ángulo exterior de un vértice son ángulos suplementarios.

   Con esto, si conoce la suma de los ángulos exteriores (llámela s) del polígono, ¿cómo puede expresar la suma de los ángulos interiores, a partir de s y de n = número de vértices del polígono?

---

[11] La noción de polígono convexo fue dada en el **Capítulo II**.

Capítulo

VII

Triángulos

> *"La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas"*
>
> A. Einstein

Introducción

El estudio de los triángulos y en particular, de la congruencia de los triángulos, es el tema central de este capítulo. Se trata del polígono más simple, no obstante, todo polígono puede ser considerado como una unión de triángulos. Conocer las propiedades de los triángulos nos va a permitir entender polígonos más generales y sus propiedades. Además, será la primera oportunidad que tendremos de ver toda la batería de axiomas y definiciones en acción, para deducir las nuevas propiedades.

Comenzaremos el capítulo con una lista de definiciones que incluyen los tipos de triángulos, así como sus elementos principales y secundarios. En la segunda parte, nuevos axiomas se presentan para entregar criterios de congruencia para triángulos. Estos axiomas o criterios de congruencia estaban ausentes de la geometría de Euclides, que utilizaba argumentos del tipo movimientos rígidos de figuras. Pero los movimientos rígidos o isometrías requieren, a su vez, de un sistema de axiomas y nociones primitivas. Con estos criterios de congruencia, evitamos entrar en una nueva axiomatización (esta vez, de las transformaciones isométricas). La tercera parte presenta y demuestra los teoremas relativos a los triángulos isósceles. El primer teorema de esta parte (conocido como Pons Asinorum) se aprovecha como modelo de razonamiento en geometría y se revisa con especial cuidado su demostración. En realidad, se revisan al menos 3 demostraciones alternativas. La cuarta parte trata sobre las construcciones geométricas y su justificación. Se muestra, entonces, la corrección de ciertas construcciones geométricas. La quinta parte presenta demostraciones de ciertas desigualdades entre los lados y los ángulos de un triángulo. Se trata de desigualdades simples y algunas, incluso, bastante intuitivas. Pero ya embarcados en la actividad de demostrar estas propiedades, los argumentos no son siempre lo simple que uno imagina. Esta parece ser una regla en matemáticas, los resultados más obvios suelen tener las demostraciones menos evidentes.

1. Definiciones

Definición VII. 1 Un triángulo es la unión de 3 segmentos, cuyos extremos están dados por 3 puntos no colineales. Los segmentos son llamados los *lados* del triángulo, y sus extremos, los *vértices*. En un triángulo, los ángulos formados por los lados son los *ángulos interiores* del triángulo.

Si los vértices del triángulo son los puntos A, B y C, el triángulo se denota por ΔABC. A continuación definimos los distintos tipos de triángulos, de acuerdo a diversas propiedades de las medidas de sus lados y de sus ángulos.

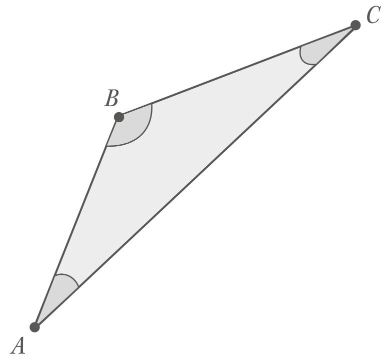


Figura VII.1. el triángulo ΔABC, de vértices A, B y C; lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$; y ángulos interiores $\angle ABC$, $\angle BCA$ y $\angle CAB$.

Definición VII. 2 Un triángulo es *escaleno* si no tiene pares de lados congruentes. Un triángulo es *isósceles* si tiene al menos un par de lados congruentes. Un triángulo es *equilátero* si tiene todos sus lados congruentes.

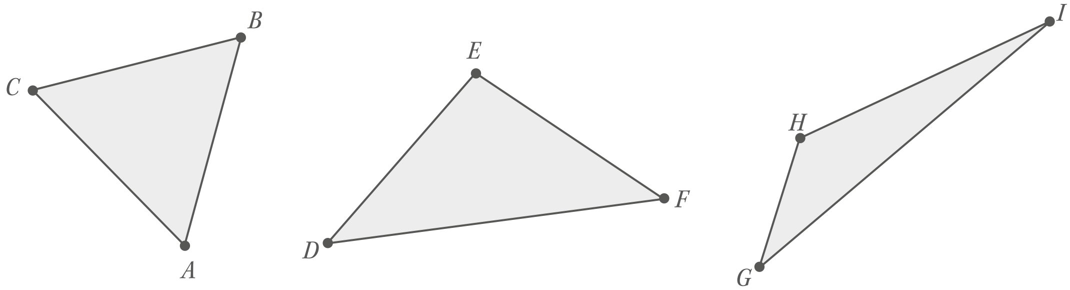


Figura VII.2: el triángulo ΔABC es equilátero (y también isósceles), el triángulo ΔDEF es isósceles (pero no equilátero), el triángulo ΔGHI es escaleno.

Definición VII. 3 Un triángulo es *acutángulo* si tiene todos sus ángulos agudos. Un triángulo es *obtusángulo* si tiene un ángulo obtuso. Un triángulo es *rectángulo* si tiene un ángulo recto.

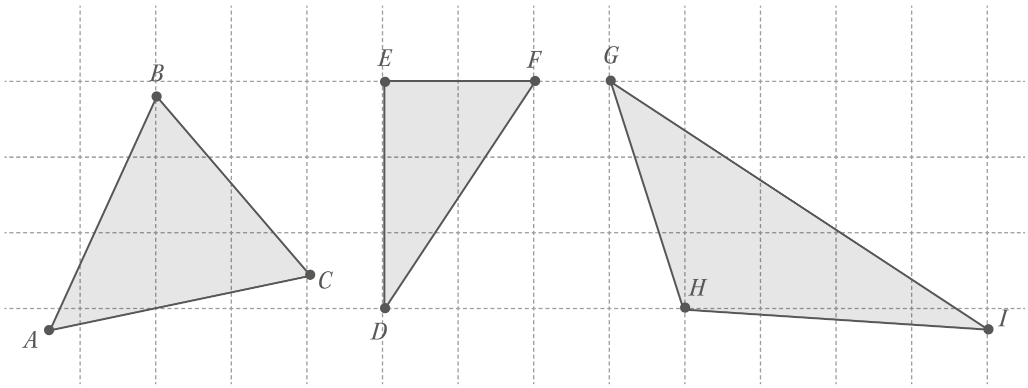


Figura VII.3: el triángulo ΔABC es acutángulo, el triángulo ΔDEF es rectángulo, el triángulo ΔGHI es obtusángulo.

1.1 Reflexiones sobre las definiciones

- Es común, en un triángulo isósceles, llamar *base* al lado diferente a los lados que sabemos congruentes. Esto se debe a la costumbre de dibujar el triángulo "apoyado" en este lado. Asimismo, los ángulos que forma la base con cada uno de los lados congruentes son llamados *ángulos basales*. Esto no es de ningún modo obligatorio y es importante notar que podemos llamar base a cualquiera de los 3 lados de un triángulo. Sin embargo, si no hacemos mención de otra cosa, llamaremos base de un triángulo a este lado en particular.
- Note que la definición de triángulo isósceles que hemos dado es inclusiva, en el sentido de que incluye a los triángulos equiláteros (de acuerdo a nuestra definición, todo triángulo equilátero es isósceles). De esta forma, un triángulo equilátero tendrá 3 bases, dependiendo de qué par de lados estemos considerando como congruentes en cada momento.
- A futuro, daremos definiciones inclusivas de otros conceptos; por ejemplo, nuestras definiciones de rectángulo y rombo incluirán a los cuadrados.

¿Qué nos mueve a adoptar estas definiciones inclusivas por sobre la alternativa excluyente, definir triángulo isósceles como el que tiene exactamente 2 lados congruentes, o los rectángulos como cuadriláteros con 4 ángulos rectos?

Preferir una definición por sobre otra, o una clase de definiciones por sobre otra, está muy marcado por el tipo de trabajo que se quiera hacer. Por ejemplo, si nos interesa reforzar ideas como *identificar* o *clasificar* objetos geométricos, puede ser más adecuado usar definiciones excluyentes.

Dado que nuestro interés aquí es enfatizar el razonamiento para descubrir propiedades de los objetos geométricos, nos acomoda más utilizar definiciones inclusivas; ya que con ellas se simplifican algunos razonamientos.

Por ejemplo, al demostrar que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son a su vez congruentes, esta propiedad queda automáticamente demostrada para triángulos equiláteros, ya que consideramos estos como casos particulares de triángulos isósceles. O al demostrar que las diagonales de un rectángulo son congruentes, la misma propiedad se da en los cuadrados y es consecuencia de que los cuadrados son un tipo particular de rectángulo, por lo que no debemos demostrar esto en forma especial.

1.2 Elementos secundarios de un triángulo

En un triángulo, los vértices, lados y ángulos reciben el nombre de *elementos principales*. Es posible identificar otros elementos en el triángulo, que son llamados sus *elementos secundarios*. Entre estos, encontramos las mediatrices de sus lados, y las bisectrices de sus ángulos, que son llamadas *mediatrices* y *bisectrices* del triángulo.

Además, definimos los siguientes conceptos:

Definición VII. 4 Una *bisectriz* de un triángulo es la bisectriz de un ángulo interior del triángulo. Esto es, el rayo que tiene como punto inicial el vértice del ángulo y que lo divide en 2 ángulos congruentes.

Definición VII. 5 Una *mediatriz* de un triángulo es la mediatriz de uno de sus lados. Esto es, la recta perpendicular al lado de un triángulo y que intersecta al lado en su punto medio.

Definición VII. 6 Una *mediana* de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Definición VII. 7 Una *altura* de un triángulo es un segmento que une un vértice con un punto del lado opuesto o de la recta que contiene a este, y que es perpendicular a dicha recta.

La siguiente figura ilustra un ejemplo de estos elementos secundarios. Es costumbre indicar en el dibujo algunas propiedades geométricas, como segmentos congruentes (por una pequeña marca que cruza cada segmento congruente),ángulos congruentes (por un arco dibujado al interior de cada ángulo congruente) y segmentos perpendiculares (con un pequeño cuadrado apoyado en el punto común de los segmentos perpendiculares).

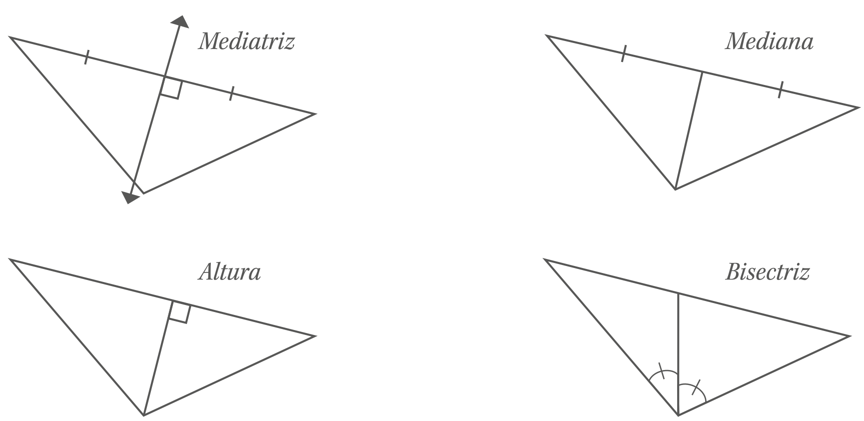


Figura VII.4

Note que hemos llamado "mediana" a lo que suele ser llamado, en nuestro país, una "transversal de gravedad". La razón para preferir el término "mediana" es que en la literatura (fuera de Chile) este es el nombre que reciben dichos segmentos; incluso el diccionario de la RAE así lo consigna.

En Chile, además, se suele usar el término "mediana" para denotar el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo; nosotros le llamaremos simplemente *segmento medio*.

En resumen

Un triángulo está formado por 3 segmentos (llamados lados) que comparten 3 vértices y dan origen a 3 ángulos.
Los elementos secundarios de un triángulo son las alturas, las bisectrices, las mediatrices y las medianas.

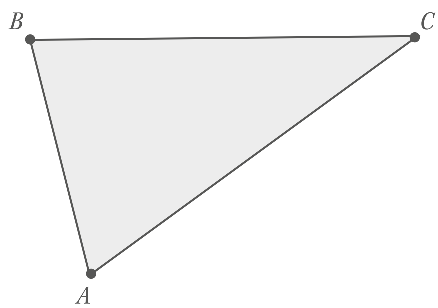
Ejercicios de la sección

1. De los 4 elementos secundarios, ¿cuáles permiten descomponer el triángulo en 2 triángulos? En cada caso, ¿qué elementos primarios (exceptuando los vértices) son congruentes en los 2 triángulos de la descomposición?

2. ¿Qué puede decir de un triángulo que tiene una altura que coincide con uno de sus lados?

3. Construya un triángulo en que una mediatriz coincide con una mediana.

4. Trace las mediatrices del siguiente triángulo.



2. Concepto de congruencia. Criterios de congruencia de triángulos

2.1 Definición de congruencia de triángulos

Recordemos que en la sección **Isometrías** del **Capítulo III** de este libro, se menciona que, en general, la congruencia de figuras planas se define en términos de isometrías (es decir, movimientos rígidos).

Las definiciones de congruencia que hemos dado hasta ahora (congruencia de segmentos, congruencia de ángulos), en términos de sus medidas son compatibles con las definiciones basadas en isometrías. Por una parte, si un segmento puede ser transformado en otro por una isometría, sus medidas serán preservadas por dicha isometría; por otra parte, si dos segmentos tienen la misma medida, existe una isometría (que es una secuencia de rotaciones, reflexiones y traslaciones) que lleva a uno de los segmentos al otro, a saber:

- Una traslación que lleva un extremo de un segmento a uno de los extremos del otro.
- Sigue una rotación en torno al punto donde coinciden los 2 extremos, en un ángulo que hace coincidir los rayos determinados por los 2 segmentos.

Las figuras siguientes ilustran esta secuencia de movimientos.

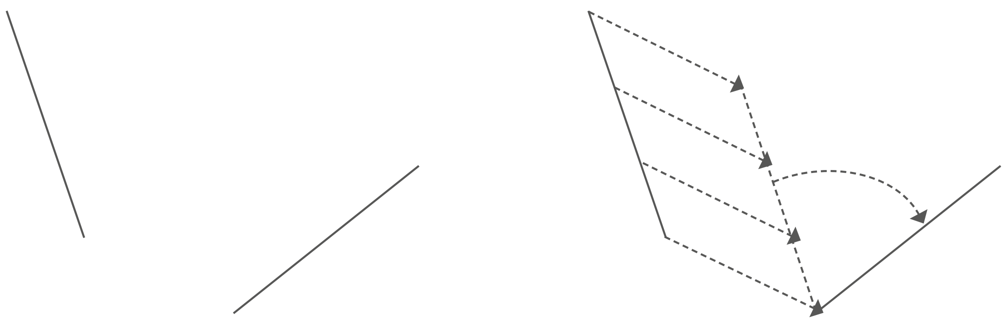


Figura VII.5

Para los triángulos es posible dar una versión simplificada de la noción de congruencia, en términos de la congruencia de sus lados y ángulos "correspondientes" (en un sentido que aclararemos en breve) como sigue:

Definición VII. 8	Se dice que 2 triángulos son *congruentes* si existe una biyección entre sus vértices de modo que cada par de lados correspondientes y cada par de ángulos correspondientes son congruentes.

Para indicar que 2 triángulos son congruentes, usamos el mismo símbolo que para indicar la congruencia de segmentos o de ángulos, es decir, $\cong$.

Al indicar que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ no solo estaremos afirmando que existe una biyección como la deseada, sino que estaremos fijando dicha biyección de acuerdo al orden en que se mencionan los vértices de cada triángulo; es decir, la notación implícitamente determina la biyección como $A \to D,\ B \to E,\ C \to F$.

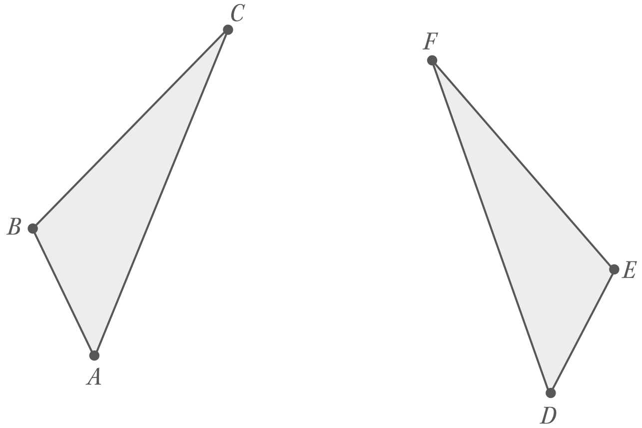


Figura VII.6

Así, decir que $\Delta ABC \cong \Delta\ DEF$ significa que:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$	$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$	$\measuredangle BCA \cong \measuredangle EFD$
$\overline{CA} \cong \overline{FD}$	$\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$

Pero si $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ no es posible concluir que $\overline{AB} \cong \overline{DF}$ o que $\measuredangle ACB \cong \measuredangle EDF$.

2.2 Criterios de congruencia de triángulos

¿Qué necesitamos saber respecto a 2 triángulos para convencernos de que son congruentes? En principio, de acuerdo a la definición, deberíamos revisar 6 pares de elementos correspondientes (3 pares de lados y 3 pares de ángulos), pero aceptaremos axiomas que nos dan la posibilidad de revisar menos condiciones y aun así tener la certeza de que los triángulos son congruentes.

Los axiomas que nos dicen que bastan estas condiciones son llamados los *criterios de congruencia*.

En particular, aceptaremos los siguientes:

Axioma VII. 1 [Criterio *LAL* (lado-ángulo-lado)] Si 2 lados de un triángulo y el ángulo que forman son congruentes a los elementos correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Axioma VII. 2 [Criterio *ALA* (ángulo-lado-ángulo)] Si 2 ángulos de un triángulo y el lado común son congruentes a los elementos correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Axioma VII. 3 [Criterio *LLL* (lado-lado-lado):] Si los 3 lados de un triángulo son congruentes a los lados correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Recordemos que, de la primera parte del libro, sabemos que 2 triángulos son congruentes si existe una isometría que lleva a uno de los triángulos en otro. Es decir, si un triángulo lo trasladamos, lo reflejamos o lo rotamos, o le hacemos un número finito de esas operaciones, el triángulo que resulta es congruente al inicial. O sea, el segundo triángulo es igual al primero, solo que está en otra posición.

Entonces, aparece la siguiente pregunta: si se tienen algunos datos de un triángulo, ¿será posible construir un único triángulo (salvo isometrías[1]) con esos datos?

Considere la siguiente actividad:

Construya un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°. Un estudiante podría construir el siguiente triángulo:

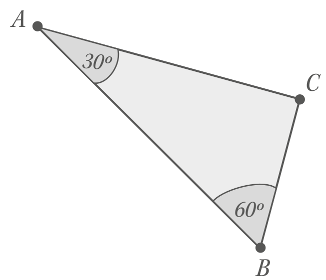


Figura VII.7.

Pero otro estudiante pudo haber construido el siguiente:

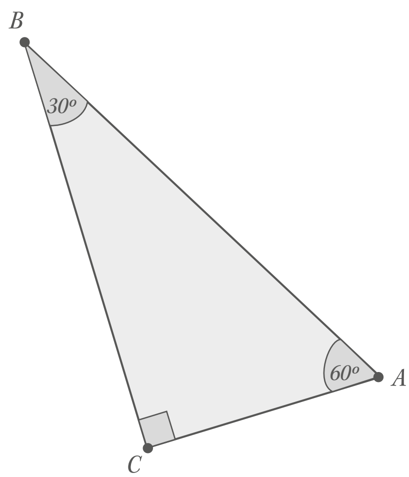


Figura VII.8.

[1] Cuando decimos "salvo isometrías", queremos significar que si dos triángulos satisfacen las mismas condiciones, entonces existe una isometría que transforma un triángulo en el otro.

Estos triángulos no son iguales, y no solo porque están en diferentes posiciones, sino que, por ejemplo, el segundo tiene mayor área que el primero. Es decir, los ángulos de un triángulo no determinan al triángulo.

Otra forma de asimilar los criterios de congruencia consiste en plantearse el problema de construir un triángulo a partir de un número limitado de elementos: palitos y ángulos. Un palito corresponde a un lado del triángulo y, como su largo es fijo, todos los triángulos que construya usando ese palito para uno de sus lados, tendrán al menos ese lado congruente. En el caso de un ángulo es menos claro como "tenerlo" físicamente. Imaginemos un par de tubos que forman entre ellos un ángulo específico y fijo, y en los cuales se pueden introducir 2 palitos (uno en cada tubo). Los palitos estarán forzados a formar un ángulo congruente con este ángulo.

A continuación, se muestra cómo podrían ser estos elementos:

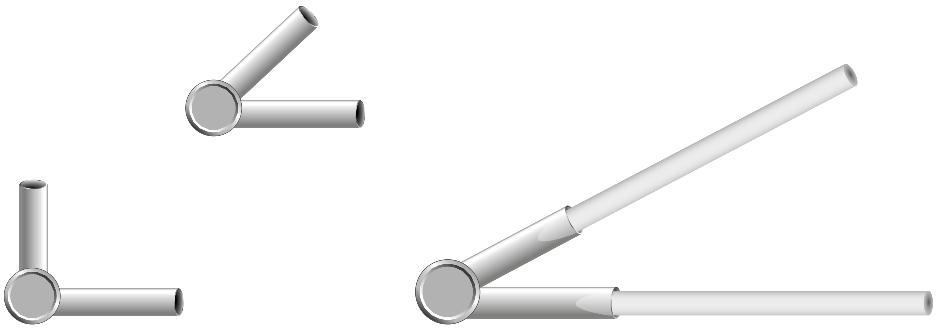


Figura VII.9.

Revisemos el criterio *LAL*, pero desde esta perspectiva. Consideremos 2 palitos de medidas definidas y que el ángulo α entre ellos también está definido. Al conectar los 2 palitos en el ángulo común, la distancia entre los otros extremos de los palitos en este ángulo queda totalmente definida, es decir, la medida del tercer lado está determinada por los datos lado-ángulo-lado y también las medidas de los otros 2 ángulos quedarán definidas, una vez que se ponga el tercer palito en la única forma posible: conectando los dos vértices libres.

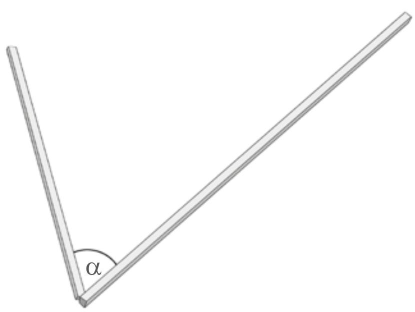


Figura VII.10.

Así, salvo isometrías, hay un único triángulo que se puede construir si las medidas de 2 de sus lados están pre establecidas y el ángulo formado por ellos, también.

Figura VII.11.

Para pensar

Si entregan 2 palitos de diferentes largos y un ángulo para conectarlos, ¿es siempre posible completar la estructura con un tercer palito y formar un triángulo?

Consideremos ahora un palito T de medida definida y 2 ángulos que se conecten en los extremos del palito.

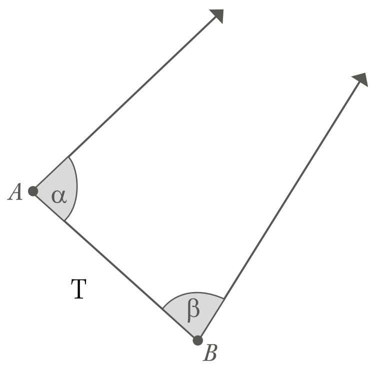


Figura VII.12.

Desde los extremos, parten 2 rayos que se intersectan en un único punto, definiendo así el tercer vértice del triángulo. Este tercer vértice permite determinar el largo de cada uno de los 2 palitos adicionales. De esta forma el tercer vértice queda únicamente determinado por aquella información (el largo del segmento $\overline{AB}$, la medida de α y la medida de β). Si denotamos por C la intersección de los rayos, entonces el ΔABC queda totalmente determinado por esa información.

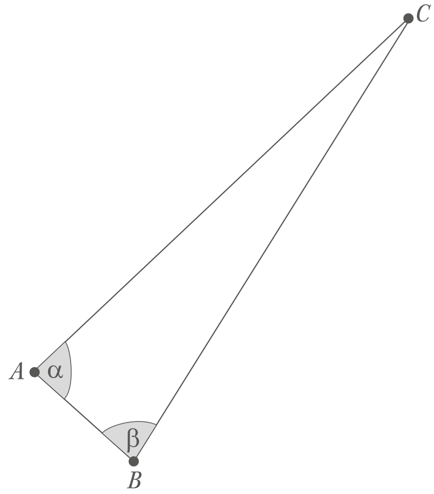


Figura VII.13.

Es decir, el **Criterio** *ALA* dice exactamente que un triángulo del cual se conocen el largo de un lado y los ángulos que forma ese lado con los otros 2 lados está únicamente definido, salvo isometrías.

Para pensar

En la construcción anterior, los 2 rayos que parten desde los extremos de un palito y formando ángulos de medidas previamente determinadas α y β, ¿se cruzan necesariamente en algún punto?

Consideremos, finalmente el siguiente problema:

Construya un triángulo cuyos lados miden 15,7; 10 y 7 cm. Si se tienen palitos con esas medidas y se une un par de extremos para formar el ángulo α, ese ángulo debe ser tal que el triángulo se cierre al poner el tercer palito en los extremos del ángulo formado.

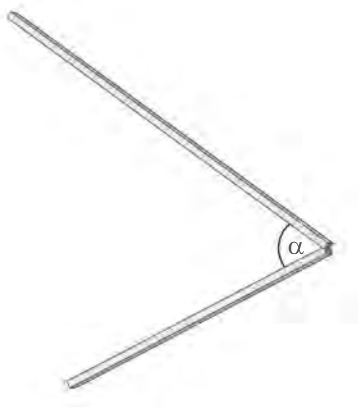


Figura VII.14.

Entonces, lo que podemos hacer es aumentar o disminuir el ángulo α hasta que la distancia entre los extremos del ángulo coincida exactamente con la medida del tercer palito.

Figura VII.15

En ese momento, el ángulo α quedará únicamente determinado y al poner el tercer palito, los otros ángulos del triángulo también quedarán únicamente determinados. Es decir, existe un único triángulo (salvo isometrías) cuyos lados miden 15,7; 10 y 7 cm. Esto ocurre para cualesquiera sean las medidas de los lados de un triángulo; esto es, si se tienen 3 segmentos con los cuales se puede construir un triángulo con esas medidas, entonces tal triángulo es único, salvo isometrías. Esto último es lo que dice el **Criterio *LLL***.

Para pensar

Si se tienen 3 palitos de diferentes largos, ¿es siempre posible conectarlos en sus extremos y formar un triángulo?

El **Criterio *LAL*** requiere para su aplicación que el ángulo esté formado por los otros 2 lados que son conocidos. Veamos a continuación, que sucede si no es el caso. Es decir, formulemos la siguiente pregunta.

¿Podemos usar un **Criterio *LLA***, para la congruencia?

Consideremos un triángulo ΔABC. Vamos a construir un segundo triángulo cuyo primer par de lados sean congruentes con $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

Consideremos la recta L que contiene al lado $\overline{AC}$.

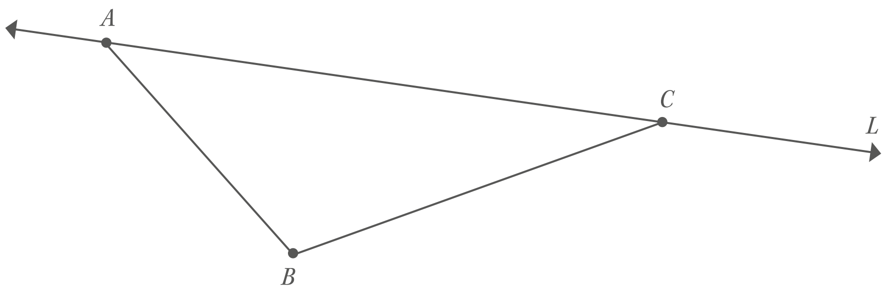


Figura VII.16.

El ángulo que forma esta recta con el lado $\overline{BC}$ será el tercer dato conocido. Este ángulo, $\measuredangle BCA$, no se encuentra formado por los 2 lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, sobre los que tenemos condiciones de congruencia. Es decir, no podemos invocar el criterio de congruencia *LAL*.

Construyamos ahora la circunferencia de centro en B y radio AB; entonces, esa circunferencia interseca a la recta L en A y en otro punto D.

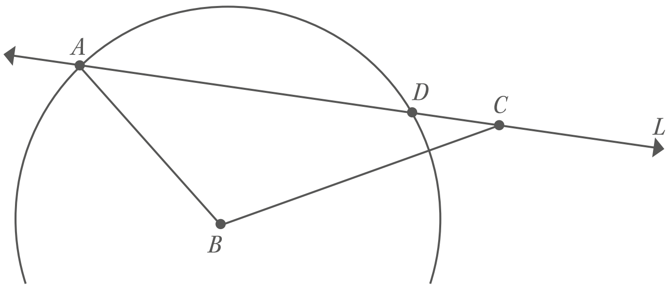


Figura VII.17.

Como $\overline{BD}$ es radio de la circunferencia, entonces, $BA = BD$ y, con esto, los triángulos ΔABC y ΔDBC son tales que:

$AB = DB$

$BC = BC$

$m\measuredangle BCA = m\measuredangle BCD$

$m\measuredangle ABC \neq m\measuredangle DBC$

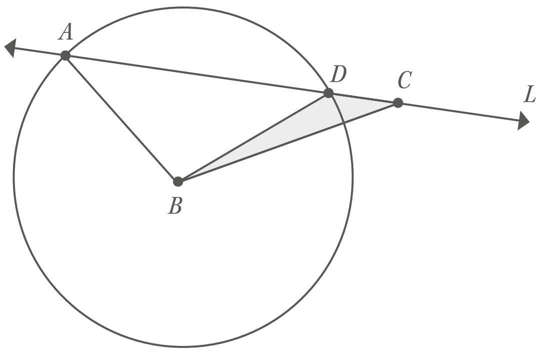


Figura VII.18

Hemos construido de esta forma 2 triángulos, ΔABC y ΔDBC, con 2 lados y un ángulo congruentes, pero el ángulo congruente del triángulo es distinto al ángulo que forman los lados congruentes, y estos 2 triángulos no son congruentes. Por esta razón, no existe un criterio de congruencia *LLA*.

En resumen

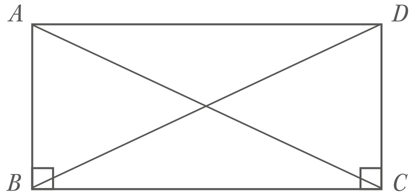
Los criterios de congruencia dan cuenta de lo que intuitivamente uno conoce. Esto es:

- **Criterio** *LLL*: Las medidas de los lados de un triángulo determinan unívocamente al triángulo, salvo isometrías.
- **Criterio** *LAL*: Las medidas de 2 lados de un triángulo y la medida del ángulo entre esos lados determinan unívocamente al triángulo, salvo isometrías.
- **Criterio** *ALA*: La medida de un lado de un triángulo y las medidas de los ángulos que forma ese lado con los otros lados determinan unívocamente al triángulo, salvo isometrías.

Ejercicios de la sección

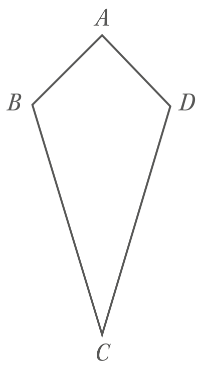
1. Un cuadrado está formado por 4 segmentos del mismo largo, que forman 4 ángulos rectos. Demuestre que cada diagonal lo descompone en 2 triángulos congruentes. Demuestre que las diagonales son congruentes.

2. En la figura siguiente:



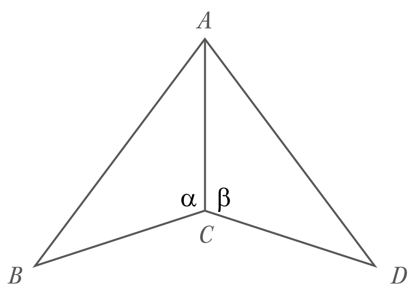
Se sabe que $AB = CD$, que $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y que $\overline{DC} \perp \overline{BC}$. Demuestre que $AC = BD$, y que $AD = BC$.

3. En la figura siguiente:



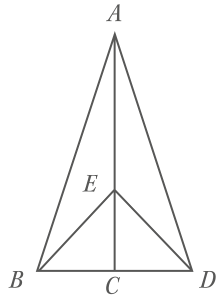
Se tiene que $AB = AD$ y que $BC = DC$. Demuestre que los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle ADC$ son congruentes.

4. En la figura siguiente:



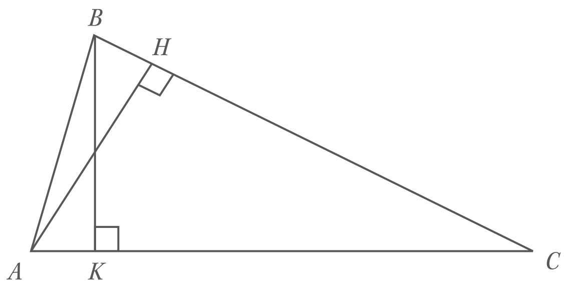
Los ángulos indicados cumplen $\alpha = \beta$, y además $BC = DC$. Demuestre que el rayo $\overrightarrow{AC}$ bisecta el ángulo $\measuredangle BAD$.

5. En la figura siguiente:



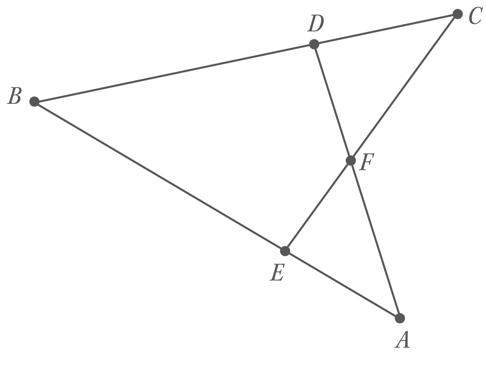
Se cumple $BE = DE$ y, además, C es el punto medio de $\overline{BD}$. Demuestre que los triángulos ΔBCA y ΔDCA son congruentes.

6. En esta figura:



Se cumple $\overline{AH} \perp \overline{BC}$, $\overline{BK} \perp \overline{AC}$ y $\overline{HC} \cong \overline{KC}$. Pruebe que los triángulos ΔAHC y ΔBKC son congruentes.

7. En la figura, el ángulo $\measuredangle BCE$ es congruente al ángulo $\measuredangle BAD$ y $BC = BA$.



Demuestre que los triángulos ΔABD y ΔCBE tienen la misma área.

3. Propiedades básicas de los triángulos: el triángulo isósceles

3.1. Pons Asinorum y sus consecuencias

Se puede decir que el teorema que presentamos a continuación es el primer teorema importante de la Geometría Euclidiana, y marca el inicio de la Geometría Deductiva. Se trata de una propiedad básica de los triángulos isósceles que tendrá múltiples aplicaciones en la resolución de situaciones geométricas.

> ***Teorema VII. 1: Pons Asinorum***
>
> En todo triángulo isósceles, los ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes.

De esta propiedad, algunos dirán que es tremendamente evidente y otros pensarán "¿no es esa la definición de triángulo isósceles?". Pues no es la definición y, a pesar de ser muy evidente, es una consecuencia de las propiedades y definiciones vistas hasta ahora. Se trata de un importante teorema para el cual incluso veremos varias demostraciones posibles. Antes de dar las demostraciones explicaremos nuestro plan:

Sea ΔABC un triángulo isósceles, digamos que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

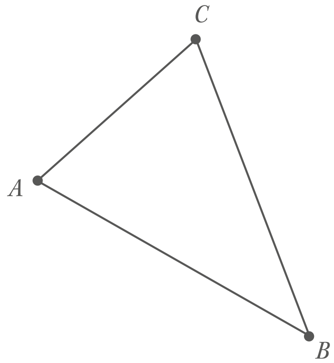


Figura VII.19.

Tracemos un segmento que une el vértice del ángulo formado por los dos lados congruentes con el lado opuesto a él (la base). Esto da lugar a dos triángulos.

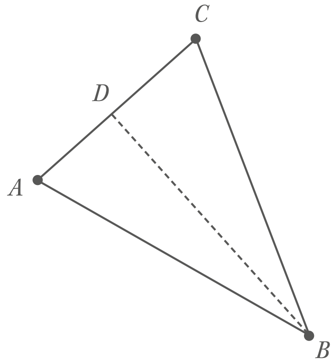


Figura VII.20.

Comentario:

Nuestra estrategia, nuestro plan será probar que estos 2 nuevos triángulos (en la **Figura VII.20**, ΔABD y ΔCBD) son congruentes, y obtener como consecuencia que los 2 ángulos basales (en nuestro caso, $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle ACB$) son, por lo tanto, congruentes.

No hemos dicho nada acerca de cómo escoger el punto D. De esta elección puede depender que logremos demostrar la congruencia de los triángulos ΔABD y ΔCBD. Entonces, preguntémonos ¿cómo elegir el punto D y, por lo tanto, el segmento $\overline{BD}$?

A primera vista, tenemos muchas posibilidades, tantas como puntos tiene el segmento $\overline{AC}$. Sin embargo, probaremos con los elementos secundarios. Entonces, $\overline{BD}$ puede ser:

- La mediana trazada desde B.
- La bisectriz de $\measuredangle ABC$.
- La altura trazada desde B.
- La mediatriz de $\overline{AC}$.

Un análisis más cuidadoso nos muestra que algunas de estas opciones no sirven para nuestro propósito. Estudiemos cada una de ellas, por separado:

Primera demostración: $\overline{BD}$ es la mediana trazada desde B.

En este caso, tenemos (ya que D es el punto medio de $\overline{AC}$) que $\overline{AD} \cong \overline{DC}$. Además, tenemos por hipótesis que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Así, se cumplen las hipótesis del criterio de congruencia LLL, por lo que los triángulos ΔABD y ΔCBD son congruentes, de donde se desprende que $\measuredangle DAB$ es congruente a $\measuredangle DCB$, o lo que es lo mismo, $\measuredangle CAB \cong \measuredangle ACB$. ☐

Segunda demostración: $\overline{BD}$ es la bisectriz de $\measuredangle ABC$.

En este caso, por ser $\overline{BD}$ la bisectriz de $\measuredangle ABC$, tenemos $\measuredangle ABD \cong \measuredangle CBD$. Además, al igual que en el caso anterior, tenemos (por hipótesis) que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Así, estan las condiciones para ocupar el **Criterio** LAL, de donde concluimos que $\Delta ABD \cong \Delta CBD$, y procedemos como en la demostración anterior. ☐

- $\overline{BD}$ es la altura trazada desde B.

  Si $\overline{BD}$ es la altura trazada desde B, entonces $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, por lo que $\measuredangle ADB \cong \measuredangle CDB$. Lamentablemente, esto no nos sirve, ya que al unirlo con la otra información que tenemos ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$) no podemos concluir que $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (se necesitaría un criterio de congruencia LLA, que no tenemos). Hay un segundo inconveniente en este caso, y es que no tenemos ningún resultado que nos asegure que la altura corte el lado $\overline{AC}$ en un punto interior.

- $\overline{BD}$ es la mediatriz de $\overline{AC}$.

  Finalmente, esta idea tampoco nos sirve ahora para demostrar lo que queremos, ya que al trazar la mediatriz de $\overline{AC}$, no tenemos en este momento argumentos para asegurar que dicha mediatriz pasa efectivamente por el vértice B. Por supuesto, es cierto que dicha mediatriz pasa por ese vértice, pero no estamos aún en condiciones de demostrar esta afirmación.

Así, hemos obtenido 2 demostraciones diferentes del Teorema Pons Asinorum, basadas en la misma idea. Trazar un segmento adicional a la figura original.

Comentario:

Esta es una de las habilidades más difíciles de dominar para la escritura de demostraciones: construir elementos geométricos adicionales (llamados también *elementos auxiliares*). En efecto, las posibles construcciones adicionales son muchas, por lo que no podemos intentar todas las construcciones posibles. Son probablemente la práctica y los conocimientos previos nuestros principales guías llegado el momento de requerir una construcción.

Notemos que como todo triángulo equilátero es isósceles, entonces 2 ángulos cualesquiera del triángulo equilátero miden lo mismo. El resultado recíproco también es cierto, es decir, si un triángulo tiene sus 3 ángulos congruentes, entonces el triángulo es equilátero. Es decir, un triángulo es equilátero si y solo si sus ángulos interiores son congruentes entre sí. También podemos concluir que un triángulo es escaleno si y solo si cualesquiera par de sus ángulos interiores no son congruentes.

Nótese que, usando cualquiera de las 2 demostraciones, hemos llegado a demostrar que los triángulos ΔABD y ΔCBD son congruentes, de manera que:

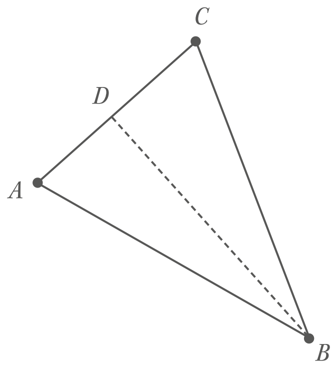


Figura VII.21

- $\measuredangle ABD \cong \measuredangle CBD$, de donde $\overline{BD}$ es la bisectriz de $\measuredangle ABC$.
- $\overline{AD} \cong \overline{DC}$, de donde D es el punto medio de $\overline{AC}$, por lo que $\overline{BD}$ es la mediana trazada desde B.
- $\measuredangle ADB \cong \measuredangle BDC$, de donde $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, por lo que $\overline{BD}$ es la altura trazada desde B.
- Finalmente, por las 2 últimas propiedades recién enunciadas, $\overleftrightarrow{BD}$ es una recta perpendicular a $\overline{AC}$ que pasa por su punto medio, por lo que es la mediatriz de dicho segmento.

Estas 4 propiedades pueden ser resumidas en el siguiente teorema:

> ***Teorema VII. 2***
>
> En todo triángulo isósceles, la mediatriz de la base contiene a la altura, a la bisectriz y a la mediana, trazadas desde el vértice opuesto a la base.

Una idea diferente para demostrar el **Teorema VII.1**, y que no requiere construcciones adicionales, consiste en demostrar que el triángulo isósceles ΔABC, con $AB = BC$, es congruente consigo mismo, pero considerando 2 órdenes distintos de los vértices. En la **Figura VII.22,** observamos que, al considerar los 2 triángulos ΔABC y ΔCBA (note que el segundo triángulo no es más que el primero, reflejado) tenemos:

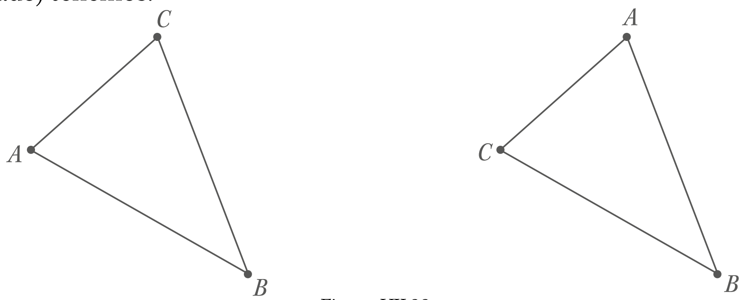


Figura VII.22

Por hipótesis, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y por lo tanto $\overline{BC} \cong \overline{AB}$. Finalmente, por ser $AC = CA$, aplicando el **Criterio** *LLL*, podemos concluir que los triángulos ΔABC y ΔCBA, son congruentes, entonces, los ángulos $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle BCA$ son congruentes. ❒

Así tenemos una tercera demostración del Teorema Pons Asinorum

3.2 El recíproco del Teorema Pons Asinorum

El recíproco del Teorema Pons Asinorum es la siguiente propiedad:

Teorema VII. 3: recíproco de Pons Asinorum

En todo triángulo, si 2 ángulos son congruentes, entonces los lados opuestos a dichos ángulos son congruentes, por lo que el triángulo es isósceles.

Demostración

Considerando los triángulos ΔABC y ΔCBA (se retoma aquí la idea de considerar el triángulo y su reflexión), vemos que ahora la hipótesis es $\measuredangle CAB \cong \measuredangle ACB$, y la tesis es $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Así, tenemos por hipótesis, $\measuredangle CAB \cong \measuredangle ACB$[2]. Por la misma razón, $\measuredangle ACB \cong \measuredangle CAB$[3].

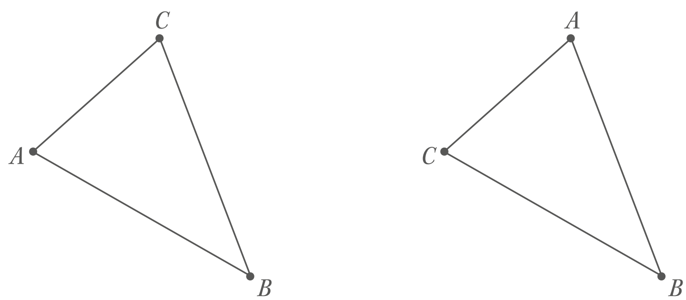


Figura VII.23

[2] Se puede pensar que el ángulo $\measuredangle CAB$ se refiere al triángulo de la izquierda en la **Figura VII.23** y el ángulo $\measuredangle ACB$ se refiere al triángulo de la derecha. Aunque sean el mismo.

[3] Se puede pensar que el ángulo $\measuredangle ACB$ en este caso se refiere al triángulo de la izquierda en la **Figura VII.23** y el ángulo $\measuredangle CAB$ se refiere al triángulo de la derecha. Aunque sean el mismo.

Finalmente, por ser $\overline{AC}$ el mismo segmento que $\overline{CA}$, tenemos obviamente que $\overline{AC} \cong \overline{CA}$.

En cada una de las congruencias, el primer segmento o ángulo dado corresponde a ΔABC y el segundo a ΔCBA.

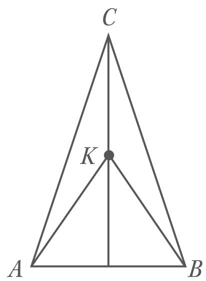
Las 3 afirmaciones anteriores nos permiten establecer (por el **Criterio** ALA) que ΔABC y ΔCBA son congruentes, de donde se deduce que $\overline{AB} \cong \overline{CB}$. ☐

En resumen

Un triángulo es isósceles si y solo si sus ángulos basales son congruentes.
En un triángulo isósceles se superponen la bisectriz, la mediana y la altura respecto del vértice no basal, con la mediatriz de la base.

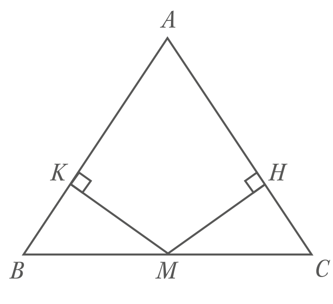
Ejercicios de la sección

1. En la figura siguiente:



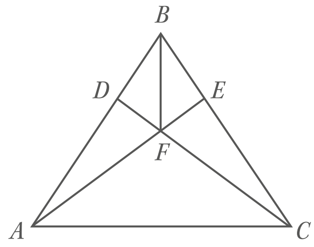
El rayo $\overrightarrow{CK}$ bisecta $\measuredangle ACB$, y los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle CBA$ son congruentes. Demuestre que los triángulos ΔCKA y ΔCKB son congruentes.

2. Considere la siguiente figura:



Donde M es el punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{MK} \perp \overline{AB}$, $\overline{MH} \perp \overline{AC}$ y $MH = MK$. Pruebe que el triángulo ΔBAC es isósceles.

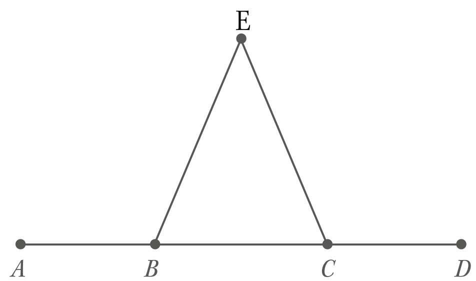
3. En la siguiente figura:



Donde $BD = BE$ y $FD = FE$. Demuestre que ΔAFC es isósceles y ΔABC también lo es.

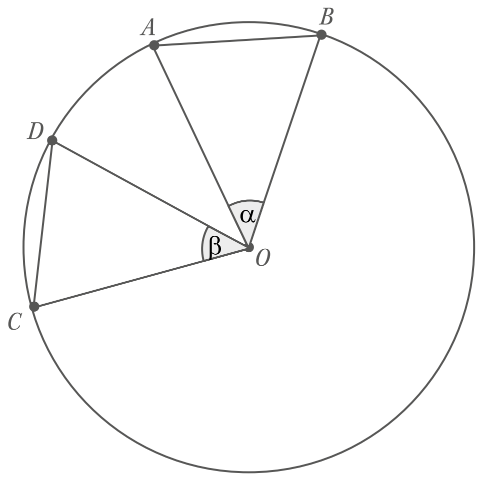
4. Demuestre que si M es un punto cualquiera de la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$, M equidista de los extremos A y B.

5. Considere la siguiente figura:



Los puntos A, B, C y D son colineales. El punto E no es se encuentra sobre la recta $\overleftrightarrow{AD}$ y verifica que $BE = CE$. Pruebe que $\measuredangle ABE$ y $\measuredangle DCE$ son congruentes.

6. Considere una circunferencia de centro O, que contiene a los puntos A, B, C y D, tal que $AB = CD$. Demuestre que los ángulos $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle COD$ son congruentes.



4. Algunas construcciones geométricas

Estamos en condiciones de demostrar la corrección de la **Construcción VI.2**, presentada en la **Sección VI.2.4.** Se trata de copiar un ángulo (obtener un ángulo congruente a) $\measuredangle ABC$ utilizando un rayo cualquiera, $\overrightarrow{PQ}$, como uno de sus lados. Más precisamente:

Construcción VI.2 Dado un ángulo $\measuredangle ABC$, un semiplano S con arista en la recta l, y 2 puntos P, Q en l, encontrar un punto R en S tal que $m\measuredangle ABC = m\measuredangle PQR$.

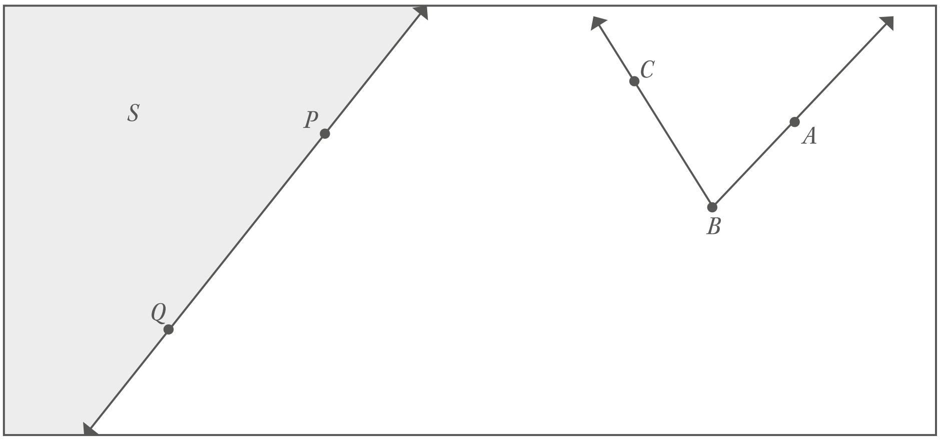


Figura VI.24

Solución:

- Con centro en Q, dibújese la circunferencia de radio AB.
- Esta circunferencia corta a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ en 2 puntos, de los cuales uno (que denotaremos por X) está en el rayo $\overrightarrow{QP}$ y el otro no.

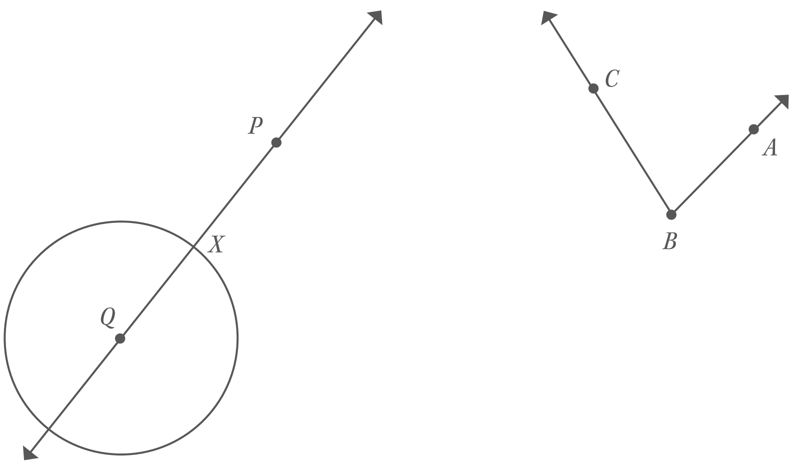


Figura VI.25

- Con centro en Q, dibújese la circunferencia de radio BC.
- Con centro en X, dibújese la circunferencia de radio AC.
- Las 2 últimas circunferencias se cortan en 2 puntos, de los cuales exactamente uno está en el semiplano S.

Este último punto es el R buscado.

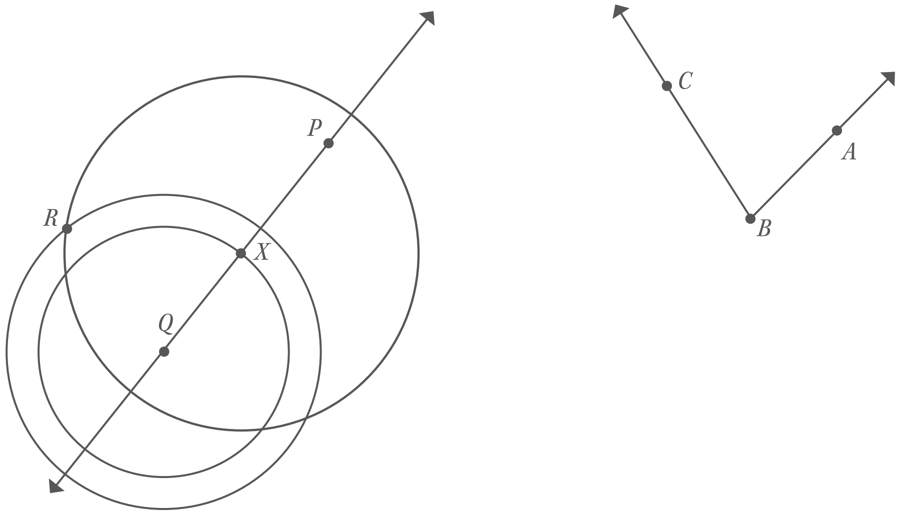


Figura VII.26.

Demostración de que la solución propuesta es correcta:

Por estar X en $C\,(Q, AB)$, tenemos que $\overline{QX} \cong \overline{AB}$. El punto R está en la intersección de las circunferencias $C\,(Q, BC)$ y $C(X, AC)$, por lo que $\overline{QR} \cong \overline{BC}$ y $\overline{XR} \cong \overline{BC}$. Así, por **Criterio** LLL, tenemos que los triángulos ΔXQR y ΔABC son congruentes.

De esto se deduce que $\measuredangle XQR$ y $\measuredangle ABC$ son congruentes. Pero como $X \in \overrightarrow{PQ}$, entonces $\measuredangle XQR = \measuredangle PQR$, de donde $\measuredangle PQR$ y $\measuredangle ABC$ son congruentes, como se deseaba. ❑

Una versión "constructiva" de los criterios de congruencia de triángulos la dan las siguientes construcciones:

Construcción VII.1 Dados 3 segmentos $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, construir – de ser posible– un triángulo ΔABC tal que tenga a $\overline{AB}$ como uno de sus lados y donde $\overline{PQ} \cong \overline{AC}$ y $\overline{RS} \cong \overline{BC}$.

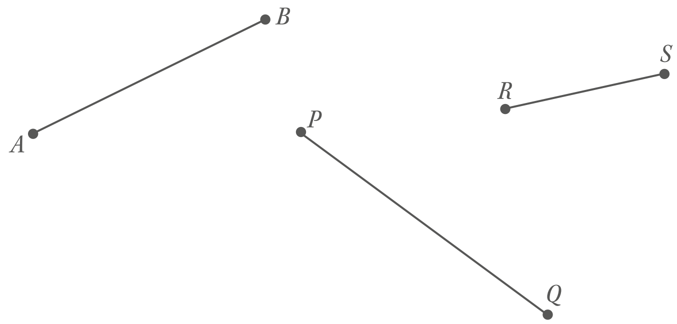


Figura VII.27.

Solución:

Constrúyanse las circunferencias $C\,(A, PQ)$ y $C\,(B, RS)$.Si estas circunferencias no se cortan, no es posible construir un triángulo cuyos lados tengan como medida AB, PQ y RS.

Si se cortan, sea C cualquiera de los puntos en común, claramente el triángulo ΔABC satisface las condiciones pedidas.

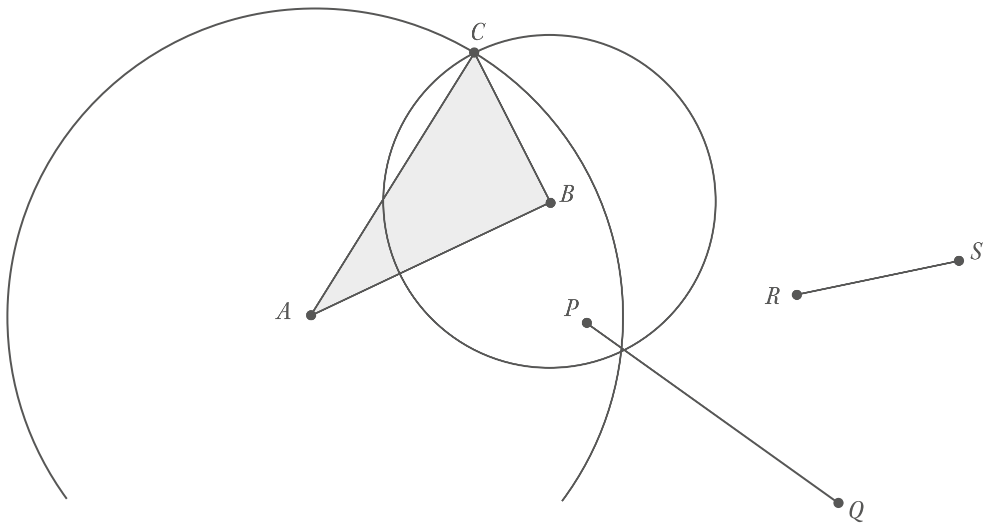


Figura VII.28.

Note que, dado $\overline{AB}$, la recta $\overleftrightarrow{AB}$ divide al plano en 2 semiplanos, y si las circunferencias se cortan en 2 puntos, hay exactamente uno en cada semiplano.

Así, es posible especificar en cuál de los semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$ estará contenido el triángulo.

Un caso particular de la construcción anterior el siguiente, y su realización es un ejercicio para el lector.

Construcción VII.2 Dado un segmento $\overline{AB}$, construir un triángulo equilátero que tenga a $\overline{AB}$ por lado. Si se desea, se puede especificar en cuál de los semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$ estará contenido el triángulo.

Construcción VII.3 Dados dos segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ y un ángulo $\measuredangle TUV$, construir – de ser posible – un triángulo ΔABC, tal que $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{RS}$ y $\measuredangle ABC \cong \measuredangle TUV$.

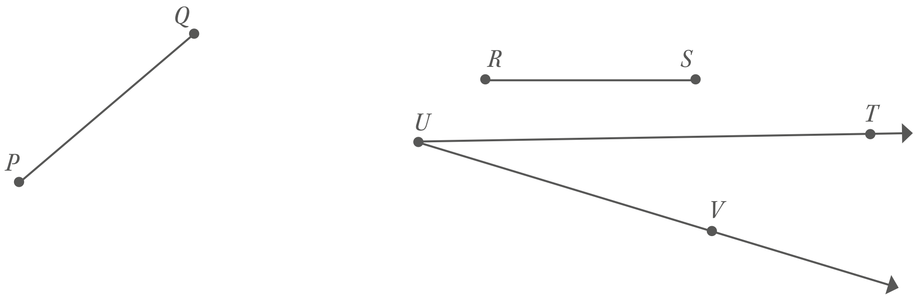


Figura VII.29.

Solución:

Sobre una recta cualquiera, cópiese el segmento $\overline{PQ}$, llamando A y B a sus extremos (ver **Construcción VI.1**).

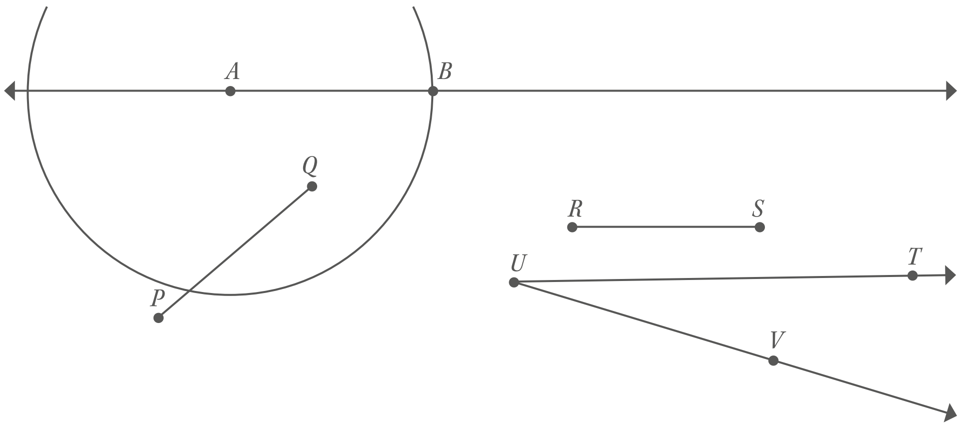


Figura VII.30.

Cópiese el $\measuredangle TUV$ sobre el rayo $\overrightarrow{BA}$, dando lugar a un rayo $\overrightarrow{BD}$ (ver **Construcción VI.2**).

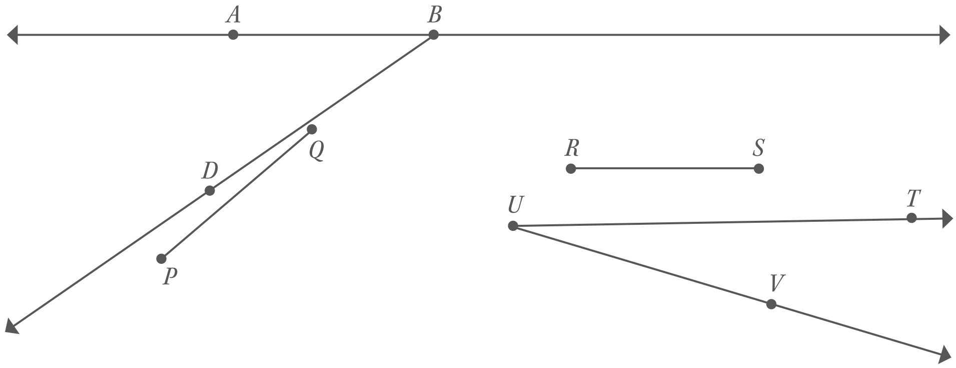


Figura VII.31.

Sobre el rayo $\overrightarrow{BD}$, con extremo en *B,* cópiese el segmento $\overline{RS}$, obteniendo un punto *C* (ver **Construcción VI.1**).

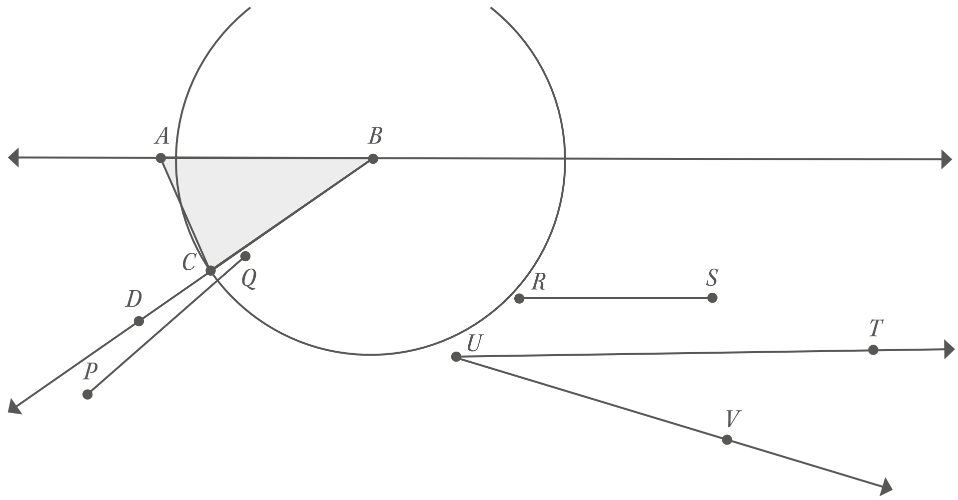


Figura VII.32.

El ΔABC satisface las condiciones pedidas.

Construcción VII.4 Dados un segmento $\overline{PQ}$ y 2 ángulos $\measuredangle RST$ y $\measuredangle UVW$, construir – de ser posible – un triángulo ΔABC tal que $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle RST$ y $\measuredangle ABC \cong \measuredangle UVW$.

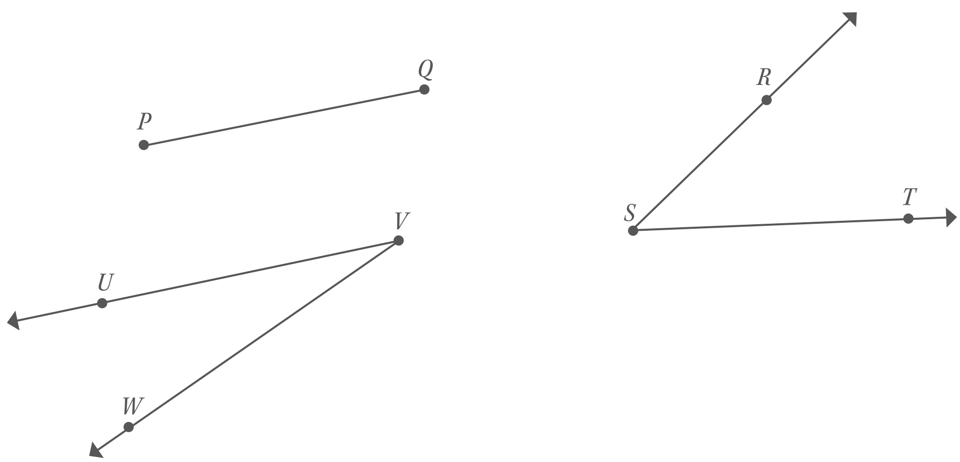


Figura VII.33.

Solución:

Sobre una recta cualquiera, cópiese el segmento $\overline{PQ}$, llamando A y B a sus extremos.

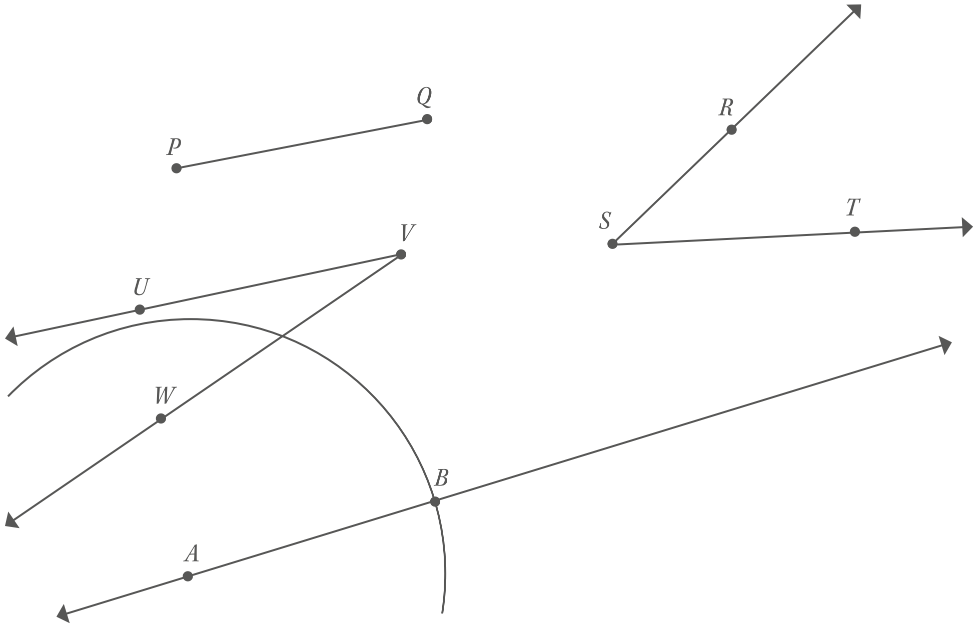


Figura VII.34.

Cópiese el $\measuredangle RST$ sobre el rayo $\overrightarrow{BA}$ dando lugar a un rayo $\overrightarrow{BD}$ (ver Construcción VI.2).

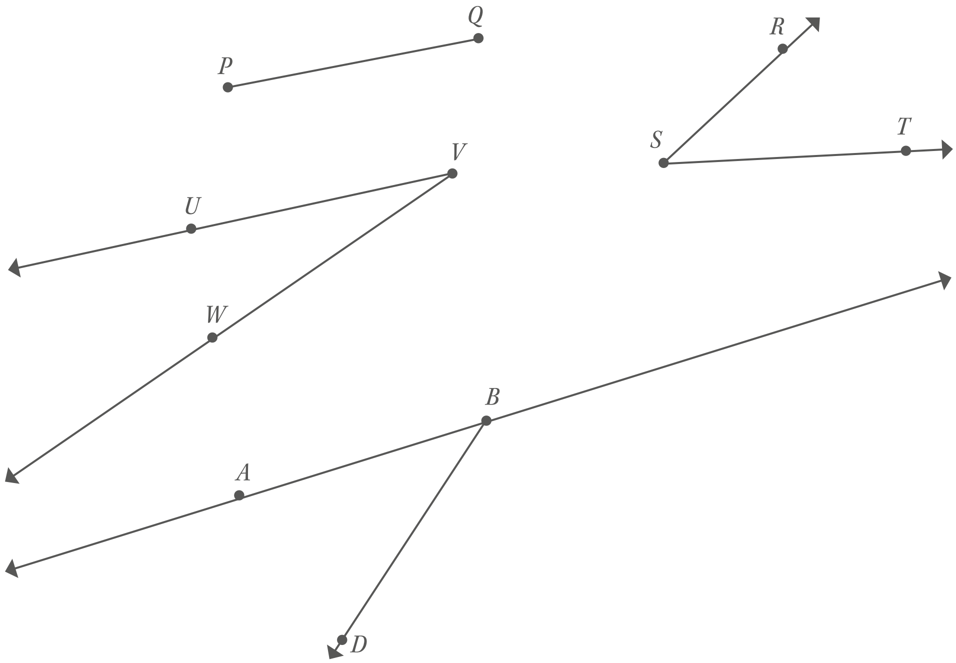


Figura VII.35

Cópiese el $\measuredangle UVW$ sobre el rayo $\overrightarrow{AB}$ dando lugar –en el mismo semiplano en que se construyó $\overrightarrow{BD}$– a un rayo $\overrightarrow{AE}$ (ver Construcción VI.2).

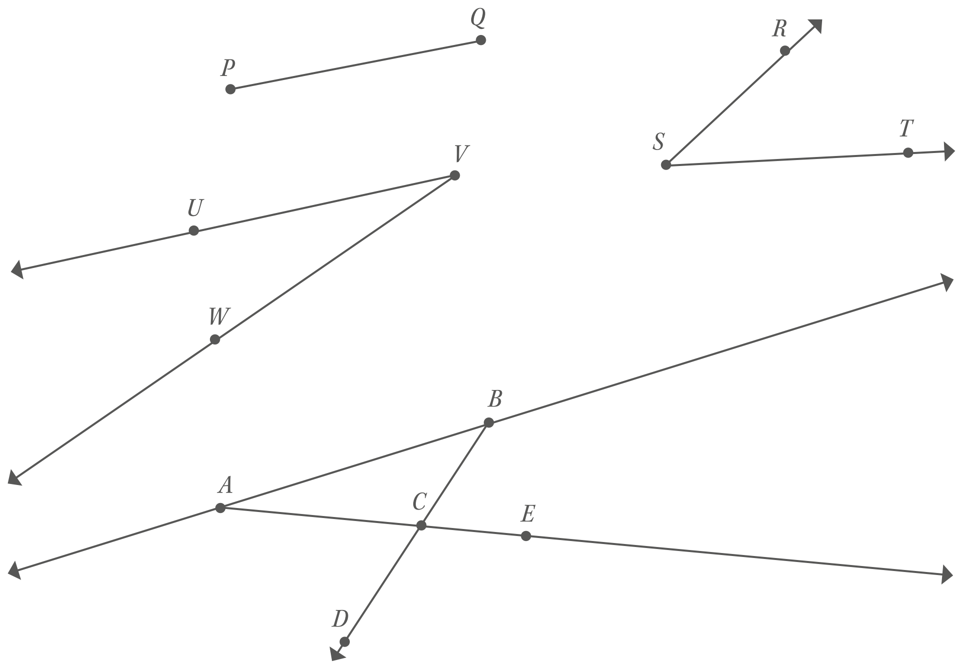


Figura VII.36

Si los rayos $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{AE}$ no se intersecan, no es posible construir un triángulo como el pedido.

Si se intersecan, con C como punto en común, entonces el ΔABC satisface las condiciones pedidas.

Comentario:

Las construcciones geométricas tienen una utilización similar a los teoremas. Es decir, una vez que una construcción se describe y se prueba que es correcta, esta construcción pasa a formar parte de las herramientas básicas para otras construcciones. Si en alguna construcción se requiere trazar un triángulo a partir de sus 3 lados, hacemos mención a la **Construcción VII.1**, donde ya se describió el procedimiento. Del mismo modo, en relación a los teoremas, si en un triángulo isósceles aparece su altura, no es necesario probar que es también la bisectriz del ángulo, basta con mencionar el **Teorema VII.2**.

Dos construcciones importantes son la mediatriz de un trazo y la bisectriz de un ángulo:

Construcción VII. 5 Dado un segmento $\overline{AB}$, construir una recta que sea la mediatriz de $\overline{AB}$, o sea, que sea perpendicular al segmento y que pase por su punto medio.

Solución:

Construya las circunferencias $C(A, AB)$ y $C(B, AB)$.

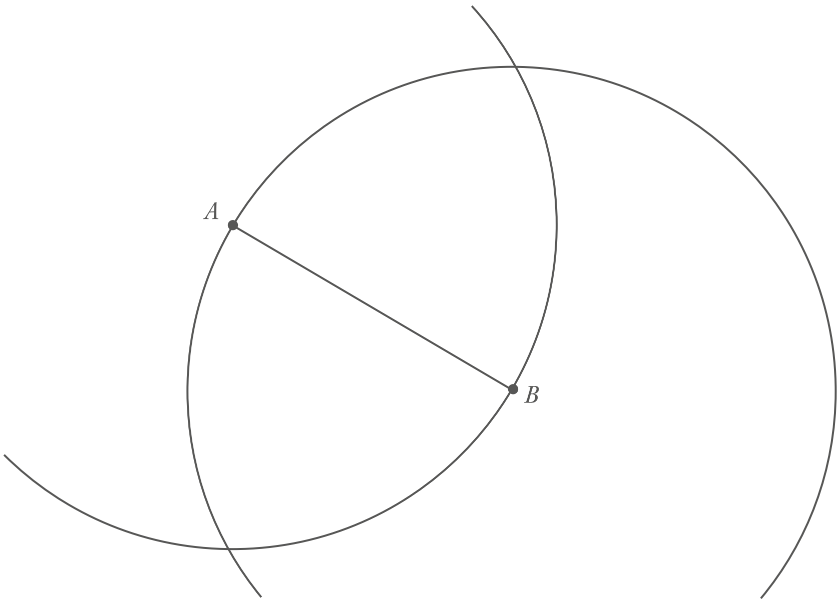


Figura VII.37.

Estas circunferencias se cortan en 2 puntos, sean ellos P y Q. La mediatriz buscada es la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.

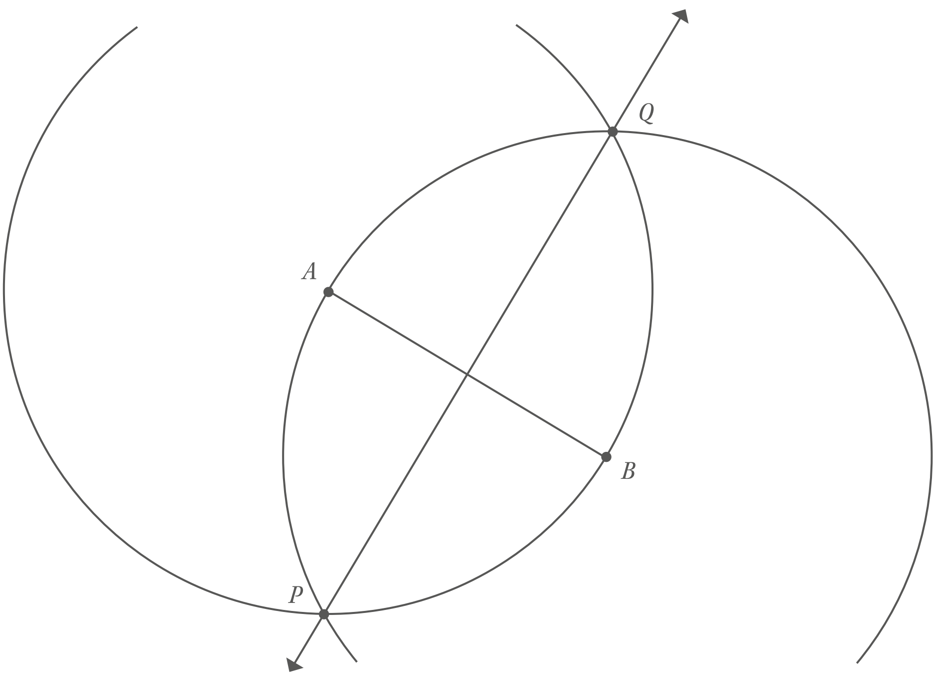


Figura VII.38.

A continuación, probaremos que la construcción anterior es correcta:

Teorema VII. 4

La recta $\overleftrightarrow{PQ}$, obtenida con la construcción anterior es efectivamente la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Demostración

En la **Figura VII.39**, considérense los triángulos ΔPAQ y ΔPBQ. Por construcción, se tiene que $AP = BP = AQ = BQ = AB$.

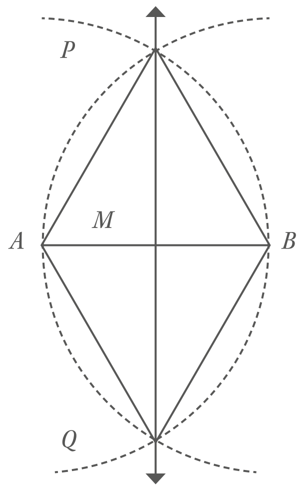


Figura VII.39.

Entonces, $\overline{AP} \cong \overline{BP}$, $\overline{AQ} \cong \overline{BQ}$ y como $\overline{PQ}$ es un lado del triángulo ΔPAQ y ΔPBQ, se tiene (por **Criterio** *LLL*) que los triángulos ΔPAQ y ΔPBQ son congruentes. De lo anterior, se desprende que $\measuredangle APQ \cong \measuredangle BPQ$, donde $\overrightarrow{PQ}$ es la bisectriz de $\measuredangle APB$.

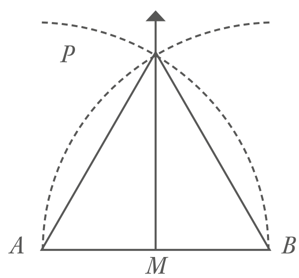


Figura VII.40.

Como el triángulo ΔAPB es isósceles, pues $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ y $\overline{PM}$ es bisectriz, entonces $\overleftrightarrow{PM}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$, por **Teorema VII. 2.** ☐

Ahora, mostramos la construcción de la bisectriz de un ángulo:

Construcción VII. 6 Dado un ángulo $\measuredangle AOB$, construir un rayo que lo biseque.

Solución:

Elija arbitrariamente una medida $r > 0$ y construya la circunferencia $C(O,r)$. Llame Q y P a los puntos donde dicha circunferencia corta a los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, respectivamente.

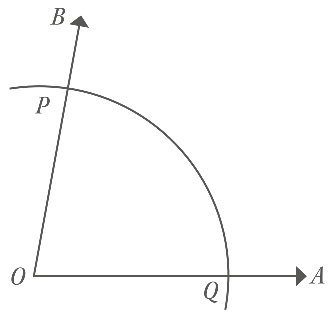


Figura VII.41.

Construya un triángulo equilátero, que tenga por lado a $\overline{PQ}$ y que esté contenido en el semiplano opuesto al que contiene a O (ver **Construcción VII.2**). Sea R el tercer vértice de este triángulo, entonces:

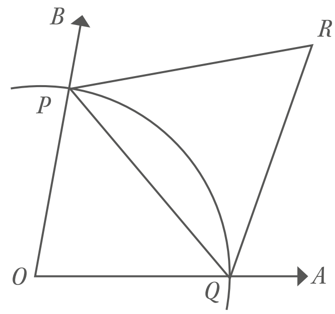


Figura VII.42.

El rayo $\overrightarrow{OR}$ es la bisectriz buscada.

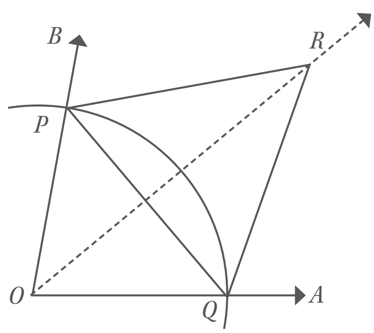


Figura VII.43.

Teorema VII. 5

El rayo $\overrightarrow{OR}$ obtenido con la construcción anterior es efectivamente la bisectriz del $\measuredangle AOB$.

Demostración

En la **Figura VII.44**, considérense los triángulos ΔOPR y ΔOQR. Por construcción, ΔPQR es equilátero, por lo que $\overline{PR} \cong \overline{QR}$; además, como $OP = OQ = r$, se tiene que $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$, y $\overline{OR}$ es un lado común a los triángulos ΔOPR y ΔOQR.

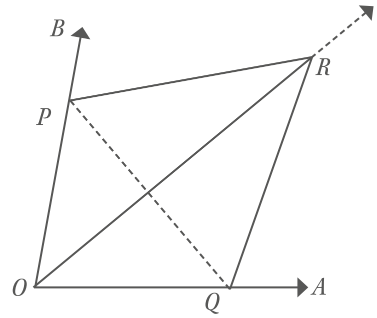


Figura VII.44.

Lo anterior nos lleva a concluir (**Criterio** *LLL*) que ΔOPR y ΔOQR son congruentes, de donde $\measuredangle POR \cong \measuredangle QOR$, por lo que $\overrightarrow{OR}$ es la bisectriz de $\measuredangle AOB$. ☐

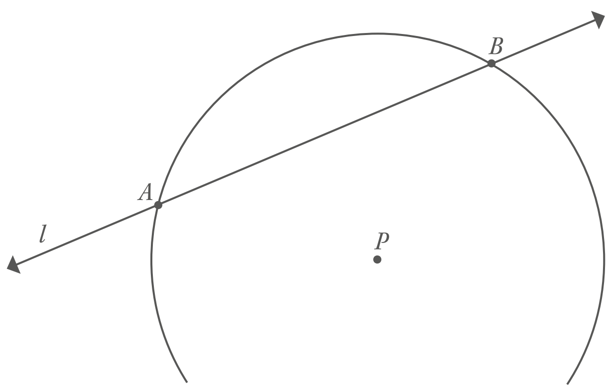
Ahora que tenemos varias construcciones básicas y que además sabemos por qué funcionan, daremos algunos ejemplos de nuevas construcciones.

Ejemplos

1) Dada una recta l y un punto P fuera de ella, construyamos una perpendicular a l que pase por P.

   Solución:

   Con centro en P, trácese una circunferencia con un radio suficientemente grande para tener 2 puntos en común con la recta l. Sean A y B estos puntos.



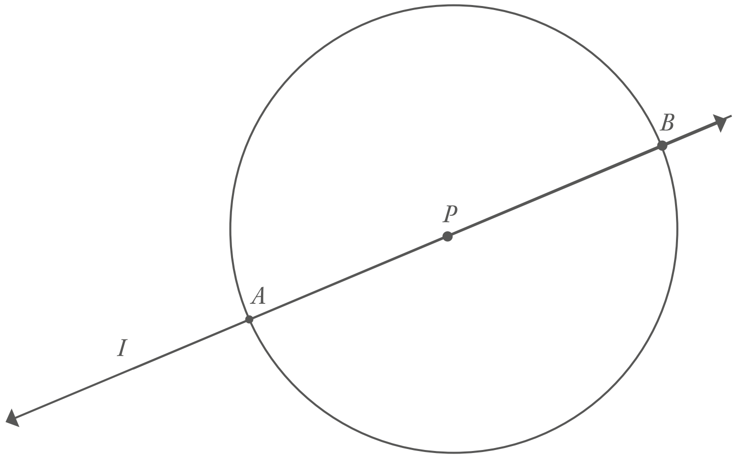
El triángulo ΔAPB es isósceles ($PA = PB$), por lo que la mediatriz de $\overline{AB}$ pasa por P, por **Teorema VII.2**. Así, para construir la perpendicular pedida basta con aplicar la construcción de la mediatriz de ese segmento (ver **Construcción VII.3**). Alternativamente, como la mediatriz y la bisectriz se superponen en un triangulo isósceles, podemos en lugar de contruir la mediatriz, construir la bisectriz del ángulo $\measuredangle APB$.

Es un ejercicio para el lector completar la construcción.

2) Dada una recta l y un punto P en ella, construyamos una perpendicular a l que pase por P.

Solución:

Con centro en P, trácese una circunferencia con un radio cualquiera. Esta circunferencia cortará a l en 2 puntos. Sean A y B estos puntos.



Así, $AP = BP$, por lo que P es el punto medio de $\overline{AB}$, de donde la perpendicular pedida no es más que la mediatriz de $\overline{AB}$, por lo que solo resta aplicar la construcción de la mediatriz de ese segmento (ver **Construcción VII.3**).

Es un ejercicio para el lector completar la construcción.

En resumen

En esta sección se vió:

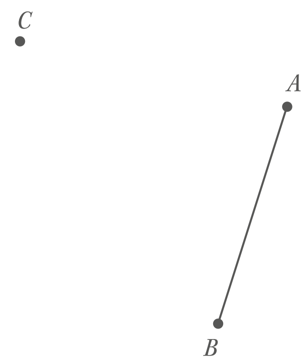
- Cómo construir la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.
- Cómo construir un triángulo, a partir de cada criterio de congruencia.
- Cómo trazar una perpendicular a una recta, que pase por un punto dado.

Ejercicios de la sección

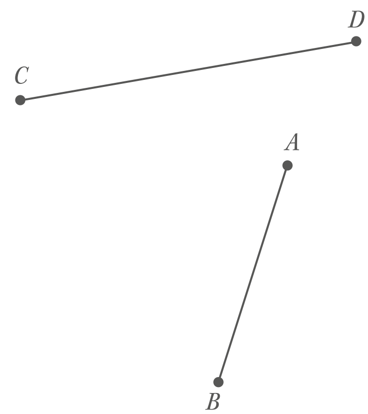
1. Construya y demuestre: sean A, B, C y D los vértices de un cuadrado. Trace una circunferencia que pase por los 4 puntos.

2. A partir de una circunferencia previamente trazada (No se ha marcado ni su centro, ni un radio), construya su centro y demuestre que su construcción es correcta.

3. Dados un segmento $\overline{AB}$ y un punto C fuera de él. Construya un triángulo que tenga como vértices a A y a C, y que como una de sus alturas tenga a $\overline{AB}$. ¿Cuántos triángulos con esas condiciones se pueden construir?



d) Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, construya un triángulo no rectángulo que tenga alturas de medidas AB y CD. ¿Cuántos triángulos con esas condiciones se pueden construir?



5. Desigualdades en el triángulo

Las propiedades que se van a demostrar en esta parte corresponden a desigualdades entre ángulos y lados de un triángulo. La presentación de estas desigualdades sigue un orden muy cuidadoso, avanzando desde las propiedades más débiles, es decir, aquellas que hacen afirmaciones muy "tímidas", hacia propiedades más potentes, con afirmaciones más contundentes.

Un concepto básico en lo que sigue es el de ángulo exterior.

Definición VII. 9	Dado un triángulo, llamamos *ángulos exteriores* a los que son adyacentes con los ángulos interiores.

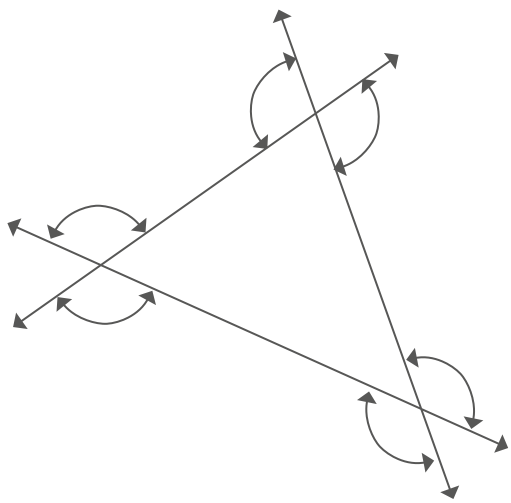


Figura VII.45.

Note que un triángulo tiene 6 ángulos exteriores y estos son congruentes de a pares (por ser opuestos por el vértice). Quizás una de las propiedades más conocidas de los ángulos exteriores es la siguiente:

La medida de cada ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los 2 ángulos interiores no adyacentes.

Esta propiedad la demostraremos en el siguiente capítulo, pues por ahora nos faltan herramientas para hacerlo, por lo que nos conformaremos con demostrar las siguiente propiedad más "débil":

Teorema VII. 6: desigualdad del ángulo exterior

En todo triángulo, la medida de cualquiera de los ángulos exteriores es mayor que la medida de cada uno de los ángulos interiores no adyacentes a él.

Demostración

Consideremos un triángulo cualquiera ΔABC. Tómese un punto D en la prolongación de $\overline{AB}$ y además D no está entre A y B. Así, $\measuredangle DBC$ es un ángulo exterior del ΔABC.

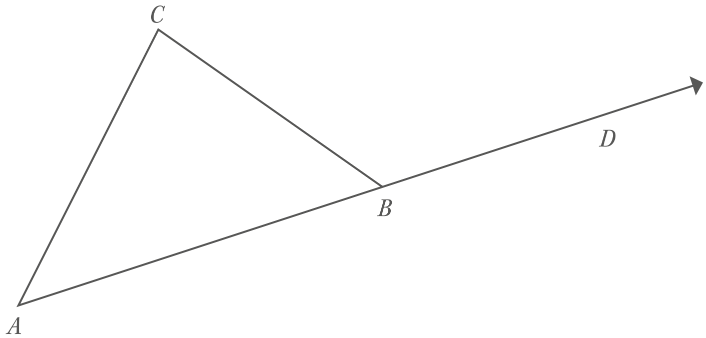


Figura VII.46.

Sea M el punto medio de $\overline{AB}$, y sea E en el rayo $\overrightarrow{CM}$ tal que $\overline{CM} \cong \overline{ME}$.

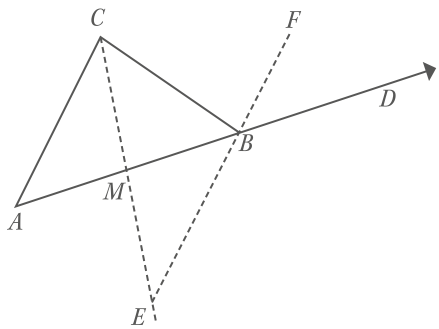


Figura VII.47.

Por **Criterio** *LAL,* se tiene que $\Delta AMC \cong \Delta BME$. Por lo tanto, tenemos que $\measuredangle BAC \cong \measuredangle MAC \cong \measuredangle MBE$. Como además $\measuredangle MBE \cong \measuredangle DBF$ (por ser estos opuestos por el vértice), tenemos que $\measuredangle BAC \cong \measuredangle DBF$. Sin embargo, como $\overrightarrow{BF}$ está en el interior de $\measuredangle DBC$ se tiene:

$$m\measuredangle BAC = m\measuredangle DBF < m\measuredangle DBC$$

O sea, el ángulo exterior $\measuredangle DBC$ es mayor que el ángulo interior no adyacente $\measuredangle BAC$. ❐

Por supuesto, demostrar que $m\measuredangle DBC > m\measuredangle ACB$ y que los otros ángulos exteriores son mayores a los ángulos interiores no adyacentes se hace de forma análoga. Es un ejercicio para el lector dar los detalles.

El teorema anterior tiene consecuencias muy importantes, algunas de las cuales indicamos a continuación:

Teorema VII. 7

En todo triángulo, la suma de las medidas de 2 ángulos interiores cualesquiera es menor que 180°.

Demostración

Considérese el triángulo ΔABC de la **Figura VII.48.** Probaremos que

$$m\measuredangle ABC + m\measuredangle BCA < 180°.$$

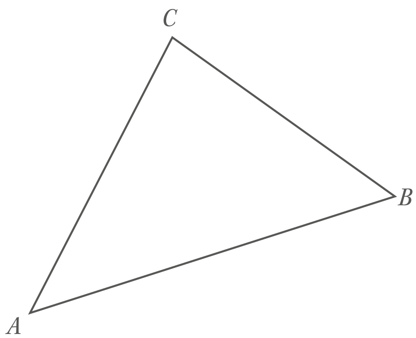


Figura VII.48.

Para ello, prolónguese $\overrightarrow{AB}$, y se obtendrá el ángulo exterior $\measuredangle CBD$.

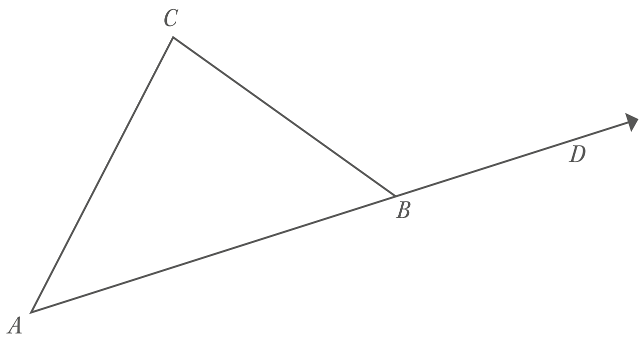


Figura VII.49.

Por la desigualdad del ángulo exterior, tenemos $m\measuredangle CAB < m\measuredangle CBD$; por lo tanto,

$$m\measuredangle ABC + m\measuredangle CAB < m\measuredangle ABC + m\measuredangle CBD = 180 . \square$$

Una consecuencia inmediata de este teorema es la siguiente:

Corolario VII. 1 Si un triángulo tiene un ángulo interior recto u obtuso, entonces sus otros 2 ángulos son agudos.

Es decir, un triángulo tiene a lo más un ángulo recto y a lo más un ángulo obtuso. Tampoco puede ocurrir que un triángulo tenga un ángulo recto y, a la vez, un ángulo obtuso. Recordemos que nuestra definición de triángulo obtusángulo era: "Un triángulo es obtusángulo si tiene un ángulo obtuso"; y el **Corolario VII.1** afirma que la definición "Un triángulo es obtusángulo si tiene solamente un ángulo obtuso" es equivalente a la anterior. Lo mismo ocurre con un triángulo rectángulo, es decir, la definición "Un triángulo es rectángulo si tiene solamente un ángulo recto" es equivalente a la dada en la **Definición VII.3**.

Ahora intentaremos ver alguna relación entre la medida de un ángulo interior de un triángulo y la medida del lado opuesto a dicho ángulo. Consideremos un triángulo equilátero, como el de la **Figura VII.50**.

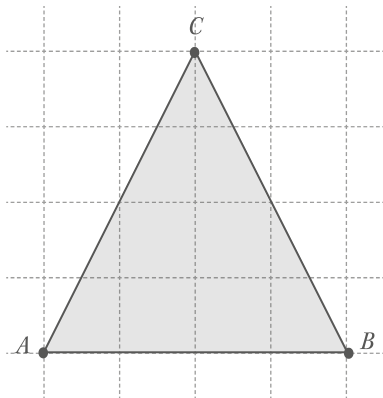


Figura VII.50.

Lo que haremos ahora es mover el vértice C de tal forma que el ángulo $\measuredangle ACB$ sea mayor que en el caso del triángulo equilátero.

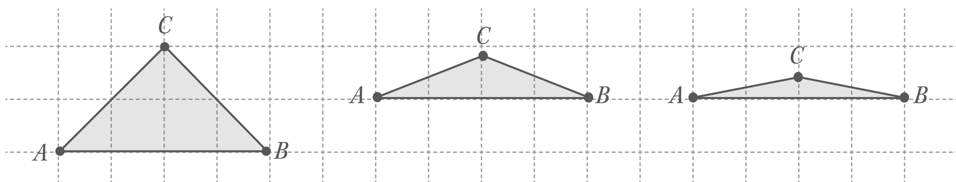


Figura VII.51

Lo que parece ocurrir, es que a medida que crece el ángulo $\measuredangle ACB$, manteniendo fijos los puntos A y B, los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se hacen cada vez más pequeños en comparación con $\overline{AB}$. De igual forma, los otros 2 ángulos interiores se hacen cada vez más pequeños. Es decir, el ángulo $\measuredangle ACB$ es el de mayor medida y su lado opuesto también es el de mayor medida.

Pensemos en lo mismo, pero ahora haciendo crecer uno de los lados. Partamos de nuevo con el triángulo equilátero de la **Figura VII.50** y hagamos crecer el lado $\overline{AB}$, manteniendo el vértice C en el mismo lugar.

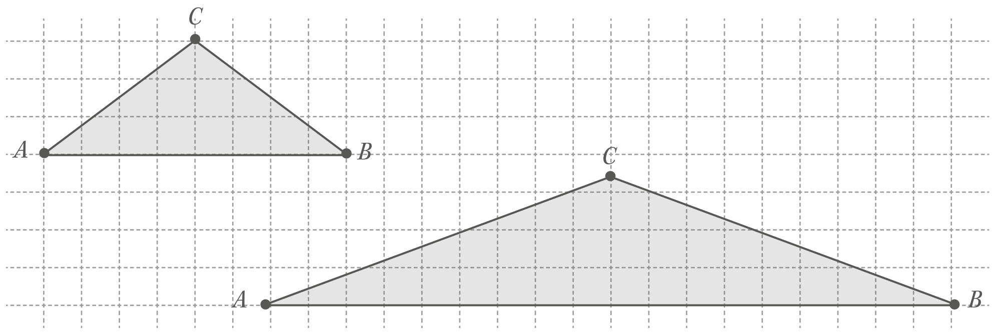


Figura VII.52.

En este caso, el ángulo $\angle ACB$ es mayor que los otros ángulos. Esto que vemos intuitivamente es cierto en general y lo presentamos en el siguiente teorema.

Teorema VII. 8: a mayor lado se opone mayor ángulo

Si en un triángulo un lado es mayor que otro, entonces el ángulo opuesto al primer lado es mayor que el ángulo opuesto al segundo lado.

Demostración

Sea ΔABC un triángulo en el que $AC > AB$. Demostraremos que $m\angle ABC > m\angle ACB$.

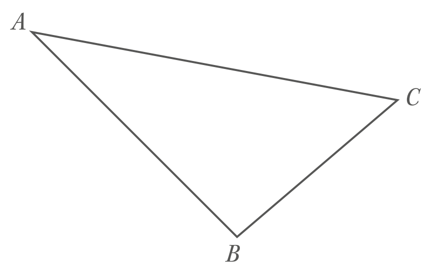


Figura VII.53

Sea D en el rayo $\overrightarrow{AC}$ tal que $AD = AB$. Por ser $AC > AB$, D está entre A y C, por lo que $\overline{BD}$ está en el interior de $\angle ABC$ y $\angle ADB$ es un ángulo exterior al triángulo ΔBCD.

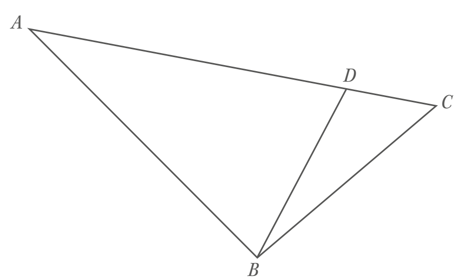


Figura VII.54

Así, tenemos que:

- $m\angle ABC > m\angle ABD$ (ya que $\overline{BD}$ está en el interior de $\angle ABC$.
- $m\angle ABD = m\angle ADB$ (ya que ΔABD es isósceles).
- $m\angle ADB > m\angle ACB$ (por ser $\angle ADB$ un ángulo exterior al triángulo ΔBCD).

Combinando estas 3 desigualdades, concluimos que $m\angle ABC > m\angle ACB$. ❑

El **Teorema VII.9** que presentaremos a continuación es la proposición recíproca del **Teorema VII.8**, es decir, si en un triángulo un ángulo es de mayor medida que los otros 2, entonces el lado opuesto a aquel ángulo es el de mayor longitud.

Teorema VII. 9: a mayor ángulo se opone mayor lado

Si en un triángulo un ángulo es mayor que otro, entonces el lado opuesto al primer ángulo es mayor que el lado opuesto al segundo ángulo.

Demostración

Sea ΔABC un triángulo en el que $m\measuredangle ABC > m\measuredangle ACB$. Demostraremos que $AC > AB$.

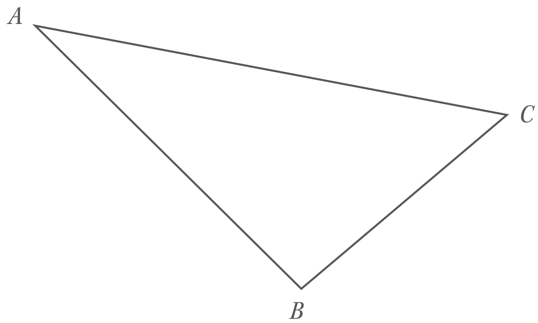


Figura VII.55

En efecto, consideremos las magnitudes AC y AB. Hay 3 posibilidades[4]:

- $AC = AB$
- $AC < AB$
- $AC > AB$

De estos 3 casos, en el primero se tendría (por **Teorema VII.1** Pons Asinorum) que $m\measuredangle ABC = m\measuredangle ACB$, lo que no puede ser por hipótesis. En el segundo caso, aplicando el **Teorema VII.8** se tendría $m\measuredangle ABC > m\measuredangle ACB$, lo que tampoco puede suceder, por hipótesis.

En otras palabras, las primeras 2 posibilidades son inconsistentes con nuestra hipótesis de que $m\measuredangle ABC < m\measuredangle ACB$, por lo que deben ser descartadas. Esto nos deja como verdadera a la única opción posible, que es la conclusión deseada, es decir $AC > AB$. ❐

Como sabemos, en un triángulo rectángulo solo existe un ángulo interior que es recto y los otros dos ángulos son agudos. Es decir, en un triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo rectángulo tiene una medida mayor que los otros dos lados. Lo mismo ocurre en el caso del triángulo obtusángulo: el lado opuesto al ángulo obtuso es el de mayor medida.

[4] Por la Ley de Tricotomía, que se analiza en el **Capítulo II** del libro de *Álgebra* de esta colección.

Definición VII. 10 En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*, y los otros 2 lados son los *catetos*.

La última conclusión de la desigualdad del ángulo exterior es la llamada Desigualdad Triangular, que dice que si A, B y C son 3 números positivos, tales que $A + B \geq C$, entonces no existe un triángulo cuyos lados midan A, B y C.

Teorema VII. 10: desigualdad triangular

En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado.

Demostración

Considérese un triángulo cualquiera ΔABC, donde el mayor de los lados es $\overline{BC}$. Demostraremos que $AB + AC > BC$.

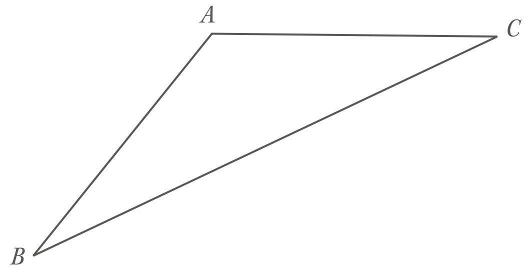


Figura VII.56

En efecto, prolónguese $\overline{BA}$ en dirección de A y se encontrará un punto D en el rayo $\overrightarrow{BA}$, tal que $AD = AC$.

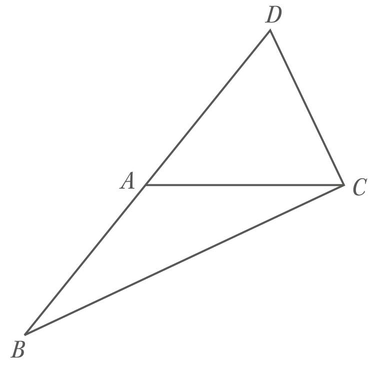


Figura VII.57

Vemos que $m\measuredangle BDC = m\measuredangle ACD$ (por ser ΔACD isósceles), y $m\measuredangle ACD < m\measuredangle BCD$ (ya que $\overrightarrow{AC}$ está en el interior de $\measuredangle BCD$).

Así, en el triángulo ΔBCD, tenemos $m\measuredangle BDC < m\measuredangle BCD$, de donde (por **Teorema VII.9**) $BD > BC$. Pero, por construcción, $BD = AB + AD = AB + AC$, de donde se concluye que $AB + AC > BC$. ❒

En resumen

Desigualdades principales en un triángulo

- Un ángulo exterior es mayor que un ángulo interior no adyacente
- Las medidas de 2 ángulos interiores suman menos que 180°.
- Si A es el ángulo opuesto al lado *a*, y *B* el ángulo opuesto al lado *b* entonces

  A es menor que *B* si y solo si *a* es menor que *b*.
- En todo triángulo, la medida de un lado es menor que la suma de las medidas de los otros 2 lados (desigualdad triangular).

Ejercicios del capítulo

1. Demuestre que dado un punto *P* fuera de una recta *l*, es imposible que en *l* haya más de 2 puntos que estén todos a la misma distancia de *P*.

2. Demuestre que dado un punto *P* fuera de una recta *l*, existe un punto *Q* en *l* cuya distancia a *P* es la menor posible. ¿Qué relación hay entre las rectas *l* y $\overleftrightarrow{PQ}$? La distancia *PQ* es la distancia entre el punto *P* y la recta *l*. ¿Es posible encontrar un punto en *l* cuya distancia a *P* sea la mayor posible?

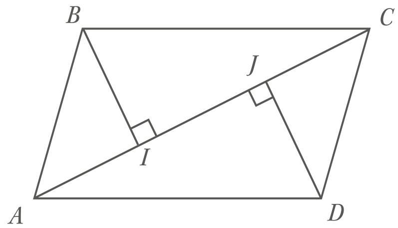
3. Demuestre que en todo cuadrilátero convexo el perímetro es mayor que la suma de las 2 diagonales.

4. Demuestre que en todo cuadrilátero convexo el perímetro es menor que el doble de la suma de las 2 diagonales.

5. En un triángulo ΔABC, el punto *D* esta sobre $\overline{AC}$, de manera que $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo $\measuredangle ABC$. Pruebe que $AB > AD$.

6. En un triángulo ΔABC, el punto *D* esta sobre $\overline{AC}$ y se tiene, además, que $AB=DB$. Pruebe que $AB \neq BC$.

7. En la siguiente figura



Donde $\overline{BI} \perp \overline{AC}$, $\overline{DJ} \perp \overline{AC}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AJ} \cong \overline{IC}$. Demuestre que los triángulos ΔAIB y ΔCJD son congruentes.

Capítulo

VIII

Paralelismo y cuadriláteros

> "[El Universo] está escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las que es humanamente imposible entender una sola palabra; sin ellas, uno vaga desesperadamente por un oscuro laberinto..."
>
> Galileo

Introducción

En este capítulo, se estudiarán algunas propiedades de las figuras geométricas simples, a saber, cuadriláteros. Aquí se incluirá un nuevo axioma, conocido como el Quinto Postulado de Euclides o, simplemente, el "axioma de las paralelas". Este axioma nos permitirá obtener nuevas propiedades de los triángulos, cuyo estudio se inició en el capítulo anterior.

En la **Sección 1** se estudia un nuevo tipo de demostración, la demostración por contradicción. En la **Sección 2** se estudia una configuración muy particular formada por 3 rectas, 2 rectas que son cortadas por una tercera recta transversal. Se introduce luego el axioma de las paralelas, que es foco de innumerables disputas acerca de su necesidad (muchos intentos de demostrarlo terminaron en un fracaso) y su intenso análisis permitió abrir la puerta que conduce hacia las geometrías no euclidianas (o geometrías de espacios curvos). En todas estas geometrías alternativas, el axioma de las paralelas es reemplazado por alguna variante. En nuestro caso de la geometría plana, podremos caracterizar aprovechando este axioma, rectas paralelas a partir de los ángulos que se forman al cortar una tercera recta (una transversal). En la **Sección 3** se examinan algunas consecuencias del axioma de las paralelas; en particular, obtendremos el valor de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo. En la **Sección 4** se estudia un cuadrilátero muy particular, el paralelogramo, y se encuentran diversas caracterizaciones para él. Finalmente, en la **Seccion 5** se estudian teoremas de concurrencia de elementos secundarios del triángulo, esto es, demostraremos que las tres alturas de un triángulo pasan por un mismo punto, las tres bisectrices pasan por un mismo punto, las tres mediatrices pasan por un mismo punto y las tres medianas de un triángulo pasan por un mismo punto.

1. Demostraciones por contradicción

Una técnica común para demostrar afirmaciones en matemática, distinta de las utilizadas hasta el momento, es la de *demostración por contradicción,* o *demostración por reducción al absurdo*.

La línea argumental es la siguiente: suponemos que la afirmación *P*, que buscamos demostrar, es falsa. Usando la falsedad de *P* como premisa, llegamos a demostrar o a deducir una segunda afirmación *Q*, y sabemos por propiedades previas, que su negación es verdadera. Es decir, logramos probar que una afirmación *Q* es verdadera y que su negación también lo es (una *contradicción*). Como esto es imposible, pues no podemos tener contradicciones en matemática, entonces la afirmación *P* que habíamos supuesto falsa, no puede ser falsa (de serlo, obtenemos una contradicción), y por lo tanto es necesariamente verdadera.

Un ejemplo de demostración por contradicción, que es clásico dentro de las demostraciones, es la demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2.

Ejemplo

La raíz cuadrada de 2 es un número irracional.

Aquí la proposición *P* es: "la raíz cuadrada de 2 es un número irracional".

Demostración: Supongamos que lo que queremos demostrar, *P*, es falso. O sea, supongamos que existe un racional $s > 0$ tal que $s^2 = 2$.

Por ser s un número racional, puede ser escrito como $s = \dfrac{m}{n}$ con m y n primos entre sí (o sea, sin factores comunes aparte del 1). Así, la proposición Q: "m y n son primos entre si", es verdadera.

Dado que $s^2 = 2$, tendríamos $m^2 = 2n^2$, por lo que m^2 es par, y por ende m es par.

Pero entonces m^2 sería divisible por 4, por lo que $2n^2$ también es divisible por 4, y por lo tanto, n^2 sería par y n sería par.

Sin embargo, que m y n sean pares dice que la proposición "m y n no son primos entre sí", la negación de *Q*, es verdadera; así hemos obtenido una contradicción.

Esta contradicción nos lleva a concluir que nuestra suposición inicial, "existe un racional $s > 0$ tal que $s^2 = 2$", tiene que ser falsa. Es decir, es verdadero que "*no* existe un racional $s > 0$ tal que $s^2 = 2$", o más directamente, "la raíz cuadrada de 2 es un número irracional".

Se cree que esta demostración fue descubierta por Hipaso de Metaponto, discípulo de Pitágoras, y cuenta la leyenda que, al descubrir Hipaso esta demostración durante un viaje en barco, entusiasmado le comunicó esto a sus condiscípulos, quienes como premio ¡lo arrojaron por la borda!

Sucede que este resultado contradice uno de los dogmas de los pitagóricos, a saber, que todas las magnitudes que aparecen en la naturaleza (y en particular en la geometría) son conmensurables, o sea, dadas 2 magnitudes del mismo tipo existe una unidad común que está contenida un número entero de veces en cada una de ellas. Justamente, este resultado indica que la diagonal del cuadrado y uno de sus lados tienen medidas inconmensurables.

2. Rectas intersecadas por una transversal

Recordemos la definición de paralelismo ya presentada en el **Capítulo VI**.

Definición VI. 3	2 rectas se dicen *paralelas* si son disjuntas, o sea, si no tienen puntos en común. Si 2 rectas son paralelas, lo denotaremos por el símbolo $\parallel$, en caso contrario, usaremos el símbolo $\nparallel$.

Esta definición es solo válida en el plano. Para el caso de rectas en el espacio tridimensional, la condición de ser disjuntas no asegura el paralelismo y, en ese caso, se debe exigir adicionalmente que ambas rectas sean coplanares, esto es, que estén contenidas en un mismo plano [1]. En todo lo que sigue, todos los objetos geométricos referenciados (puntos, rectas, segmentos, circunferencias, etc.) estarán siempre contenidos en un mismo plano, que llamaremos "el plano". Notemos, además, que con esta definición, una recta no es paralela a sí misma. Esto puede variar de un autor a otro, y de un libro a otro.

Definición VIII. 1	Sean l_1 y l_2 2 rectas distintas y sea T una recta que interseca a ambas en 2 puntos distintos, P en l_1 y Q en l_2, diremos que T es una transversal a las rectas l_1 y l_2.

Las propiedades más importantes de rectas intersecadas [2] por una transversal tienen que ver con que dichas rectas sean o no paralelas. Así, en esta sección estudiaremos condiciones en que podemos asegurar que las rectas cortadas por la transversal son paralelas (condiciones suficientes para el paralelismo de estas), y más adelante en este capítulo estudiaremos consecuencias del paralelismo de dichas rectas (o sea, condiciones necesarias para que las rectas sean paralelas).

Un error frecuente al estudiar rectas cortadas por una transversal es hacer la suposición (consciente o inconsciente) de que dichas rectas son siempre paralelas, aunque es fácil ver que este no es el caso (revisar **Figura VIII.1**).

Dadas 2 rectas cortadas por una transversal, nos fijaremos en los pares de ángulos que se forman entre las rectas y la transversal. De estos pares de ángulos, no nos interesan aquellos en los que ambos ángulos tienen el mismo vértice, ya que en ese caso o los ángulos son opuestos por el vértice (y por lo tanto congruentes) o adyacentes (y por lo tanto suplementarios). Así, por ejemplo, en la figura siguiente, nos interesan parejas de ángulos formadas por un ángulo tomado entre 1, 2, 3 y 4, y otro tomado entre 5, 6, 7 y 8.

[1] Las rectas disjuntas que no son coplanares son llamadas *alabeadas*.

[2] También diremos "rectas cortadas por una transversal".

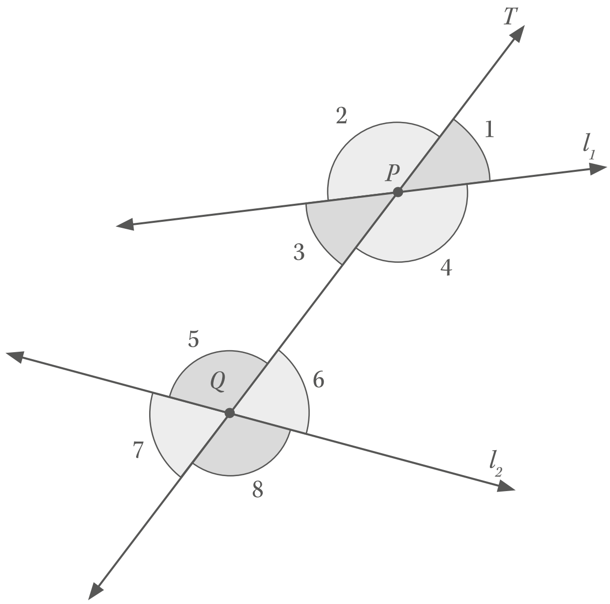


Figura VIII.1: 2 rectas cortadas por una transversal.

Los ángulos que se forman en la situación descrita son divididos en internos (si están "entre" las rectas cortadas por la transversal) y externos (si no); así, en la **Figura VIII.1** los ángulos **3**, **4**, **5** y **6** son internos, mientras que los **1**, **2**, **7** y **8** son externos.

También distinguimos entre ángulos "a cada lado de la transversal". Por ejemplo, en la misma figura, los ángulos **2**, **3**, **5** y **7** están a un lado de la transversal, mientras que **1**, **4**, **6** y **8** están al otro lado[3].

Usando esta distinción, podemos clasificar los pares de ángulos más utilizados.

- Un par de ángulos formados por la transversal en cada una de las rectas l_1 y l_2 se dicen *alternos,* si están uno a cada lado de la transversal. Dentro de esta categoría, distinguiremos las siguientes clases de pares de ángulos:

  Alternos internos si además de ser alternos, ambos ángulos son internos. Así, en la **Figura VIII.1**, los ángulos **3** y **6**, así como los ángulos **4** y **5**, son pares de ángulos alternos internos.

  Alternos externos: si además de ser alternos, ambos ángulos son exteriores. Así, en la **Figura VIII.1**, los ángulos **2** y **8**, así como los ángulos **1** y **7**, son pares de ángulos alternos externos.

- Si **2** ángulos formados por la transversal en cada una de las rectas l_1 y l_2 no son alternos, diremos que están "al mismo lado de la transversal". Dentro de esta categoría, distinguiremos las siguientes clases de pares de ángulos:

  Ángulos correspondientes si además de estar al mismo lado de la transversal, uno es interior y el otro es exterior. Así, en la **Figura VIII.1**, los pares de ángulos **2** y **5**, **1** y **6**, **3** y **7**, y **4** y **8** son correspondientes.

[3] En este caso, podríamos decir que los primeros están "al lado izquierdo" y los otros "al lado derecho" de la transversal. En otros casos, quizás sea mejor hablar de ángulos "sobre" y "bajo" esta.

Ángulos internos del mismo lado: si además de estar al mismo lado de la transversal, ambos son interiores. Así, en la **Figura VIII.1**, los pares de ángulos 3 y 5, y 4 y 6 son internos del mismo lado.

Ángulos externos del mismo lado: si además de estar al mismo lado de la transversal, ambos son exteriores. Así, en la **Figura VIII.1**, los pares de ángulos 2 y 7, y 1 y 8 son externos del mismo lado.

2.1 Condiciones suficientes para que las rectas sean paralelas

El teorema básico de esta sección es el siguiente:

Teorema VIII. 1

Sean l_1 y l_2 2 rectas cortadas por una transversal T. Si un par de ángulos alternos internos son congruentes, entonces l_1 y l_2 son paralelas.

Gráficamente, si los ángulos α y β de la **Figura VIII.2** son congruentes, entonces podemos concluir que las rectas l_1 y l_2 son paralelas. Lo mismo se concluye si γ y δ son congruentes.

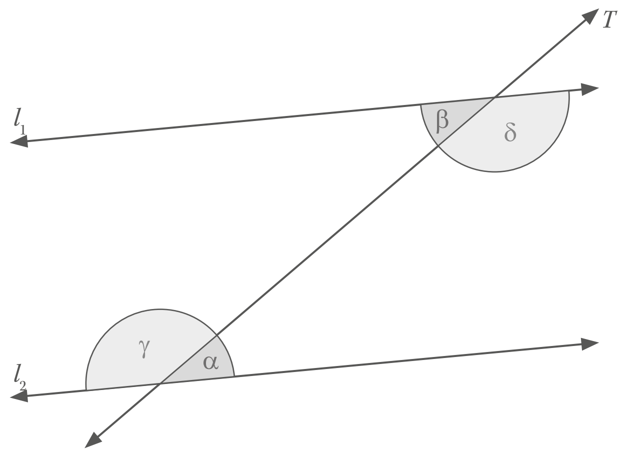


Figura VIII.2.

Demostración

Sean l_1 y l_2 2 rectas como en la **Figura VIII.3**, supongamos que 2 ángulos alternos internos, digamos $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 6$, son congruentes.

Como debemos demostrar que $l_1 \parallel l_2$, supondremos que esto es falso, o sea que $l_1 \nparallel l_2$. Si logramos llegar a una contradicción, habremos logrado nuestro objetivo.

Bajo la suposición de que $l_1 \nparallel l_2$, ambas rectas deben tener un punto común *R*. Supongamos que dicho punto se encuentra en el mismo lado de la transversal que $\measuredangle 3$.

Entonces, se forma un triángulo ΔPQR, donde $\measuredangle 3$ es un ángulo interior y $\measuredangle 6$ es un ángulo exterior no adyacente a $\measuredangle 3$ (ver **Figura VII.2**).

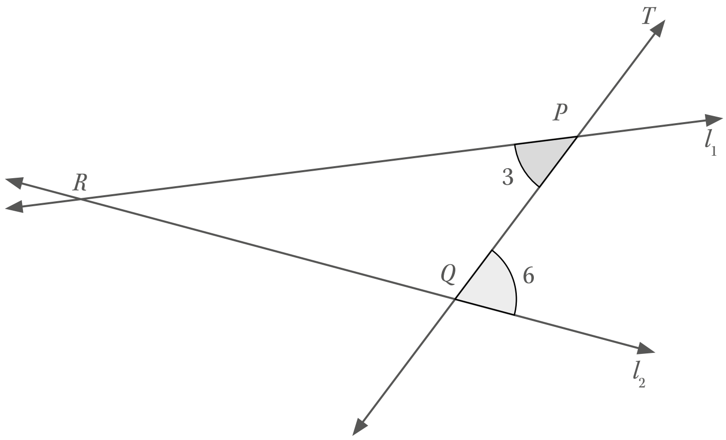


Figura VIII.3.

Así, por hipótesis, sabemos que $m\measuredangle 3 = m\measuredangle 6$ y, por otro, lado sabemos que $m\measuredangle 3 < m\measuredangle 6$, pues la medida de un ángulo exterior es mayor que la medida de cualquier ángulo interior no adyacente (**Teorema VII.6**). Así, hemos llegado a una contradicción, lo que prueba que nuestra suposición —que l_1 y l_2 no son paralelas— es imposible. Esto completa la demostración.❒

Comentario:

En esta demostración, la contradicción se forma a partir de la proposición *Q* correspondiente a "$m\measuredangle 3 \neq m\measuredangle 6$" que es verdadera (se probó que $m\measuredangle 3 < m\measuredangle 6$). Y por hipótesis se sabe que $m\measuredangle 3 = m\measuredangle 6$. Esta es entonces la contradicción buscada.

Para pensar

¿Por qué no es demasiado particular suponer que los ángulos alternos internos congruentes son $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 6$? ¿Qué ocurriría si en lugar de esto los ángulos congruentes fueran $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 5$?
Del mismo modo, cuando supusimos que las rectas l_1 y l_2 se encontraban en un punto *R*, este podría haber estado hacia el otro lado de la transversal. ¿Por qué no es tampoco demasiado particular?

Cuando en una demostración hay varios casos que, si bien son distintos, pueden ser tratados de la misma manera (cambiando pequeños detalles), es costumbre mencionar que decidimos analizar solo uno de dichos casos "sin pérdida de generalidad".

Otra forma de expresar la misma idea es analizar uno de los casos y después mencionar que el o los otros casos se tratan de manera análoga.

Así, en nuestra demostración anterior, podríamos haber dicho:

"Sin pérdida de generalidad, supondremos que l_1 y l_2 se cortan del lado de la transversal que contiene a $\measuredangle 3$".

Otra forma de decir lo mismo sería:

"Si las rectas l_1 y l_2 se cortan del lado de la transversal que contiene a $\measuredangle 3$, entonces...; el caso en que dichas rectas se cortan del otro lado es análogo".

Una variante del **Teorema VIII.1** es la siguiente:

Teorema VIII. 2

Sean l_1 y l_2 2 rectas cortadas por una transversal T. Si un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces l_1 y l_2 son paralelas.

A primera vista, parecería que necesitamos demostrar este teorema por contradicción, de manera similar a como demostramos el **Teorema VIII.1**. Sin embargo, es posible dar una demostración más sencilla.

Demostración

Supongamos que en la **Figura VIII.1** se tiene $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 5$ (los demás casos son análogos). Entonces, por ser $\measuredangle 4$ opuesto por el vértice con $\measuredangle 2$, tenemos $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 2 \cong \measuredangle 5$, de lo que concluimos que $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 5$.

Así, tenemos 2 ángulos alternos internos (a saber, $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 5$) congruentes, por lo que —aplicando directamente el **Teorema VIII.1**— obtenemos que $l_1 \parallel l_2$.$\square$

Ejercicios

1. Demuestre el siguiente teorema:

   Teorema VIII.3. Sean l_1 y l_2 2 rectas cortadas por una transversal T. Si un par de ángulos alternos externos son congruentes, entonces l_1 y l_2 son paralelas.

2. Demuestre el siguiente teorema:

   Teorema VIII.4. Sean l_1 y l_2 2 rectas cortadas por una transversal T. Si un par de ángulos internos del mismo lado entre los que se forman son suplementarios, entonces l_1 y l_2 son paralelas.

2.2 El postulado de las paralelas

Note cómo todos los teoremas de la sección previa tienen la forma "si ocurre alguna condición entre los ángulos que forman las rectas con la transversal, entonces las rectas son paralelas".

O sea, todos estos teoremas hablan de condiciones suficientes para que las rectas dadas sean paralelas. Para poder obtener conclusiones a partir del hecho que las rectas sean paralelas, se requiere un axioma adicional. Quizás el axioma (o postulado) más famoso de la Geometría Euclidiana: este es llamado el "Quinto Postulado", o "postulado de las rectas paralelas".

Hoy en día, formulamos este postulado de la siguiente forma:

Axioma VIII. 1 Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y solamente una recta paralela a ella.

Esta no es la redacción de Euclides, sino una redacción equivalente debida a Proclo[4]. Originalmente, Euclides formuló su postulado como sigue:

"Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte menores que 2 rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos".

¿Por qué los griegos fueron tan reticentes a aceptar este postulado?

Parte del problema es que, en su redacción original, el postulado habla de que 2 rectas se cortarán "en algún punto". Pero eso puede pasar muy lejos. Los griegos le tenían espanto a hablar de cosas que ocurrieran "en el infinito". Véase por ejemplo el comentario de Proclo:

"La afirmación de que como convergen más y más, a medida que se prolongan, llegarán alguna vez a encontrarse, es una afirmación verosímil, pero no es necesaria a falta de un argumento que pruebe que esto es verdad acerca de las líneas rectas. Pues el hecho de que haya algunas líneas que se aproximan indefinidamente, pero permanecen sin tocarse, por más improbable y paradójico que parezca, también es cierto y está completamente comprobado en relación con líneas de otro tipo. ¿Por qué en el caso de las rectas no es posible lo mismo que ocurre con las líneas mentadas?"

A lo largo de la historia, muchos matemáticos (Proclo, Girolamo Saccheri, Omar Khayam, etc.) intentaron demostrar el postulado de las paralelas a partir de los otros.

En el siglo XIX, Nikolái Lobachevski, János Bolyai, y Bernhard Riemann publicaron trabajos en los que mostraban que, suponiendo que el postulado era falso, podían construirse nuevas geometrías, que fueron llamadas geometría elíptica y geometría hiperbólica.

Esta última fue usada por Einstein para modelar el universo, en su Teoría de la Relatividad.

[4] Proclo fue un filósofo griego neoplatónico (410-485 d.C.).

2.3 Condiciones necesarias para que las rectas sean paralelas

El postulado de las paralelas nos permite demostrar los recíprocos de los teoremas demostrados en la **Sección 2.1**, vale decir, propiedades que satisfacen las rectas paralelas cortadas por una transversal. El teorema básico de esta sección es el siguiente:

Teorema VIII. 5

Si 2 rectas paralelas l_1 y l_2 son cortadas por una transversal, entonces los pares de ángulos alternos internos que se forman son congruentes.

Gráficamente, este teorema dice que si las rectas l_1 y l_2 de la **Figura VIII.4** son paralelas, entonces los ángulos $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ son congruentes. Se concluye lo mismo con el otro par de ángulos alternos internos.

Demostración

De nuevo, recurrimos a una demostración por contradicción.

Supongamos que $l_1 \parallel l_2$ y que la recta transversal T forma ángulos alternos internos $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ no congruentes (ver **Figura VIII.4**).

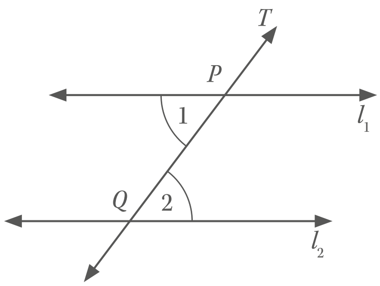


Figura VIII.4.

Sabemos (por el **Axioma VI.6**, **del transportador** y la **Construcción VI.2**) que es posible trazar una recta que pase por el punto P y que forme con T un ángulo congruente con el ángulo $\measuredangle 2$.

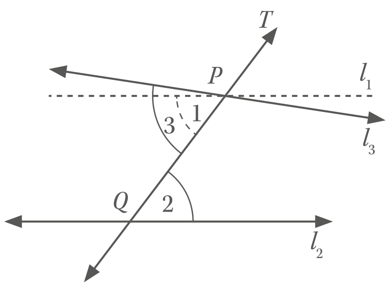


Figura VIII.5.

Así, por el **Teorema VIII.1**, tenemos que l_3 debe ser paralela a l_2.

De este modo, por el punto P pasan 2 rectas que son paralelas a l_2, a saber, l_1 y l_2. Pero esto contradice el postulado de las paralelas, ya que entonces por P no habría una única recta paralela a l_2. Con esta contradicción, se termina la demostración.□

Este teorema nos permite demostrar el siguiente resultado.

Teorema VIII. 6

Si 2 rectas paralelas l_1 y l_2 son cortadas por una transversal, entonces los pares de ángulos correspondientes que se forman son congruentes.

Gráficamente este teorema dice que si las rectas l_1 y l_2 de la **Figura VIII.5** son paralelas, entonces los ángulos $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ son congruentes. Se concluye lo mismo con el otro par de ángulos correspondientes.

Demostración

Al igual que al demostrar el **Teorema VIII.2**, no necesitamos repetir toda la demostración del teorema anterior.

Sean l_1 y l_2 2 rectas paralelas cortadas por una transversal T, y sean $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$, 2 ángulos correspondientes formados entre ellas. Sin perder generalidad, podemos suponer que dichos ángulos son como los mostrados en la **Figura VIII.5**.

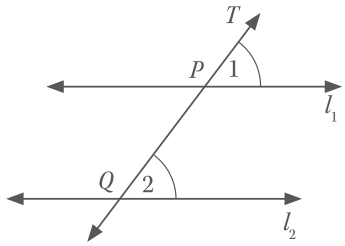


Figura VIII.5.

Pero entonces, el ángulo $\measuredangle 3$ es opuesto por el vértice con $\measuredangle 1$, y, por lo tanto, según el **Teorema VI.2** $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 1$.

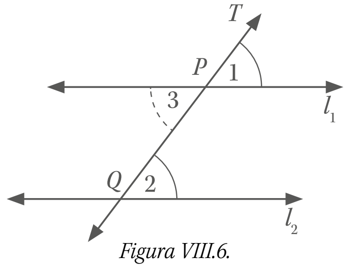


Figura VIII.6.

Por otra parte, $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 2$ son alternos internos entre paralelas, y entonces, por el **Teorema VIII.5** tenemos que $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 2$.

De las 2 últimas congruencias de ángulos se desprende que $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$.❒

En resumen

Dadas 2 rectas cortadas por una transversal, estas rectas serán paralelas si y solo si un par de ángulos alternos internos son congruentes, o también si un par de ángulos correspondientes son congruentes.

El **Teorema VIII.6** está diciendo que si tenemos 2 rectas paralelas l_1 y l_2 y una transversal m a ellas dibujadas en un papel, y luego superponemos las rectas l_1 y l_2 de forma tal que el punto de intersección entre l_1 y m y el punto de intersección entre l_2 y m coincidan, entonces los pedazos de recta m que quedaron después del corte se ven como una recta continua.

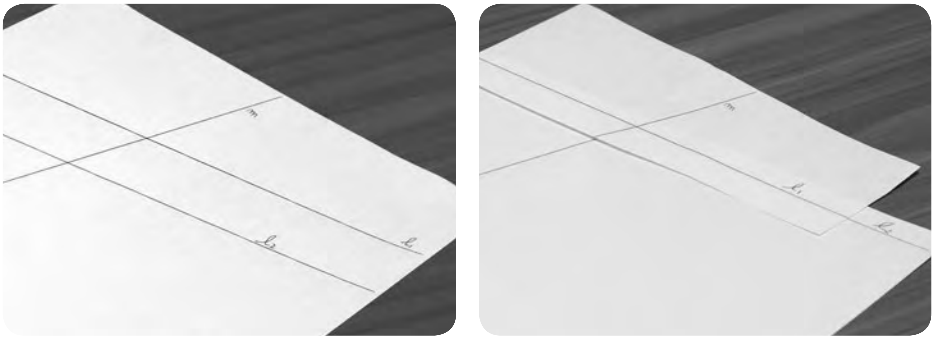


Figura VII.7.

Lo cual no ocurre en el caso de que las rectas l_1 y l_2 no sean paralelas.

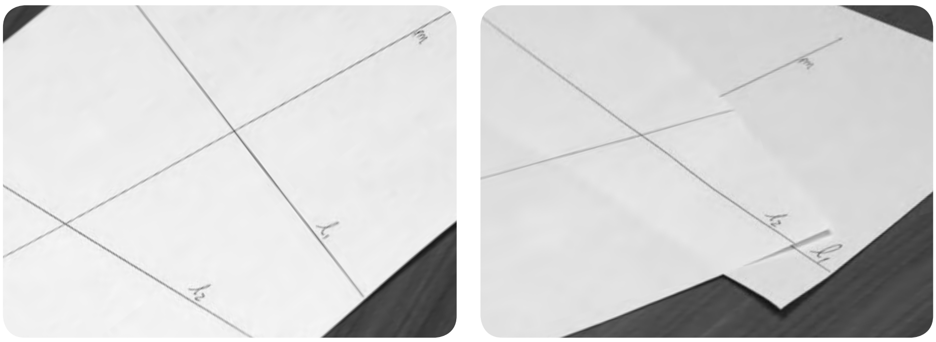
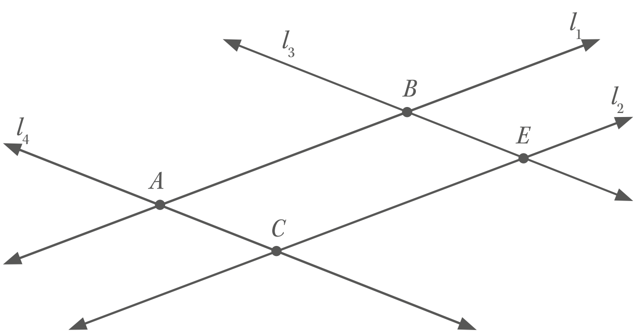


Figura VII.8.

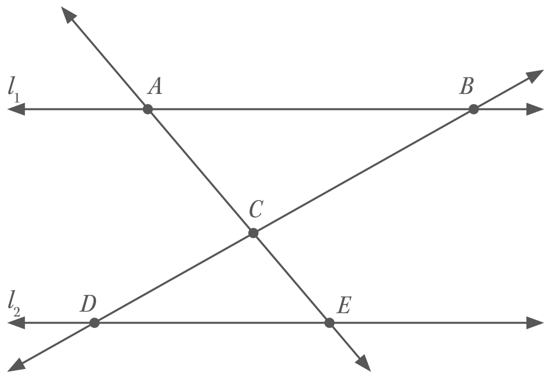
Ejercicios

1. Considere 4 rectas y suponga que l_1 y l_2 son paralelas, que l_3 y l_4 son paralelas, y que l_1 no es paralela a l_3.

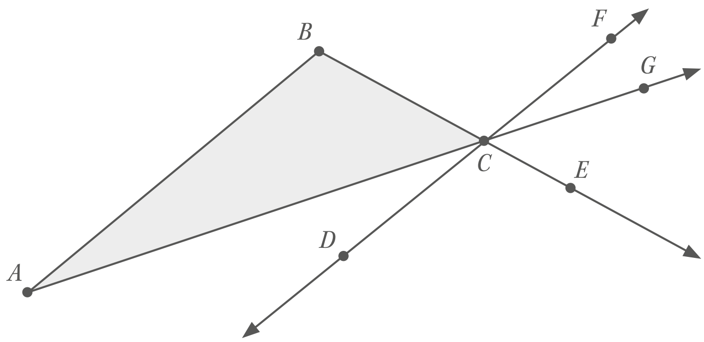


Suponga además que el ángulo $\measuredangle EBA$ mide 140°. Determine la medida de los ángulos $\measuredangle BAC$, $\measuredangle ACE$ y $\measuredangle CEB$.

2. Suponga que l_1 y l_2 son paralelas. Muestre que los triángulos ΔABC y ΔDEC tienen sus ángulos interiores congruentes.



3. Considere un triángulo ΔABC y tracemos la única recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por C, a saber, la recta $\overleftrightarrow{DF}$, y extendamos los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



a. Dé un argumento para afirmar que los ángulos $\measuredangle CBA$ y $\measuredangle ECD$ miden lo mismo.
b. Dé un argumento para afirmar que los ángulos $\measuredangle FCG$ y $\measuredangle BAC$ miden lo mismo.

4. Demuestre el siguiente teorema:

Teorema VIII.7. Si 2 rectas paralelas l_1 y l_2 son cortadas por una transversal, entonces los pares de ángulos alternos externos que se forman son congruentes.

5. Demuestre el siguiente teorema:

Teorema VIII.8. Si 2 rectas paralelas l_1 y l_2 son cortadas por una transversal, entonces los pares de ángulos internos del mismo lado que se forman son suplementarios.

3. Consecuencias del postulado de las paralelas

El postulado de las paralelas tiene varias consecuencias interesantes. En esta sección, demostramos algunas de ellas.

Teorema VIII. 9

En todo triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos es 180°.

Demostración

Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Por el postulado de las paralelas, sabemos que existe una recta l paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por C (ver **Figura VIII.9**). De hecho, el postulado nos dice que esta recta es única, aunque aquí no necesitaremos la unicidad.

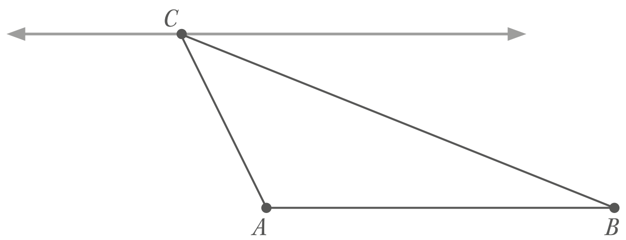


Figura VIII.9.

Así, en el punto C se forman los ángulos $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$, y tenemos que $\measuredangle 1 \cong \measuredangle BAC$ y $\measuredangle 2 \cong \measuredangle ABC$; en ambos casos gracias al **Teorema VIII.5**.

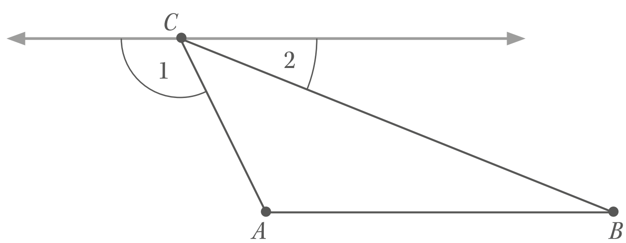


Figura VIII.10.

Como $m\measuredangle 1 + m\measuredangle ACB + m\measuredangle 2 = 180°$, tenemos:

$$m\measuredangle BAC + m\measuredangle ACB + m\measuredangle ABC = m\measuredangle 1 + m\measuredangle ACB + m\measuredangle 2 = 180°. \square$$

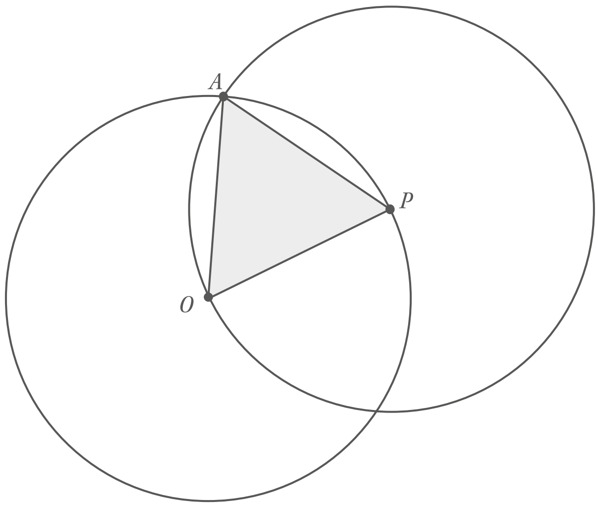
En el caso particular del triángulo equilátero, tenemos que todos sus ángulos interiores son congruentes, digamos que la medida de uno (y de todos) de sus ángulos es α, entonces:

$$\alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha = 180°$$

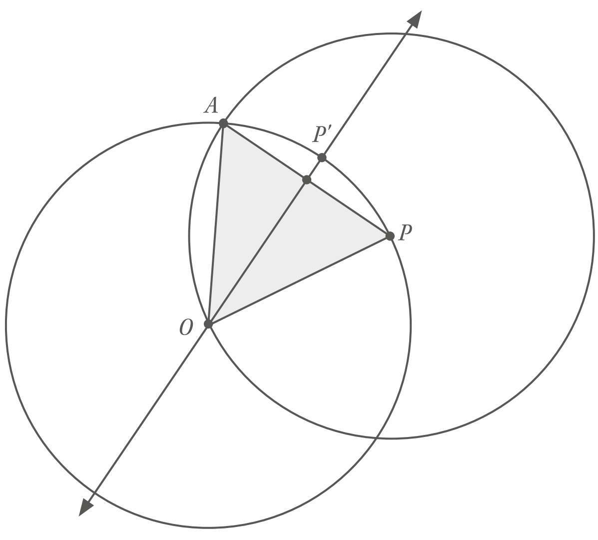
Por lo tanto, el ángulo interior de un triángulo equilátero mide 60°. Esto nos permite hacer algunas construcciones.

Ejemplo

Rotemos un punto P en torno a O en un ángulo de 30º. Tomemos un punto O y un punto P distintos. Tracemos la circunferencia de centro O y radio OP y la circunferencia de centro P y radio OP, y denotemos por A una de las intersecciones de esas circunferencias.



Notemos que el triángulo ΔPOA es equilátero, por lo tanto, el ángulo $\measuredangle POA$ mide 60°. Entonces, ahora nos basta trazar la bisectriz de ese ángulo. Como todo triángulo equilátero es isósceles, nos basta trazar la mediatriz del segmento $\overline{AP}$ (Teorema VII.2).



Denotemos por P' el punto de intersección entre la mediatriz (ver Construcción VII.3) y la circunferencia de centro O y radio $\overline{OP}$. El punto P' es la imagen de P al aplicarle una rotación de 30° en torno a O.

A continuación presentaremos 2 consecuencias del **Teorema VIII.9**:

Teorema VIII.10

En todo polígono convexo[5] de n lados, la suma de las medidas de sus ángulos interiores es $(n-2)180°$.

La demostración es un ejercicio para el lector.

Teorema VIII.11: criterio de congruencia LAA

Dados 2 triángulos cualesquiera, si 2 ángulos y un lado cualquiera de uno de ellos son congruentes a los elementos correspondientes del otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Demostración

Dados ΔABC y ΔDEF 2 triángulos en que 2 ángulos de ΔABC son congruentes a los ángulos correspondientes de ΔDEF, y un lado de ΔABC es congruente al lado correspondiente de ΔDEF.

Sin perder generalidad, supongamos que $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ y $\measuredangle ACB \cong \measuredangle DFE$. Entonces,
$m\measuredangle BAC = 180 - (m\measuredangle ABC + m\measuredangle ACB) = 180 - (m\measuredangle DEF + m\measuredangle DFE) = m\measuredangle EDF$,
por lo que $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$.

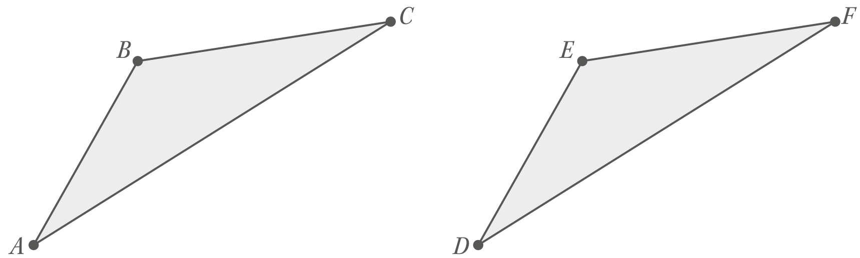


Figura VIII. 11.

Así, tenemos la congruencia de todos los pares de ángulos, por lo que si agregamos la congruencia de un par de lados correspondientes, estamos en condiciones de aplicar directamente el **Criterio** *ALA*, y en consecuencia, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. ❑

Notemos que al decir que 2 triángulos tienen 2 ángulos congruentes y como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, estamos diciendo que sus 3 ángulos son congruentes.

El siguiente teorema es una versión más fuerte del **Teorema VII.6**, el cual afirmaba que en todo triángulo la medida de cualquiera de los ángulos exteriores es mayor que las medidas de cada uno de los ángulos interiores no adyacentes a él.

[5] No enunciamos esta propiedad para polígonos cualesquiera, ya que si un polígono no es convexo, entonces uno de sus ángulos interiores mide más de 180°.

Teorema VIII.12

En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.

Demostración

En un triángulo ΔABC cualquiera, prolónguese $\overrightarrow{AB}$ para obtener el ángulo exterior $\measuredangle DBC$.

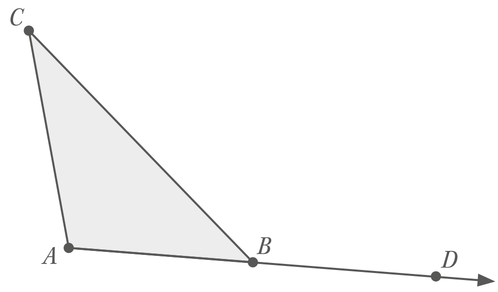


Figura VIII.12.

Sabemos que $m\measuredangle DBC = 180 - m\measuredangle ABC$ (ya que ambos ángulos son adyacentes).

Pero como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 (por **Teorema VIII.9**) se tiene que:

$$180 = m\measuredangle BAC + m\measuredangle ACB + m\measuredangle ABC$$

Por lo que

$$\begin{aligned} m\measuredangle DBC &= 180 - m\measuredangle ABC = (m\measuredangle BAC + m\measuredangle ACB + m\measuredangle ABC) - m\measuredangle ABC \\ &= m\measuredangle BAC + m\measuredangle ACB \ \square \end{aligned}$$

Teorema VIII.13

Si 2 rectas distintas son paralelas a una tercera, entonces son paralelas entre sí.

Demostración

Sean l_1, l_2 y l_3 3 rectas tales que $l_1 \parallel l_2$ y $l_2 \parallel l_3$.

Si $l_1 \nparallel l_3$, entonces l_1 y l_3 tendrían un punto en común, digamos P.

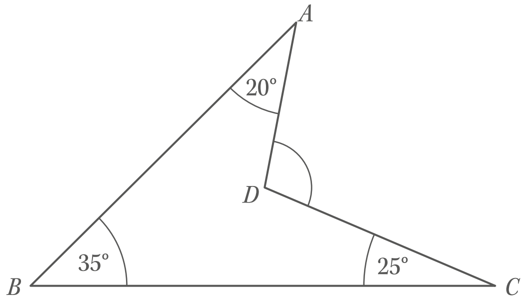
Pero entonces P es un punto fuera de l_2 por el que pasan (al menos) 2 paralelas a dicha recta, lo que contradice el postulado de las paralelas. $\square$

En resumen

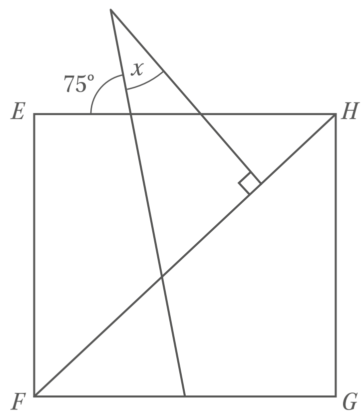
El postulado de las paralelas permite demostrar importantes resultados, por ejemplo, que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

Ejercicios de la sección

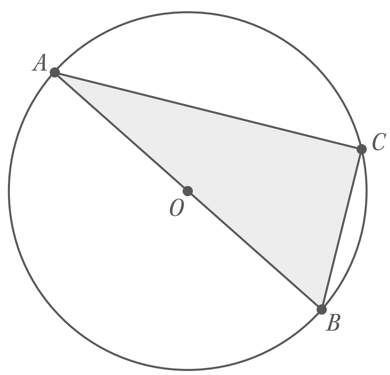
1. Considerando la figura y los datos en ella, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle ADC$?



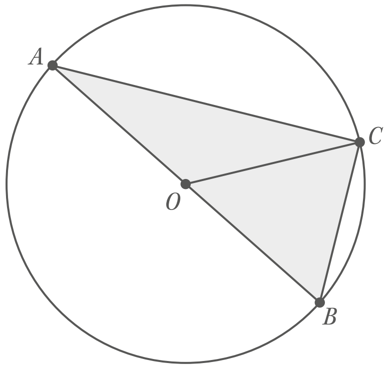
2. La figura *EHGF* es un cuadrado. Determine el valor de x.



3. Considere la circunferencia de centro O que tiene inscrito un triángulo, donde uno de sus lados es un diámetro de la circunferencia.



Este ejercicio tiene como meta mostrar que el triángulo ΔABC es rectángulo en C. Para ello, trazaremos el radio $\overline{OC}$.



a. Muestre que los triángulos ΔBOC y ΔCOA son isósceles.

b. Si el ángulo $\measuredangle COB$ mide α, entonces muestre que $\measuredangle OCB$ mide $90 - \frac{\alpha}{2}$.

c. Si el ángulo $\measuredangle COA$ mide β, entonces muestre que $\measuredangle ACO$ mide $90 - \frac{\beta}{2}$.

d. Demuestre que la suma $\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(90 - \frac{\beta}{2}\right)$ es igual a 90.

e. Demuestre que el ángulo $\measuredangle ACB$ es recto.

4. Demuestre el siguiente teorema:

   Teorema VIII.14. Si una recta interseca a una de 2 rectas paralelas, entonces interseca a la otra.

5. Demuestre el siguiente teorema:

   Teorema VIII.16. En todo triángulo, 2 mediatrices cualesquiera se intersectan.

6. Indique cómo realizar la siguiente construcción:

   Construcción VIII.1. Dada una recta l y un punto P fuera de ella, construir la recta paralela a l que pasa por P.

7. Dado P y O puntos distintos, construya la rotación de P en torno a O en un ángulo de 120°.

8. Construya un triángulo rectángulo, donde uno de sus ángulos mida 30°.

9. Demuestre que la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es 360°.

4. Paralelogramos

Recordemos que un cuadrilátero es un polígono de 4 lados. Dicho de otra forma, es la unión de 4 segmentos determinados por 4 puntos entre los cuales no hay 3 colineales, y de modo que los segmentos se encuentren solo en los extremos, y que cada segmento se interseque con exactamente otros 2. Los puntos que determinan los lados son llamados los *vértices* del cuadrilátero.

Al igual que en los triángulos, en un cuadrilátero se forman *ángulos interiores* y *ángulos exteriores*.

Dos lados que comparten un vértice son *adyacentes*; y 2 lados sin vértices comunes se llaman *opuestos*.

Dos ángulos interiores que comparten un lado son *consecutivos*, y en caso contrario se llaman *opuestos*.

4.1 Clasificación de los cuadriláteros

Dependiendo de si un cuadrilátero tiene o no pares de lados paralelos (y cuántos), recibe uno de los siguientes nombres:

Paralelogramo: si tiene 2 pares de lados paralelos.

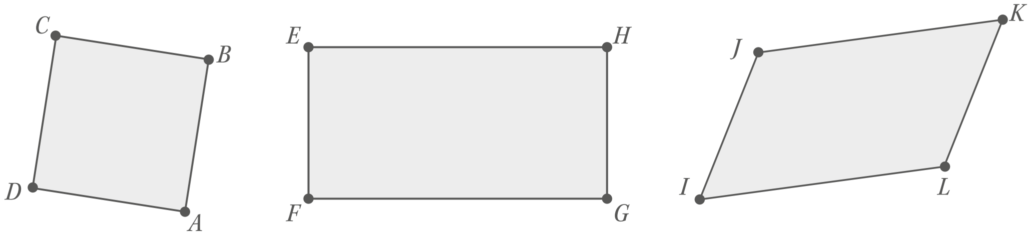


Figura VIII.12: paralelogramos.

Trapecio: si tiene exactamente un par de lados paralelos.

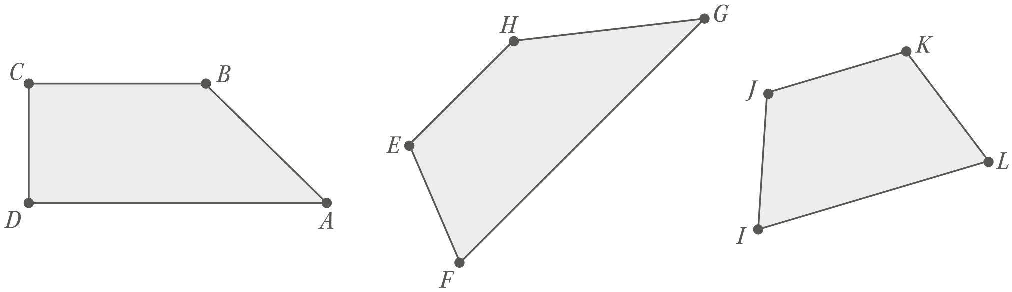


Figura VIII.13: trapecios.

Trapezoide: si no tiene pares de lados paralelos.

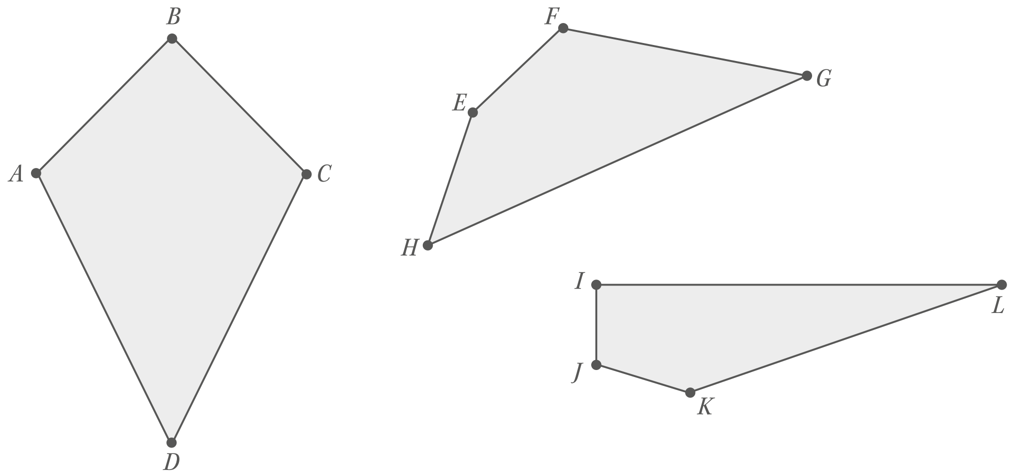


Figura VIII.14: trapezoide.

Los paralelogramos son los más ricos en propiedades, así que en los apartados siguientes nos concentraremos en ellos.

4.2 Propiedades de paralelogramos

A continuación, estudiaremos solo algunas propiedades de los paralelogramos. Dividiremos estas propiedades en 2 grupos: en primer lugar, veremos varias condiciones necesarias para que un cuadrilátero sea paralelogramo, es decir, condiciones que todo paralelogramo necesariamente cumple; en segundo lugar, revisaremos algunas condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

4.2.1 Condiciones necesarias para que un cuadrilátero sea un paralelogramo

Teorema VIII.15

En todo paralelogramo, los ángulos opuestos son congruentes y los ángulos consecutivos, son suplementarios.

Demostración

Consideremos un paralelogramo y denotemos las medidas de los ángulos interiores del mismo como α, β, γ y δ, como en la **Figura VIII.15**.

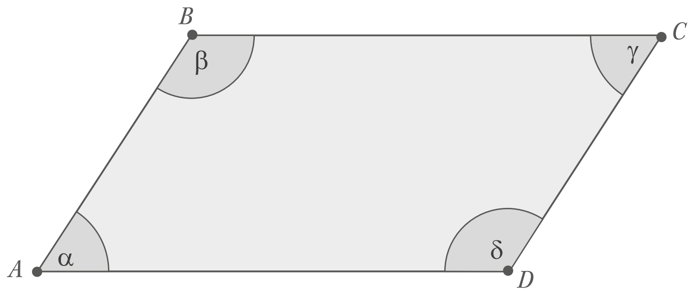


Figura VIII.15.

Consideremos las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{AB}$ (y por la transversal $\overleftrightarrow{CD}$), también consideremos las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{BC}$ (y por la transversal $\overleftrightarrow{AD}$).

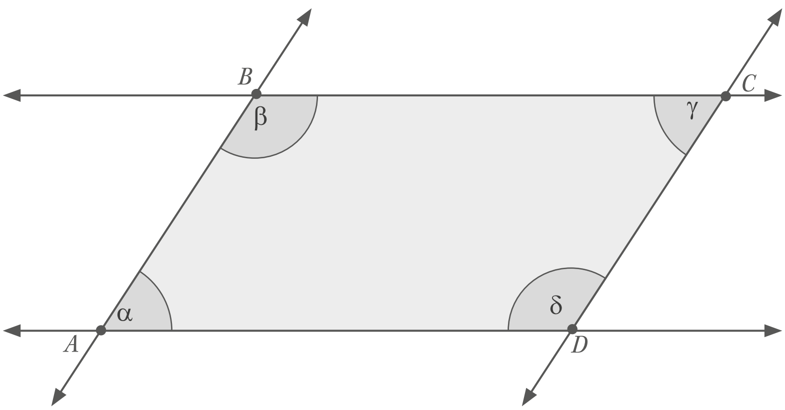


Figura VIII.16.

Por el **Teorema VIII.8**, podemos afirmar que $\alpha + \delta = 180°$ y que $\alpha + \beta = 180°$. De donde se deduce que $\beta = \delta$. Por la misma razón, $\beta + \gamma = 180°$ $\alpha + \beta = 180°$, de donde se deduce que $\alpha = \gamma$. Por lo tanto, los ángulos opuestos son congruentes y los ángulos consecutivos son suplementarios. ❐

Ahora probaremos un teorema que da cuenta de la congruencia de pares de lados en un paralelogramo.

Teorema VIII.16

En todo paralelogramo, los lados opuestos son congruentes.

Demostración

En la **Figura VIII.17**, hemos dibujado el paralelogramo $ABCD$ con la misma notación para los ángulos interiores que en la **Figura VIII.15.** Además trazamos la recta $\overleftrightarrow{AC}$ que es una transversal a las paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$. Por lo tanto $y = w$ y $x = z$ (por **Teorema VIII.5**). Entonces los triángulos ΔCAB y ΔACD son congruentes por **Criterio** ALA, pues $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ (de hecho son iguales), entonces $AB = CD$ y $BC = DA$. Lo cual termina con nuestra demostración. ❐

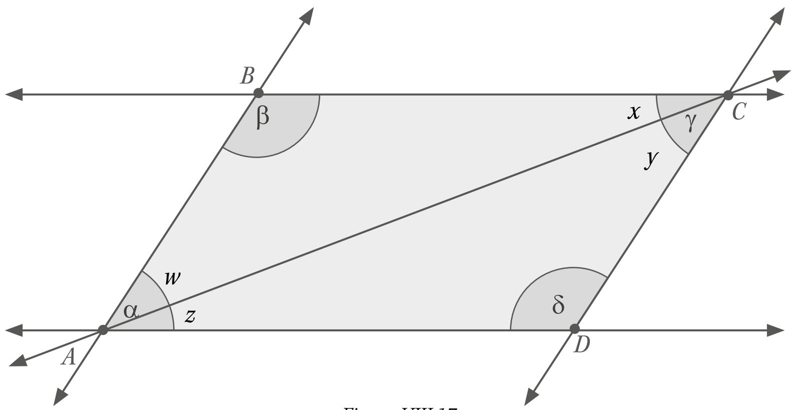


Figura VIII.17

4.2.2 Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo

Lo que haremos en esta subsección es demostrar los recíprocos de los teoremas anteriores.

Teorema VIII. 17

Si en un cuadrilátero ambos pares de lados opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Demostración

Sea ahora $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera en que ambos pares de lados opuestos son congruentes, trácese en él la diagonal $\overline{AC}$.

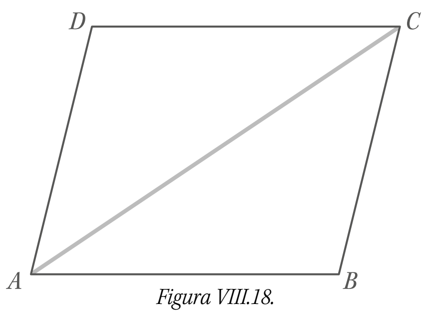


Figura VIII.18.

Por hipótesis, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DA}$. Además, $\overline{AC} \cong \overline{CA}$, por lo que —usando el criterio de congruencia *LLL*— obtenemos que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. De esto se deduce que $\measuredangle BAC \cong \measuredangle DCA$, de donde resulta que (**Teorema VIII.1**) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Que $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ se demuestra en forma análoga. ❐

Teorema VIII.18

Si en un cuadrilátero ambos pares de ángulos opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Demostración

ABCD es un cuadrilátero en el que ambos pares de ángulos opuestos son congruentes, y donde se ha trazado la diagonal $\overline{AC}$ (ver **Figura VIII.19**).

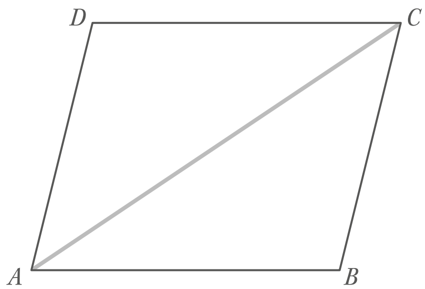


Figura VIII.19 $\measuredangle ABC \cong \measuredangle CDA$ *y* $\measuredangle BCD \cong \measuredangle DAB$

Por tener ΔABC y ΔACD congruentes los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle CDA$, respectivamente, tenemos que $m\measuredangle BAC + m\measuredangle BCA = m\measuredangle CAD + m\measuredangle ACD$. Pero, por hipótesis:

$$m\measuredangle BAC + m\measuredangle CAD = m\measuredangle BAD + m\measuredangle BCD = m\measuredangle BCA + m\measuredangle ACD.$$

De lo que se desprende (resolviendo un pequeño sistema de ecuaciones) que $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD$, lo que implica (**Teorema VIII.1**) que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ se prueba en forma análoga.❐

Teorema VIII.19

Si en un cuadrilátero un par de lados son congruentes y paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

La demostración es un ejercicio para el lector. Terminaremos esta sección con la siguiente propiedad:

Teorema VIII. 20

Un cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo si y solo si sus diagonales (es decir, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de la **Figura VIII.21**) se dimidian mutuamente.

Demostración

Sea *ABCD* un cuadrilátero cualquiera, tracemos sus diagonales, y sea *P* el punto en común entre ellas.

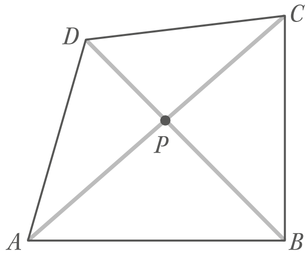


Figura VIII.21

Entonces, debemos demostrar 2 afirmaciones por separado:

- Si en *ABCD* las 2 diagonales se dimidian (o sea, si *P* es el punto medio de ambas), entonces *ABCD* es un paralelogramo.
- Si *ABCD* es un paralelogramo, entonces sus 2 diagonales se dimidian.

En efecto:

- Supongamos primero que las diagonales de *ABCD* se dimidian, o sea, que $PA = PC$ y $PB = PD$. Entonces, los triángulos ΔAPB y ΔCPD son congruentes (*LAL*)[6], por lo que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

De forma análoga se demuestra que $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, de donde se concluye (**Teorema VIII.20**) que *ABCD* es un paralelogramo.

- Supongamos ahora que *ABCD* es un paralelogramo.

Entonces $\measuredangle APB \cong \measuredangle CDP$ y $\measuredangle BAP \cong \measuredangle DCP$ (**Teorema VIII.5**).

Además, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (**Teorema VIII.18**), de donde (**Criterio** *ALA*) $\Delta PAB \cong \Delta PCD$.

Pero entonces $\overline{AP} \cong \overline{CP}$ y $\overline{BP} \cong \overline{DP}$, por lo que *P* es el punto medio tanto de $\overline{AC}$ como de $\overline{BD}$, o sea, sus diagonales se dimidian.❒

[6] Nótese que comparten un ángulo opuesto por el vértice.

En resumen

Un cuadrilátero es un paralelogramo (es decir, sus 2 pares de lados opuestos son paralelos) si y solamente si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

- Las diagonales se dimidian.
- Los 2 pares de lados opuestos son congruentes.
- Los 2 pares de ángulos opuestos son congruentes.
- Un par de lados opuestos son congruentes y paralelos.

Que los ángulos opuestos de un paralelogramo sean congruentes, dice que si tenemos un paralelogramo de papel y lo doblamos de forma de hacer coincidir 2 de sus bordes.

Figura VIII.22.

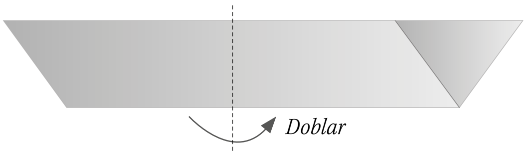


Figura VIII.23.

Y ahora lo doblamos en el otro sentido, hasta hacer coincidir sus bordes.

Figura VIII.24.

Entonces podemos observar que los ángulos coinciden, en un esquema se ve como lo muestra la **Figura VIII.25**.

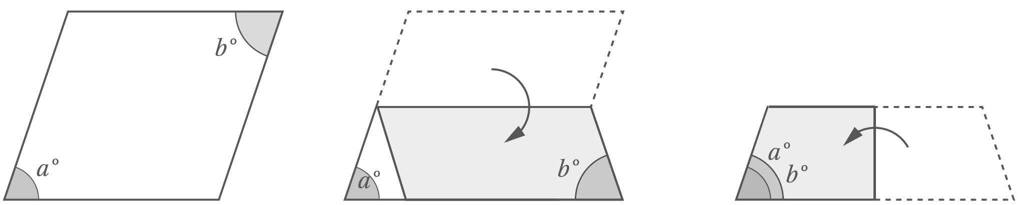


Figura VIII.25.

4.3 Tipos especiales de paralelogramos

Definimos ciertos tipos especiales de cuadriláteros:

- Un *rombo* es un cuadrilátero con 4 lados congruentes.
- Un *rectángulo* es un cuadrilátero con 4 ángulos rectos.
- Un *cuadrado* es un rombo en el que al menos un ángulo es recto.

Note que no damos, como parte de la definición, que un cuadrado tiene sus 4 ángulos rectos. Eso será demostrado posteriormente, como un teorema que se deduce, entre otras cosas, de la definición.

Alternativamente, es posible definir un cuadrado como un rectángulo con 2 lados adyacentes congruentes.

Tampoco incluimos en la definición que rombos, rectángulos y cuadrados son paralelogramos; esto también se deduce a partir de las definiciones y teoremas de las secciones anteriores.

Note que, explícitamente, la definición de cuadrado dice que el cuadrado es un tipo especial de rombo.

A continuación presentamos teoremas que permiten caracterizar a los cuadriláteros anteriores como paralelogramos, con ciertas condiciones adicionales.

Teorema VIII.21

Un cuadrilátero es un rectángulo si y solo si es un paralelogramo con diagonales congruentes.

Demostración

Supongamos primero que $ABCD$ es un rectángulo.

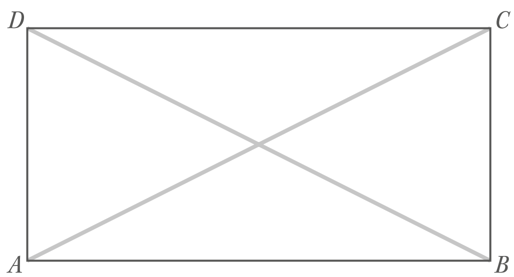


Figura VIII.26

Entonces, como ambos pares de ángulos opuestos son congruentes (¡son todos rectos!), $ABCD$ es un paralelogramo (Teorema VIII.21).

Así, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (Teorema VIII.18).

De esta forma, y gracias al **Criterio** *LAL*, es posible demostrar que $\Delta ACD \cong \Delta DBA$, de donde $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, o sea, las diagonales son congruentes.

Para demostrar el recíproco, supongamos ahora que $ABCD$ es un paralelogramo y que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. Por ser paralelogramo, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (**Teorema VIII.18**) y, por lo tanto, (**Criterio** *LLL*) $\Delta ACD \cong \Delta DBA$, por lo que $\measuredangle BAD \cong \measuredangle CDA$. De manera similar se puede demostrar que

$$\Delta ACD \cong \Delta DBA \cong \Delta CAB \cong \Delta BDC$$

De donde:

$$\measuredangle ADC \cong \measuredangle DAB \cong \measuredangle CBA \cong \measuredangle BCD$$

Entonces, $ABCD$ es un cuadrilátero con 4 ángulos congruentes. Como las medidas de estos ángulos son todas iguales, y deben sumar **360°**, cada ángulo debe medir **90°**, o sea, ser recto. Pero, entonces, $ABCD$ es un rectángulo.☐

Teorema VIII.22

Un cuadrilátero es un rombo si y solo si es un paralelogramo con diagonales perpendiculares.

Demostración

Supongamos primero que $ABCD$ es un rombo.

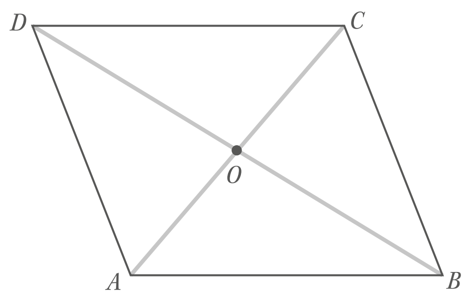


Figura VIII.27.

Entonces, como ambos pares de lados opuestos son congruentes (de hecho, todos los lados son congruentes), $ABCD$ es un paralelogramo (**Teorema VIII.20**). Además, el punto O dimidia las diagonales (**Teorema VIII.23**).

Como todos los lados son congruentes, los puntos B y D equidistan de A y C, por lo que $\overline{BD}$ debe ser la mediatriz de $\overline{AC}$ (**Teorema VII.2**). Pero, entonces, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, que es lo que se quería demostrar.

Para demostrar el recíproco, supongamos ahora que $ABCD$ es un paralelogramo y que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Por ser paralelogramo, tenemos que $\overline{AO} \cong \overline{OC}$ y $\overline{BO} \cong \overline{OD}$ (**Teorema VIII.18**), y podemos demostrar por **Criterio** *LAL* que

$$\Delta AOB \cong \Delta COB \cong \Delta COD \cong \Delta AOD$$

De donde se desprende que

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA},$$

O sea, $ABCD$ es un rombo.☐

Ejercicio

Demuestre el siguiente teorema:

Teorema VIII.23. Un cuadrilátero es un rombo si y solo si es un paralelogramo en el que cada diagonal es la bisectriz de 2 ángulos opuestos.

En resumen

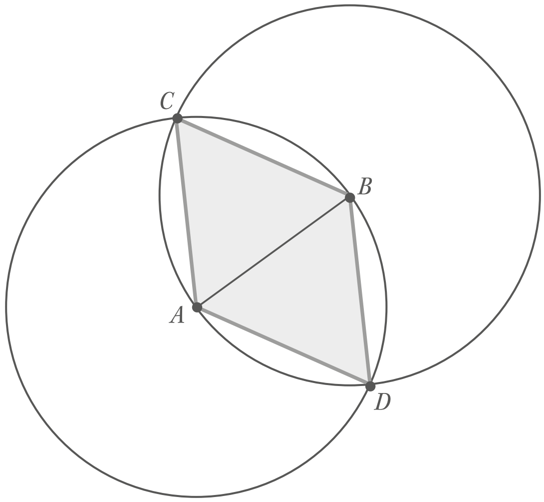
Las siguientes equivalencias se pueden usar como definiciones alternativas:

- Un cuadrilátero es un rectángulo si y solamente si es un paralelogramo cuyas diagonales son congruentes.
- Un cuadrilátero es un rombo si y solamente si es un paralelogramo cuyas diagonales son perpendiculares
- Un cuadrilátero es un rombo si y solamente si es un paralelogramo cuyas diagonales son las bisectrices de los ángulos opuestos.
- Un cuadrilátero es un cuadrado si y solo si es un rectángulo y un rombo a la vez.

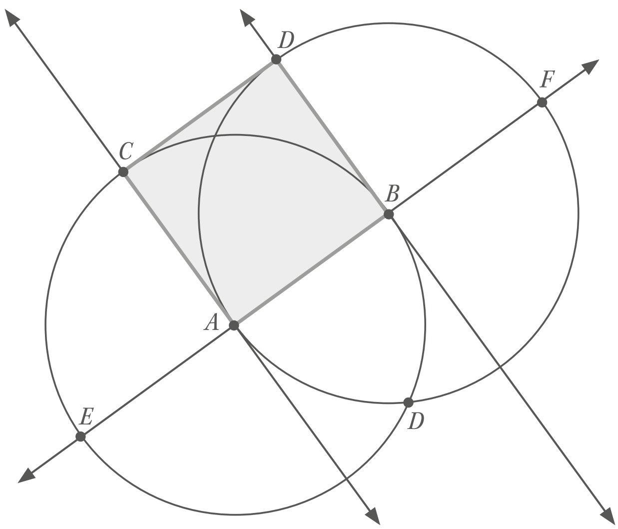
Un asunto que podemos observar es que las medidas de los lados de un paralelogramo no determinan al paralelogramo, lo que si pasaba en el caso de los triángulos (2 triángulos que tienen sus lados congruentes son congruentes). En el caso de los paralelogramos no es cierto que si 2 paralelogramos tienen lados congruentes, entonces sus ángulos interiores también son congruentes. Por ejemplo, dado un segmento $\overline{AB}$, podemos construir un rombo que tenga lados de medida AB.

Ejemplo

Consideremos un segmento $\overline{AB}$. Tracemos 2 circunferencias de radio AB una con centro en A y la otra con centro en B. Esas 2 circunferencias se intersecan en 2 puntos, digamos C y D. Como los triángulos ΔABC y ΔABD son equiláteros y congruentes, entonces $ADBC$ es un rombo, cuyos ángulos interiores miden 60° y 120°. Por lo tanto, $ADBC$ no es un cuadrado.

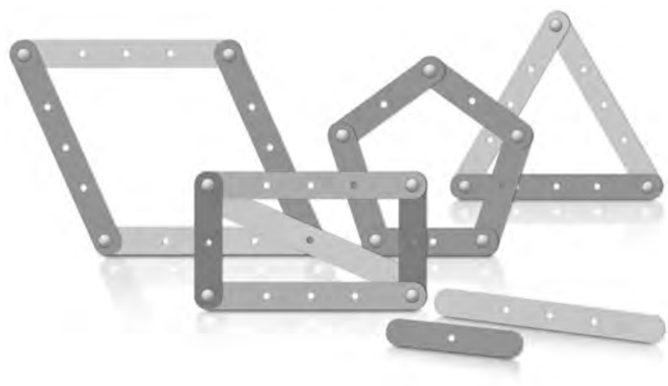


Pero también podemos construir un cuadrado donde uno de sus lados mida AB.



Para ello, podemos trazar la circunferencia con centro en A y radio AB y luego trazar la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por A. Denotaremos por C una de las intersecciones entre la circunferencia y la mediatriz. Luego, trazamos la recta perpendicular $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por B y la circunferencia de centro B y radio AB. Denotaremos por D la intersección de estos 2 últimos elementos, en el mismo semiplano de arista $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a C. El cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado (¿Por qué?) cuyo lado mide AB. Por lo tanto, tenemos 2 paralelogramos cuyos lados son congruentes, pero sus ángulos no son congruentes.

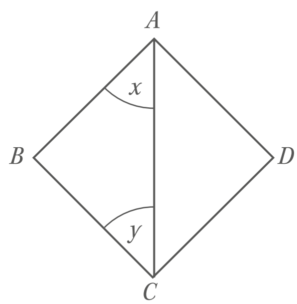
Un material concreto que es muy importante para mostrar esta propiedad son las "geotiras", las que son regletas con orificios por los cuales se introducen pasadores, que permiten hacer polígonos articulados.



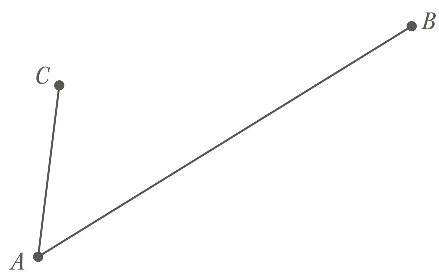
Por ejemplo podemos hacer con geotiras un paralelogramo, que no sea un rombo, y moverlo de forma que las medidas de los ángulos vayan variando.

Ejercicios

1. En un paralelogramo *ABCD*, los ángulos contiguos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ miden $2x + 30$ y $8x$ grados, respectivamente. Halle las medidas en grados de los ángulos $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ y $\measuredangle D$.



2. Construya un rombo donde uno de sus ángulos interiores sea congruente con $\measuredangle BAC$ y una de sus diagonales sea el segmento $\overline{AB}$. Explique su estrategia.



5. Teoremas de concurrencia en triángulos

Concluimos este capítulo estudiando propiedades que nos dicen que ciertas rectas o segmentos importantes en un triángulo son concurrentes.

Antes de demostrar esos resultados, tendremos que conocer algunos resultados previos. El primero es una aplicación de las propiedades de los paralelogramos:

Teorema VIII. 24: del segmento medio

Cada segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado, y mide la mitad de este.

Demostración

ΔABC es un triángulo cualquiera, y $\overline{DE}$ es el segmento que une el punto medio D de $\overline{AB}$ con el punto medio E de $\overline{AC}$ (ver **Figura VIII.14**).

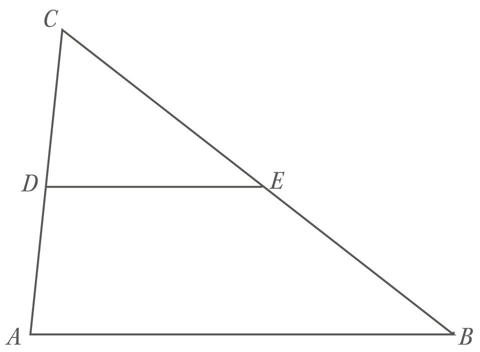


Figura VIII.14.

Trazamos la paralela por C a $\overline{AB}$, y F es el punto donde esta recta corta a la prolongación de $\overline{DE}$.

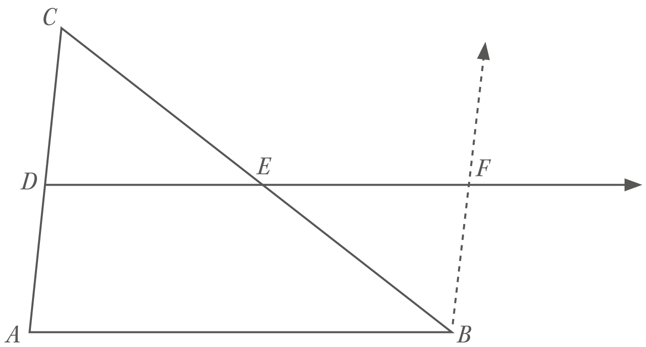


Figura VIII.15.

Se puede verificar que los triángulos ΔADE y ΔCFE son congruentes por el **Criterio** *ALA*.

Así, $\overline{CF} \cong \overline{AD}$. Pero por hipótesis, D es el punto medio de $\overline{AB}$, de donde $\overline{BD} \cong \overline{AD} \cong \overline{CF}$. O sea: el cuadrilátero $BCFD$ tiene 2 lados (a saber, $\overline{BD}$ y $\overline{CF}$) que son paralelos y congruentes, por lo que $BCFD$ es un paralelogramo (Teorema VIII.22).

De lo anterior, se concluye que $\overline{BC} \parallel \overline{DF}$ (por lo que $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$) y, además $BC = DF$. Pero —por la congruencia de los triángulos ADE y CFE— se tiene $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$, de donde:

$$DE = \frac{DF}{2} = \frac{BC}{2} \quad \square$$

Ejercicio

Demuestre el siguiente corolario:

Corolario VIII. 25 Los puntos medios de todo cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

En resumen

El segmento medio, que une los puntos medios de 2 lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y mide la mitad de este.

Para continuar, previamente enunciamos —sin demostración, la que dejamos como ejercicio— 2 propiedades que nos serán útiles:

Teorema VIII. 25: caracterización de la mediatriz

Si un punto equidista de los 2 extremos de un segmento, entonces está sobre la mediatriz de este.

Recíprocamente, si un punto está sobre la mediatriz de un segmento, entonces equidista de sus extremos.

Teorema VIII. 26: caracterización de la bisectriz

Si un punto está en el interior de un ángulo y equidista de los 2 lados de este, entonces está sobre la bisectriz del ángulo.

Recíprocamente, si un punto está sobre la bisectriz de un ángulo, entonces equidista de los lados del ángulo.

El teorema más importante de la sección y que es el objetivo de presentar los resultados anteriores es el siguiente.

> ***Teorema VIII.27 en un triángulo cualquiera:***
>
> a. Sus 3 mediatrices concurren
> b. Sus 3 bisectrices concurren
> c. Sus 3 alturas concurren
> d. Sus 3 medianas concurren

En otras palabras, el **Teorema VIII.28** dice que una mediatriz pasa por el punto de intersección de las otras 2 mediatrices. Una bisectriz pasa por la intersección de las otras 2 bisectrices. Una altura pasa por la intersección de las otras 2 alturas y una mediana pasa por la intersección de las otras 2 medianas.

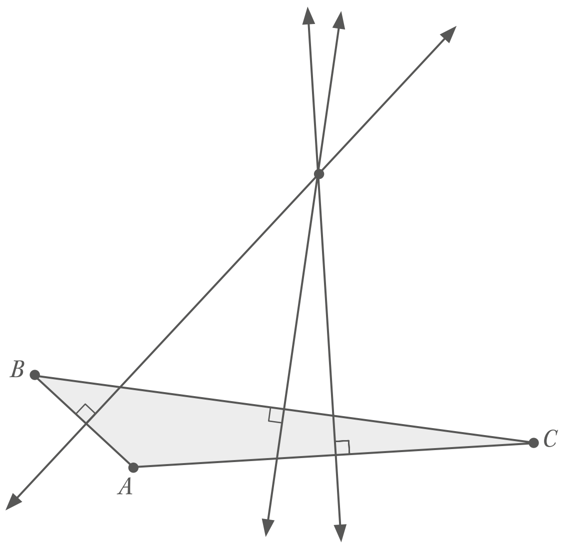


Figura VIII.16: las 3 mediatrices concurren

El punto donde concurren las mediatrices no necesariamente está en el interior del triángulo.

Como el punto en el cual concurren las 3 mediatrices equidista de los 3 vértices, es el centro de una circunferencia, la que pasa por dichos vértices. Esta circunferencia es llamada la *circunferencia circunscrita* al triángulo, y su centro (el punto de concurrencia de las mediatrices) es llamado el *circuncentro.*

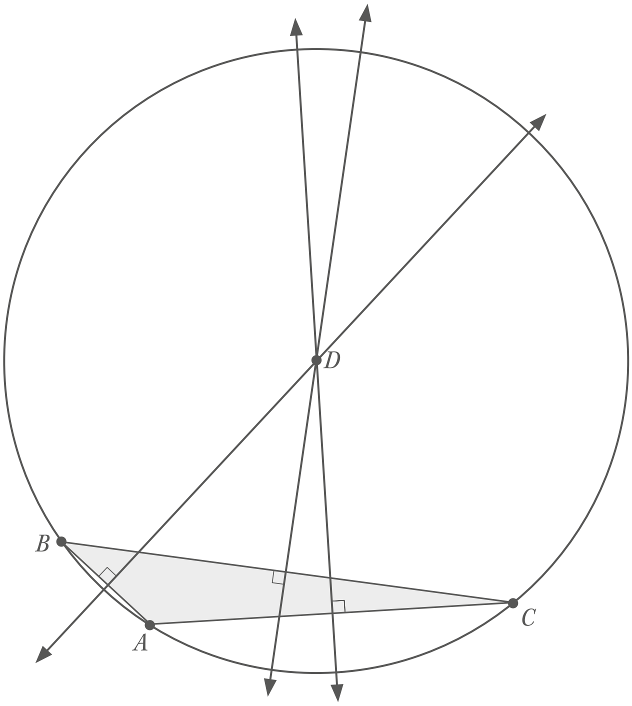


Figura VIII.17: circunferencia circunscrita a un triángulo. D es el circuncentro.

En el caso de las bisectrices, el punto de concurrencia está en el interior o en el borde del triángulo, nunca en su exterior.

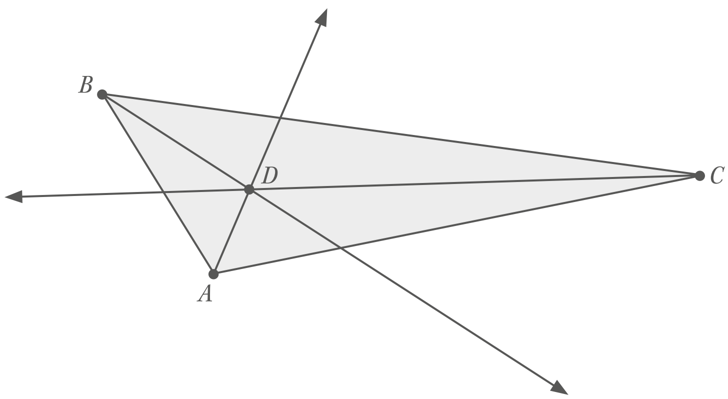


Figura VIII.18. concurrencia de bisectrices.

Note que, si desde el punto de concurrencia de las bisectrices, se dibujan los segmentos perpendiculares trazados a cada uno de los lados, estos 3 segmentos miden lo mismo (esto debido a que dicho punto de concurrencia equidista de los 3 lados).

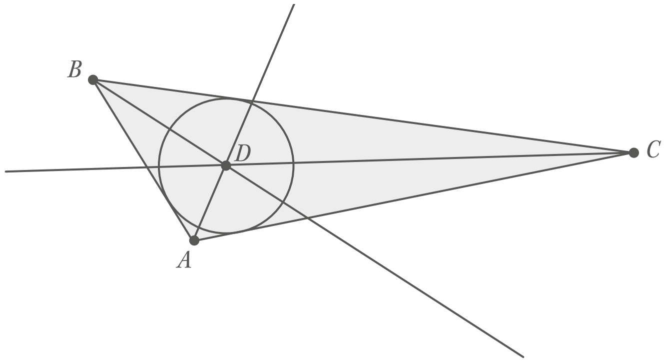


Figura VIII.19: circunferencia inscrita al triángulo. D es el incentro.

Así, la circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las bisectrices y radio la distancia común a los lados, es tangente a los 3 lados (la justificación de esto se deja como ejercicio al lector).

Esta circunferencia es llamada circunferencia *inscrita al triángulo*, y su centro (el punto de concurrencia de las bisectrices) es el *incentro*.

El punto en el cual concurren las 3 alturas recibe el nombre de *ortocentro*. Puede encontrarse tanto al interior, como al exterior del triángulo, como en el borde.

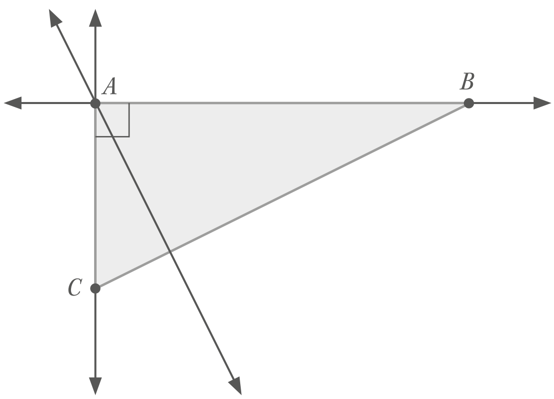


Figura VIII.20: ortocentro en el borde del triángulo.

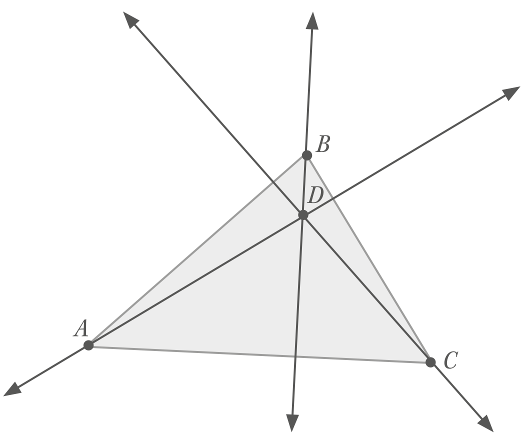


Figura VIII.21: ortocentro en el interior del triángulo.

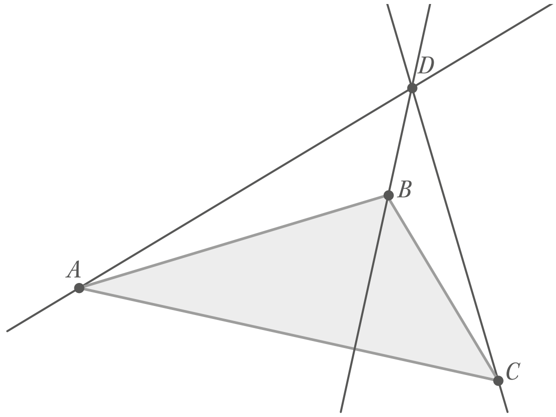


Figura VIII.22. ortocentro en el exterior del triángulo.

El punto de concurrencia de las medianas es llamado *baricentro* o *centro de gravedad* del triángulo. El baricentro está siempre en el interior del triángulo.

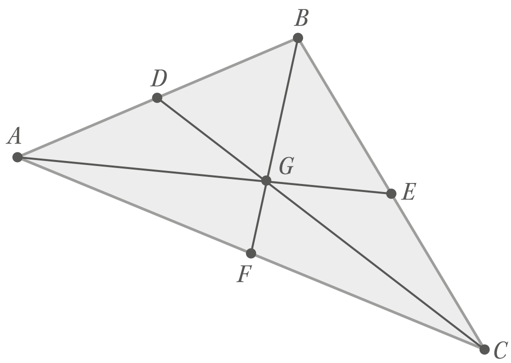


Figura VIII.23: el punto G es el centro de gravedad del ΔABC.

La demostración del **Teorema VIII. 27** la haremos solo en el caso **a)** y **b)**; las demostraciones de las partes **c)** y **d)** se dejan como ejercicio al lector.

Demostración del Teorema VIII.27 a)

Sea P el punto en el que se cortan las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

Por estar P en la mediatriz de $\overline{AB}$, se tiene que $PA = PB$. Por estar P en la mediatriz de $\overline{BC}$, se tiene que $PB = PC$.

Pero entonces, $PA = PC$ por **Teorema VIII.25**, P está en la mediatriz de $\overline{AC}$. Así, las 3 mediatrices concurren al mismo punto P.

Demostración del Teorema VIII.27 b)

Sea P el punto en el que se cortan las bisectrices de $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle ACB$.

Por estar P en la bisectriz de $\measuredangle ABC$, P equidista (está a la misma distancia) de $\overleftrightarrow{AB}$ que de $\overleftrightarrow{BC}$. Por estar P en la bisectriz de $\measuredangle ACB$, P equidista de $\overleftrightarrow{AC}$ que de $\overleftrightarrow{BC}$.

Pero entonces P equidista de $\overleftrightarrow{AB}$ y de $\overleftrightarrow{AC}$, y como además P está en el interior del ángulo $\measuredangle BAC$ (dejamos la demostración de esta propiedad como ejercicio), está en su bisectriz.

Así, las tres bisectrices concurren al punto P. ☐

En resumen

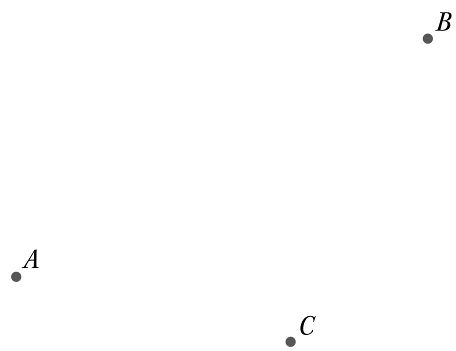
En un triángulo

- Las tres mediatrices concurren en un punto: el *circuncentro*. Este punto es el centro de la circunferencia circunscrita.
- Las tres bisectrices concurren en un punto: el *incentro*. Este punto es el centro de la circunferencia inscrita.
- Las tres medianas concurren en un punto: el *baricentro*. Este punto es el centro de gravedad del triángulo.
- Las tres alturas concurren en un punto: el *ortocentro*.

Ejercicios del capítulo

1. ¿Qué puede decir de un triángulo cuyo ortocentro coincide con uno de sus vértices?
2. ¿Qué puede decir de un triángulo cuyo incentro coincide con su baricentro?
3. ¿Puede el ortocentro estár en un lado de un triángulo, pero no en el vértice de un triángulo?
4. Demuestre el **Corolario VIII.25.**
5. De un paralelogramo se conocen las posiciones de 3 de sus vértices. Muestre cómo encontrar el cuarto vértice del paralelogramo (note que hay más de una solución).
6. Muestre cómo construir un paralelogramo del cual se conocen las longitudes de un lado y las de las 2 diagonales.

   En otras palabras: muestre cómo construir, dados 3 segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ y $\overline{TU}$, un paralelogramo $ABCD$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{AC} \cong \overline{RS}$ y $\overline{BD} \cong \overline{TU}$.
7. Demuestre el **Teorema VIII.25.**
8. Demuestre el **Teorema VIII.26.**
9. Considere los puntos A, B y C. Con regla y compás, encuentre un punto P tal que $PA = PB = PC$.



Capítulo

IX

Proporcionalidad en geometría

> "Hay geometría en el zumbido de las cuerdas.
> Hay música en los espacios de las esferas".
>
> Pitágoras.

Introducción

En este capítulo se estudiarán 2 teoremas muy importantes en la geometría Euclidiana: el Teorema de Tales y el Teorema de Pitágoras.

El Teorema de Tales trata acerca de las proporciones que resultan entre las medidas de lados de triángulos, bajo ciertas condiciones, y el Teorema de Pitágoras trata acerca de la relación entre las medidas de las áreas de cuadrados construidas en los catetos y en la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Ambos teoremas son demostrados en este capítulo usando fuertemente la noción de área de paralelogramos y triángulos, y esta es una razón para mostrar ambos teoremas en un mismo capítulo. Además, en este capítulo se analizarán los recíprocos de estos teoremas y de discutirán las demostraciones respectivas.

También aquí se introducirá la noción de triángulos semejantes, que es una condición más débil que la congruencia de triángulos, y trata acerca de la proporcionalidad entre la medida de los lados de 2 triángulos.

Al igual que en el caso de la congruencia de triángulos, existen criterios de semejanza que permiten asegurar la semejanza de triángulos, verificando una mínima cantidad de datos. En el caso de la congruencia, los criterios fueron presentados como axiomas, en el caso de semejanza, serán teoremas que demostraremos.

Finalmente, se estudiarán algunas consecuencias y aplicaciones de estos teoremas, a cálculos del volumen y superficie de una esfera y relaciones entre los diferentes elementos de un círculo, como ángulos, cuerdas y arcos. Por último, daremos la justificación de por qué las traslaciones, reflexiones y rotaciones preservan la medida de los ángulos y los segmentos.

1. El Teorema de Pitágoras y su recíproco

Recordemos que si dibujamos un cuadrado en la diagonal de otro cuadrado, se obtiene un cuadrado que tiene el doble de área que el cuadrado inicial.

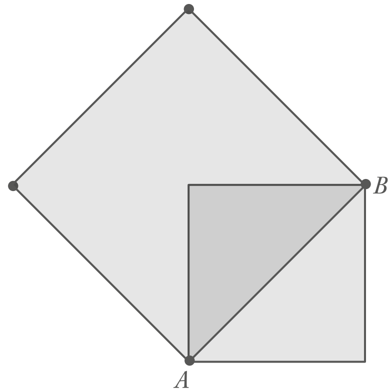


Figura IX.1.

Si el lado del cuadrado pequeño mide a entonces el área del cuadrado grande es $2a^{2,}$ o lo que es lo mismo, $a^2 + a^2$. Si la diagonal del cuadrado pequeño mide c, entonces $c^2 = 2a^2$, es decir

$$a^2 + a^2 = c^2$$

Se puede concluir que, el área del cuadrado construido en uno de los catetos más el área del cuadrado construido en el otro cateto es igual al área del cuadrado construido en la hipotenusa.

Veamos otro ejemplo. Consideremos un triángulo rectángulo en que las medidas de los catetos están en la razón **1 : 2**. Construyamos los cuadrados en los catetos y en la hipotenusa, como se muestra en la **Figura IX.2**. Ahora tomemos el punto medio M de $\overline{BC}$ y del punto medio N del lado opuesto a $\overline{BC}$ en el mismo cuadrado, y unamos esos puntos.

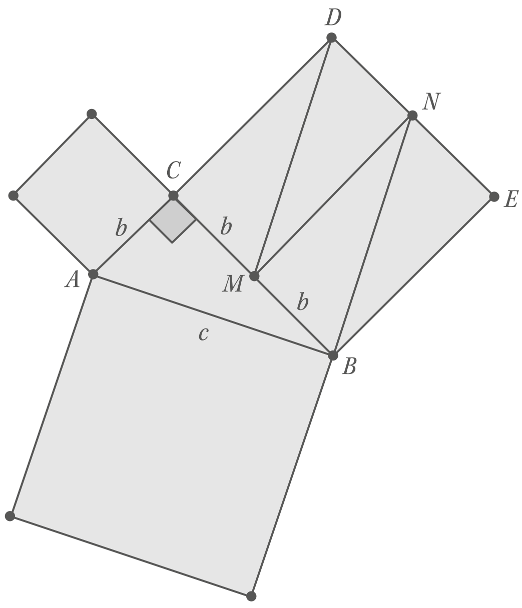


Figura IX.2.

Entonces, el cuadrado *CBED* tiene 4 triángulos congruentes entre sí y congruentes a ΔABC. Cada uno de esos triángulos tiene hipotenusa *c* que corresponde al lado del cuadrado mayor. Trasladемos esos 4 triángulos de tal forma de hacer calzar la hipotenusa de esos triángulos con un lado del cuadrado mayor.

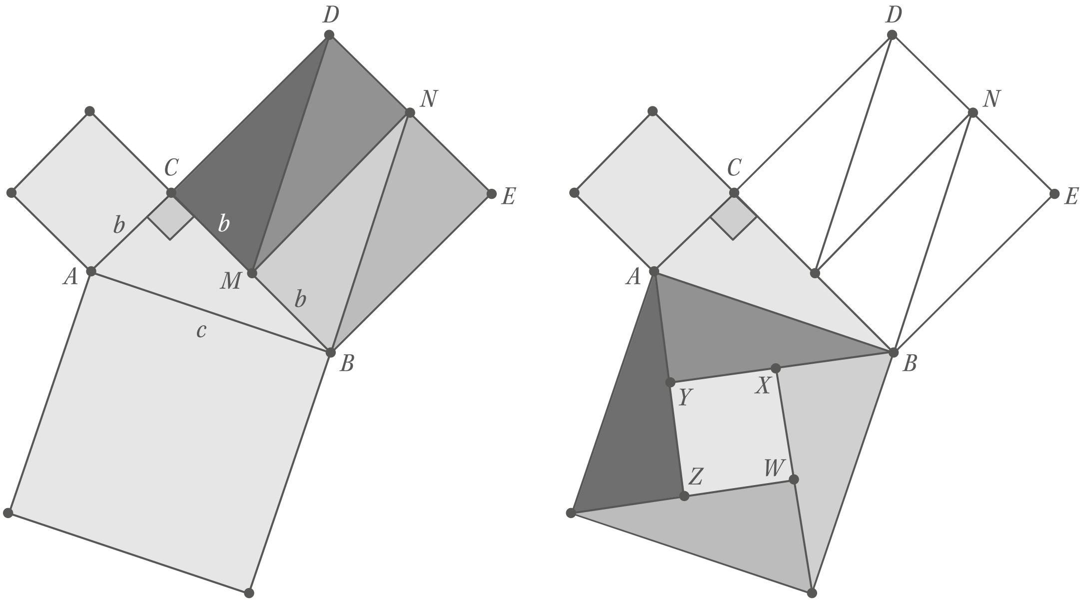


Figura IX.3.

Como $\overline{BX}$ mide *b*, entonces $\overline{YX}$ también mide *b*; por lo tanto *XYZW* es un rombo. De hecho, es un cuadrado de lado *b*, pues los ángulos interiores son rectos (¿Por qué?). Así, el cuadrado de lado $\overline{AC}$ lo podemos trasladar hasta ocupar la posición de *XYZW*.

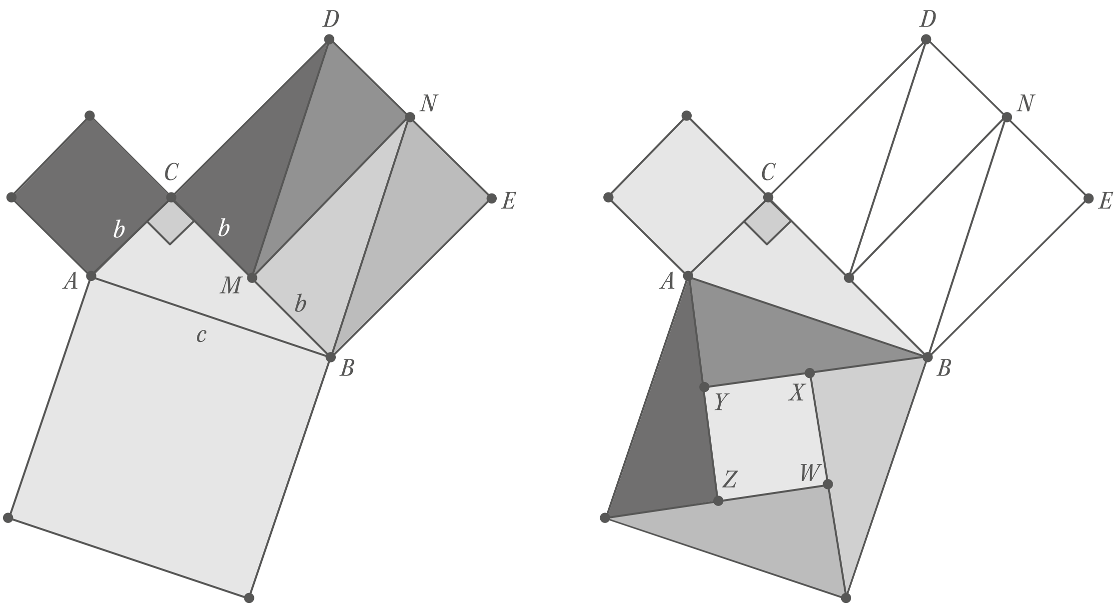


Figura IX.4.

Por lo tanto, en este caso particular el área del cuadrado de lado c es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados $a = 2b$ y de lado b. Es decir, el área del cuadrado construido en la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos. Es decir:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

¿Será cierto en general? Es decir, en cualquier triángulo rectángulo, ¿es cierto que el área del cuadrado construido en la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos? La respuesta es sí y esto se conoce como el Teorema de Pitágoras.

Teorema IX.1: Teorema de Pitágoras

En cualquier triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido en la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos.

Para demostrar este teorema, usaremos un resultado algebraico, a saber, el cuadrado del binomio: si a y b son números cualesquiera, entonces:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Demostración del Teorema de Pitágoras

Consideremos un triángulo rectángulo cualquiera y denotemos por a y b las medidas de los catetos y por c la medida de la hipotenusa. Entonces "la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos" que aparece en el teorema no es otra cosa que:

$$a^2 + b^2$$

Y "el área del cuadrado construido en la hipotenusa" es c^2. Por lo tanto, lo que tenemos que demostrar es que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Y es lo que haremos. Dispongamos 4 triángulos congruentes de catetos a y b e hipotenusa c, como se muestra en la figura:

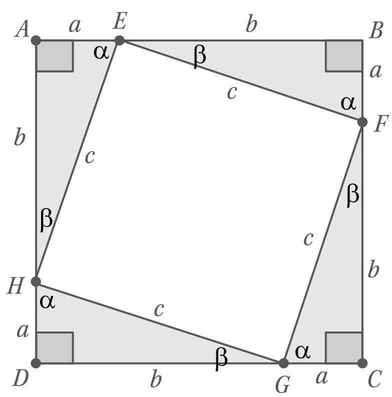


Figura IX.5.

El cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado de lado $a + b$. El cuadrilátero $EFGH$ es un rombo, pues todos sus lados miden c. Pero además, los ángulos α y β son complementarios, pues son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo; por lo tanto, los ángulos interiores del rombo $EFGH$ son rectos, y $EFGH$ es un cuadrado.

Ahora bien, el área pintada de la **Figura IX.5**, la podemos ver como 4 veces el área del triángulo ΔHDG, o también como el área del cuadrado cuyo lado mide $a+b$ menos el área del cuadrado cuyo lado mide c. La suma de las áreas de los 4 triángulos es:

$$4\ \frac{ab}{2}$$

Y la resta del área de los 2 cuadrados es

$$(a + b)^2 - c^2$$

Por lo tanto

$$(a+b)^2 - c^2 = 4\ \frac{ab}{2}$$

Como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y como $4\ \frac{ab}{2} = 2ab$, se tiene que:

$$(a+b)^2 - c^2 = 4\ \frac{ab}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 2ab$$

Sumando a ambos lados $c^2 - 2ab$, se obtiene:

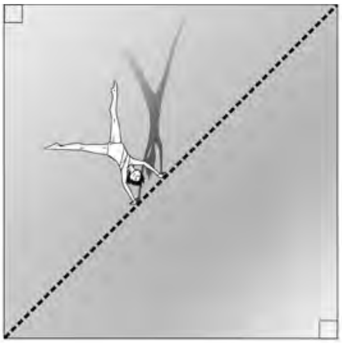
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Que es lo que queríamos probar. ❐

Ejemplos

1) Resolvamos el siguiente problema:

*Una gimnasta, para finalizar su participación en la competencia escolar, realiza una cadena de saltos a lo largo de toda la diagonal de la carpeta, que es un cuadrado cuyo lado mide **13** metros. Muestra que la distancia recorrida por la gimnasta es mayor que **18,3** metros y menor que **18,4** metros.*



Solución:

Si la diagonal mide d metros, entonces por el Teorema de Pitágoras, se tiene que

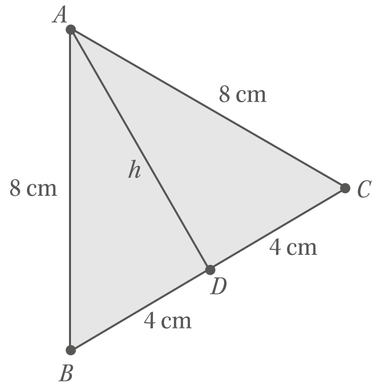
$$13^2 + 13^2 = d^2$$
$$169 + 169 = d^2$$
$$338 = d^2$$

Entonces buscamos un número cuyo cuadrado sea 338. Pero $18{,}3^2 = 334{,}89$, entonces el número d es mayor que 18,3. Por su parte $18{,}4^2 = 338{,}56$, entonces el número d es menor que 18,4. Que es lo que se pedía mostrar.

2) Respondamos la siguiente pregunta:

¿Cuál es el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 8 cm?

Consideremos la altura $\overline{AD}$ del triángulo equilátero en cuestión. Como el triángulo es equilátero, entonces D es punto medio del lado $\overline{BC}$.



Por lo tanto, el triángulo ΔADC es rectángulo en D, donde uno de sus catetos mide 4 cm, su hipotenusa mide 8 cm y su otro cateto es la altura del triángulo ΔABC. Denotemos por h la medida de esa altura. Entonces, por el Teorema de Pitágoras tenemos que:

$$h^2 + 16 = 64$$
$$h^2 = 64 - 16$$
$$h^2 = 48$$
$$h^2 = 16 \cdot 3$$
$$h = 4\sqrt{3}$$

Así, el área del triángulo equilátero de lado 8 cm es:

$$Á = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} cm^2 = 16\sqrt{3}\, cm^2$$

3) Resolvamos el siguiente problema:

Cada lado de un triángulo equilátero de lado 1 se divide en 3 partes iguales. En la parte central de cada lado, se construye otro triángulo equilátero de lado 1/3 y se borra su base. En el siguiente paso, cada trazo de largo 1/3 se divide en 3 partes iguales y se forma un triángulo equilátero. Nuevamente, borramos la base y así sucesivamente, en cada paso tomamos un trazo recto del paso anterior, lo dividimos en 3 partes iguales, construimos un triángulo equilátero en la parte central y borramos su base.

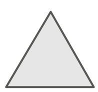


Figura 1

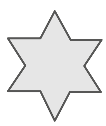


Figura 2

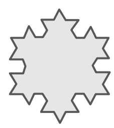
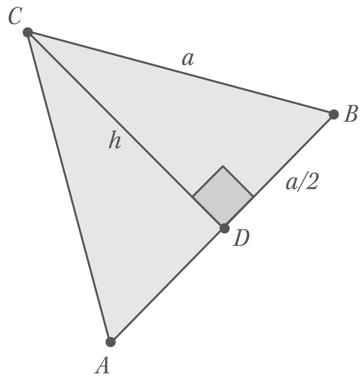


Figura 3

a. ¿Cuál es el área de la Figura 1, Figura 2 y Figura 3?

Solución:

La Figura 1 es un triángulo equilátero. Por lo tanto necesitamos calcular el área del triángulo equilátero cuyo lado mide 1, pero en lugar de eso calcularemos el área del triángulo equilátero de lado a, pues necesitaremos ese resultado a lo largo del ejemplo.



El segmento $\overline{CD}$ es altura del triángulo ΔABC y como este es equilátero, entonces D es punto medio de $\overline{AB}$. Si denotamos por h la medida de la altura del triángulo, el triángulo ΔCDB es rectángulo cuya hipotenusa mide a y sus catetos miden $\frac{a}{2}$ y h. Utilizando el Teorema de Pitágoras, podemos conocer el valor de h en términos de a

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, el área del triángulo equilátero cuyo lado mide a, es:

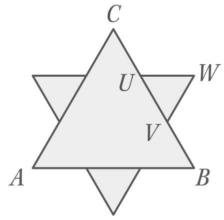
$$\acute{A}_{equilátero} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

En particular, el área del triángulo equilátero cuyo lado mide 1 es:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Que es el área de la Figura 1.

El área de la Figura 2, corresponde al área del triángulo ΔABC más 3 veces el área del triángulo ΔUVW.



El triángulo ΔUVW es equilátero cuyo lado mide $\frac{1}{3}$, entonces su área es:

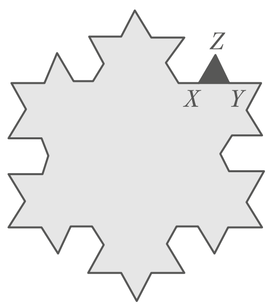
$$\frac{{\frac{1}{3}}^{2}\sqrt{3}}{4}$$

Así, el área de la Figura 2 es:

$$A_2 = A_1 + \frac{3\cdot {\frac{1}{3}}^{2}\sqrt{3}}{4}$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\cdot {\frac{1}{3}}^{2}\sqrt{3}}{4}$$

El área de la Figura 3, es igual al área de la Figura 2 más 12 veces el área del triángulo equilátero ΔXYZ, cuyo lado mide $\frac{1}{3^2}$. El 12 de la cuenta anterior surge porque la Figura 2 tiene 12 lados y por cada uno de esos lados hay que contar un triángulo congruente a ΔXYZ. El lado mide $\frac{1}{3^2}$, pues es la tercera parte del lado de la Figura 2 que mide $\frac{1}{3}$.



Entonces, el área del triángulo ΔXYZ es:

$$\frac{{\frac{1}{3^2}}^{2}\sqrt{3}}{4}$$

Por lo tanto, el área de la Figura 3 es:

$$A_3 = A_2 + \frac{12 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{12 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \sqrt{3}}{4}$$

Más generalmente, si A_n denota el área de la Figura n, entonces se tiene la relación:

$$A_n = A_{n-1} + \frac{(\text{cant. de lados de la fig. } n-1) \cdot (\text{la medida del lado de la } fig.\ n)^2 \sqrt{3}}{4}$$

b. ¿Cuál es el perímetro de la Figura 1, Figura 2 y Figura 3?

Solución:

En general para conocer el perímetro de la Figura n, basta multiplicar la medida del lado de la Figura n, por la cantidad de lados que tiene.

La Figura 1 tiene $C_1 = 3$ lados. Por cada uno de esos lados la Figura 2 tiene 4 lados, es decir, la Figura 2 tiene $C_2 = 3 \cdot 4 = 12$ lados. Por cada lado de la Figura 2, la Figura 3 tiene 4 lados, entonces la Figura 3 tiene $C_3 = (3 \cdot 4) \cdot 4 = 3 \cdot 4^2 = 48$ lados.

El lado de la Figura 1 mide $l_1 = 1$, el lado de la Figura 2 mide un tercio de la medida del lado de la Figura 1, es decir, el lado de la Figura 2 mide $l_2 = \frac{1}{3}$. El lado de la Figura 3 mide un tercio de la medida del lado de la Figura 2, es decir $l_3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. Más generalmente, la medida del lado de la Figura n es:

$$l_n = \frac{1}{3^{n-1}}$$

Por lo tanto, el perímetro de la Figura 1 es: $P_1 = 3$. El perímetro de la Figura 2 es:

$$P_2 = C_2 \cdot l_2 = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4$$

El perímetro de la Figura 3 es:

$$P_3 = C_3 \cdot l_3 = 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{3^2} = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Si P_n denota el perímetro de la Figura n, l_n denota la medida del lado de la Figura n y C_n denota el número de lados de la Figura n, entonces:

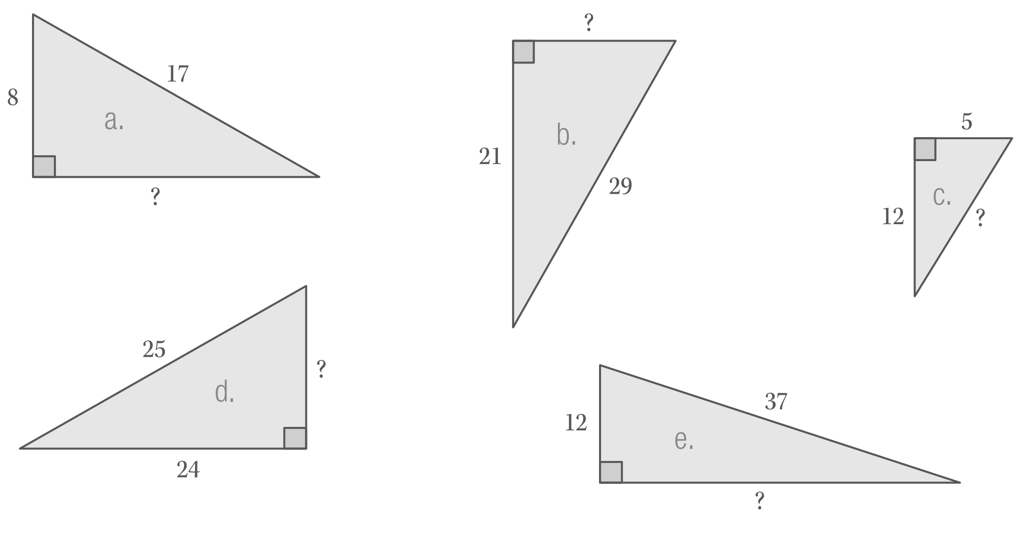
$$P_n = C_n \cdot l_n$$

Ejercicios

1. Una profesora había presentado el Teorema de Pitágoras a sus alumnos y luego les muestra un triángulo rectángulo cuyos catetos miden **6** y **8 cm** y les pregunta por la medida de la hipotenusa. Varios alumnos de la sala no saben bien qué hacer y empiezan a operar con los números **6** y **8**. Algunos dicen **14 cm**, otros **48 cm**, otros **24 cm**. ¿Qué puede hacer la profesora para mostrarles que el resultado presentado está errado, sin darles la solución correcta?

2. Una planificación obtenida de internet sugiere que la profesora le pida a sus alumnos que dibujen con una regla graduada un triángulo rectángulo de catetos que miden **4 cm** y **3 cm**. Luego les pide que con la regla midan la hipotenusa. Los niños se esfuerzan para ser precisos y dicen, la mayoría de ellos, que la hipotenusa mide **5 cm**. Después calculan los cuadrados y comprueban que $3^2 + 4^2 = 5^2$. La planificación sugiere hacer varias de estas actividades con triángulos rectángulos cuyos catetos están en la razón **3 : 4**. Para finalizar la clase, la profesora les dice a sus alumnos: "Como hemos visto, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".
   a. El objetivo planteado por la planificación es "conjeturar el Teorema de Pitágoras". ¿Cree usted que el objetivo se logra?
   b. ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos **1,5 cm** y **2 cm**? ¿Cree que en este caso es posible medir la hipotenusa con la regla?

3. En cada caso, encuentre la medida del lado que se desconoce.

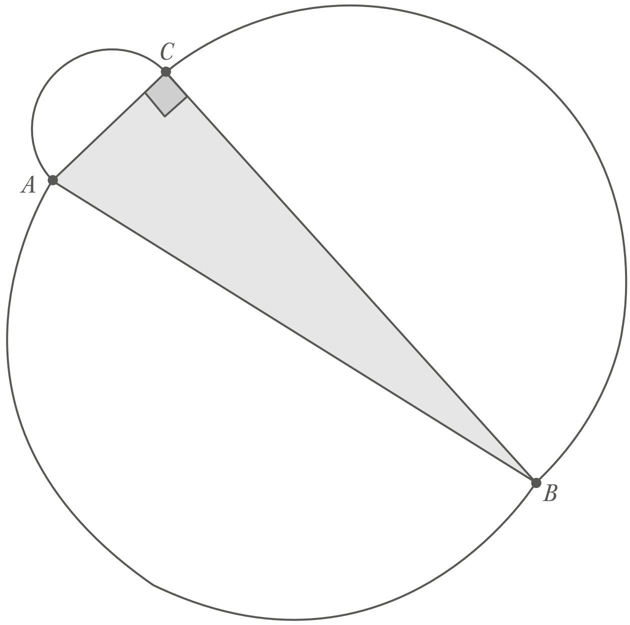


4. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide **25 cm** y un cateto mide **7 cm**. ¿Cuánto mide su área?

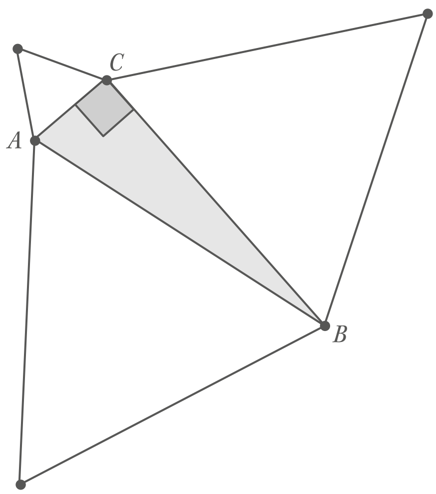
5. Muestre un ejemplo de un triángulo rectángulo cuyas medidas de sus lados son fracciones no enteras.

6. Considere un triángulo rectángulo ΔABC y construyamos semicircunferencias en los catetos y la hipotenusa:

¿Es cierto que la suma de las áreas de las semicircunferencias construidas en los catetos es igual al área de la semicircunferencia construida en la hipotenusa?



7. Considere un triángulo rectángulo ΔABC y construyamos triángulos equiláteros en los catetos y en la hipotenusa:



¿Es cierto que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos en los catetos es igual al área del triángulo equilátero construido en la hipotenusa?

1.1 El recíproco del Teorema de Pitágoras

Consideremos un triángulo de lados 8 cm, 15 cm y 17 cm. Notemos que:

$$8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$$

Por otra parte $17^2 = 289$. Por lo tanto:

$$8^2 + 15^2 = 17^2$$

Entonces ¿se puede afirmar, apelando al Teorema de Pitágoras, que el triángulo es rectángulo?

Recordemos el enunciado del Teorema de Pitágoras:

"En cualquier triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido en la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos."

Dicho de otra forma:

*"Si ΔABC es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden **a** y **b** y la hipotenusa mide **c**, entonces $a^2 + b^2 = c^2$".*

Lo que dice el teorema, y lo que nosotros demostramos (y por tanto es lo que sabemos cierto), es que si el triángulo es rectángulo, entonces podemos afirmar que se satisface la relación $a^2 + b^2 = c^2$, donde a, y b son las medidas de los catetos y c de la hipotenusa. Pero no dice que si se satisface la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo de catetos a, y b e hipotenusa c. Sin embargo, ese resultado es también cierto y es el teorema recíproco al Teorema de Pitágoras y lo enunciaremos como sigue:

> ***Teorema IX.2: Teorema Recíproco al Teorema de Pitágoras***
>
> Si las medidas de los lados de un triángulo son a, b y c y se satisface la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo de catetos a, y b e hipotenusa c.

Observemos que si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces $c>a$ y $c>b$. Por lo tanto c es el lado opuesto al mayor de los ángulos del triángulo (¿Por qué?).

Para mostrar que el **Teorema IX.2** es cierto, mostraremos que un triángulo acutángulo no satisface la condición, ni tampoco un triángulo obtusángulo. Entonces, habremos comprobado que los únicos que satisfacen la condición son los triángulos rectángulos; por lo tanto, si un triángulo satisface la condición, necesariamente se trata de un triángulo rectángulo.

Demostración del recíproco del Teorema de Pitágoras

Caso 1: Si ΔABC es obtusángulo.

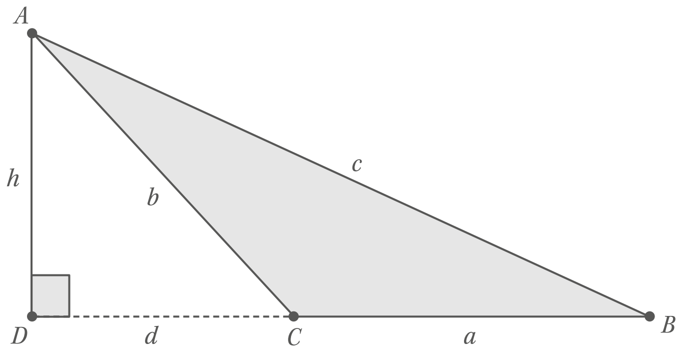


Figura IX.6

Como c es el lado opuesto al ángulo obtuso, entonces $c>a$ y $c>b$. Así que si se cumple la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$, con x, y, z los lados del triángulo entonces necesariamente se debiera cumplir $c^2 = a^2 + b^2$. Lo cual mostraremos que no puede ocurrir.

Consideremos a h como la altura exterior y a D como la intersección de la altura con la proyección del lado opuesto del triángulo. Denotemos por d la distancia entre C y D.

Entonces, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo ΔADB se obtiene que:

$$h^2 + (d + a)^2 = c^2$$
$$h^2 + d^2 + 2ad + a^2 = c^2$$

Como el triángulo ΔADC es rectángulo se tiene que $h^2 + d^2 = b^2$, y reemplazando esta igualdad en la relación anterior resulta:

$$b^2 + 2ad + a^2 = c^2$$

Como $d \neq 0$ y $a \neq 0$, entonces $b^2 + a^2 < a^2 + b^2 + 2ad = c^2$.

Caso 2: si ΔABC es acutángulo.

Este caso queda como ejercicio para el lector. ❐

Ejercicio

Si los lados de un triángulo miden 3 cm, 5 cm y 7 cm, entonces ¿el triángulo es rectángulo, acutángulo u obtusángulo?

2. Teorema de Tales y semejanza de triángulos

Consideremos un triángulo ΔABC y una recta paralela al lado $\overline{AB}$ que intersecta al lado $\overline{AC}$ en D y al lado $\overline{CB}$ en E.

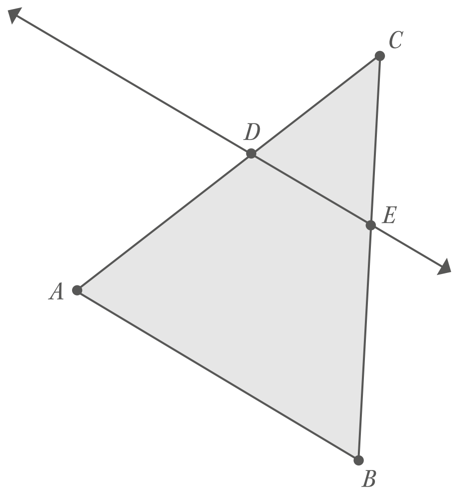


Figura IX.7.

Como $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, entonces $\measuredangle CDE \cong \measuredangle CAB$ y $\measuredangle CED \cong \measuredangle CBA$ (por el **Teorema VIII.6**). Por lo tanto, los triángulos ΔABC y ΔDEC tienen ángulos interiores congruentes. El triángulo ΔDEC es como una reducción a cierta escala del ΔABC. Es lo que demostraremos, es decir, que existe una constante k, tal que:

$$AC = k \cdot DC$$
$$BC = k \cdot CE$$
$$AB = k \cdot DE$$

Para ello, demostraremos el Teorema de Tales:

Teorema IX.3: de Tales

Consideremos un triángulo ΔABC y una recta paralela al lado $\overline{AB}$ que intersecta al lado $\overline{AC}$ en D y al lado $\overline{CB}$ en E. Entonces, $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{BE}{EC}$

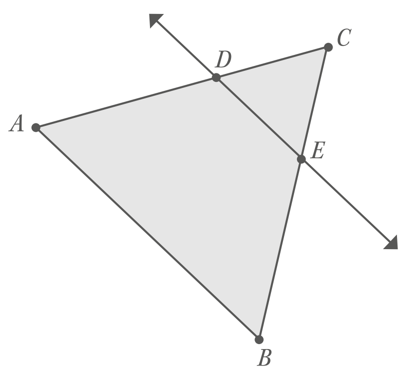


Figura IX.8.

Demostración

Para que el dibujo no se vea repleto de rayas, haremos dos copias del mismo triángulo.
Trazamos $\overline{DF}$ de tal manera que $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ y trazamos $\overline{EG}$ de tal manera que $\overline{EG} \perp \overline{AB}$.

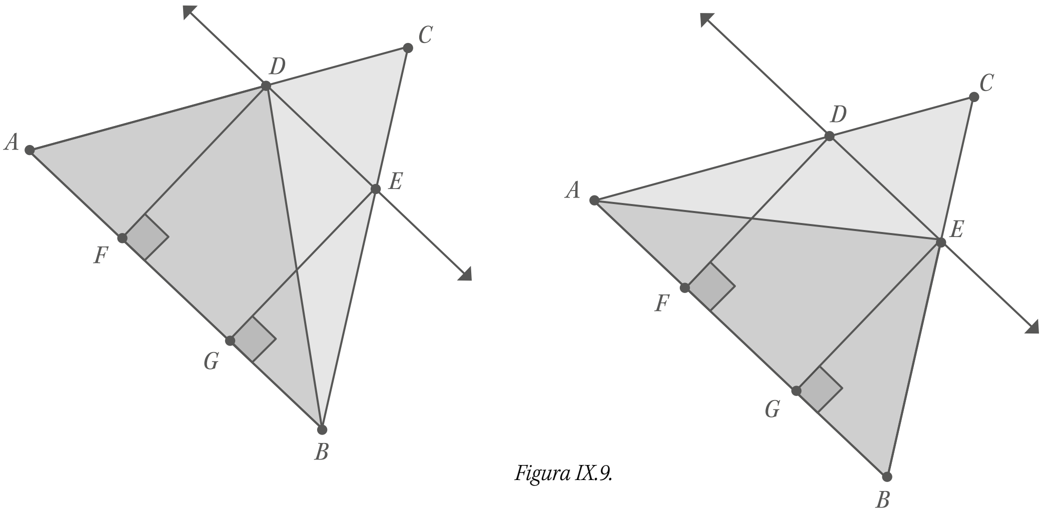


Figura IX.9.

Primero, notamos que como $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{DE}$ el trazo $\overline{DF}$ mide lo mismo que el trazo $\overline{EG}$. Por lo tanto, los triángulos ΔABD y ΔABE comparten un lado y las alturas correspondientes a ese lado miden lo mismo, entonces tienen la misma área.

$$\acute{A}(\Delta ABE) = \acute{A}(\Delta ABD)$$

Así, también los triángulos ΔCEA y ΔCDB tiene la misma área. Es decir:

$$\acute{A}(\Delta CEA) = \acute{A}(\Delta CDB)$$

Trazemos las alturas h_1 y h_2, como lo muestra la figura:

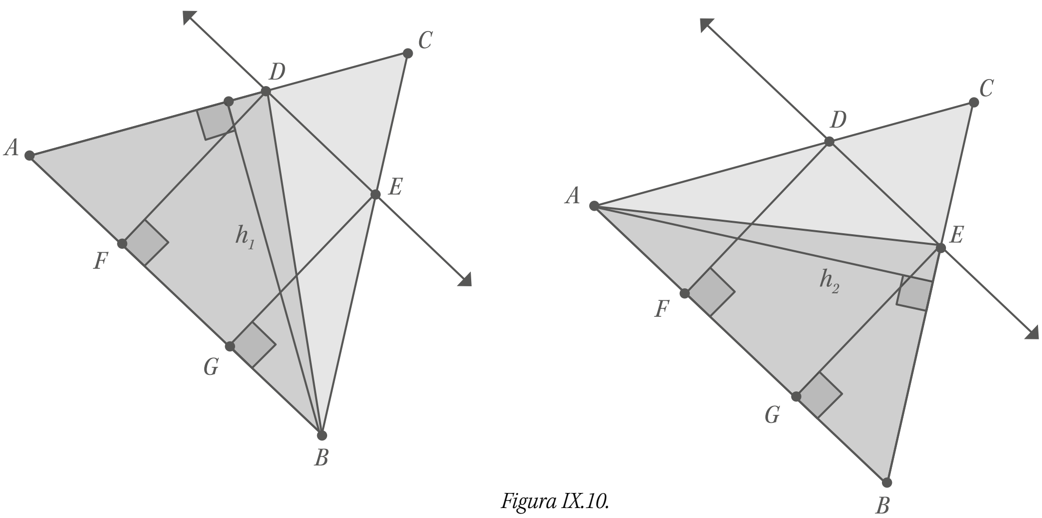


Figura IX.10.

Entonces el área de ΔCEA es $\frac{1}{2}CE \cdot h_2$ y el área del ΔCDB es $\frac{1}{2}CD \cdot h_1$, es decir:

$$CD \cdot h_1 = CE \cdot h_2$$

O lo que es lo mismo

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{CD}{CE}$$

Pero como:

$$\acute{A}(\Delta ABE) = \acute{A}(\Delta ABD)$$

Se tiene que:

$$BE \cdot h_2 = AD \cdot h_1$$

Por lo tanto:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{AD}{BE}$$

Es decir:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{CD}{CE} = \frac{AD}{BE}$$

Entonces:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{AD}{BE}$$

O lo que es equivalente:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$$

Que es exactamente lo que queríamos demostrar. ☐

Si consideramos las mismas notaciones que en el Teorema de Tales y usando propiedades de las proporciones, podemos obtener que como:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$$

Entonces $AD \cdot EC = BE \cdot DC$, y sumando a ambos lados el número $EC \cdot DC$, se obtiene $(DC + AD) \cdot EC = (BE + EC) \cdot DC$, que es equivalente a:

$$\frac{AD + DC}{DC} = \frac{BE + EC}{EC}$$

Es decir:

$$\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{EC}$$

Del mismo modo:

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BE}$$

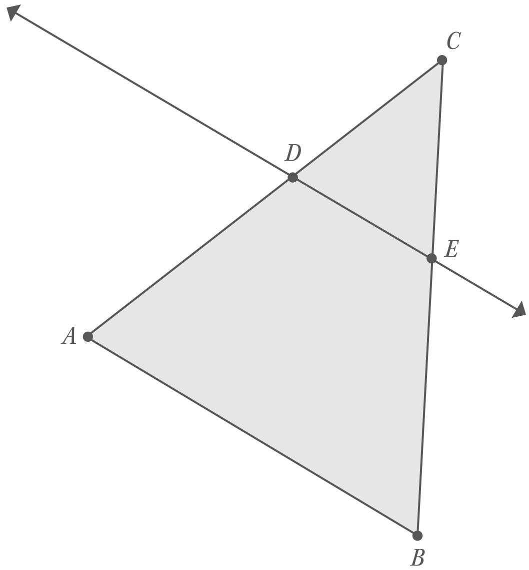


Figura IX.11.

Por lo tanto, si tenemos la configuración del Teorema de Tales, obtenemos que el cociente entre 2 de los lados (escogidos especialmente) de los triángulos ΔABC y ΔDEC es constante, esto es:

$$\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{CE}=k$$

O dicho de otro modo:

$$AC=k\cdot DC$$
$$BC=k\cdot CE$$

En este punto, es natural preguntarse si $AB = k \cdot DE$, para la misma constante k. La respuesta es sí y para mostrarlo usaremos el Teorema de Pitágoras.

Tracemos la altura del triángulo ΔABC que pasa por C.

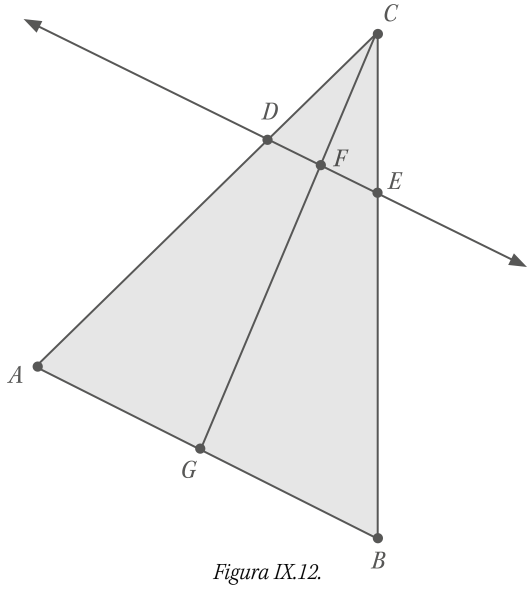


Figura IX.12.

Aplicando el Teorema de Tales a ΔAGC tenemos que:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{CG}{CF} = k$$

Entonces, $AC = k \cdot DC$ y $CG = k \cdot CF$, aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ΔAGC y ΔDFC, se obtiene:

$$AG^2 + GC^2 = AC^2 \qquad (1)$$

$$DF^2 + FC^2 = DC^2 \qquad (2)$$

Multiplicando la igualdad (2) por k^2 se obtiene:

$$k^2 DF^2 + k^2 FC^2 = k^2 DC^2 \qquad (3)$$

Pero $AC^2 = k^2 DC^2$ y $CG^2 = k^2 CF^2$, reemplazando esto en (3) se obtiene:

$$k^2 DF^2 + CG^2 = AC^2$$

y comparando con (1) se tiene que:

$$k^2 DF^2 = AG^2$$

Como k, DF y AG son números positivos sabemos que:

$$k \cdot DF = AG.$$

Repitiendo el argumento para los triángulos ΔBGC y ΔEFC se obtiene que:

$$BG = k \cdot EF$$

Entonces tenemos que:

$$AB = AG + GB = k \cdot DF + k \cdot EF = k(DF + EF) = k \cdot DE$$

Por lo tanto, si se tiene un triángulo ΔABC y una recta paralela a $\overline{AB}$ que intersecta a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en D y E respectivamente y esos puntos no son los extremos de esos segmentos, como muestra la figura, entonces existe una cosntante positiva k tal que:

$$AB = k \cdot DE$$
$$BC = k \cdot EC$$
$$AC = k \cdot DC$$

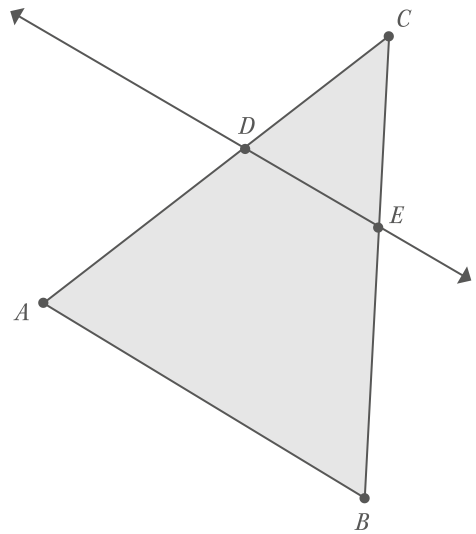
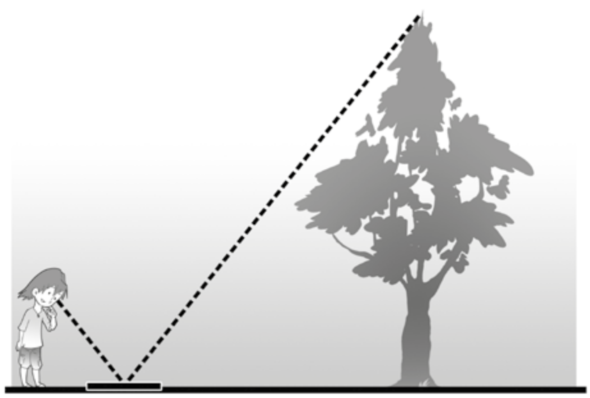


Figura IX.13

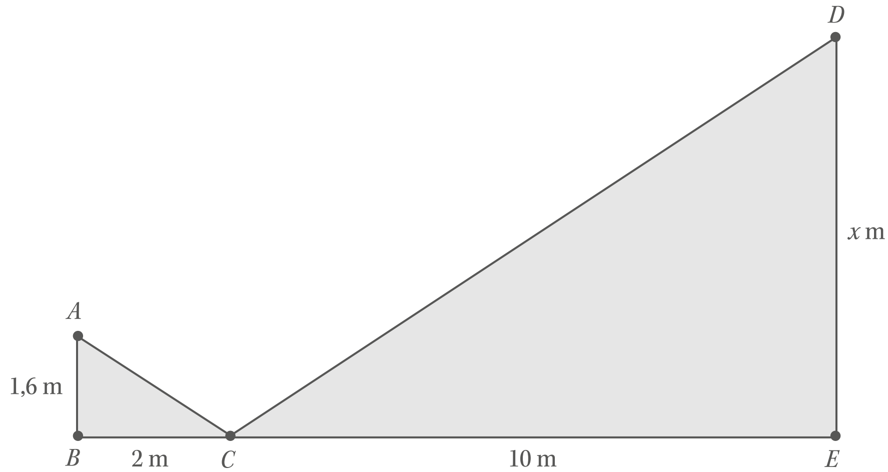
Ejemplo

Resolvamos el siguiente problema:

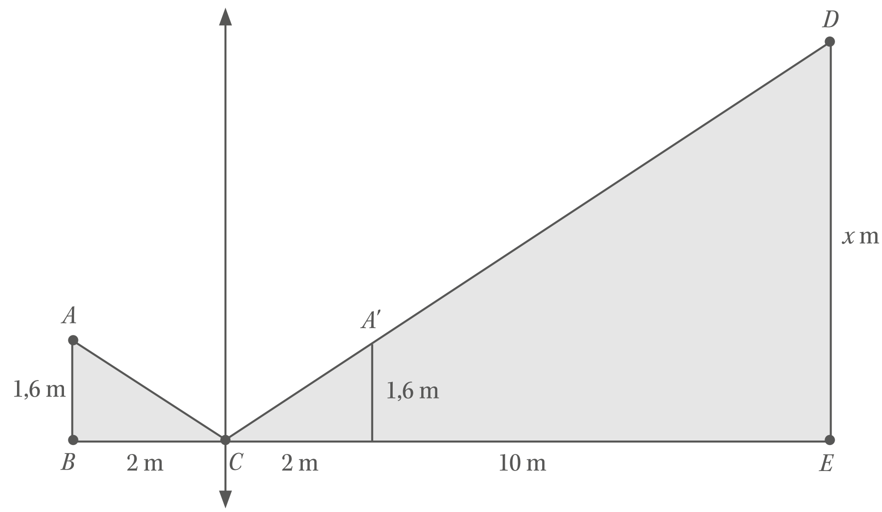
Una joven pone un espejo en el suelo a 10 m de la base de un árbol y se sitúa a 2 m del espejo. Si la joven puede ver en el espejo el reflejo de la punta del árbol y sus ojos están a 1,6 m del suelo, ¿cuál es la altura del árbol?



Hagamos un esquema de la situación:



Notamos que $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{DE}$ y que los ángulos $\measuredangle ACB$ y $\measuredangle DCE$ son congruentes. Entonces, tracemos la paralela a $\overline{AB}$ que pasa por C y reflejemos respecto a esa recta el triángulo ΔCBA.



Entonces, tenemos la configuración del Teorema de Tales:

$$\frac{2}{1{,}6} = \frac{10}{x}$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

Por lo tanto, el árbol mide 8 m.

2.1 ¿Quién fue Tales?

Tales de Mileto (625-546 a.C) era un comerciante y legislador griego nacido en Mileto (en la costa oeste del Asia Menor) o, tal vez, como dice el historiador Heródoto, en alguna ciudad fenicia hacia el 625 antes de nuestra era. Según Heródoto, Tales fue un estadista práctico que estaba a favor de la federación de ciudades jónicas de Grecia. Después de su éxito en el mundo de los negocios, Tales lo abandonó para dedicarse a la filosofía y a la matemática.

Tales fue fundador de la filosofía griega y es considerado unos de los 7 sabios de Grecia (Bías de Priene, Cleóbulo de Lindos, Periandro de Corinto, Pítaco de Mitilene, Quilón de Esparta, Solón de Atenas y Tales de Mileto). Se le conoce como el "Padre de la matemática y la filosofía griega". También fue un gran astrónomo capaz de predecir el eclipse solar del año 585 a.C., además de determinar el número exacto de días que tiene el año. Se dice también que introdujo la geometría a Grecia.

Se le considera un discípulo de los egipcios y caldeos, suposición de muy buen fundamento por los viajes que realizó Tales a Mesopotamia y Egipto.

De Tales no se conserva ningún escrito. Su pensamiento nos llegó a través de otros tratadistas y filósofos griegos, como Aristóteles y Diógenes de Laercio.

Fue capaz de comprender y enseñar lo que había aprendido de su relación con los sacerdotes en Egipto. Se cuenta que en uno de sus viajes a esas tierras, determinó la altura de la pirámide de Keops aprovechando la sombra que se producía en un determinado momento, aquel en que la longitud de la sombra es igual a la altura de la pirámide (Tales se midió el mismo y esperó a que su sombra fuera de su tamaño, en ese momento midió la sombra de la pirámide y concluyó que esa medida era la altura de la pirámide).

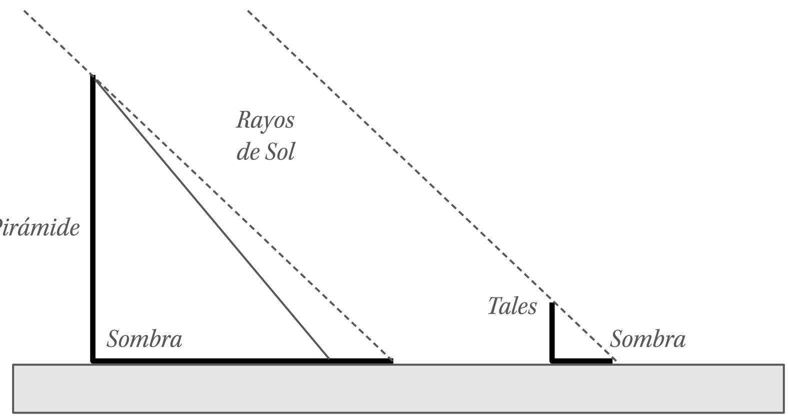


Figura IX.14.

Tales fue el primero en demostrar sus afirmaciones, por lo que se le considera el primer matemático de la historia. Entre los teoremas que se le deben a Tales están: "Todo diámetro biseca a la circunferencia", "los ángulos en la base de un triángulo isosceles son congruentes", "los ángulos opuestos por el vértice son congruentes", "el criterio de congruencia *LAL*", "todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto," y el Teorema que lleva su nombre en este libro.

2.2 El recíproco del Teorema de Tales

El recíproco del Teorema es Tales es cierto y lo enunciamos y demostramos a continuación.

Teorema IX.4: Recíproco de Tales

Si una recta interseca 2 lados de un triángulo en segmentos proporcionales, entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo.

Demostración

Consideremos un triángulo ΔABC y en él marquemos E en el lado $\overline{AB}$ y F en $\overline{AC}$, tales que:

$$AB = k \cdot AE$$
$$AC = k \cdot AF$$
$$BC = k \cdot EF$$

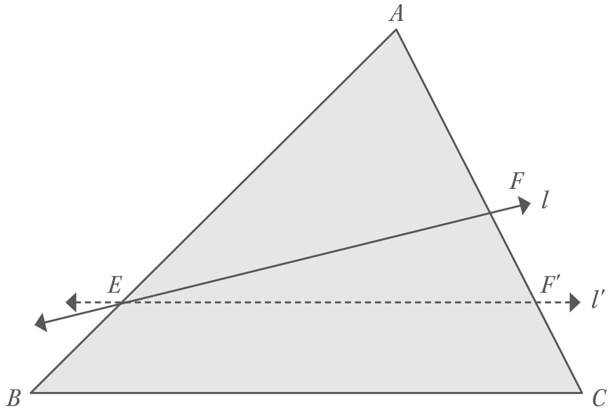


Figura IX.15.

Supongamos además que $\overline{EF}$ no es paralela a $\overline{BC}$, entonces tracemos l' la recta paralela a $\overline{BC}$ que pasa por E (el postulado de las paralelas, **Axioma VIII.1**, nos permite asegurar que l' existe). Denotemos por F' a la intersección entre l' y AC. Por último $l = \overleftrightarrow{EF}$.

Por el Teorema de Tales se tiene que $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$, pero $\frac{AB}{AE} = k$; por lo tanto, $AC = k \cdot AF'$. Entonces, $AF = AF'$.

Por otra parte:

$$AF' = AF + FF'$$

Luego $FF' = 0$, por lo tanto se tiene que $F = F'$; es decir $l' = l$, y $\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{BC}$. ❑

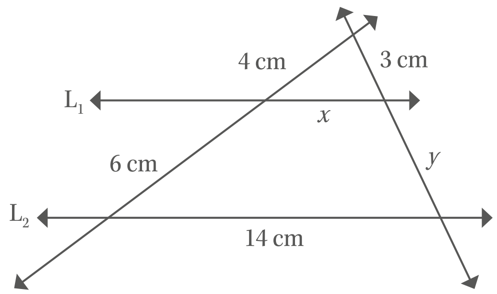
Notemos que en la demostración anterior no usamos que todos los lados eran proporcionales, solo nos bastó que

$$AB = k \cdot AE$$
$$AC = k \cdot AF$$

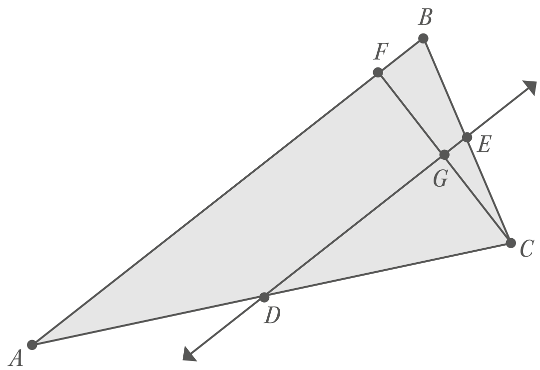
O lo que es lo mismo, la igualdad $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AF}$ basta para asegurar que $\overline{EF}$ es paralela a $\overline{BC}$.

Ejercicios de la sección

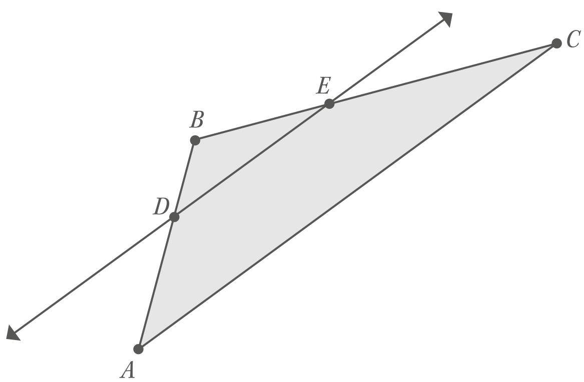
1. Si $L_1 \parallel L_2$, entonces determina los valores de x y y.



2. Si ΔABC es un triángulo, $\overline{DE}$ es paralela a $\overline{AB}$. Entonces, por el Teorema de Tales existe $k > 0$ tal que $AC = k \cdot DC$. Suponga además que $\overline{CF}$ es una altura del triángulo. ¿Es cierto que $EC = k \cdot CG$?



3. Si ΔABC es un triángulo y $\overleftrightarrow{DE}$ es paralela a $\overline{AC}$, entonces por el Teorema de Tales existe $k > 0$ tal que $AC = k \cdot DE$. ¿Cuál es el cociente entre el área de ΔABC y de ΔBDE?



3. Semejanza de Triángulos

La semejanza de figuras planas tiene que ver con la *contracción* o *dilatación* del plano completo que contiene a la figura. Pensemos en un plano de goma, como la superficie de un globo, y ahí dibujemos una figura cualquiera

Figura IX.16.

Luego estiramos la superficie del globo y la figura se dilata y se ve así:

Figura IX.17.

También se podría pensar que la segunda es la figura original y que la primera es la *contracción* de ella.

En el caso de un triángulo pasa exactamente lo mismo, tenemos el triángulo ΔABC en el plano y luego dilatamos el plano

Figura IX.18.

Así obtenemos el triángulo $\Delta A'B'C'$, el cual es el mismo que el anterior, pero dilatado. Hemos remarcado los segmentos del triángulo digitalmente, para que se aprecien mejor que si solo viéramos el dibujo hecho con lápiz.

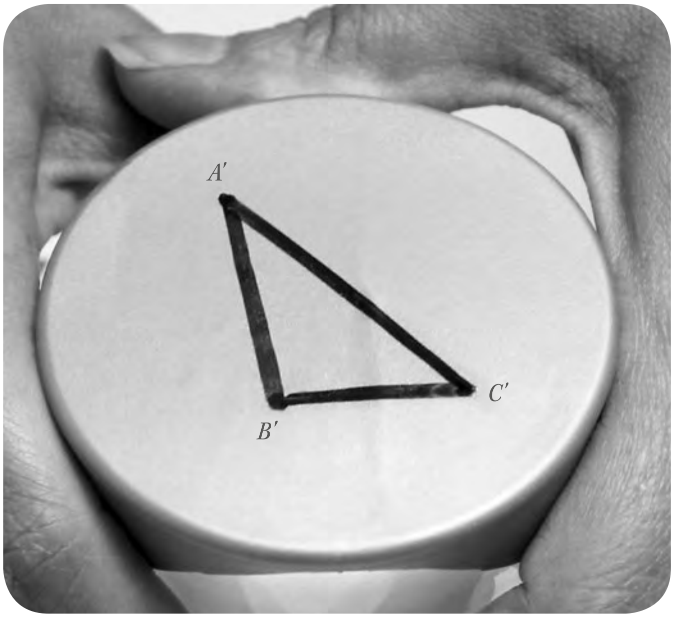


Figura IX.19.

Si superponemos los 2 triángulos, vemos la siguiente configuración:

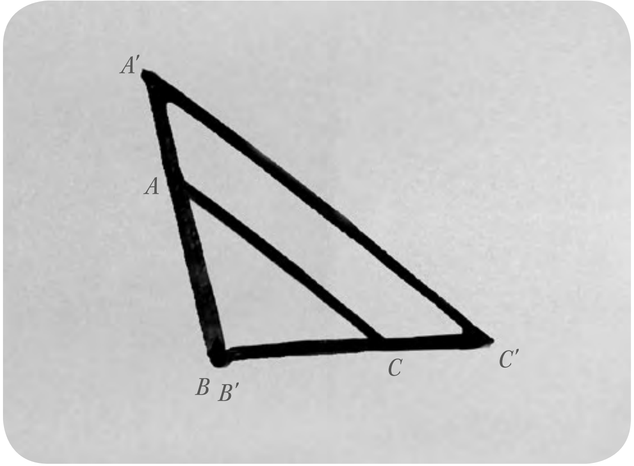


Figura IX.20

El segmento $\overline{AC}$ parece ser paralelo a $\overline{A'C'}$, y además $\overline{AB}$ es parte de $\overline{A'B'}$. Del mismo modo, parece ser que $\overline{BC}$ es parte de $\overline{B'C'}$, por lo tanto los ángulos $\measuredangle A'C'B'$ y $\measuredangle ACB$ son congruentes. Igualmente, los ángulos $\measuredangle A'B'C'$ y $\measuredangle ABC$ son congruentes y también lo son los ángulos $\measuredangle C'A'B'$ y $\measuredangle CAB$. Si $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ son paralelos, entonces se satisfacen las condiciones del Teorema de Tales y existe $k > 0$, tal que:

$$B'C' = k \cdot BC$$
$$B'A' = k \cdot BA$$
$$A'C' = k \cdot AC$$

O, dicho de otro modo:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'A'}{BA} = \frac{A'C'}{AC}$$

Esto motiva nuestra definición de triángulos semejantes.

Definición IX.1 **[Triángulos semejantes]:** 2 triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ se dicen *semejantes* si $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle BCA \cong \measuredangle B'C'A'$ y $\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B'$, y si existe $k > 0$ tal que $A'B' = k \cdot AB$, $A'C' = k \cdot AC$ y $B'C' = k \cdot BC$. Si esto ocurre anotamos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ y a k llamamos *constante de semejanza*.

Si la constante de semejanza es 1, entonces $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ y $B'C' = BC$, entonces los triángulos son congruentes. Es decir, si dos triángulos son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

Al igual que en el caso de triángulos congruentes, también existen criterios de semejanza. Es decir, condiciones que se deben cumplir para que 2 triángulos sean semejantes sin necesidad de comprobar todas las condiciones de la definición. Esos criterios los presentaremos como teoremas.

Teorema IX.5: criterio de semejanza AA

Para que 2 triángulos sean semejantes, basta que 2 ángulos de un triángulo midan lo mismo que 2 ángulos del segundo triángulo.

Antes de dar la demostración del teorema, notemos que si la medida de 2 ángulos de un triángulo coinciden con la medida de 2 ángulos de otro triángulo, entonces también coinciden la medida de los respectivos terceros ángulos. Es decir, este criterio se podría llamar *AAA*, o sea, si 2 triángulos tienen sus ángulos de las mismas medidas, entonces los triángulos son semejantes. Hemos preferido enunciar el **Criterio** ***AA***, pues la gracia de los criterios de congruencia y de semejanza es que con la menor cantidad de información se pueda decidir si los triángulos son congruentes o semejantes.

Demostración del teorema IX.5

Consideremos 2 triángulos ΔABC *y* $\Delta A'B'C'$ tales que 2 ángulos de uno de ellos sean congruentes a 2 ángulos del otro. Entonces, según el párrafo anterior, nos basta demostrar que los lados de los triángulos son proporcionales, es decir, debemos demostrar que existe $k > 0$, tal que $A'B' = k \cdot AB$, $A'C' = k \cdot AC$ y $B'C' = k \cdot BC$. O bien, debemos demostrar que:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'A'}{BA} = \frac{A'C'}{AC}$$

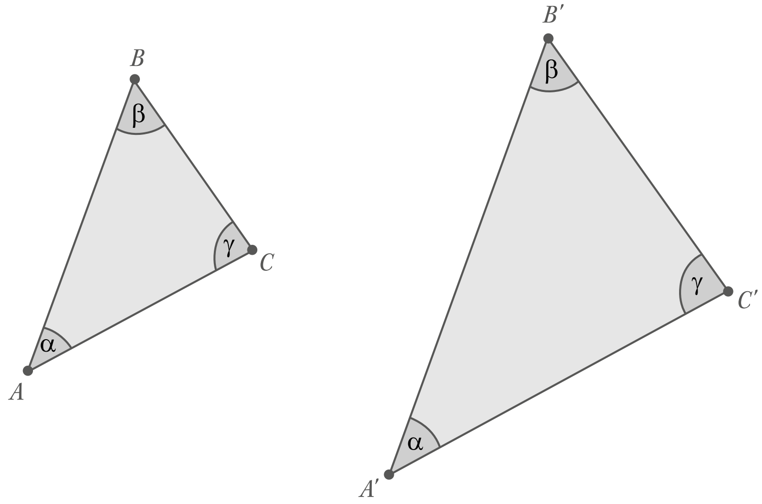


Figura IX.21.

Si $A'B' = AB$, entonces por **Criterio** *ALA* los triángulos serían congruentes y por lo tanto semejantes.

Podemos suponer entonces que $A'B' \neq AB$. Entonces, tenemos 2 posibles casos, que $A'B' > AB$ o que $AB > A'B'$. Si $AB > A'B'$, entonces podemos renombrar los vértices de los triángulos: al vértice A lo renombramos como A' y viceversa, al vértice B lo renombramos como B' y viceversa, al vértice C lo renombramos como C' y viceversa; entonces estaríamos en el caso $A'B' > AB$.

Entonces, sin pérdida de generalidad, nos basta demostrar el teorema para el caso $A'B' > AB$.

Marquemos un punto M en el segmento $A'B'$, tal que $A'M = AB$, y luego tracemos una recta L paralela a $\overline{B'C'}$, que pasa por M. Para marcar, con el compás podemos hacer la circunferencia de radio AB y centro A'.

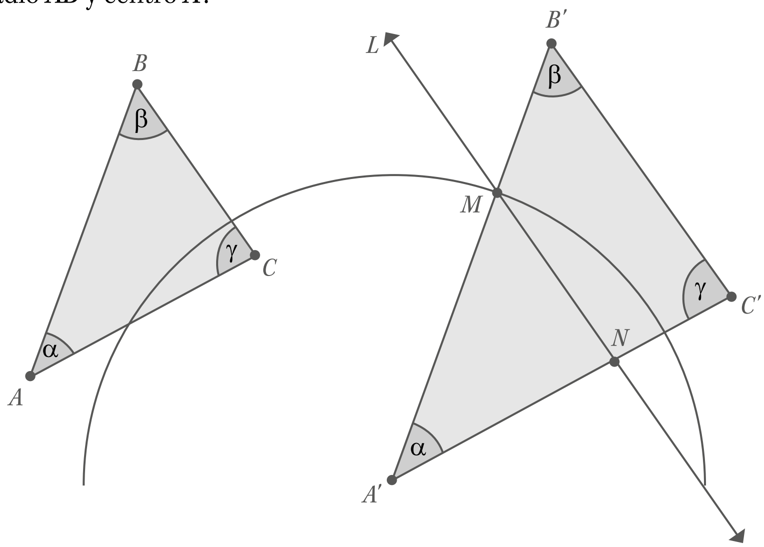


Figura IX.22.

A la intersección entre $\overline{A'C'}$ y L la denotamos por N. Como $\overline{MN}$ es paralela a $\overline{B'C'}$, entonces se concluye que $\measuredangle A'MN$ mide β y $\measuredangle A'NM$ mide γ. Entonces, por **Criterio** *ALA*, se tiene que ΔABC y $\Delta A'MN$ son congruentes, por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} A'M &= AB \\ A'N &= AC \\ MN &= BC \end{aligned}\right\} (1)$$

Aplicando el Teorema de Tales al triángulo $\Delta A'B'C'$, tenemos que existe $k > 0$, tal que

$$A'B' = k \cdot A'M$$
$$A'C' = k \cdot A'N$$
$$B'C' = k \cdot MN$$

Reemplazando (1) en las 3 igualdades de arriba resulta:

$$A'B' = k \cdot AB$$
$$A'C' = k \cdot AC$$
$$B'C' = k \cdot BC$$

Por lo tanto, $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$. ☐

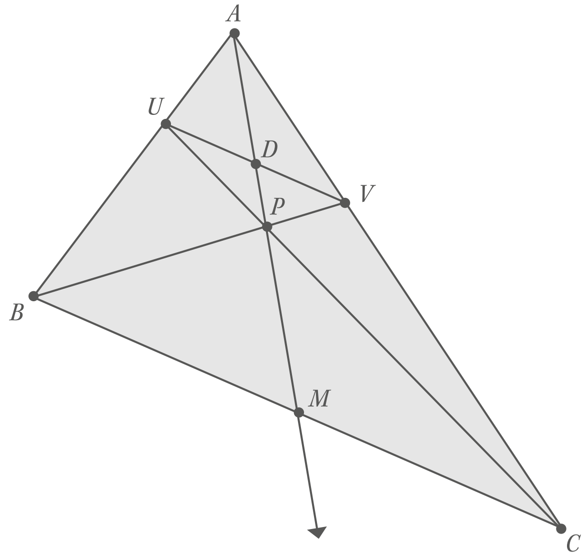
Ejercicio

Si 2 triángulos son semejantes y la medida de un lado de un triángulo es la misma que la medida de un lado del otro triángulo, entonces ¿Son congruentes los triángulos?

Ejemplo

En el triángulo ΔABC, consideremos U y V como puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Los segmentos $\overline{UV}$ y $\overline{BC}$ son paralelos. Además el punto P es la intersección entre $\overline{BV}$ y $\overline{CU}$. Demostraremos que P pertenece a la mediana correspondiente al vértice A.

Primero que nada, haremos un dibujo que describa la situación del enunciado del problema.



Además, hemos trazado el rayo $\overrightarrow{AP}$ y M es la intersección entre ese rayo y $\overline{BC}$. Entonces, debemos demostrar que M es el punto medio entre B y C. Denotemos por D la intersección de $\overline{AM}$ con $\overline{UV}$. Por el criterio de semejanza AA y por el **Teorema VIII.6**, tenemos que $\Delta AUD \sim \Delta ABM$. Del mismo modo, $\Delta ADV \sim \Delta AMC$, por lo tanto:

$$\frac{UD}{BM} = \frac{AD}{AM}$$
$$\frac{DV}{MC} = \frac{AD}{AM}$$

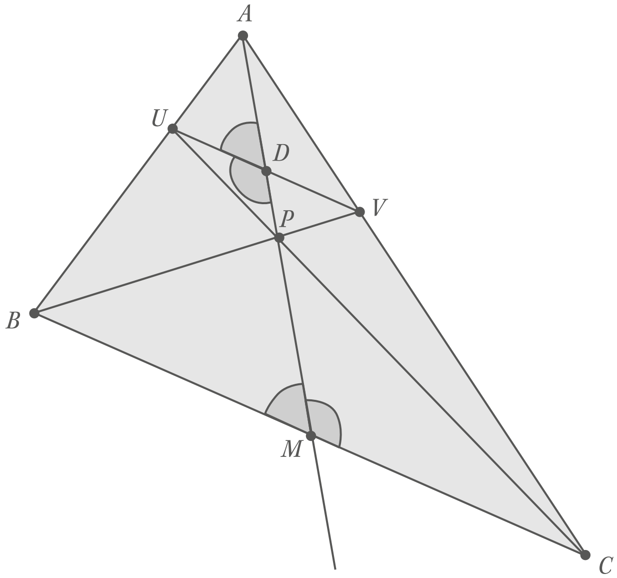
Entonces,

$$\frac{UD}{BM} = \frac{DV}{MC}$$

De forma equivalente:

$$\frac{UD}{DV} = \frac{MB}{MC} \qquad (1)$$

Ahora notemos que como $\overline{UD} \parallel \overline{BM}$, entonces los ángulos $\measuredangle UDA$ y $\measuredangle BMA$ son congruentes; por lo tanto, $\measuredangle CMP \cong \measuredangle PDU$.



Como $\measuredangle PUV$ y $\measuredangle MCP$ son alternos internos, entonces son congruentes. Entonces, aplicando de nuevo el criterio de semejanza *AA*, se tiene que $\Delta DUP \sim \Delta MCP$, por lo cual:

$$\frac{UD}{MC} = \frac{DP}{PM}$$

Usando el mismo razonamiento, resulta $\frac{DV}{BM} = \frac{DP}{PM}$. Por lo tanto, se obtiene que:

$$\frac{UD}{MC} = \frac{DV}{BM}$$

O, de forma equivalente:

$$\frac{DV}{UD} = \frac{MB}{MC} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2), se obtiene que

$$\frac{MB}{MC} = \frac{DV}{UD} = \frac{UD}{DV}$$

Si $\frac{UD}{DV} = x$, entonces $\frac{1}{x} = \frac{DV}{UD}$. Si $\frac{DV}{UD} = \frac{UD}{DV}$, implica que $x = \frac{1}{x}$, entonces x es un número positivo que es igual a su inverso multiplicativo, es decir, $x = 1$. Entonces $\frac{MB}{MC} = 1$.

Que es lo mismo que decir que $MB = MC$, entonces, M es el punto medio entre B y C, que es lo que queríamos demostrar.

Recordemos que para la congruencia de triángulos tenemos el Criterio *LAL*, para el caso de triángulos semejantes también existe un criterio equivalente a aquel.

Teorema IX.6: Criterio de Semejanza LAL

Si 2 triángulos tienen 2 lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos miden lo mismo, entonces los triángulos son semejantes.

Demostración

Consideremos 2 triángulos ΔABC *y* ΔDEF tales que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ y $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$. Si $AB = DE$, entonces $AC = DF$ y, por criterio de congruencia *LAL* se concluye que ΔABC y ΔDEF son congruentes y, por lo tanto, semejantes.

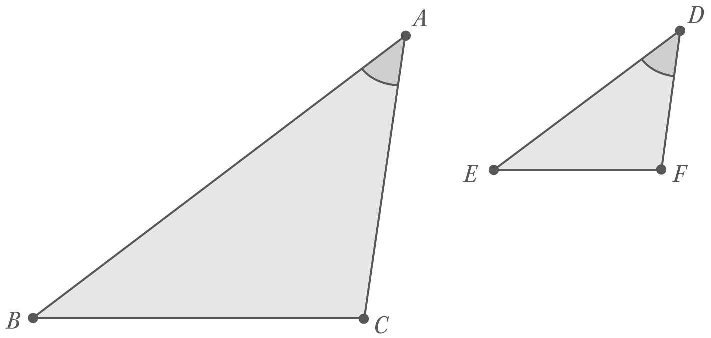


Figura IX.23.

Al igual que en la demostración del criterio de semejanza *AA*, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $AB > ED$, el caso $AB < ED$ es análogo.

En el segmento $\overline{AB}$, marquemos el punto D' tal que $AE' = DE$. En el segmento $\overline{AC}$, marquemos F' tal que $AF' = DF$.

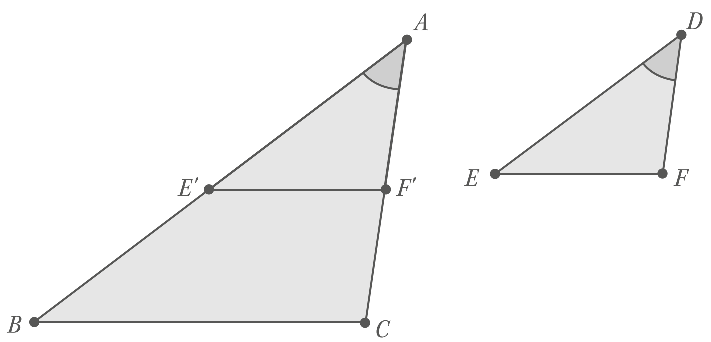


Figura IX.24

Por criterio de congruencia *LAL,* se obtiene que $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$; entonces, como sabemos del enunciado que:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

Se tiene que:

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Por el recíproco del Teorema de Tales, resulta que $\overline{E'F'}$ es paralela a $\overline{BC}$, entonces $\measuredangle AE'F' \cong \measuredangle ABC$ y por la congruencia $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$ se tiene que:

$$\measuredangle DEF \cong \measuredangle AE'F' \cong \measuredangle ABC$$

Entonces por **Criterio** ***AA*** se tiene que los triángulos ΔABC y ΔDEF son semejantes.❒

También existe un criterio de semejanza de triángulos *LLL*, el cual enunciamos a continuación y su demostración es un ejercicio para el lector.

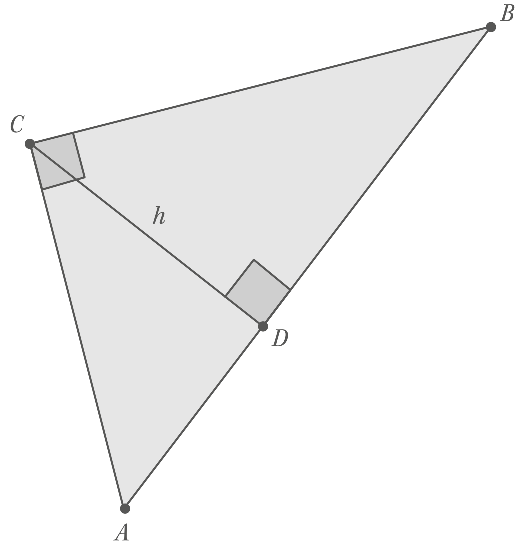
Teorema IX.7: criterio de semejanza LLL

Para que 2 triángulos sean semejantes, basta verificar que los lados del primero sean proporcionales a los correspondientes del segundo.

Ejemplo

Considere un triángulo ΔABC rectángulo en C, denote por h la medida de la altura correspondiente al vértice C. Denote también por D el punto de intersección de la altura correspondiente a C con el lado $\overline{AB}$. Demostremos que:

$$\frac{h}{BD} = \frac{AD}{h}$$



Denotemos por α la medida del ángulo $\measuredangle CAB$ y por β la medida del ángulo $\measuredangle CBA$. Como $\alpha + \beta = 90$ y como $m(\measuredangle DAC) + m(\measuredangle ADC) = 90$, se tiene que $m(\measuredangle ADC) = \beta$. Usando el criterio de semejanza *AA*, podemos afirmar que los triángulos ΔDAC y ΔDCB son semejantes, entonces:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{DB}{CD}$$

O, lo que es lo mismo:

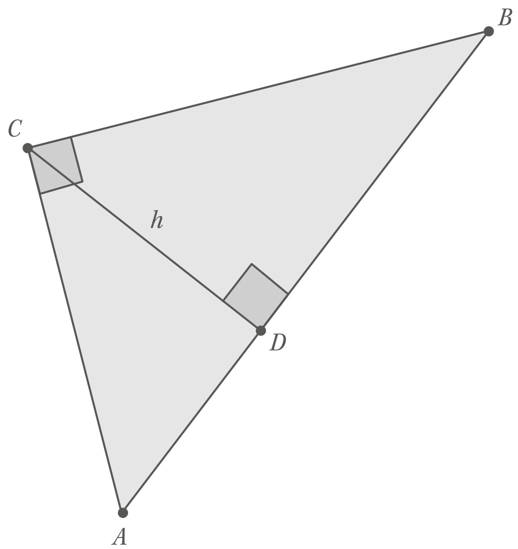
$$\frac{h}{DA} = \frac{DB}{h}$$

Equivalentemente:

$$\frac{h}{DB} = \frac{DA}{h}$$

Ejercicios de la sección

1. Considere un triángulo ΔABC rectángulo en C, denote por h la medida de la altura correspondiente al vértice C. Denote también por D el punto de intersección de la altura correspondiente a C con el lado $\overline{AB}$.



a. Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta CBD$

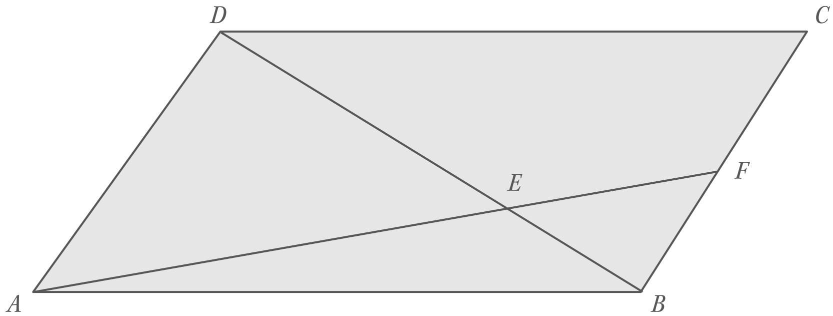
b. Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta ACD$

c. Demuestre que $\dfrac{BC}{AD + DB} = \dfrac{h}{AC}$

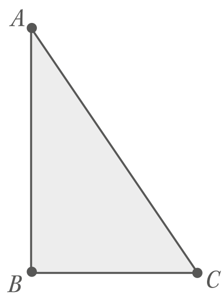
2. Calcule la altura de un árbol que proyecta una sombra de 3,6 m si se sabe que un poste de 3 m de altura proyecta en el mismo momento una sombra de 1,25 m.

3. Si tiene 2 triángulos semejantes cuya razón de semejanza es 4, ¿cuál es la razón entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

4. En el paralelogramo de la figura, $\overline{AD}$ = 48 cm, $\overline{AE}$ = 24 cm y $\overline{EF}$ = 18 cm. Calcule el valor de $\overline{FB}$



5. Considere el triángulo rectángulo de la imagen siguiente:



a. Construya con regla y compás un triángulo $\Delta A'B'C'$ semejante a ΔABC, con las siguientes condiciones
   ii. $AB = 2A'B'$
   iii. $B = B'$
   iv. A, B' y B son colineales.
   v. B, C' y C son colineales.

b. Construya otros 3 triángulos congruentes con $\Delta A'B'C'$ en ΔABC, tales que cubran toda el área de ΔABC y no se traslapen.

4. Aplicaciones del Teorema de Pitágoras y del Teorema de Tales

4.1 Congruencia y proporcionalidad en la circunferencia

A continuación volvemos a nombrar algunos elementos de la circunsferencia, para luego mostrar algunos resultados relacionado con dichos elementos.

Recordemos que una circunferencia de centro O y radio $r > 0$ es la colección de puntos P del plano, tales que la distancia de P a O es r. También se llama *radio* a cualquier segmento que une el centro de la circunferencia con algún punto de la circunferencia. Note que todos los radios de la circunferencia miden lo mismo y ese valor es r. El *interior* de la circunferencia de centro O y radio r son todos los puntos X del plano cuya distancia a O es menor que r.

Una *cuerda* de una circunferencia es un segmento que une 2 puntos de la circunferencia. Un *diámetro* es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

Una *secante* a la circunferencia es una recta que contiene a una cuerda de la circunferencia. Una tangente a la circunferencia es una recta que interseca a la circunferencia en un único punto, y ese punto se llama punto de *tangencia*.

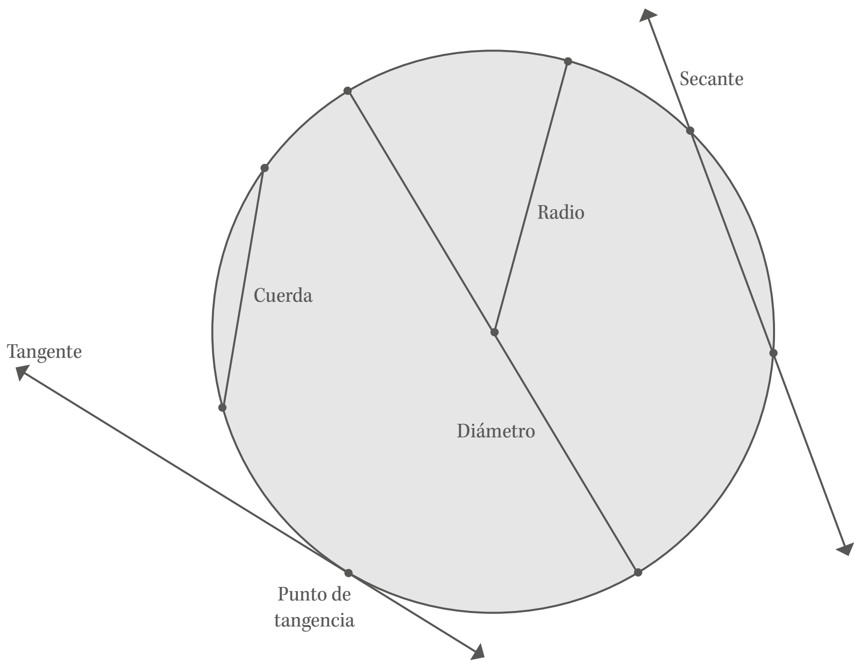


Figura IX.25.

Para comenzar nuestro estudio, consideremos en una circunferencia de centro O y radio r una cuerda (no diámetro) y pensemos en todos los radios que intersectan a esa cuerda.

Si pensamos que es un mismo radio que se mueve de un extremo A de la cuerda al otro extremo B de la cuerda, entonces vemos que el ángulo $\measuredangle AOP$ va aumentando a medida que P se acerca a B.

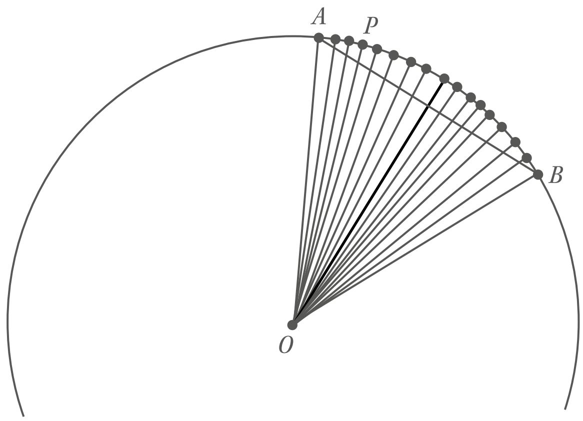


Figura IX.26.

De hecho, como $OA = OB$ el triángulo ΔAOP es isósceles, por tanto, la mediana correspondiente a O es además altura y bisectriz. Por lo tanto, un radio intersecta a una cuerda perpendicularmente si y solo si la dimidia. Esta primera observación que hemos hecho la escribiremos como teorema.

Teorema IX. 8

En una circunferencia de centro O y radio r, consideremos una cuerda $\overline{AB}$ de la circunferencia y un radio $\overline{OP}$ de la circunferencia que intersecta a $\overline{AB}$. Entonces, la cuerda es perpendicular al radio si y solo si el radio dimidia a la cuerda.

El siguiente ejemplo también se apoya en la idea de que con 2 radios de una circunferencia se puede formar un triángulo isosceles. Consideremos una circunferencia de centro O y un diámetro $\overline{AB}$. Con un punto C en la circunferencia distinto de A y de B, formemos el triángulo ΔABC. ¿Qué podemos decir de ese triángulo?

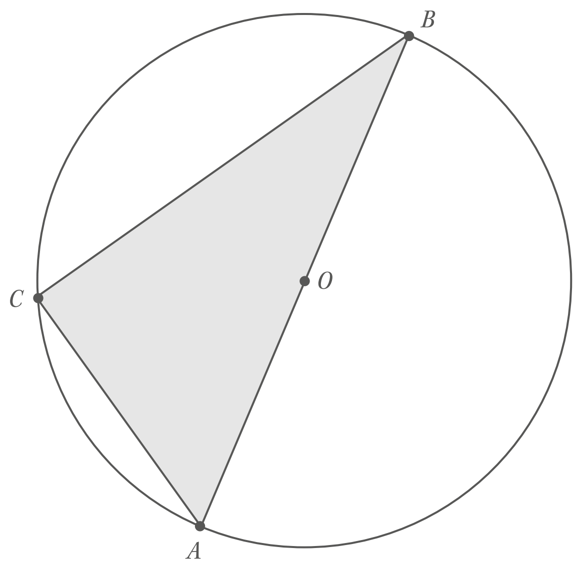


Figura IX.27.

Bueno, a simple vista no mucho. Para observar algo y sacar provecho de que *A*, *B* y *C* están en la circunferencia, construiremos el radio $\overline{OC}$ y formaremos 2 triángulos isósceles, a saber, ΔAOC y ΔBOC.

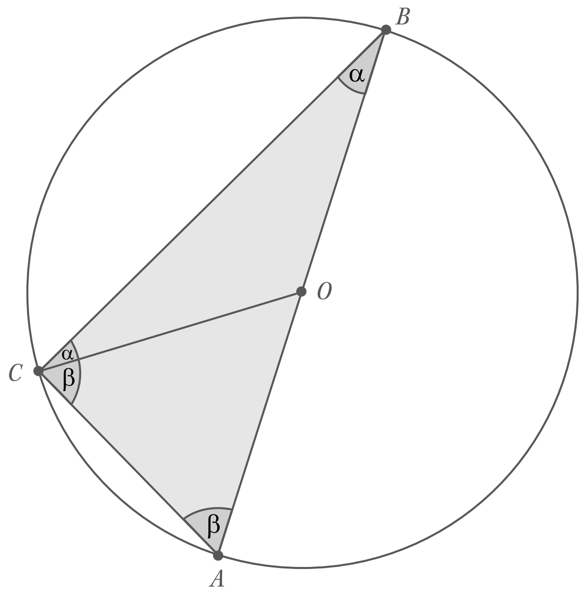


Figura IX.28.

Los ángulos $\measuredangle OCB$ y $\measuredangle OBC$ son congruentes, denotemos la medida común de esos ángulos como α. Los ángulos $\measuredangle OAC$ y $\measuredangle OCA$ también son congruentes y denotaremos por β la medida común de esos ángulos. Por teorema del ángulo exterior, se tiene que $m(\measuredangle AOB) = 2\alpha$ y $m(\measuredangle COB) = 2\beta$. Como $\measuredangle AOB$ es un ángulo extendido, entonces:

$$2\alpha + 2\beta = 180$$
$$\alpha + \beta = 90$$

Pero $\alpha + \beta$ es la medida del ángulo $\measuredangle ACB$. Es decir, el triángulo ΔABC es rectángulo en *C*.

Este resultado también lo escribiremos como un teorema (que también se cree que se debe a Tales).

Teorema IX.9

Si un ángulo inscrito en una circunferencia subtiende[1] un diámetro, entonces el ángulo es recto.

[1] Decimos que un ángulo inscrito en la circunferencia *subtiende* un diámetro, si los lados del ángulo intersecan a la circunferencia en los extremos de un diámetro.

4.1.1 Ángulos y arcos

Un *ángulo central* de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

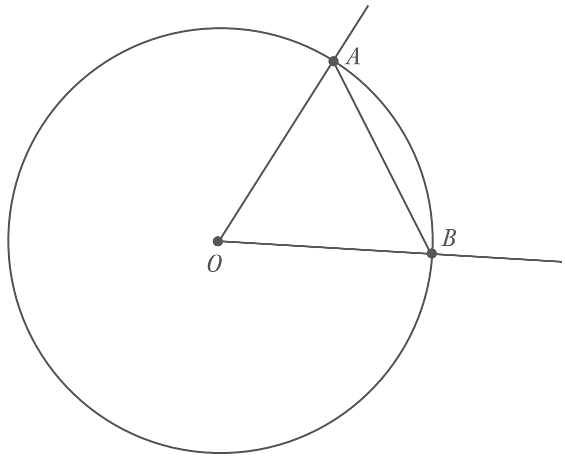


Figura IX.29.

El arco subtendido por un ángulo central está conformado por los puntos de la circunferencia que están en el interior del ángulo. Los puntos de intersección de los lados del ángulo con la circunferencia son los extremos del arco subtendido. La cuerda $\overline{AB}$ también se dice que es subtendida por el ángulo $\measuredangle AOB$.

Dada una circunferencia de centro O y 2 puntos A y B en la circunferencia, el arco menor de extremos A y B es el arco subtendido por el ángulo central $\measuredangle AOB$. El *arco mayor* de extremos A y B está conformado por los puntos de la circunferencia que no están en el arco menor. Una *semicircunferencia* es el conjunto de los puntos de la circunferencia que están del mismo lado de un diámetro $\overline{AB}$ dado. Los extremos de la semicircunferencia son los extremos A y B del diámetro.

Un *ángulo inscrito en una circunferencia* es un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, tal que sus lados intersectan a la circunferencia en 2 puntos (distintos al vértice del ángulo). El arco subtendido por un ángulo inscrito es la intersección de la circunferencia con el interior del ángulo.

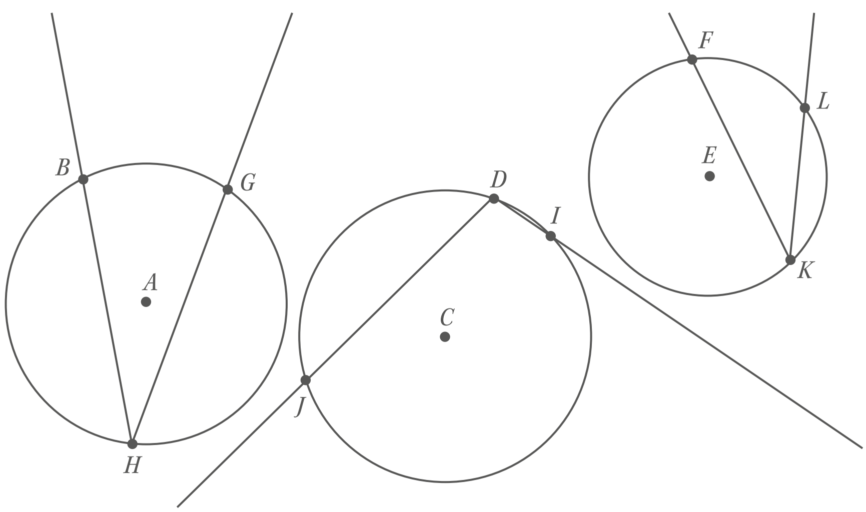


Figura IX.30.

En la **Figura IX.30** se indican 3 ángulos inscritos y sus arcos subtendidos. Nótese que el arco subtendido de un ángulo inscrito puede ser un arco menor o un arco mayor.

Teorema IX.10

Consideremos una circunferencia de centro O. Consideremos $\measuredangle AOB$ como un ángulo central. Si $\measuredangle ACB$ es un ángulo inscrito que subtiende el mismo arco que el ángulo central, entonces $m(\measuredangle ACB)=\frac{1}{2}m(\measuredangle AOB)$.

Antes de dar una demostración, notemos que el **Teorema IX.9** anterior es un caso particular de este teorema.

Demostración del teorema IX.10

Se deben distinguir 3 casos, según si el centro de la circunferencia está sobre un lado del ángulo, en el interior del ángulo o en el exterior del ángulo.

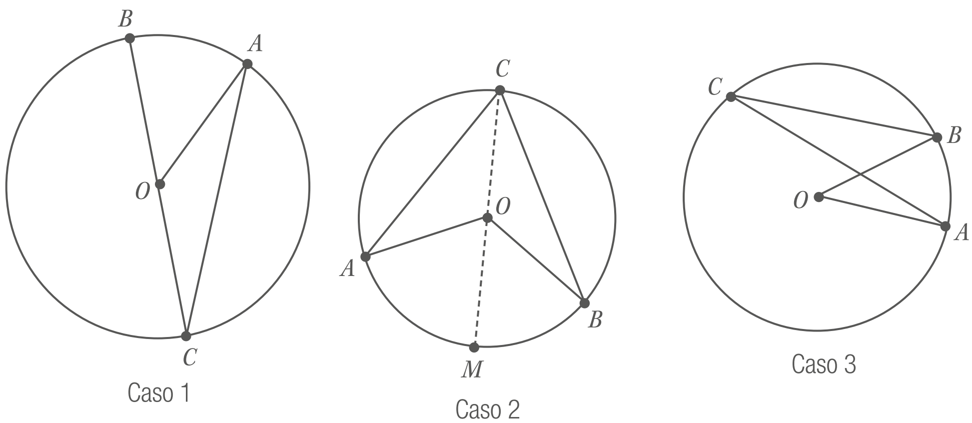


Figura IX.31.

En el primer caso, el ΔAOC es isósceles, pues 2 de sus lados son radios, con $m(\measuredangle ACB)=m(\measuredangle CAO)$. Pero $\measuredangle AOB$ es un ángulo exterior del triángulo, por lo que su medida es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes, por lo tanto:

$$m(\measuredangle AOB)=m(\measuredangle ACB)+m(\measuredangle CAO)=2m(\measuredangle ACB)$$

En el segundo caso, se traza el diámetro $\overline{CM}$. Se tiene, por el caso anterior, que $m(\measuredangle ACM)=\frac{1}{2}m(\measuredangle AOM)$ y que $m(\measuredangle BCM)=\frac{1}{2}m(\measuredangle BOM)$, de donde se obtiene que:

$$m(\measuredangle ACB)=m(\measuredangle ACM)+m(\measuredangle BCM)=\frac{1}{2}(m(\measuredangle AOM)+m(\measuredangle BOM))=\frac{1}{2}m(\measuredangle AOB)$$

La demostración en el tercer caso es un ejercicio para el lector. ❒

Un resultado que se deriva del anterior es el siguiente.

Corolario IX.1

Dos ángulos inscritos a una circunferencia que subtienden el mismo arco son congruentes.

Demostración

Daremos la demostración para el caso.

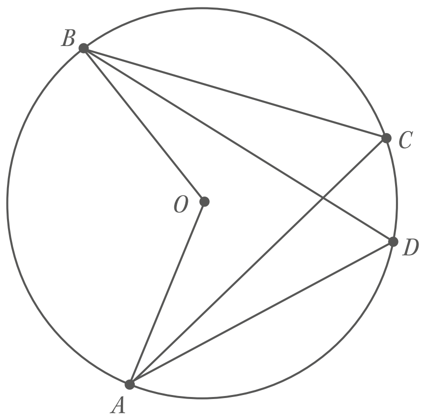


Figura IX.32

Por el **Teorema IX.10** se tiene que $m(\measuredangle ADB)=\frac{1}{2}m(\measuredangle AOB)$ y también por el teorema anterior se cumple que $m(\measuredangle ACB)=\frac{1}{2}m(\measuredangle AOB)$; por lo tanto, $m(\measuredangle ADB)=m(\measuredangle ACB)$. □

La demostración que dimos para el **Corolario IX.1**, no cubre todas las posibles configuraciones. Por ejemplo, los casos cuando el centro de la circunferencia está dentro de ambos ángulos, o cuando el centro de la circunferencia está en el lado de un ángulo, no fueron analizados en la demostración.

Ejercicio

Demuestre el **Corolario IX.1**, en total generalidad.

El **Teorema IX.10** muestra que las medidas de ángulos inscritos y ángulos del centro son proporcionales, con constante de proporcionalidad 2. Ahora, mostraremos un resultado de proporcionalidad referente a las medidas de cuerdas.

Teorema IX.11

Considere 2 cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de una circunferencia que se intersecan en un punto M. Entonces, $AM \cdot MC = BM \cdot MD$.

Demostración

Consideremos los triángulos ΔADM y ΔBCM como se muestra en la **Figura IX.33**.

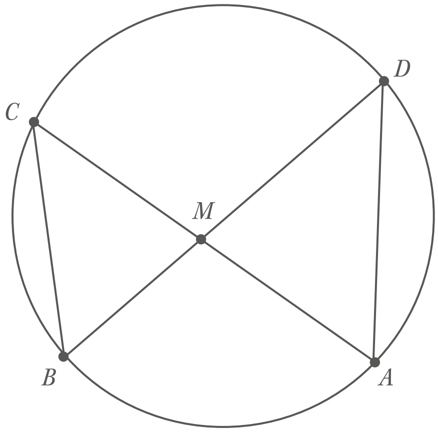


Figura IX.33.

Por el **Teorema IX.10** tenemos que $m(\measuredangle BDA) = m(\measuredangle BCA)$, pues subtienden el mismo arco. Por la misma razón $m(\measuredangle CAD) = m(\measuredangle CBD)$. Luego, por el criterio de semejanza AA, se tiene que los triángulos ΔADM y ΔBCM son semejantes. En particular:

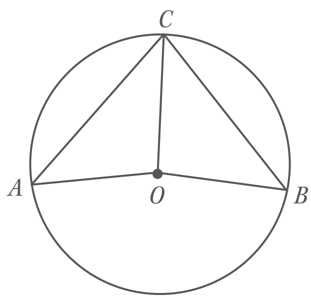
$$\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC}$$

De donde se obtiene que

$$AM \cdot MC = BM \cdot MD \quad \square$$

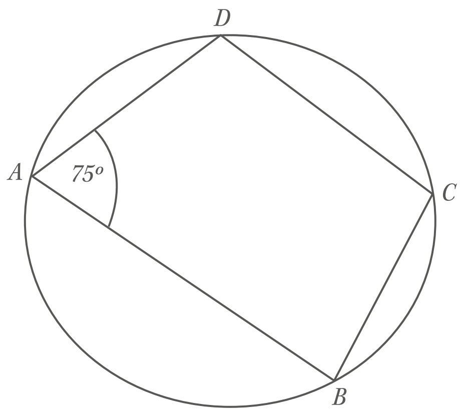
Ejercicios

1. En la figura $m(\measuredangle AOC) = 30°$ y $m(\measuredangle OCB) = 40°$. ¿Cuánto mide el ángulo del centro $\measuredangle AOB$?

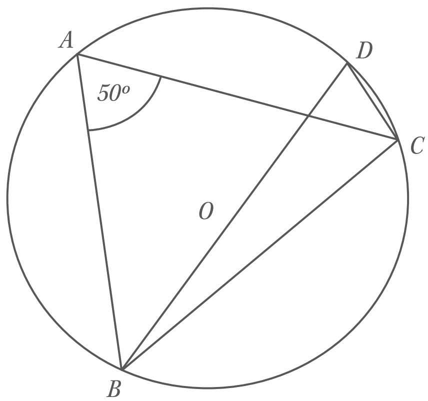


2. Demuestre que si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, entonces sus ángulos no adyacentes son suplementarios.

3. El cuadrilátero *ABCD* está inscrito en la circunferencia de centro *O*. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle BCD$?



4. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle BDC$?



5. Si los puntos *A* y *B* son puntos de la circunferencia $C(O,r)$ entonces demuestre que los puntos de $\overline{AB}$ distintos de *A* y de *B* están en el interior de la circunferencia. Es decir, si *P* está entre *A* y *B*, entonces demuestre que $OP < r$.

6. Sea *L* una recta que intersecta en un punto *A* a la circunferencia $C(O,r)$. Demuestre que *L* es tangente a la circunferencia si y solo si el radio $\overline{OA}$ es perpendicular a *L*.

4.2 Volumen y superficie de la esfera

Usemos el Principio de Cavalieri para dar una fórmula del volumen de la esfera. Recordemos que este dice que "si 2 cuerpos están entre 2 planos paralelos y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, entonces poseen igual volumen".

Consideremos un cono de radio R y altura R, un cilindro de altura R y radio R y la mitad de una esfera de radio R. Hagamos un corte plano a altura h de la base:

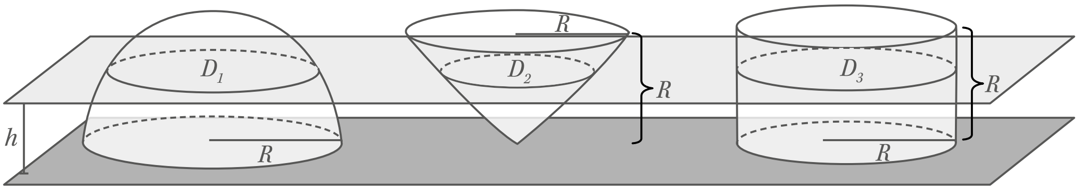


Figura IX.34.

El área D_3, la sección plana del cilindro es πR^2.

Usando el Teorema de Pitágoras, podemos calcular el área D_1. El área de la sección plana de la esfera es un círculo; por lo tanto, necesitamos encontrar el radio de ese círculo, denotemos con r ese radio.

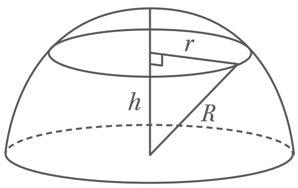


Figura IX.35.

Por lo tanto, el radio $r=\sqrt{R^2-h^2}$, entonces $D_1=\pi(R^2-h^2)=\pi R^2-\pi h^2$.

Finalmente, el área de D_2 es πh^2. De hecho, si hacemos un corte plano al cono, que sea perpendicular al plano que contiene a D_2 y que contenga al vértice del cono, podemos asegurar que el radio de D_2, que está en ese plano, es paralelo al radio del cono que también está contenido en ese plano.

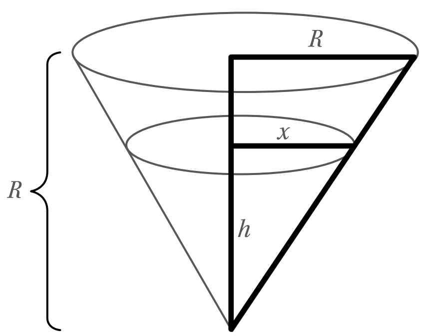


Figura IX.36.

Haciendo el corte perpendicular al plano que contiene a D_2, se puede observar la siguiente configuración.

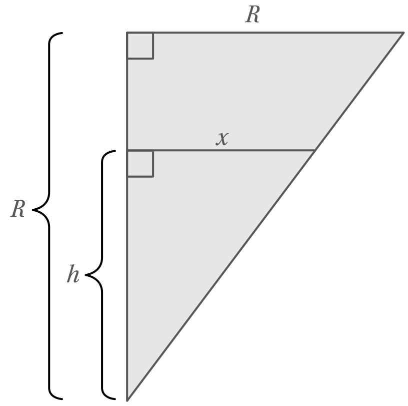


Figura IX.37.

Utilizando el Teorema de Tales, podemos afirmar que:

$$\frac{x}{h} = \frac{R}{R}$$

Por lo tanto h=x, entonces el área de D_2 es πh^2.

Así, tenemos la siguiente igualdad

$$\acute{A}(D_1) + \acute{A}(D_2) = \pi R^2 - \pi h^2 + \pi h^2 = \pi R^2 = \acute{A}(D_3)$$

De esta forma, el área de la mitad de la esfera más el volumen el cono es igual al volumen del cilindro.

$$V(\text{semiesfera}) + V(c\text{ono}) = V(\text{cilindro})$$

$$V(\text{semiesfera}) + \frac{1}{3}\pi R^3 = \pi R^3$$

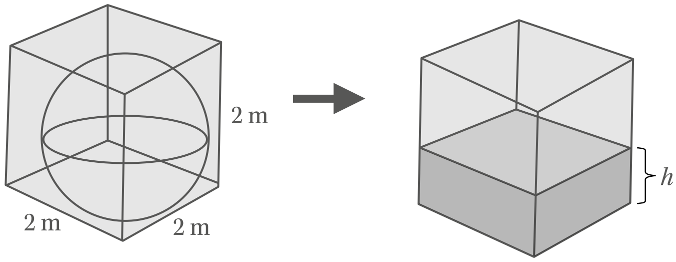
$$V(\text{semiesfera}) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$V(e\text{sfera}) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ejercicios

1. Estime el volumen de su cabeza.

2. Se tiene un tanque en forma de cubo cuyas aristas miden **2 m**. Una esfera sólida de radio **1 m** se introduce en el tanque, tal como se muestra en la figura. Se llena el tanque con agua (con la esfera adentro) y después se retira la esfera, ¿cuál es el nivel del agua, ***h***, que permanece en el tanque? (aproxime π a **3**)



Para calcular la superficie de la esfera necesitamos herramientas que escapan a este curso, pero daremos algunas ideas intuitivas que permiten convencerse del resultado.

Cubramos la esfera de radio ***R*** por pequeñas regiones de áreas $A_1, A_2, ..., A_n$

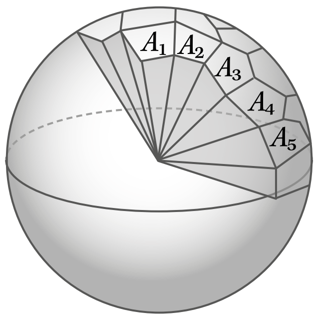


Figura IX.38.

Entonces, tenemos pequeños conos de altura (casi) ***R***. El volumen de cada uno de esos conos es, aproximadamente:

$$V_1 \approx \frac{1}{3} A_1 \cdot R$$

$$V_2 \approx \frac{1}{3} A_2 \cdot R$$

$$\vdots$$

$$V_n \approx \frac{1}{3} A_n \cdot R$$

La suma de esos volúmenes es aproximadamente el volumen de la esfera:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n) \cdot R$$

La suma $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n$ es el área superficial de la esfera, entonces:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \approx \frac{1}{3} S_{esfera} \cdot R$$

En realidad, lo anterior es una igualdad que, como dijimos, no podemos probar en este libro, pero si la asumimos como cierta, se tiene que:

$$4\pi R^3 = S_{esfera} \cdot R$$

Entonces:

$$S_{esfera} = 4\pi \cdot R^2$$

Ejercicios

1. Estime la superficie de su cabeza.
2. Calcule el área del círculo resultante de cortar una esfera cuyo radio mide 35 cm, mediante un plano cuya distancia al centro de la esfera es de 21 cm.
3. Un cubo de 20 cm de arista está lleno de agua. ¿Cabría esta agua en una esfera de 20 cm de radio?
4. ¿Cuál es la superficie de la esfera más grande que cabe en una caja cúbica de arista 10 cm?

4.3 Isometrías

Consideremos 2 triángulos rectángulos cuyos catetos son congruentes, por el Criterio *LAL*, entonces estos triángulos también son congruentes. Pero, ¿qué pasa si 2 triángulos rectángulos tienen las hipotenusas congruentes y uno de los catetos congruentes?

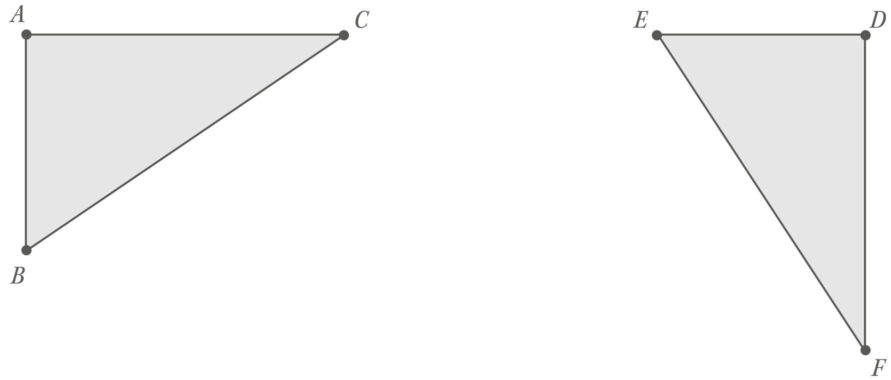


Figura IX.39

Consideremos 2 triángulos ΔABC y ΔDEF rectángulos (en A y en D respectivamente), tales que $BC = EF = c$ y $DE = AB = b$. Entonces por el Teorema de Pitágoras se tiene que $AC^2 + AB^2 = BC^2$ y que $DF^2 + DE^2 = EF^2$. Así:

$$AC^2 = c^2 - b^2$$

$$DF^2 = c^2 - b^2$$

Por lo tanto $DF = AC$; es decir, los triángulos ΔABC y ΔDEF tienen todos sus lados congruentes, y por el **Criterio** *LLL*, se obtiene que son congruentes. Entonces, hemos probado un nuevo criterio de congruencia de triángulos:

Teorema IX.12

Para que 2 triángulos rectángulos sean congruentes, basta con que sus hipotenusas sean congruentes y un cateto de un triángulo sea congruente a un cateto del otro.

En el **Capítulo III**, dijimos que las traslaciones, reflexiones y rotaciones preservan medidas de ángulos y medidas de segmentos, sin embargo, no probamos esas afirmaciones. Lo haremos ahora.

Consideremos un segmento $\overline{AB}$ y su imagen $\overline{A'B'}$ vía traslación, $T_{(a,b)}$. Para no recargar la explicación, supondremos que a y b son positivos.

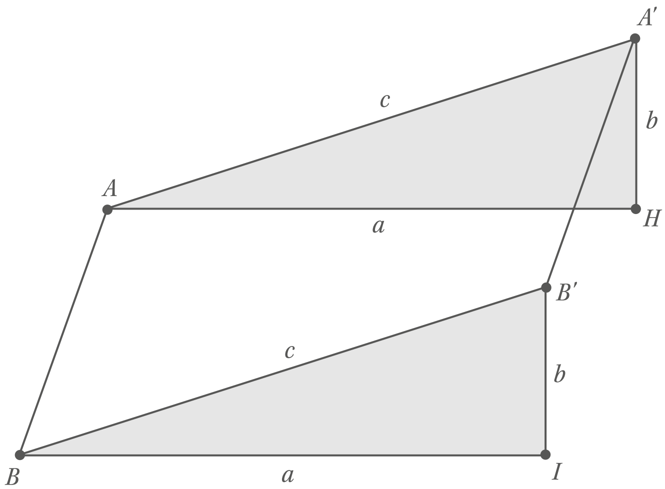


Figura IX.40.

Los triángulos ΔBIB y $\Delta AHA'$ de la **Figura IX.40** son rectángulos y congruentes, por lo tanto , $BB' = AA'$.

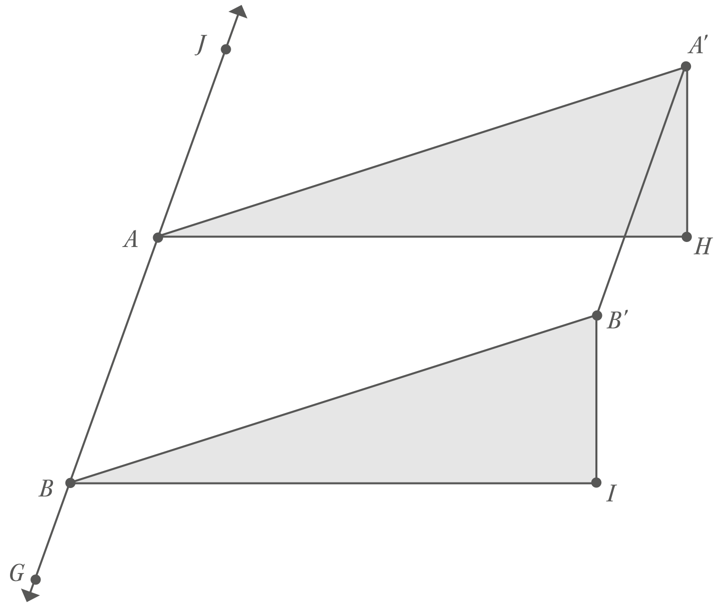


Figura IX.41.

Como $\overleftrightarrow{BI}$ es paralela a $\overleftrightarrow{HA}$, entonces $\measuredangle IBA \cong \measuredangle HAJ$ (ver Figura IX.41). Por congruencia de los triángulos ΔBIB y $\Delta AHA'$, se tiene que $\measuredangle IBB' \cong \measuredangle HAA'$. Por lo tanto, $\measuredangle B'BA \cong \measuredangle A'AJ$, de donde se deduce que $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$. Lo que nos permite afirmar que *AA'B'B* es un paralelogramo, entonces *AB* = *A'B'*. Es decir, hemos podido probar que las traslaciones preservan medida de segmentos, o lo que es lo mismo, las traslaciones preservan distancias entre puntos. Que las traslaciones preservan ángulos, se puede argumentar del mismo modo y los detalles de la demostración son un ejercicio para el lector.

Probemos ahora que las reflexiones preservan distancia. Consideremos entonces un segmento $\overline{AB}$ y su imagen $\overline{A'B'}$ vía reflexión respecto a la recta *L*. Si *A* y *B* están en *L*, no hay nada que probar, pues en este caso *A* = *A'* y *B* = *B'*, y evidentemente *AB* = *A'B'*. Supongamos que *A* está en *L*, pero no así *B*.

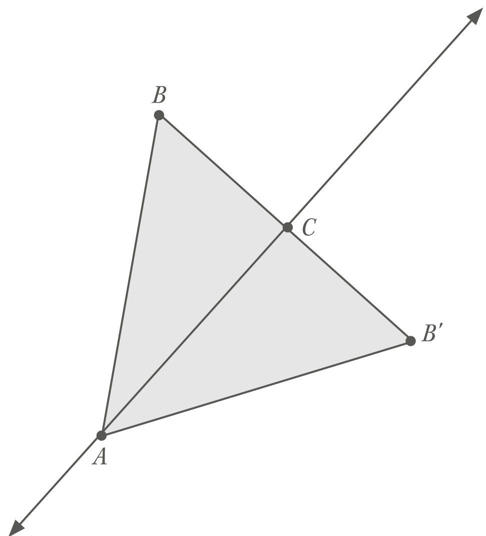


Figura IV.42.

Por definición de reflexión, $BC = B'C$ y $\overline{BB'}$ es perpendicular al eje de reflexión. Por lo tanto, $\overleftrightarrow{AC}$ es la mediatriz de $\overline{BB'}$, $AB = AB'$ y, como $A = A'$, se tiene que $AB = A'B'$.

La demostración del caso general es un ejercicio para el lector.

Mostremos ahora que las reflexiones preservan ángulos, teniendo como cierto que también preservan distancias entre puntos.

Consideremos un ángulo $\measuredangle ABC$ y una recta L, y denotemos por $\measuredangle A'B'C'$ la imagen del ángulo $\measuredangle ABC$ vía la reflexión respecto de L.

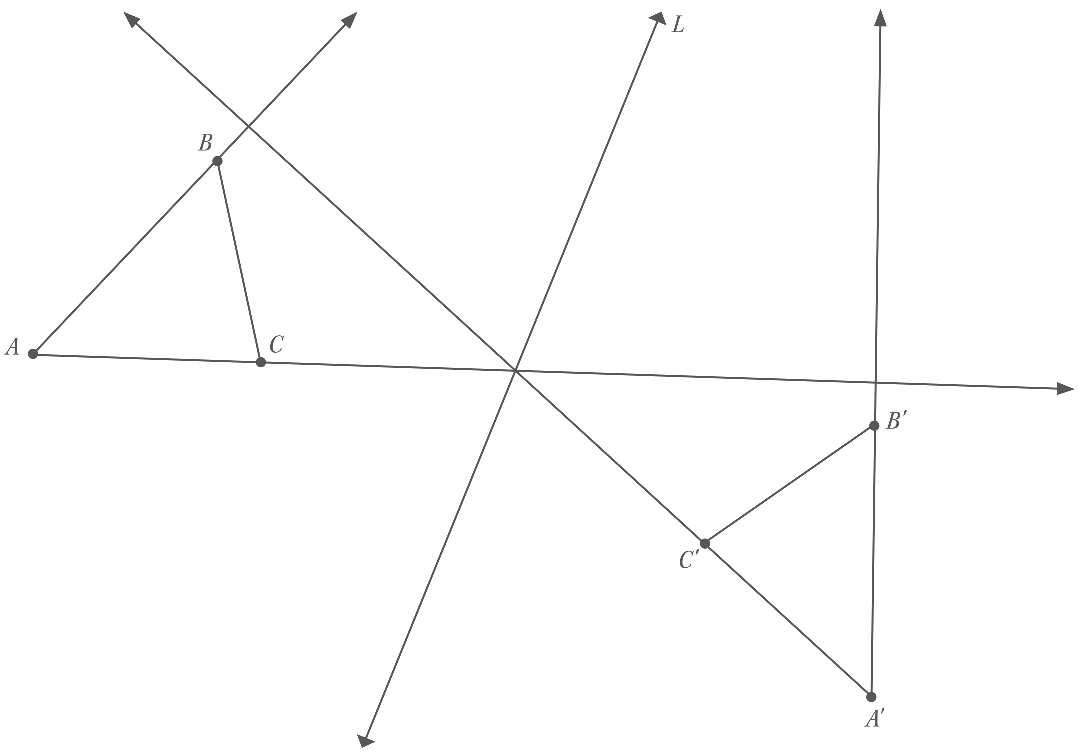


Figura IV.43.

Como las reflexiones preservan largos de segmentos, entonces $AB = A'B'$, $A'C' = AC$ y $BC = B'C'$, entonces los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son congruentes y, por lo tanto, $\measuredangle ABC$ es congruente a $\measuredangle A'B'C'$.

Analicemos ahora el caso de las rotaciones. Consideremos entonces un segmento $\overline{AB}$ y su imagen $\overline{A'B'}$, vía la rotación de centro O y ángulo α.

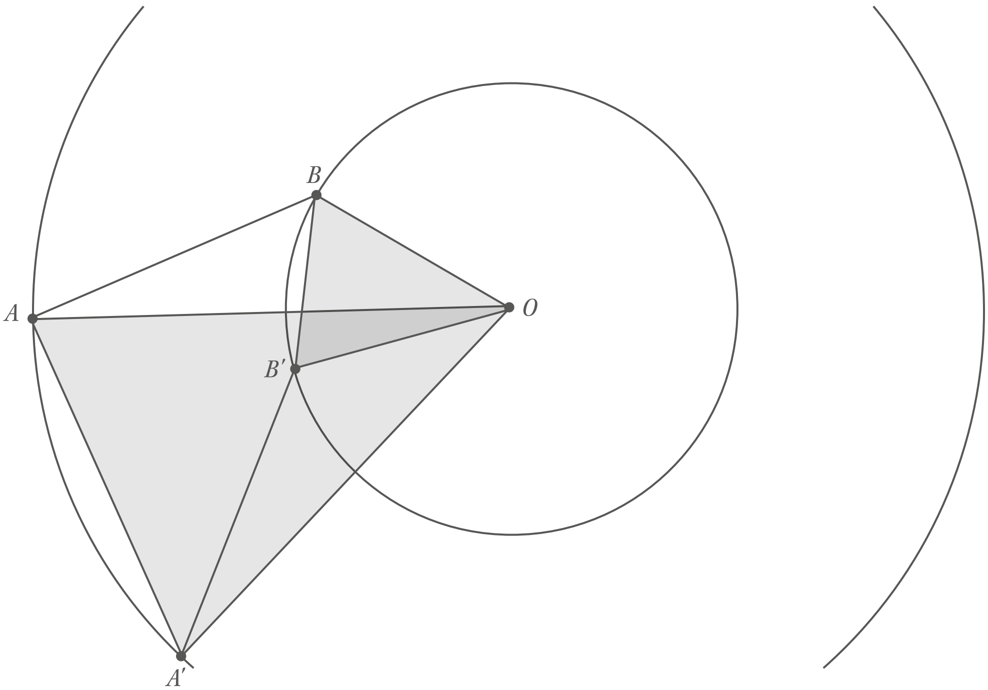


Figura IV.44.

Se tiene la congruencia $\measuredangle BOB' \cong \measuredangle AOA'$, pues ambos miden α. Si el ángulo AOB mide x, entonces:

$$m(\measuredangle BOA) = \alpha - x = m(A'OB)$$

Además tenemos que $OA = OA'$, pues son radios de una misma circunferencia. Del mismo modo $OB = OB'$ y $m(\measuredangle BOA) = m(A'OB)$, entonces, por Criterio *LAL*, se tiene que los triángulos $\Delta OA'B'$ y ΔOAB, son congruentes, por lo tanto $AB = A'B'$.

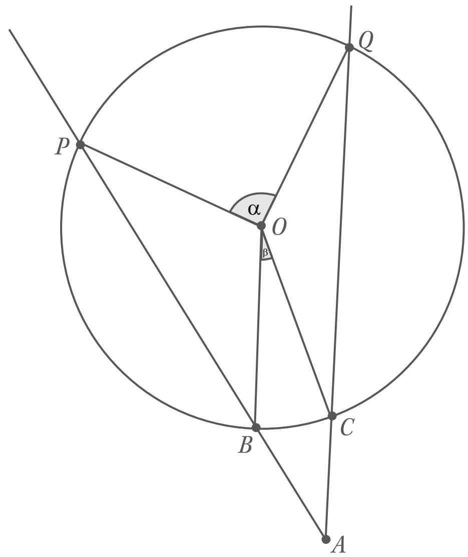
Consideremos un ángulo $\measuredangle ABC$ y denotemos por $\measuredangle A'B'C'$ la imagen del ángulo $\measuredangle ABC$, vía rotación con centro O y ángulo α. Como las rotaciones preservan largos de segmentos, $AB = A'B'$, $A'C' = AC$ y $BC = B'C'$, entonces los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son congruentes y, por lo tanto, $\measuredangle ABC$ es congruente con $\measuredangle A'B'C'$.

Ejercicios del capítulo

1. Demuestre, dando todos los detalles y en toda generalidad, que las reflexiones preservan distancias entre puntos.

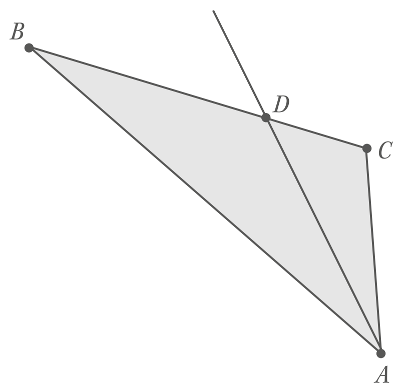
2. Demuestre que las traslaciones preservan las medidas de los ángulos.

3. Considere los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ secantes a la circunferencia $C(O,r)$ cuyo vértice común A está fuera de la circunferencia. Demuestre que la medida del $\measuredangle BAC$ es igual a la mitad de la diferencia entre α y β.



4. Demuestre el Teorema de Bisectriz: en un triángulo ΔABC, donde la bisectriz del ángulo en A interseca al lado opuesto en D, entonces:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$$



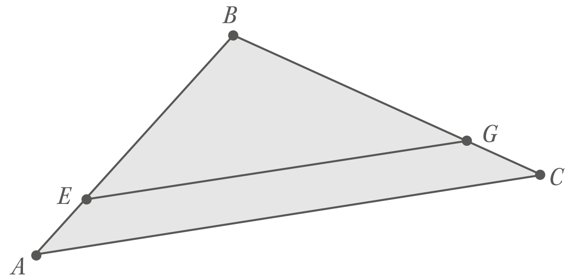
5. Calcule el área y el volumen de una esfera inscrita en un cilindro de 2 m de altura.

6. La cúpula de una catedral tiene forma semiesférica, de diámetro 50 m. Si restaurarla tiene un costo de $210.000 el m^2, ¿a cuánto ascenderá el presupuesto de la restauración?

7. Si un triángulo T_1 es semejante a un triángulo T_2 con razón de semejanza k. ¿Cuál es el cociente entre el área de T_1 y el área de T_2?

8. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero cuya área es 5 cm^2?

9. Considere un triángulo ΔABC y en el lado $\overline{AB}$ se marca el punto E, tal que $AE : AB = 1 : 4$, y en el lado $\overline{BC}$ se marca el punto G, tal que $CG : CB = 1 : 4$.



¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

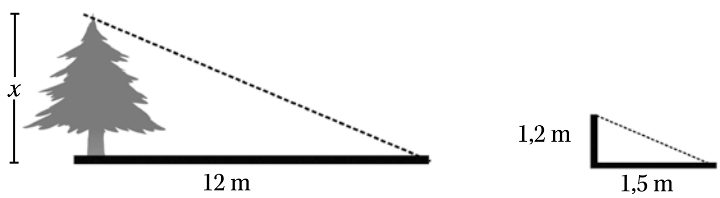
I. $\Delta ABC \sim \Delta EBG$

II. $EG : AB = 3 : 4$

III. $\acute{A}(\Delta ABC) : \acute{A}(\Delta EBG) = 3 : 4$

a. Solo I
b. Solo II
c. Solo I y II
d. Solo I y III
e. I, II y III

10. Calcule la altura de un árbol que proyecta una sombra de 12 m a la misma hora que un palo de 1,2 m proyecta una sombra de 1,5 m.



11. Si el triángulo ΔABC y el triángulo $\Delta A'B'C'$ son semejantes, entonces es correcto afirmar que:

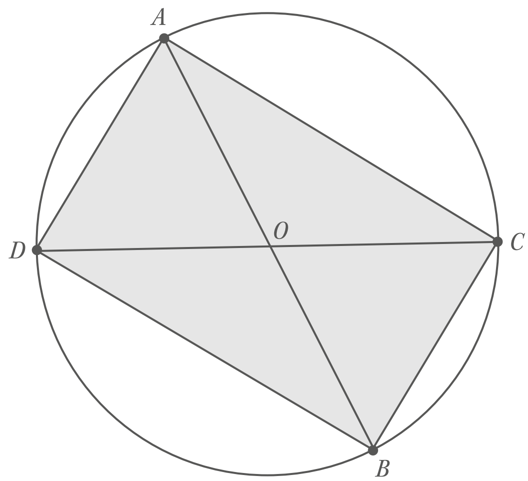
I. Existe $k > 0$, tal que $AB = k \cdot A'B'$

II. Existe $t > 0$, tal que $m(\measuredangle ABC) = t \cdot m(\measuredangle A'B'C')$

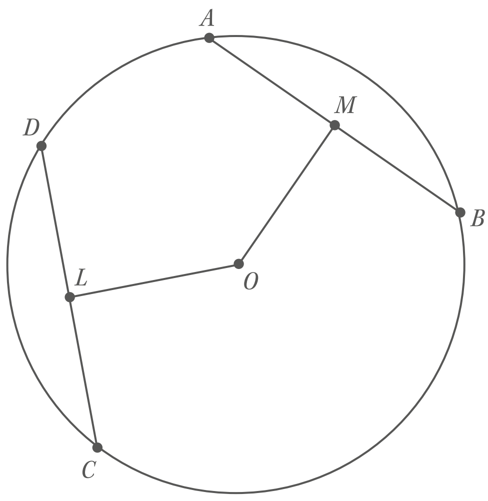
III. Si $AB = r \cdot A'B'$, entonces $A'(\Delta ABC) = r \cdot A'(\Delta A'B'C')$

a. Solo I
b. Solo II
c. Solo I y II
d. Solo I y III
e. I, II y III

12. Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros de la circunferencia, ¿es cierto que $ABCD$ es un rectángulo? Justifique.



13. Considere una circunferencia de centro O y 2 cuerdas suyas, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, miden lo mismo. Además, $\overline{OL}$ es perpendicular a $\overline{CD}$ y $\overline{OM}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Demuestre que $OL = OM$.



14. Demuestre que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la circunferencia que pasa por el punto de tangencia.

15. Con regla y compás, trace la recta tangente a la circunferencia de centro O, que pasa por el punto P.

BIBLIOGRAFÍA

Beckmann, S. *Mathematics for elementary teachers.* 2ª edición. Editorial Pearson Education. USA. 2008.

Chamorro, M. *Didácticas de las matemáticas.* Editorial Prentice Hall. España. 2003.

Clemens, S. O'Daffer, P. Cooney,T. *Geometría.* Addison Wesley Longman. México D.F. México. 1999.

Cross, C., Woods, T,.Schweingruber (Eds.). *Mathematics learning in early chilhood.* Paths towards excellence and equity. Commitee on early childhood mathematics, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. National Research Council of National Academies. Washington D.C. USA. 2009.

Euclides. *Elementos de geometría de Euclides*. Universidad Autónoma de México. México. 1944.

Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D., Zanocco, R. *Números. Colección ReFIP: Recursos para la formación de profesores de educación básica.* Ediciones SM Chile. Santiago, Chile. 2014.

Ma, L. *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales la comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU.* Academia Chilena de Ciencias. Santiago, Chile. 2010

Martínez, S., Varas, M., *Álgebra. Colección ReFIP: Recursos para la formación de profesores de educación básica*. Ediciones SM Chile. Santiago, Chile. 2014.

Ministerio de Educación. Gobierno de Chile. E*stándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica.* 2011. Disponible en: http://www.mineduc.cl/usuarios/cpeip/File/2012/librobasicaokdos.pdf

Ministerio de Educación. Gobierno de Chile. *Bases Curriculares de 1º a 6º Básico*. 2013. Disponible en: http://www.mineduc.cl/index5_int.php?id_portal=47&id_contenido=17116&id_seccion=3264&c=1

Musser, G. Burger, W.,Peterson,B. *Mathematics for Elementary Teachers*. A contemporary Approach. Sixth Edition. John Wiley & Son.USA. 2003.

Parker, P., y Baldridge, S. *Elementary geometry for teachers*. Editorial Sefton-Ash Publishing. USA. 2008.

Sowder, J., Sowder, L. y Nickerson S. *Reconceptualizing mathematics for elementary school teachers: Instructor's Edition*. Editorial W. H. Freeman and Company. New York. USA. 2009.

Van de Walle, J. *Elementary & Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. 6ta Edición. Editorial Pearson / Allyn and Bacon. USA. 2007.

Yee, L.-P., Lee, N.-H. (Eds.). *Teaching primary school mathematics.* A resource book. 2ª Edición. Editorial Mc Graw Hill Education. Asia. 2009.

FECHA:_____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA: _____/_______/_____

FECHA: _____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

ReFIP Matemática

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

La colección ReFIP es una serie de cuatro textos: Números, Geometría, Álgebra y Datos y azar, enfocados en la matemática para enseñar que requieren los profesores de Educación Básica.

Esta colección fue desarrollada en el proyecto FONDEF-D09I1023 “Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica en Matemática”, por un equipo de expertos disciplinarios y en educación de distintas universidades, liderados desde el Laboratorio de Educación del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile.

El proceso de elaboración de estos textos se llevó a cabo durante tres años y contempló el pilotaje de versiones preliminares en cursos de carreras de Pedagogía en Educación Básica de 16 universidades, en el que participaron alrededor de 5.000 estudiantes de Pedagogía de todo el país. Esto permitió hacer los cambios y ajustes necesarios para producir las versiones finales, y hacer que estos textos se constituyan en herramientas de gran utilidad en la formación docente.

Los textos promueven la reflexión acerca de la matemática escolar y su enseñanza, contribuyen a integrar conocimientos disciplinarios y pedagógicos, y tienen su foco en la matemática específica de la tarea de enseñar.

Más información acerca de la colección y el proyecto se encuentra en:
http://refip.cmm.uchile.cl/

Álgebra
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Geometría
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Números
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Datos y azar
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

ISBN: 978-956-349-655-0
9 789563 496550

CMM Center for Mathematical Modeling
Fondef FONDO DE FOMENTO AL DESARROLLO CIENTÍFICO Y TECNOLÓGICO
FUNDACIÓN LUKSIC
Academia Chilena de Ciencias Instituto de Chile
sm
Ministerio de Educación Gobierno de Chile