FACULTAD DE EDUCACIÓN

Escuela de Educación en Matemáticas e Informática Educativa

CATEGORIZACIÓN DE ERRORES EN REDUCCIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN PRIMER AÑO MEDIO

SEMINARIO PARA OPTAR ALGRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:

ALMIRAY CUEVAS, MAURICIO ANDRÉS

ARAYA HORMAZABAL, DEBORA PAMELA

QUIÑONES RIOS, MITZY ANDREA

PROFESOR GUÍA:

PABLO FIGUEROA SALGADO

SANTIAGO, CHILE

2015

“Agradecemos a todas las personas que nos han acompañado durante este proceso, a nuestros cercanos, amigos y profesores, pero en especial a nuestras familias, quienes siempre creyeron en nosotros como estudiantes y futuros profesionales de la educación brindándonos todo el apoyo necesario para alcanzar nuestros objetivos y cumplir nuestros sueños”

Resumen

Esta investigación nace de las constantes inquietudes sobre la gran cantidad de errores que existen en las evaluaciones formativas y sumativas en estudiantes de enseñanza media, específicamente en el inicio de este proceso, al momento de comenzar la unidad de álgebra donde los primeros contenidos tienen relación a la Reducción y Multiplicación de expresiones algebraicas. El presente estudio se construirá con las teorías e investigaciones de autores como Martin Socas, Beatriz Carrillo, Adriana Engler, Marcel Pochulu, Luis Rico, entre otros, quienes nos darán la información necesaria para identificar los errores de álgebra en dos establecimientos educacionales de la Región Metropolitana para luego poder así analizar y categorizar bajo la teoría de Socas y Carrillo, y comprender los fenómenos matemáticos donde los estudiantes responden con resultados equívocos en determinados ejercicios de álgebra. Siendo un estudio que sigue un carácter participativo con un enfoque de análisis de contenido y específicamente en un diseño emergente de carácter cualitativo, con la ayuda de un cuestionario abierto y un reactivo donde se mostrarán las percepciones generales que tienen los docentes encargados del área de matemáticas y también de las clases realizadas a los estudiantes evaluados con respecto a términos relacionados directamente con el origen de los errores, se analizaran los resultados de los estudiantes para poder categorizar los que más se reiteren, como por ejemplo que uno de los errores más frecuentes tiene relación con el mal uso de la aritmética teniendo así su origen en la "ausencia de sentido".

El propósito de la investigación es que pueda ser utilizada a futuro por docentes de Matemáticas, que les sirva de uso de conocimiento y también como herramienta para abordar y anteponerse a los errores de sus estudiantes, porque creemos que son la base de sus propios conocimientos y aprendizajes significativos, potenciando de esta manera el uso del error como una herramienta pedagógica y parte del proceso de enseñanza-aprendizaje de nuestros estudiantes.

Abstract

This research stems from the constant concerns about the large number of flaws in the formative and summative assessments in high school students, particularly at the start of this process, when starting the unit where the first content algebra relate to Reduction and Multiplication of algebraic expressions. This study will be built with the theories and research of authors such as Martin Socas, Beatriz Carrillo, Adriana Engler, Marcel Pochulu, Luis Rico, among others, who will give us the information needed to identify errors algebra two educational establishments in the Region Metropolitan and then to analyze and categorize under the theory Socas and Carrillo, and understand mathematical phenomena where students respond with equivocal results in certain exercises algebra. It is a study that follows a participatory approach to content analysis and specifically in an emerging design qualitative, with the help of an open questionnaire and a reagent where the general perceptions of the teaching staff in the area of mathematics are displayed and conducted classes for students evaluated with respect to terms directly related to the source of the errors, the results of students were analyzed to categorize the most frequently reiterate, such as one of the most common mistakes is related to the misuse of arithmetic and having its origin in the "absence of sense."

The purpose of the research is that it can be used in the future for Math teachers, who serve them to use knowledge and also as a tool to address and take precedence over the mistakes of their students, because we believe are the basis of their own knowledge and meaningful learning, thereby enhancing the use of error as a teaching tool and part of the teaching-learning process of our students.

Índice

Introducción

Durante nuestra práctica profesional como docentes de Matemáticas hemos evidenciado una cantidad considerable de errores por parte de los estudiantes, tanto en las evaluaciones como también en el proceso del aprendizaje de los estudiantes frente a la matemática. Los errores forman parte de las producciones de los estudiantes y son un elemento estable en los procesos de enseñanza de aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos (Pochulu, 2006). Frente a esto surge el interés de profundizar acerca de los errores cometidos por estudiantes de primer año medio centrándose en el eje de algebra, específicamente en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas. Esa profundización se compone del conocer, analizar y categorizar los errores cometidos por los estudiantes.

El uso del error debiese ser de manera reflexiva, donde el estudiante debe asumir la responsabilidad de la construcción del saber y considerar los problemas como suyos y no como problemas del profesor (Socas, 1997).

Por otro lado, en todo proceso educativo es fundamental la participación de los docentes quienes son, en parte, responsables del proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, siendo también las personas más cercanas a trabajar el error como herramienta educativa de un aprendizaje.

La idea central sobre este escrito es poner en contacto al lector con aspectos relevantes de los errores cometidos por estudiantes de primero medio referido a las dificultades y errores que presentan los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático.

A continuación se presentan brevemente los 5 capítulos que conforman la presente investigación.

En el capítulo 1, se presenta el problema circunscrito al objeto de estudio, presentando el estado actual de algunas investigaciones sobre errores y además se evidencian estudios empíricos y/o teóricos.

En el capítulo 2, se presenta el marco teórico abarcando 4 temas de relevancia para nuestro estudio comenzando con un recorrido histórico sobre el estudio de errores. Posteriormente se presenta el fundamento filosófico del error basado en 5 enfoques de esta ciencia, permitiendo una idea generalizada sobre él. Luego se presentaran, desde distintas perspectivas y autores, diversas taxonomías sobre las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas abordadas desde distintos autores como Coie y colaboradores, Socas, González-Pienda y Carrillo enfocándose principalmente en los estudios de Socas y Carrillo para la explicación de las dificultades de aprendizaje en matemáticas. Posteriormente se hace referencia a un elemento importante que ayuda a organizar y entender los errores, que es el obstáculo donde se contextualiza y se explica a partir de distintos autores como Bachelar, Brousseau, D`Tall y Hercovicks y de cómo estos autores los dividen según su origen epistemológico, didáctico y cognitivo. Por último, se da cuenta de las principales características del error sobre una recopilación histórica de la categorización de errores enfocándose principalmente a la que hace alusión Socas.

En el capítulo 3, se describe la metodología de investigación utilizada, detallando el diseño del estudio, sus pasos y su aplicación.

En el capítulo 4, se desarrolla el análisis de los datos obtenidos a partir de los instrumentos aplicados, desde un análisis de contenido de acuerdo a la metodología especificada.

En el capítulo 5, se formulan las conclusiones de la investigación, en la que se responden las preguntas de investigación y a los objetivos del estudio.

Capítulo I

“Problemática”

1. PROBLEMÁTICA

1.1 Antecedentes empíricos y teóricos

A lo largo de la vida el ser humano está expuesto a constantes situaciones en las que debe poner a prueba sus experiencias y conocimientos, los cuales proporcionan las herramientas necesarias para poder enfrentarlas. Es en esta instancia donde pueden cometer innumerables equivocaciones antes de llegar a la solución esperada. La escolaridad también es parte fundamental de la vida y en ella se presentan dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Según Socas (1997):

> “El aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos y estas son de naturalezas distintas. Algunas tienen su origen en el macrosistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar”. (p.124)

Se puede apreciar que los factores que dificultan el aprendizaje de las matemáticas son variados, como es el sistema educativo y también aspectos más específicos como la interacción que hay entre alumno-materia-profesor e instituciones escolares a las que pertenecen los estudiantes. El proceso de enseñanza-aprendizaje es un proceso complejo y de constante construcción, por lo mismo Engler, Muller & Hecklein (2004) se refieren a que en este proceso de construcción de conocimientos matemáticos aparecen errores, entendiendo este como la traducción de una red de dificultades.

Como el error se da a través de la construcción en este caso del conocimiento matemático y centrándose en el microsistema educativo, específicamente en el estudiante, Socas (1997) hace mención a que “en general, algunos alumnos, casi siempre, y algunas veces, casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las matemáticas”. Si bien, la mayoría de los estudiantes tienen dificultades y cometen errores, no se pueden apartar los estudiantes que aparentemente tienen un desempeño satisfactorio en matemáticas, pues también ellos oculten probablemente serios problemas conceptuales que en un futuro dificultarán el nuevo aprendizaje (Socas, 1997). Por lo mismo como hasta los estudiantes con buen desempeño no se escapan de los errores, su existencia es una constante en el proceso de enseñanza aprendizaje y más aún del estudiante. Por esto los errores, según Rico citado en Engler y otros (2004), forman parte de las producciones de los alumnos durante el aprendizaje de matemática y constituyen datos objetivos que encontramos permanentemente a lo largo del proceso educativo (p.24). El hecho de que encontremos estos datos objetivos durante el proceso educativo, más aun en el aprendizaje de la matemática por parte de los estudiantes, aparecen los datos como la consecuencia de un proceso con o sin dificultades, por lo mismo Vargas, Pochulu, & Abrate (2006) mencionan:

> “Si tenemos en cuenta que el correcto aprendizaje de la Matemática es un objetivo común en los procesos de enseñanza de la misma es claro que las respuestas incorrectas a las cuestiones que se les plantean a los estudiantes serán consideradas -por parte de quienes están a cargo de su instrucción- como señales de serias deficiencias, e incluso fracaso en el logro de los objetivos propuestos.” (p.11)

De acuerdo a lo planteado, los resultados de evaluaciones son un claro reflejo de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, por lo tanto el hecho de obtener buenos o malos resultados tiene directa relación con las dificultades que experimentan los estudiantes al momento de aprender y los errores cometidos por los mismos al momento de rendir la evaluación.

Existen evaluaciones tanto nacionales como internacionales que permiten profundizar acerca de los resultados que en general obtienen los estudiantes en distintas materias, tomando mayor atención a matemática.

El Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) es el Sistema Nacional de Evaluación de resultados de aprendizaje del Ministerio de Educación de Chile. Su propósito principal es contribuir al mejoramiento de la calidad y equidad de la educación, informando sobre el desempeño de los estudiantes en diferentes áreas de aprendizaje del currículum nacional, relacionando estos desempeños con el contexto escolar y social en que aprenden (MINEDUC, Agencia de Calidad de la Educación). Las pruebas SIMCE evalúan el logro de los objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios (OF-CMO) del marco curricular vigente en diferentes sectores de aprendizaje, a través de una medición que se aplica a nivel nacional, una vez al año, a los estudiantes que cursan un determinado nivel educacional. Hasta el año 2005, la aplicación de las pruebas se alternó entre cuarto año básico, octavo año básico y segundo año medio. A partir del año 2006, se evalúa todos los años a cuarto básico y se alternan octavo básico y segundo medio. Desde el año 2010 se aplica cada dos años la evaluación del sector inglés en tercero medio, y todos los años una evaluación muestral del sector de educación física en octavo básico, con el objetivo de diagnosticar la condición física de los estudiantes. Además de las pruebas asociadas al currículum, el SIMCE también recoge información sobre docentes, estudiantes y padres y apoderados a través de cuestionarios de contexto social. Esta información se utiliza para contextualizar y analizar los resultados de los estudiantes en las pruebas SIMCE.

En relación a los resultados obtenidos por los estudiantes de octavo básico en esta evaluación y en el año 2011 se obtuvo que un 65% de los estudiantes se encuentran en un nivel insuficiente de conocimientos, mientras que el 24% y 11% corresponden respectivamente a los estudiantes con un nivel intermedio y avanzado (MINEDUC, Agencia de Calidad de la Educación).

Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE) realizado por el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE). Lidera esta iniciativa, la oficina regional de educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe, en Chile, es coordinado por el Departamento de Estudios Internacionales de la Agencia de Calidad de la Educación.

Según (MINEDUC, Agencia de Calidad de la Educación) su propósito es:

- Evaluar los logros de aprendizaje de los estudiantes de educación básica de los países de América Latina y el Caribe.
- Obtener información del contexto de aprendizaje de los estudiantes para identificar factores que influyen en sus logros de aprendizaje.
- Proporcionar información válida y confiable que sirva para tomar decisiones de políticas educativas que contribuyan a mejorar la calidad de la educación en los países de la región.

Este estudio evalúa los elementos comunes de los currículos de los países participantes y su estructura a partir del enfoque de habilidades para la vida promovido por la UNESCO. Este considera que la escuela debe promover conocimientos, habilidades, valores y actitudes que sirvan a los estudiantes para participar activamente en la sociedad, como individuos y como ciudadanos.

TERCE evalúa una muestra representativa de estudiantes de tercero y sexto básico de cada uno de los países participantes. Las pruebas de todas las áreas se aplican en ambos niveles, exceptuando ciencias naturales, que se aplica solo en sexto básico.

En relación a los resultados obtenidos por los estudiantes de sexto básico en el año 2013 se obtuvieron un promedio de 581 y de acuerdo a los niveles de desempeño se presenta lo siguiente:

- 1% de los estudiantes en el nivel bajo I
- 10% de los estudiantes en el nivel I
- 38% de los estudiantes en el nivel II
- 37% de los estudiantes en el nivel III
- 14% de los estudiantes en el nivel IV

El Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (Programme for International Student Assessment, PISA) es un estudio realizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), que busca evaluar en qué medida los estudiantes que se acercan al final de la enseñanza escolar obligatoria han adquirido competencias esenciales para una completa participación en la sociedad.

Se aplica cada tres años, desde el año 2000, a estudiantes de 15 años con pruebas que evalúan las áreas de Lectura, Ciencias Naturales y Matemática, enfatizándose en cada ciclo la medición de una de ellas. Por ejemplo, en PISA 2012 el énfasis fue dado a Matemática. También se ha incorporado las evaluaciones de Resolución de problemas y Alfabetización financiera.

Como complemento a la prueba realizada a los estudiantes, el estudio recoge información individual, familiar y relativa al contexto educativo en que los estudiantes aprenden. Para ello se usan cuestionarios de estudiantes, de padres, de directores de establecimiento y a partir de 2015, cuestionarios a profesores.

Chile ha participado en PISA en los años 2001, 2006, 2009 y 2012, aplicando pruebas en papel y opcionalmente en computador. La próxima aplicación está prevista para el año 2015, donde la prueba se aplicará por medio de computadores.

PISA se aplica en todos los países de la OCDE, pero además en otros países que deciden participar. En la aplicación 2012 participaron 67 países de los cinco continentes y en la medición que se prepara para 2015 el número de países será de alrededor de 70.

El puntaje obtenido por los estudiantes en el año 2012 en esta evaluación fue de 423 puntos, ubicando a Chile en el lugar 51. (MINEDUC, Agencia de Calidad de la Educación).

El Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias (Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS) realizado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA), que busca proveer de información de calidad sobre los logros de aprendizaje de los estudiantes de educación básica, y los contextos educacionales en los que aprenden. Se aplica desde 1995, cada cuatro años, a estudiantes de cuarto y octavo básico en las áreas de Matemática y Ciencias Naturales. Chile ha participado en TIMSS en los años 1999, 2003 y 2011.

Como complemento a la prueba realizada a los estudiantes, TIMSS utiliza cuestionarios con el fin de recoger información del contexto educativo en que estos aprenden. En cada país el centro encargado del estudio, en este caso la Agencia de Calidad de la Educación, responde un cuestionario sobre la organización y los contenidos del currículo nacional, y además se aplican cuestionarios en los establecimientos participantes.

El diseño de las pruebas TIMSS permite comparar los resultados a lo largo del tiempo y entre los diversos países que participan en el estudio, como Estado Unidos, Canadá y Emiratos Árabes Unidos. En TIMSS, los resultados de aprendizaje se reportan en escalas de puntaje para Matemática y Ciencias.

Se presenta entonces el resultado de la participación de Chile en TIMSS del año 2011 que revela los resultados obtenidos por estudiantes de 8°año básico en el área de Matemática.

Los estándares de medición de TIMSS se estructuran por escalas de puntaje tanto en matemática como en ciencias. Cada escala tiene un rango de 0 a 1000 puntos, y un promedio internacional estandarizado de 500 puntos.

Los niveles propuestos para las escalas de puntaje son: sobre los 625 puntos se encuentra el nivel avanzado, sobre 550 puntos el nivel alto, sobre 475 puntos el nivel intermedio y, por último, sobre 400 el nivel bajo.

La imagen 1 representa el resultado obtenido por los estudiantes de Chile en TIMSS aplicada el año 2010 en 8° año básico:

País	Puntaje promedio*
Tailandia	427 ↓
Macedonia	426 ↓
Túnez	425 ↓
Chile	**416** ↓
Irán	415 ↓
Qatar	410 ↓
Baréin	409 ↓
Jordania	406 ↓
Palestina	404 ↓
Arabia Saudita	394 ↓
Indonesia	386 ↓
Siria	380 ↓
Marruecos	371 ↓
Omán	366 ↓
Ghana	331 ↓

Imagen 1 (Educación, 2011)

En los resultados de TIMSS para el 2011, Chile obtiene un puntaje promedio de 416 puntos en 8° año básico, por debajo del promedio internacional estandarizado de 500 puntos como indica la imagen 1.

En la imagen 2, se presenta un gráfico que muestra la variación de puntaje promedio de los estudiantes chilenos en Matemática de 8° Básico entre TIMSS 1999, TIMSS 2003 y TIMSS 2011:

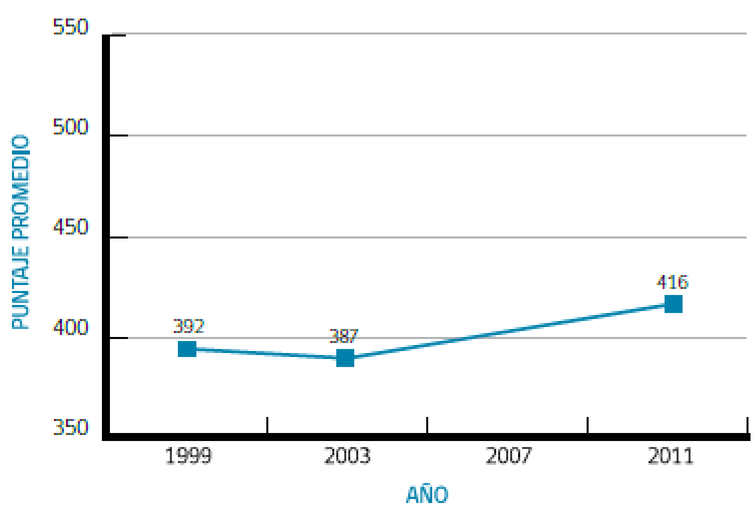


Imagen 2 (Educación, 2011)

Se puede evidenciar según la imagen 2, que entre los años 1999 y 2003, Chile no presentó variación significativa en el rendimiento. En cambio entre los años 2003 y 2011 el puntaje aumentó 29 puntos. Así, se observa que Chile avanza en Matemática, pero aún está bajo el centro de la escala TIMSS.

En Chile, entre 2003 y 2011 ha disminuido significativamente el porcentaje de estudiantes de 8° Básico que queda fuera de los niveles de Matemática; por el contrario, ha aumentado el porcentaje que alcanza al menos el nivel Bajo y los niveles superiores.

Según los resultados de TIMSS expuestos por la agencia de calidad de educación del gobierno de Chile en 2011, el 34% de los estudiantes chilenos solo alcanza el nivel Bajo. Ellos tienen conocimientos elementales de los números y solo hacen cálculos simples, por su parte, el 18% (casi 1 de cada 5 estudiantes chilenos) está en el nivel Intermedio de Matemática, que fluctúa entre los 476 y 549 puntos, lo que significa que pueden aplicar conocimientos básicos en una variedad de situaciones.

La imagen 3, representa un gráfico de los puntajes promedio obtenidos por los estudiantes chilenos según dominio de contenido, que representa los cuatro ejes de matemática (números, álgebra, geometría, datos y azar).

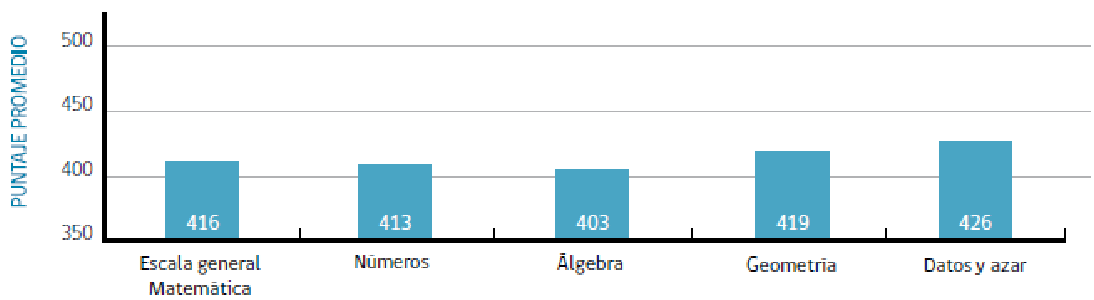


Imagen 3 (Educación, 2011)

Así, se observa que en términos relativos, los estudiantes chilenos obtuvieron mejores resultados en preguntas sobre contenidos de datos y azar (426 puntos), mientras que los contenidos más débiles corresponden a números (413 puntos) y álgebra (403 puntos) (MINEDUC, Agencia de Calidad de la Educación).

Tomando en cuenta lo que menciona Pochulu (2006), referido a que las respuestas incorrectas son señales de serias deficiencias o fracaso en el logro de objetivos propuestos o aprendizajes, y enfocándose en el resultado obtenido por los estudiantes en la TIMSS, se muestra que durante el desarrollo de la evaluación, los estudiantes de 8° año básico tienen más deficiencia en relación a los contenidos de algebra que en otros ejes, generando respuestas no acertadas más conocidas como un error.

1.2 Planteamiento del problema

A partir de lo expuesto anteriormente, en el proceso enseñanza-aprendizaje se generan dificultades al momento de enfrentar las matemáticas que principalmente tienen su origen en el microsistema educativo, estas dificultades generan que los estudiantes cometan errores de los cuales ninguno escapa. Como en el proceso educativo se da constantemente el error y según menciona Rico (1997) ellos son parte de las producciones de los estudiantes y entregan datos objetivos, además considerando lo expuesto por Pochulu (2006), que apunta a que las respuestas incorrectas son señales de serias deficiencias, se visualiza en TIMSS que los estudiantes de 8vo año de enseñanza básica obtienen resultados deficientes con un promedio de 416 puntos por debajo del promedio de TIMSS que es de 500 puntos, más aún en álgebra obtienen un puntaje de 403, donde cometen mayor cantidad de errores y que luego se verán reflejados en los estudiantes de primer año medio.. Es importante saber cuáles son estos errores y casi todas las recomendaciones metodológicas acerca de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática coinciden en la necesidad de señalar que se identifiquen los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje (Vargas, Pochulu, & Abrate, 2006).

Por otra parte Rico, Kilpatrick, & Gómez (1995) consideran que:

> "Los errores en Matemática no tienen un carácter accidental, sino que surgen por las estrategias y reglas personales empleadas en la resolución de problemas, y devienen de experiencias particulares e interpretaciones realizadas con base en los conocimientos matemáticos iníciales". (Rico, Kilpatrick, & Gómez ,1995. P13).

A partir de lo mencionado, se genera la interrogante de la importancia que existe al momento posterior de identificar un error como el conocer cuáles son las razones por las que el estudiante comete errores en el proceso educativo.

Al revisar la literatura y posteriormente el resultado de pruebas estandarizadas, no se encontraron evidencias específicamente sobre estudiantes de primer año medio en Chile, por esto surge la interrogante de conocer cuáles son estos errores y cuáles son las causas de los mismos en el eje de álgebra en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas.

1.3 Pregunta de investigación

A partir de lo anteriormente señalado en el planteamiento del problema:

¿A cuáles categorías pertenecen los errores cometidos por estudiantes de primer año medio en el eje de álgebra específicamente en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas?

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

- Categorizar los errores cometidos por estudiantes de primer año medio en el eje de álgebra específicamente en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas

1.4.2 Objetivo Específicos

- Comparar las percepciones que tienen los docentes que realizan las clases de Matemática, sobre los conceptos de dificultad, obstáculo y error, en relación a las definiciones de Socas y los Planes y Programas de Estudio.

- Analizar los errores cometidos por estudiantes en el eje de álgebra en primer año medio específicamente en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas.

- Clasificar los errores cometidos por estudiantes en el eje de álgebra en primer año medio específicamente en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraica.

1.5 Supuestos

- Los docentes desconocen los conceptos de dificultad, obstáculo y error en relación al ambiente pedagógico, por lo tanto no utilizan el error como una herramienta de aprendizaje.

- Los errores de los estudiantes de primer año medio en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas, son reiterativos y se fundamentan en alguna causa u origen, estos se pueden analizar y categorizar, lo que permite reflexionar sobre las razones por las cuales los estudiantes cometen errores.

1.6 Relevancia del estudio

Como el error es un elemento constante en el proceso educativo, en la investigación se promueve la intencionalidad de categorizar los errores más frecuentes de nuestros estudiantes, conocer las razones por las cuales se originan y así lograr que sea de utilidad para docentes de Educación Matemáticas para sus futuras clases de Álgebra.

1.7 Justificación

Al generar la categorización de los errores de matemáticas en reducción y multiplicación de expresiones algebraicas en estudiantes de primer año medio se entregan algunas herramientas y el conocimiento necesario para que docentes del área puedan trabajar con el error y lograr anticiparse a ellos, de manera tal que genere en el estudiante las competencias y habilidades que permitan lograr los objetivos propuestos en los Planes y Programas de Estudio del Ministerio de Educación y así lograr aprendizajes significativos y claros para cuando los estudiantes se enfrenten a la Unidad de Ecuaciones de primer grado donde se aplican todos los aprendizajes adquiridos en la unidad anterior.

El análisis de los errores y el trabajo con ellos ayudará a que los docentes sean capaces de generar nuevas planificaciones que permita al estudiante aplicar su aprendizaje a través del error cometido anteriormente y así fortalecer sus propios conocimientos.

Tal como se señala en Engler et al.(2004), “al considerar el error no como una falta o una insuficiencia, sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos (Ronald Charnay)”.

El sentido principal de la investigación es que los docentes comprendan que es fundamental hacer partícipe al estudiante de su propio aprendizaje y ser capaces de superar sus errores, y la forma en que generamos esta participación mutua en el proceso de enseñanza-aprendizaje es dando evidencia de sus errores y corrigiéndolos en conjunto para que en una próxima experiencia la enfrenten de manera exitosa.

1.8 Limitaciones del estudio

Debido al tiempo acotado de la investigación, ésta solo considera a un contexto determinado y no es transversal a todos los establecimientos de la región metropolitana y del país. Debido a esto, los errores identificados a través de los instrumentos aplicados a los estudiantes de primer año medio son representativos sólo de esos contextos.

Capítulo II

“Marco Teórico”

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Evolución del estudio del error

Los errores cometido por estudiantes durante su proceso formativo escolar, han sido el reflejo de una serie de obstáculos y dificultades que van presentando a lo largo de su etapa académica. El estudio como parte del proceso de enseñanza-aprendizaje comienza en 1917 en Estados Unidos donde se analizan trabajos sobre la determinación de errores, Buswell, Judd y Brueckner son quienes entregan mayores aportes (Engler, Gregorini, Müller, Vrancken, & Hecklein, 2004) además de los trabajos de investigación que se circunscribieron al análisis de errores cometidos en Aritmética por alumnos de los primeros años escolares. Una excepción, según Pochulu (2005), fue la investigación llevada a cabo por Smith – en Estados Unidos– donde trabajó con alumnos de la *highschool*, sobre errores en demostraciones de Geometría.

En la década del 30 Weiner, Seseman, Kiesling y Rose intentaron establecer patrones de errores en todas las materias considerando el error en matemáticas como una combinación incorrecta de tendencias (Engler et al, 2004). La cibernética de Wiener, la teoría de la información de Shannon, los trabajos de Bruner y las experiencias de Newell y Simon abrieron nuevas puertas para las investigaciones en diversas áreas del conocimiento y así surgieron nuevos métodos y abordajes para los problemas que se venían estudiando (Pochulu, 2005).

A pesar de que el estudio anterior se interrumpió, en la década del 60 vuelve a retomar su horizonte a través de Schlaak, Glück y Pipping, destacando la determinación, interpretación, dificultades psicológicas y los errores relacionados con el cálculo. A principios de los años sesenta se consolidó la investigación sobre educación en Unión Soviética tomando fuerza el estudio de los errores y las dificultades individuales del aprendizaje gracias a las investigaciones de Kusmitskaya y Menchinskaya (Pochulu, 2005).

En los años noventa Brousseau, Werner y Davis señalan que:

> "Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo

> personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera" (Engler et al, 2004).

En 1994 Cury con la finalidad de especificar los estudios del error realiza investigaciones sobre el conocimiento de errores de sustracción y es tan detallado que se crearon programas que imitaban estos errores, así es como destaca la Teoría sobre la generación de Buggs que permite utilizar métodos más certeros para seleccionar material de estudio (Pochulu, 2005).

El error es entonces un estudio que ha permanecido en el tiempo hasta el día de hoy, entre sus estudios se destacan los últimos utilizados para el análisis y desarrollo de esta investigación como lo son Luis Rico en 1997 en su libro *"La educación matemática en la enseñanza secundaria"* en el Capitulo V: *"Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria"*, nos entrega información sobre la definición y categorización de los conceptos anteriores basados en Martin Socas, luego un grupo de mujeres en Argentina formado por Adriana Engler, María Inés Gregorini, Daniela Müller, Silvia Vrancken y Marcela Hecklein el año 2002 escriben un documento llamado *"Los errores en el aprendizaje de las Matemáticas"* donde se muestra una reseña histórica del estudio del error y sus clasificaciones. Finalmente una de las investigaciones más actuales son de los autores Marcel Pochulu, Raquel Abrate y José Vargas el año 2006 en Argentina donde realizan un estudio llamado *"Errores y Dificultades en Matemática, Análisis de causas y sugerencias de trabajo"* donde realizan un estudio en base a Adriana Engler y su grupo de trabajo, además de percepciones de docentes del área sobre los errores de los estudiantes y categorizaciones de los tipos de error en algebra.

Así es como se puede observar que la mayoría de las investigaciones se han basado en analizar los errores más frecuentes de los estudiantes y así mismo generar categorías que permiten clasificar el error según su origen, a diferencia de las otras investigaciones desde la década de los 80 que se preocupan por encontrar alguna forma de tratarlos para poder evitarlos o aprender de ellos.

2.2 Fundamento filosófico del error

Comprender el error desde la definición propia de la filosofía[1], permite dar un sentido más profundo a algo tan cotidiano como el concepto del error y a su vez da sentido a las consecuencias positivas que puede tener.

Pochulu (2006) se analiza la filosofía del error desde distintos enfoques filosóficos, permitiendo obtener una idea generalizada de lo que es y ha sido una preocupación constante sobre el estudio del conocimiento humano.

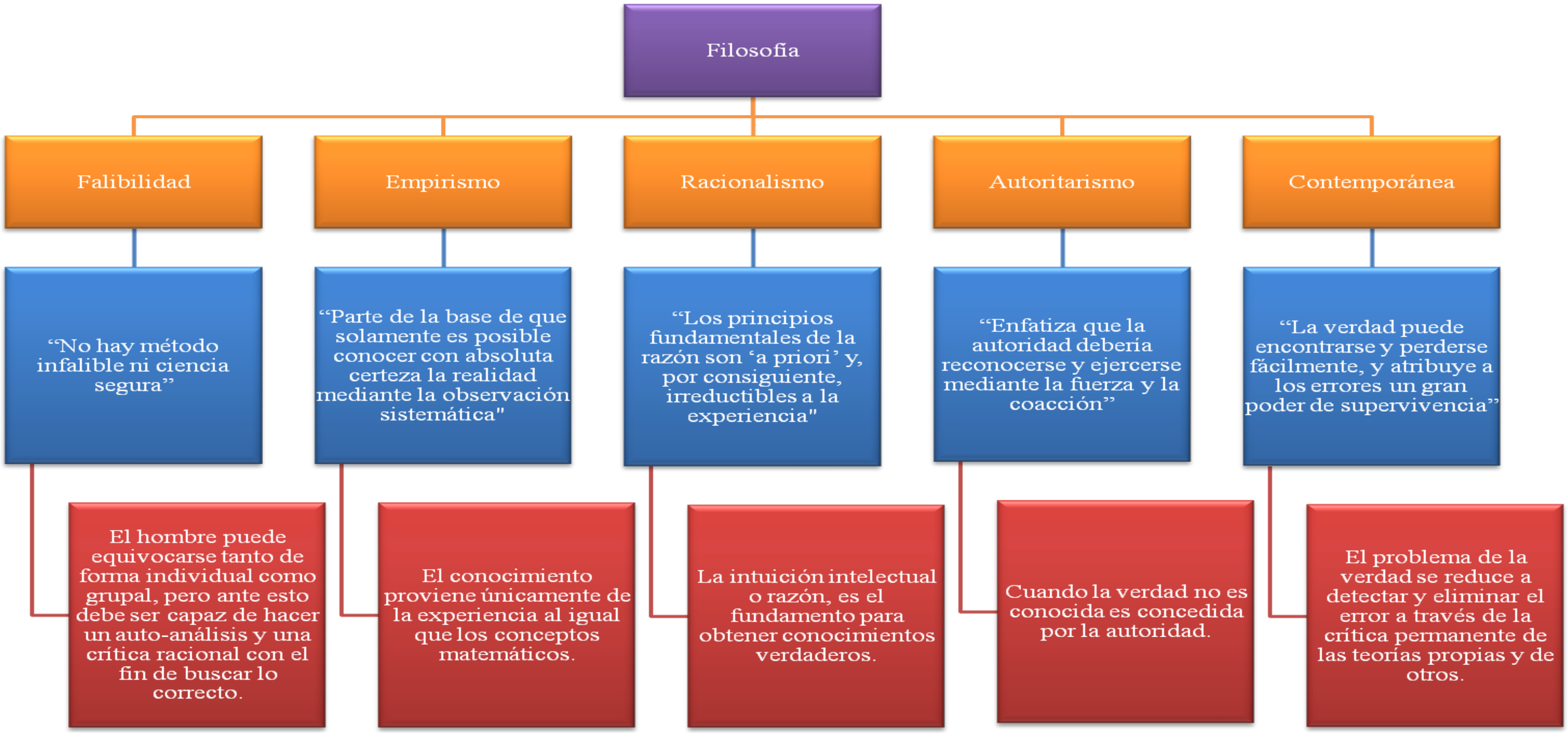
Desde los distintos enfoques que propone la filosofía se obtiene una idea generalizada de cómo el individuo, en sus diversas formas de pensar de comprender y analizar los acontecimientos, se enfrenta al error y cómo a partir de este se pueden obtener respuestas y resultados acorde a lo que se necesite.

Desde el punto de vista científico, el errar ha contribuido a una serie de descubrimientos que de no ser por el error no se conocerían. En matemáticas, por ejemplo, los teoremas propuestos son puestos en análisis por otros investigadores, pues si bien son propuestos como verdad, no quedan ajenos a ciertos errores que pudo haber cometido el investigador o también al hecho de que por la evolución de la disciplina y el hallazgo de otras particularidades resulte que la investigación propuesta ya no tenga validez. Es en esas instancias donde una nueva verdad surge en base a un error encontrándose una relación intrínseca entre la verdad y el error.

La verdad y el error se interrelacionan cuando el individuo comprende que el error puede tener como base una verdad y además que desde el estudio y el análisis de los errores se pueden obtener la verdad de lo errado.

De acuerdo a lo anterior se presenta un esquema que establece la idea de cada enfoque y cómo cada uno de ellos analiza las concepciones de verdad y error.

[1] *Conjunto de saberes que busca establecer, de manera racional, los principios más generales que organizan y orientan el conocimiento de la realidad, así como el sentido del obrar humano*



Esquema 1. Elaboración propia

Desde los cinco enfoques desarrollados en el esquema 1, y lo mencionado anteriormente a este, es posible notar que el error es imputable a la capacidad de que los conceptos y procedimientos conocidos y/o aplicados sean consideraros verdaderos, aunque estos no estén suficientemente desarrollados y además contengan ciertas ideas que puedan parecer contradictorias o interpretaciones de justificaciones falsas.

El error es parte de la vida en general, aunque el deber del individuo es el de auto-analizarse y buscar lo correcto, pues todo error o equivocación viene de una verdad la cual nace de la reducción y eliminación del error cometido.

En síntesis el error es parte importante en el proceso de adquisición de conocimiento, pues este proviene del humano y está mezclado con nuestros errores y prejuicios y, por lo cual, no hay fuentes últimas del conocimiento.

2.3 Sobre dificultad

En el ámbito de la matemática escolar así como en las otras disciplinas educativas existen dificultades que presentan los estudiantes al momento de enfrentar las matemáticas, Socas (1997) se refiere a que “en general, algunos alumnos, casi siempre y algunas veces, casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las matemáticas” (p. 126). Enfatizando lo anterior es importante destacar que al momento de aprender matemáticas, casi ningún estudiante escapa a experimentar dificultades , es por esto que constituyen un objeto de preocupación especial e intensiva, con un aumento del interés por parte de investigadores, estudiosos, profesores y maestros; que han de hacer frente a las dificultades y los problemas crecientes a medida que progresan los estudiantes en los niveles educativos de una ciencia considerada tradicionalmente como compleja y difícil. (Moreno, 2011, p. 2). Claramente la existencia de las dificultades genera conflicto en el proceso educativo y truncan el progreso de los estudiantes por la complejidad natural de la ciencia de la matemática, por lo mismo es importante el estudio de las dificultades que tienen los estudiantes en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática, entregando información significativa en torno al origen, efectos y alternativas para la intervención educativa; y en general respuestas a la problemática global de la enseñanza de la matemática en todos los niveles (Moreno,2011,p.1).

Para entender a qué se refiere con dificultad al enfocarse en el aprendizaje de las matemáticas y las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes más conocidas como DAM (dificultades en el aprendizaje de la Matemática), se puede dar cuenta de algunas definiciones que permiten entenderlas. Moreno (2011) se refiere a estas como:

> “Dificultades significativas en el desarrollo de las habilidades relacionadas con la matemática. Semrud-Clikermann y Hynd (1992). Estas dificultades no están ocasionadas por el retraso mental, ni por la escasa o inadecuada escolarización, ni por déficit visuales o auditivos. –Smith y Rivera (1991). Solo se clasifica como tal, si se da una alteración o deterioro relevante de los rendimientos escolares o de la vida cotidiana.- Seller y Sutton (1991)”. Moreno (2011)

Es por esto entonces que, y según las definiciones de los distintos autores, las DAM se pueden abordar o definir desde distintas perspectivas, por lo que el inicio del estudio de las DAM se dio a través de un enfoque neurológico y neuropsicológico, enfocadas más que nada en estudios referidos a un problema físico-cerebral manifestando así alteraciones en aritmética, por lo tanto se establecieron al comienzo del estudio de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas relaciones entre alteraciones cerebrales y conductas deficitarias (Moreno,2011). Este enfoque neurológico y neuropsicológico no fue el único que explicaba las DAM, ya que posteriormente predominó el paradigma conductista que según Bélanger (1999), se puede entender como el conjunto de teorías que estudia la conducta del ser humano y busca describir, predecir y manipular dicha conducta, concentrando su atención en tres fenómenos: la situación, la respuesta y el organismo.

Con el predominio del paradigma conductista, se adoptó un enfoque educativo que permite explicar las DAM, por lo mismo se puede explicar a partir de esta perspectiva las dificultades de aprendizaje en matemática por: Falta de conocimientos previos, Falta de instrucción, Presentación inadecuada de los estímulos, Refuerzo insuficiente, Procedimientos inadecuado y Oportunidades de practica limitadas (Morrison y Epiegel, 1991) citados en (Moreno, 2011). Pero como el conductismo se basa en aspectos externos al ser humano, y solo busca describir procesos sin tener en cuenta la participación que tiene el ser humano en los aprendizajes, el estudio de las DAM basados en este paradigma fueron ignorados por la sencilla razón de no tomar en cuenta los procesos mentales considerándolo un sujeto pasivo en el proceso de aprendizaje (Moreno, 2011).

Por el contrario, al no tomar en cuenta al estudiante como partícipe de su proceso educativo, desde la psicología cognitiva se hizo el aporte de que el estudiante es un sujeto activo que procesa información y que es capaz de aprender, así mismo conviven dentro de la psicología cognitiva distintas explicaciones de las DAM: modelos de procesamiento de la información, modelos evolutivos y modelos educativos (Moreno, 2011).

Por lo tanto se puede evidenciar que el estudio de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, DAM, es un término reciente y relativamente moderno en el que destacan connotaciones de tipo pedagógico en un intento de alejarlo de su referente con matices neurológicos (Moreno, 2011). Es por esto que ha tenido un recorrido desde un enfoque neurológico y neuropsicológico relacionando las alteraciones cerebrales y su déficit en matemática, el conductismo no toma en cuenta al estudiante como partícipe de su proceso de aprendizaje y en contraposición a esto se encuentra la psicología cognitiva que adopta al estudiante como partícipe de su propio proceso de aprendizaje, como un sujeto que procesa información.

Así como el estudio de las DAM ha sido explicada por distintos enfoques, "las dificultades por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza" (Socas, 1997, p. 124). Es por esto, que al abordarse las DAM desde distintas perspectivas, se presentan varias taxonomías sobre el origen de las DAM, entre las más conocidas podemos mencionar a Coie y colaboradores, Socas, Gonzales-Pienda y Carillo.

Según Moreno (2011), Coie y colaboradores en 1993 presentaron la siguiente relación de factores de riesgo, que son una serie de variables que aumentan la probabilidad de que se produzcan dificultades:

- Constitucionales.
- Familiares.
- Emocionales e interpersonales.
- Intelectuales y académicos.
- Ecológicos.
- Acontecimientos de la vida no normativos que generan estrés

Con respecto a las taxonomías de Coie y colaboradores, abarcan muchos aspectos como netamente sociales, ambientales, personales y educativos, frente a esto y desde una perspectiva docente con fundamento en una investigación realizada por

Hernández y Moreno (2001), se plantean las siguientes causas de los problemas de aprendizaje de la matemática:

- Factores didácticos – metodológicos
- Factores socio – económicos
- Factores políticos
- Factores culturales
- Otros factores

Siguiendo la línea educativa más específicamente en matemáticas, Martín Socas (1997) plantea desde su perspectiva de matemático educativo cinco líneas generales de dificultades en el aprendizaje de la matemática que enunciamos a continuación:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática.
- Dificultades asociadas a los procesos cognitivos de los estudiantes.
- Y dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática.

Por otro lado para Julio González-Pienda (1998), psicólogo educativo, las dificultades en el aprendizaje de la matemática son muy variadas y están relacionadas con una multiplicidad de factores que sintetizamos así:

- Dificultades relacionadas con los procesos del desarrollo cognitivo y la estructuración de la experiencia matemática.
- Creencias y actitudes sobre la matemática.
- DAM relacionadas con la propia naturaleza de la matemática; sus procesos de conocimiento y su simbolismo entre las que sobresalen: abstracción y generalización; complejidad de los conceptos; estructura jerárquica de los conceptos matemáticos; y el carácter lógico.
- El lenguaje matemático.
- Causas internas de las DAM.
- DAM relacionadas con la organización, la enseñanza inadecuada y la metodología.

Y por último Carrillo, expone las dificultades que surgen al alumnado durante el proceso de enseñanza aprendizaje matemática abordando dos grandes aspectos:

- Dificultades relacionadas con la propia naturaleza
- Dificultades relacionadas con la organización, la enseñanza inadecuada y la metodología.

Existen distintos autores que exponen las causas y factores por las que los estudiantes experimentan dificultades, aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas son de naturaleza diferente y se pueden abordar, obviamente, desde perspectivas distintas (Socas, 1997, p.126). Es por esto que se pueden relacionar entre autores los distintos factores o dificultades asociados a distintas naturalezas como se puede hacer entre las definidas por Martín Socas y Beatriz Carrillo, enunciando que las dificultades se pueden clasificar en tres bloques: las dificultades asociada a la propia naturaleza matemática, las asociadas al profesorado, metodología y organización y por último las asociadas al propio alumno (Carrillo, 2006)**.** A continuación se presentan las clasificaciones asociadas a las dificultades del aprendizaje en matemáticas.

2.3.1 Dificultades asociadas a la propia naturaleza matemática

2.3.1.1 Asociada a la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos.

En general, la educación y los aprendizajes tienen una estructura jerárquica y la matemática no es la excepción, refiriéndose a que "constituyen una cadena en la que cada conocimiento va enlazado con los anteriores de acuerdo con un proceder lógico" (Carrillo, 2009, p.2). El nivel de dificultad de los contenidos no sólo viene marcado por las características del propio contenido matemático sino también por las características psicológicas y cognitivas de los alumnos. Esto ha de quedar reflejado en la selección y organización de los contenidos y puesto de manifiesto a la hora de la presentación de los mismos, ya que, en caso contrario, el alumno recibirá unos contenidos inconexos, fraccionados y poco estructurados, con las consiguientes dificultades y lagunas de aprendizaje.

Otra variable que afecta a los contenidos es su funcionalidad. Un contenido muy bien estructurado, pero que no se vivencia como útil y provechoso, pierde interés y no se asimila con facilidad. Pero dicha funcionalidad no estriba sólo en la aplicación directa del concepto o técnica a un problema determinado, sino también en la función que tal contenido desempeña como eslabón de la cadena del conocimiento matemático.

2.3.1.2 Asociada al pensamiento matemático.

En sí el pensamiento matemático ha generado problemas en el aprendizaje por parte de los estudiantes, por lo mismo, las dificultades asociadas al pensamiento matemático se manifiestan en la naturaleza lógica de las matemáticas (Socas, 1997, p.130). En la escolaridad, se deja de lado el aspecto deductivo formal, y Socas (1997) se refiere a que el abandono de las demostraciones formales en los programas de matemáticas genera la incapacidad de seguir un argumento lógico. Por lo tanto se hace un abandono de la lógica matemática que desarrolla el pensamiento en los estudiantes y existe una falta de atención sobre el pensamiento lógico que genera una de las causas frecuentes de las dificultades de aprendizaje matemático (Carillo, 2009).

2.3.1.3 Asociada al lenguaje matemático

Una característica importante es el lenguaje matemático que consta de signos y una interpretación específica, donde la comunicación de los objetos matemáticos principalmente de forma escrita, se realiza a través de signos matemáticos y un lenguaje habitual (Socas, 1997, p.127). Es por esto que el lenguaje matemático se ayuda de un lenguaje natural para comunicar los objetos matemáticos y por lo mismo otra de las características básicas de las matemáticas consiste en utilizar un lenguaje formal muy distinto al lenguaje natural que se usa habitualmente. (Carillo, 2009, p. 13). Esta característica de las matemáticas genera dificultades al momento de aprenderlas, ya que se da un lenguaje natural en un contexto matemático, por lo que el uso de un lenguaje ordinario dentro del contexto matemático genera un conflicto de interpretación y precisión (Socas, 1997).

En el uso del lenguaje ordinario y en el matemático, se ponen de manifiesto diferencias entre un lenguaje natural y matemático, que pueden dar lugar a conflictos de interpretación y uso correcto, es por esto que Beatriz Carrillo (2009), presenta la siguiente tabla comparativa:

Lenguaje natural	Lenguaje matemático
Es redundante y sus significados tienen un margen inevitable de ambigüedad.	Es preciso, riguroso, sigue reglas exactas.
Puede comunicar su significado a pesar de los abusos o deficiencias sintácticas.	No tiene un significado salvo para la exacta interpretación de sus símbolos.
El significado puede ser expresado por alusión, por asociación y ayudado por manifestaciones gestuales.	Suprime intenciones, emociones, valores y afectos.
Puede expresar emociones, dar opiniones, se emplea para discutir, discrepar o valorar.	Su finalidad no es facilitar la comunicación, sino la inferencia.

Según Carrillo (2009), las dificultades más frecuentes relacionadas con el lenguaje y la lectura en matemáticas se pueden concretar en los siguientes puntos:

- Dificultades debidas a la complejidad sintáctica del lenguaje utilizado.
- Dificultades debidas a la utilización de vocabulario técnico.
- Dificultades causadas por la utilización de notación matemática.
- Dificultades debidas a la incapacidad de relacionar las matemáticas con el contexto.

2.3.2 Dificultades asociadas al profesorado, metodología y organización

El contexto educativo tiene directa influencia en los aprendizajes de las matemáticas, por lo mismo la institución escolar, el currículo de matemáticas y los métodos de enseñanza tienen que ver con las dificultades. (Socas, 1997). Con respecto a la institución escolar, si esta no organiza bien los materiales curriculares, recursos y estilos de enseñanza, los estudiantes vivenciarán las matemáticas como elementos ajenos y extraños, no vinculados al entorno y a la experiencia (Carillo, 2009).

Con respecto a los métodos de enseñanza usados por la institución escolar, más específicamente por los profesores, es importante que estén ligados a los elementos organizativos de la institución escolar y también a la organización curricular. (Socas, 1997, p. 134). El profesor es un actor directo y el que plasma los métodos de enseñanza en el aula, por lo mismo es quien "debe adecuar y dinamizar los objetivos, programas y métodos a cada uno de los alumnos que acude con sus circunstancias personales" (Carillo, 2009, p. 4). Es por esto que la inadecuada metodología puede resultar ineficaz por varias razones. Carrillo (2009), plantea causas por la que las metodologías resultan ineficaces:

Exposición inadecuada del contenido:

- La exposición del profesor puede carecer de estructura y claridad o basarse en supuestos injustificados respecto a la capacidad, conocimientos y progresos reales de los alumnos.
- El profesor no explica con suficiente claridad y énfasis los conceptos principales e ideas clave.
- No proporciona actividades apropiadas ni ofrece ejemplos sencillos y comprensibles con los que ilustrar las explicaciones.
- Los ejercicios de los alumnos pueden estar mal graduados y ser confusos, o pueden ser rutinarios y mecánicos.
- Ausencia de una supervisión continua y progresiva, así como una evaluación apropiada.

Ritmo de trabajo:

- Del profesor depende la adaptación de los procesos matemáticos a la psicología de los alumnos y de ello dependerá la eficacia de su labor.

Inadecuación o ausencia de los recursos de aprendizaje:

- Un dato incuestionable es que la presentación visual es importante para todos los grupos de edad y niveles de capacidad cognitiva. Una distribución equilibrada entre el texto y las ilustraciones es importante. Puede resultar confuso que la información necesaria para un determinado cálculo se presente dos o tres páginas más adelante. No menos importante es la graduación de los ejercicios propuesto a lo largo del texto. También sucede que aparecen destrezas que bien no se han enseñado o bien no se han revisado con frecuencia de tiempo, originando dificultades que no estaban previstas.

2.3.3 Dificultades asociadas al propio alumno

El alumno al ser uno de los participantes directos del proceso educativo y pieza fundamental para el desarrollo del mismo, es una fuente importante de información para dar cuenta de las razones por las que se producen dificultades al momento del aprendizaje de las matemáticas, es por esto que "la posibilidad de tener información sobre la naturaleza de los procesos de aprendizaje y conocimiento del desarrollo intelectual, permite conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los alumnos" (Socas, 1997, p.134). Es por esto, que según Socas (1997):

> "Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer constituyen una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza."(p.134)

Por lo tanto la importancia de enfocarse en el aspecto cognitivo de los estudiantes entrega información relevante para plantear y sugerir métodos y estrategias en la construcción de las clases.

Por otra parte no se puede dejar fuera el aspecto emocional en el proceso educativo y sobre todo el de los actores principales que son los estudiantes. El gusto por las matemáticas así como por otra área disciplinar es relativo, pero "muchos alumnos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia ellas". (Socas, 1997, p.135). El hecho de que los estudiantes tengas sensaciones negativas para con las matemáticas se puede explicar por “la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y actitudes y creencias hacia las matemáticas que son transmitidas”. (Socas, 1997, p.134). Las percepciones negativas de los estudiantes pueden ser muchas, pero se destacan la ansiedad y el miedo, la ansiedad por acabar una tarea y el miedo al fracaso, a la equivocación etc. (Socas, 1997, p.135). A Estas percepciones y actitudes negativas, ya sea de tensión, fracaso o miedo, de las que dan cuenta los estudiantes al momento de enfrentar la matemática, se suman las creencias que tienen los mismos hacia la matemática y que no ayudan de manera positiva en su aprendizaje, por lo mismo “las describen como fijas, inmutables, externas, abstractas y que no están relacionadas con la realidad; un conocimiento cuya comprensión está reservada a muy pocos, especialmente dotados”. (Carrillo,2009,p.5).

Los aspectos más cualitativos de los estudiantes y que se generan al enfrentar las matemáticas son un elemento importante a tener en cuenta en el proceso educativo de los estudiantes, ya que los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas son particularmente susceptibles al influjo de los factores afectivos (Carrillo, 2009).

Los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas son particularmente susceptibles al influjo de los factores afectivos (Carrillo, 2009)

2.4 Sobre Obstáculo

Si bien se han expuesto y analizado las dificultades que ayudan a explicar los errores en el aprendizaje de las matemáticas, también un elemento importante es el obstáculo o los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas y que ayudan a la organización de los errores.

Si bien el concepto de obstáculo se puede explicar desde distintas referencias, el primer autor en introducir este concepto fue Bachelard, que no se refirió a él necesariamente en el ámbito educativo, sino más bien en el ámbito científico, donde explica y entiende la construcción del conocimiento científico a través del obstáculo epistemológico, en Socas (1997) se cita a Bachelard :

> “Hay que plantearse el problema de conocimiento científico en términos de obstáculos. Y no se trata de considerar obstáculos externos, como la

complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni tampoco de culpar la debilidad de los sentidos y de la mente humana, pues es, precisamente, en el mismo acto de conocer, íntimamente, cuando surgen, como una necesidad funcional, torpezas de entendimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, y donde descubriremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos" (Socas, 1997, p.136).

Si bien da una definición de lo que es obstáculo, solo lo entiende como una herramienta para edificar el conocimiento científico, pero que apunta a que cuando existen torpezas de entendimiento y confusiones con respecto al acto de conocer, las causas que provocan estas es un obstáculo epistemológico.

Por otra parte, el concepto de obstáculo tuvo una conexión con el ámbito educativo más específicamente en el campo de la Didáctica de la matemática, explicados por distintos autores como Brousseau, Sierpinska, Artigue y Socas (1997) donde se destaca a Brousseau, quien considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser:

- De origen ontogénico o psicogénico, debidos a las características del desarrollo del niño.
- De origen didáctico, resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, esto es, de las elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza.
- De origen epistemológico, intrínsicamente relacionados con el propio concepto. Se les puede encontrar en la historia de los mismos conceptos.

Con respecto al obstáculo epistemológico, Socas (1997), cita a Hercovics, quien reconoce la noción de obstáculo por parte de Bachelard y su definición en el contexto de desarrollo del pensamiento científico, más aún se refiere por primera vez a la noción de obstáculo en la adquisición de esquemas conceptuales por el aprendiz.

Otro autor que se refiere a los obstáculos es D`Tall nombrado en Socas (1997), quien se refiere a los obstáculos como cognitivos y distingue dos tipos:

- Obstáculos basados en la secuencia de un tema, en que afirma que la razón para creer en obstáculos surge fundamentalmente del hecho de que ciertos conceptos tienen un grado de complejidad, por lo que es preciso familiarizarse con ellos en un cierto orden. Por ejemplo el caso del álgebra, en el que las destrezas operatorias son enseñadas con anterioridad a ideas conceptuales aparentemente más profundas.

- Obstáculos basados sobre casos simples, posiblemente causados por limitar al estudiante a casos simples por un periodo sustancial de tiempo, antes de pasar a casos más complejos.

Si bien se ha referido al obstáculo epistemológico y cognitivo, Bachelard y Brousseau citado en Socas (1997) caracterizan un obstáculo como:

> "aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas" (Socas ,1997, p.137).

Por lo tanto, un obstáculo es un conocimiento adquirido y satisfactorio en un contexto determinado y no es una falta de conocimiento, pero que al momento de aplicarlo o ponerlo a prueba en otro contexto no resuelve los problemas que se presentan en él. Por lo mismo y según Socas (1997), el dominio de este conocimiento resulta resistente, y lo es más cuanto mejor adquirido haya sido o demostrado su eficacia y potencia en el anterior domino de validez y se manifiesta esporádicamente.

Como existen obstáculos epistemológicos, didácticos y cognitivos, Socas (1997) menciona que en el contexto de pensamiento matemático se encuentran muchos obstáculos epistemológicos, que por otra parte estos no se especifican en términos de experiencia de enseñanza organizadas en el sistema educativo y se acepta que originan un obstáculo didáctico y por último que el estudiante al momento de adquirir nuevos esquemas conceptuales se encuentran con obstáculos de tipo cognitivo.

Frente a esto se puede reflexionar acerca de que los distintos elementos que componen el aprendizaje de las matemáticas, ya sea la ciencia en sí o la organización de la enseñanza y como el estudiante reacciona frente a estos nuevos esquemas, generan distintos tipos de obstáculos, estos pueden ser epistemológicos que se relacionan directamente con la complejidad de la ciencia de la matemática, didáctico que se relacionan con la presentación y organización de los aprendizajes y, por último, cognitivos referidos al estudiante.

2.5 Sobre el error

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas son un elemento permanente al que están expuestos los estudiantes, así como también los obstáculos en el aprendizaje de las mismas, según Socas (1997), estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. Es por esto que los errores también pasan a ser un elemento importante en el proceso educativo, ya que entrega información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas y los procedimientos que utilizan para alcanzar una meta (Socas, 1997). Los errores por lo tanto son elementos que están presentes en el proceso educativo y lo que más preocupa es la persistencia y la masividad de algunos de ellos (Engler et.al, 2004).

Por lo tanto, es importante señalar cuales son las causas por las que los estudiantes cometen errores, (Pochulu M. , 2006) cita a Brousseau, David y Werner (citados en Rico 1995) señalando cuatro vías mediante las cuales el error puede presentarse, las que enuncian del siguiente modo:

- Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.
- También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.
- Los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas.

No obstante, según lo expuesto por Rico (2000), la mayor parte de los investigadores y especialistas coinciden en considerar como características generales de los errores cometidos por los alumnos, los siguientes:

- Los errores, surgen en la clase por lo general de una manera espontánea.
- Sorprenden al profesor, aunque pueden gestarse desde mucho antes.
- Son persistentes y particulares de cada individuo.

- Son difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno.
- Hay un predominio de los errores sistemáticos con respecto a los errores por azar u ocasionales.
- Los errores sistemáticos revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada.
- Los alumnos en el momento no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan.
- Los errores sistemáticos son en general el resultado de concepciones inadecuadas de los fundamentos de la Matemática, reconocibles o no reconocibles por el profesor.
- Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que da el profesor. Los alumnos, por ejemplo, recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesor.

2.5.1 Categorización de errores

Existen muchos errores en las producciones de los estudiantes, por lo mismo es importante ocupar alguna estrategia para identificarlos y saber cómo usarlos para trabajar en función de los aprendizajes de los estudiantes, por lo mismo y según Engler et al, (2004)**:**

> “La categorización de los errores nos hace posible centrar la atención hacia los diferentes aspectos y nos permite una evaluación y diagnóstico más eficaz para poder ayudar a nuestros estudiantes en sus dificultades cognitivas y sus carencias de sentido de los objetos matemáticos y en el desarrollo de una actitud racional hacia la matemática” (Engler et al, 2004, p.27).

Por esto la importancia de exponer según distintos autores y enfoques las categorizaciones en matemática que se han hecho a lo largo de la historia.

Pochulu (2006) cita a Davis (1984) quien elaboró una teoría de esquemas o constructos personales que le permitió tipificar e interpretar algunos de los errores más usuales de los alumnos en el aprendizaje de matemática. Los errores clásicos explicados son: reversiones binarias, errores inducidos por el lenguaje o la notación, errores por recuperación de un esquema previo, errores producidos por una representación inadecuada y reglas que producen reglas.

- Pochulu (2006) cita a Booth (1984) quien describe errores comunes cometidos por los alumnos atribuidos a:

1. La naturaleza y el significado de los símbolos y las letras.

Los símbolos son un recurso que permite denotar y manipular abstracciones. El reconocimiento de la naturaleza y el significado de los símbolos para poder comprender cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados les permitirán la transferencia de conocimiento aritmético hasta el álgebra.

2. El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra.

Muchos estudiantes no se dan cuenta y suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige siempre una solución única y numérica.

3. La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.

Las dificultades que los estudiantes presentan en el álgebra muchas veces no son tanto dificultades en el álgebra como problemas que se quedan sin corregir en la aritmética. En la mayoría de los errores cometidos en aritmética, los alumnos reflejan dificultades de interiorización del concepto o falta de percepción.

4. El uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimiento”.

Algunos errores se deben a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que han extraído de un prototipo o libro de texto y que usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números. Pueden ser mal uso de la propiedad distributiva, al uso de recíprocos, cancelación, falsas generalizaciones sobre números y el uso de métodos informales por parte de los estudiantes.

- Rico (1995) citado en Engler (2004), destaca que Radatz ofrece una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis:

1. Errores debido a dificultades de lenguaje.

El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje.

2. Errores debido a dificultades para obtener información espacial.

Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades en la realización de tareas matemáticas. Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.

3. Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.

4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado. Están inhibidos para el procesamiento de nueva información. En general son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Interesan cinco subtipos:

- Errores por perseverancia, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
- Errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.
- Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.

- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

El razonamiento por analogía sabemos que no siempre funciona en Matemática. El mismo Luis Rico (1995) manifiesta que, en una investigación sobre errores cometidos por alumnos de secundaria en Matemática, Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos:

5.1. Datos mal utilizados.

Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. Puede ser porque: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

5.2. Interpretación incorrecta del lenguaje.

Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.

5.3. Inferencias no válidas lógicamente.

Son los errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.

5.4. Teoremas o definiciones deformados.

Errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable.

5.5. Falta de verificación en la solución.

Son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.

6. Errores técnicos.

Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

- Engler (2004) menciona que Esteley – Villarreal (1990, 1992, 1996) realizaron una categorización de errores en matemática y discutieron las siguientes categorías:

  - Errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones.
  - No empleo o uso parcial de la información.
  - No verificación de resultados parciales o totales que se manifiesta en: desconexión entre lo analítico y lo gráfico, respuestas consecutivas incoherentes entre sí y no comprobación de que los resultados obtenidos satisfacen la o las ecuaciones originales.
  - Empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones).
  - No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc. En un caso particular.
  - Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada.
  - Errores de lógica: justificaciones inadecuadas de proposiciones y uso inadecuado del lenguaje.
  - Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.

- En Engler et. al (2004), citan a Azcárate de 1994 donde se muestra una investigación realizada por Orton basada en un trabajo del concepto de derivada con alumnos de entre 16 y 22 años y de la que surge la siguiente clasificación:

  - Errores estructurales: relacionados con los conceptos esenciales implicados.

- Errores arbitrarios: el alumno se comporta arbitrariamente sin tener en cuenta los datos del problema.
- Errores ejecutivos: errores en la manipulación, si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos.

- Socas (1997), describe los orígenes de los errores a través las siguientes categorías:

  - Errores que tienen su origen en un obstáculo
  - Errores que tienen su origen en ausencia de sentido
  - Errores que tienen su origen en actitudes efectivas y emocionales.

- Engler (2004) cita a Astolfi (1999) que describe la siguiente tipología de los errores:

  - Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones.
  - Errores que resultan de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas.
  - Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos.
  - Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.
  - Errores en los procesos adoptados.
  - Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad.
  - Errores que tienen su origen en otra disciplina.
  - Errores causados por la complejidad propia del contenido.

Durante la XXV Reunión de Educación Matemática organizada por la UMA y realizada en la ciudad de Santa Fe durante el año 2002 las profesoras Saucedo – Iaffei – Scaglia presentaron una clasificación tomando como base la clasificación empírica de los errores realizado por Mosvshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. e Inbar, S. Algunas categorías coinciden con la de los autores, otras son una adaptación y se crea una nueva:

- Datos mal utilizados.
- Interpretación incorrecta del lenguaje.
- Empleo incorrecto de propiedades y definiciones.
- Errores al operar algebraicamente.
- No verificación de resultados parciales o totales.
- Errores lógicos.

- Errores técnicos.

Con respecto a las categorizaciones que se han hecho a lo largo del tiempo, parece interesante enfocarse en una referida estrictamente al álgebra que es la que hace Martín Socas, por lo que se puede caracterizar en dos grupos las causas principales de los errores en el aprendizaje de las matemáticas, que "tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de significado o sentido" (Socas, 1997, p.145). Los errores que define Socas, tiene procedencias distintas y relacionadas con dificultades, por lo que un error se relaciona con dificultades asociadas a complejidad de los objetos matemáticos y procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionado con dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.(Socas, 1997). Es por esto que se considerarán ejes que representan a estas líneas de errores determinados por:

I. Errores que tienen su origen en un obstáculo
II. Errores que tienen su origen en ausencia de sentido
III. Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

Es importante destacar que se expondrán solo las dos primeras por la incidencia que tendrán con respecto a la presente investigación.

2.5.1.1 Errores que tienen su origen en un obstáculo

Con respecto a estos tipos de errores, Socas (1997) cita a Collis (1974), explicando que los estudiantes que comienzan a estudiar álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos. Con respecto a esto, se explica que los estudiantes necesitan agrupar elementos y dar un cierre a una operación, por ejemplo si se les requiere que dos números conectados por una operación sean reemplazados por el resultado de la operación, y, posteriormente, se les introduce al álgebra con expresiones tales como x + 7 y 3x para ser remplazadas por un tercer número, como en este caso no pueden "cerrarse", son expresiones "incompletas", los alumnos no lo aceptan y él lo expresa diciendo que "no hay aceptación de la falta de clausura".

Por otra parte, Socas (1997), cita a Davis (1975), para plantear que a los estudiantes se les hace difícil plantear respuestas legítimas. Por ejemplo si tenemos una adición aritmética donde”+” es una pregunta o un problema (3+7), y la adición algebraica, como en x + 7, donde la expresión describe, a la vez, la operación de sumar y el resultado. Esto necesita por parte de los alumnos un “reajuste cognitivo” y es lo que Davis ha llamado dilema proceso-producto donde, simultáneamente, se describe el proceso y se nombra la respuesta.

La “concatenación”, es decir, la yuxtaposición de dos símbolos, es otra fuente de dificultad para el estudiante principiante de álgebra (Herscovics, 1989). También Matz (1980), había observado que, en aritmética, la concatenación denota adición implícita, como en la numeración de valor posicional y en la notación numérica mixta. Sin embargo, en álgebra, concatenación denota multiplicación. Esto explica por qué varios estudiantes, cuando se les pidió sustituir 2 por a en 3a, pensaron que el resultado sería 32. Sólo cuando específicamente se les requirió responder “en álgebra”, respondieron “3 veces 2” (Chalouh y Herscovics, 1988).

2.5.1.2 Errores que tienen su origen en ausencia de sentido

Según Socas (1997), al originarse estos errores que se dan en los sistemas de representación, se pueden diferenciar errores en tres etapas distintas.

A. Errores del álgebra que tiene su origen en la aritmética.

El significado de los signos usados es el mismo en tanto en la aritmética como en el álgebra. Según Socas (1997) el álgebra no está separada de la aritmética y aquella se puede considerar con la perspectiva de aritmética generalizada. Por lo mismo, y de acuerdo a la jerarquización en el aprendizaje de la matemática, para entender la generalización de relaciones y procesos se requiere que éstos sean antes asimilados dentro del contexto aritmético, por eso, a veces las dificultades que los estudiantes encuentran en álgebra, no son tanto dificultades en el álgebra como problemas que se quedan sin corregir en la aritmética; por ejemplo, en el caso de las fracciones, uso de paréntesis, potencias, etc.(Socas, 1997, p. 145).

B. Errores de procedimientos.

El uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimientos” también da lugar a errores de este tipo, y se “debe a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida, que han extraído de un prototipo o libro de texto, y la usan tal cual la conocen o la adaptan a una situación nueva" (Socas, 1997, p. 146). Por lo mismo los estudiantes enfrentan las matemáticas con técnicas que sirven de solución independiente sean erróneas o no y la mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente, por falta de linealidad de estos operadores (Socas, 1997).

Esta linealidad, apunta a la descomposición de un objeto en partes independientes, por lo mismo y según Socas (1997),

> "Un operador es empleado linealmente, cuando el resultado final de aplicarlo a un objeto se consigue aplicando el operador en cada parte y luego se combinan los resultados parciales. La linealidad es bastante natural para muchos alumnos, ya que sus experiencias anteriores son compatibles con hipótesis de linealidad" (Socas,1997, p. Nº146).

Entre los errores derivados de los procedimientos se pueden distinguir:

1) Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva:

a) Extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación con relación a la adición (o sustracción) al caso de la multiplicación:

$3 \cdot (4+5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \quad y \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$3 \cdot (4 \cdot 5) = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \quad y \quad a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot a \cdot c$

Y también nos encontramos con:

$\frac{3+4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}$ se extiende a $\frac{3}{4+5} = \frac{3}{4} + \frac{3}{5}$

Y además de da manera análoga:

$\frac{(a+b)}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ se extiende a $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$

b) La estructura $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, en la que se relaciona el producto y la potencia, se extiende fácilmente al caso de la suma,

$(a+b)^2 = a^2 + b^2$, de un modo inconsciente, para los alumnos como algo muy natural, a veces incluso después de ser cuestionado. Es la misma situación que en el trabajo con números, aunque en el caso de la suma, y si se trata de números pequeños en valor absoluto, suelen resolver primero la operación indicada entre paréntesis.

c) De la misma forma que con las potencias, sucede con las raíces: es muy frecuente extender la distributividad de la radicación respecto a la multiplicación, a la distributividad de la radicación respecto a la adición o sustracción.

2) Errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Estos errores son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética.

Como ejemplo de ellos mencionaremos: el sentido del signo “=“en su paso de la aritmética al álgebra, y la sustitución formal.

En el primero (sentido del signo “=“), aparece un cambio importante. El sentido de igualdad aritmética se conserva en el álgebra cuando trabajamos con tautologías algebraicas, pero no en expresiones como $4x - 3 = 2x + 7$, que sólo es verdadera cuando $x = 5$. A diferencia de las tautologías, las ecuaciones no son afirmaciones universales verdaderas, pues el signo igual en una ecuación no conexiona expresiones equivalentes, aunque sí condiciona a la incógnita. Dada una ecuación, la tarea para resolverla consiste en determinar los valores desconocidos (restricciones) que hacen a la ecuación verdadera.

En el segundo (sustitución formal), queremos señalar que los procesos de sustitución que conducen de $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3,\ a \cdot b = b \cdot a$, son procesos formales, que no incluimos en la sustitución formal propiamente dicha, y que denominamos procesos de generalización.

La sustitución formal se extiende más allá de la generalización. Por ejemplo, de la identidad $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ se obtiene, al reemplazar:

$a \cdot (a+c)$ y $b \cdot (b+d)$, da la igualdad $(a+c+b+d)\cdot(a+c-b-d) = (a+c)^2-(b+d)^2$ donde, variables de una expresión, son sustituidas por expresiones más complejas que son nuevamente variables.

De acuerdo a las categorías que hace Martín Socas sobre los errores principalmente en álgebra es posible través de estos tres ejes no disjuntos el permitir una evaluación y diagnóstico más eficaz (Socas, 1997). Es por esto que se puede aproximar una explicación que tiene como sustento las dificultades cognitivas y sus carencias de sentido de los objetos matemáticos.

El hecho de identificar estos errores, apunta a que el profesor lo utilice como herramienta pedagógica, desde este punto de vista práctico, Según Socas (1997) esto supone pasar de una enseñanza caracterizada por la toma del error como algo negativo y una donde el error se explicita y usa como herramienta positiva para los aprendizajes. Es importante el diagnóstico y la categorización por el simple hecho de que es una estrategia para identificar y argumentar el porqué de los errores.

Capítulo III

“Marco Metodológico”

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1 Paradigma y enfoque de investigación

La investigación se sustenta en el paradigma interpretativo, el cual postula la búsqueda de la comprensión sobre las acciones de los actores dando sentido y revelando así la estructura que las explica (González Monteagudo, 2000). En esta investigación se verá reflejado el análisis y posterior categorización de los errores cometidos por los estudiantes a través de un enfoque de análisis de contenido donde en una sección pequeña se hace referencia a una categoría, en este caso se han de codificar las significaciones interesantes cuyo criterio viene marcado por los objetivos de análisis (Porta & Silva, 2003).

Trabajar con un paradigma interpretativo implica emplear un enfoque cualitativo en la investigación. Sampieri, Fernández, & Baptista (2010) menciona que esta metodología permite la exploración de fenómenos en profundidad desde un proceso inductivo posibilitando el análisis de múltiples realidades subjetivas. Además este enfoque permite en esta investigación indagar acerca de las razones por las cuales los estudiantes de primer año medio cometen errores en reducción y multiplicación de expresiones algebraicas y así comprenderlos y categorizarlos. La riqueza interpretativa del estudio y la contextualización del fenómeno son las ventajas que ofrece este enfoque cualitativo.

3.2 Muestra y recogida de datos

La muestra de esta investigación corresponde a los estudiantes de primer año medio pertenecientes a colegios particulares subvencionados de la región metropolitana. Además la muestra está constituida por 4 docentes de matemática de dichos colegios y su elección se debe a que ellos realizaron o realizan clases a los estudiantes de la muestra.

Se tuvo acceso a dos colegios de las comunas San Bernardo y Cerrillos, con 948 y 735 estudiantes respectivamente. Las dos instituciones ofrecen enseñanza pre-básica, enseñanza básica y enseñanza media científico-humanista.

La muestra se conforma por dos cursos de primer año medio de los colegios San José de San Bernardo de 24 estudiantes cada uno y un curso de primer año medio del colegio de Saint Maurice´s de 39 estudiantes, completando un total de 87 estudiantes de primer año medio, además de los 4 profesores a cargo de la materia de matemáticas en los respectivos colegios.

3.3 Fundamentación del diseño

Este estudio sigue un diseño de carácter participativo y emergente a través de un análisis de contenido, recogiendo las características más representativas; es participativo puesto que persigue el objetivo de indagar en profundidad un fenómeno en su contexto e incorpora la participación parcial de los actores a través de la recolección de información. En este tipo de diseño, el equipo de investigación es también quien sistematiza e interpreta los resultados, por lo mismo es que se indaga el fenómeno sobre los errores que comenten los estudiantes de primer año medio en el eje de álgebra en reducción y multiplicación de expresiones algebraicas y se hace partícipe a los estudiantes siendo la fuente de información y de recolección de datos que se obtienen a partir de un reactivo y también a los profesores a los que se les aplicó un cuestionario abierto para conocer cuáles son las concepciones que tienen sobre dificultad, obstáculo y error. Corresponde a un carácter emergente ya que se hace una codificación abierta con los resultados obtenidos por el cuestionario abierto aplicado a los docentes y también, del reactivo aplicado a los estudiantes.

Con respecto al análisis de contenido, Porta (2003) señala que permite analizar y cuantificar los materiales de la comunicación humana, pudiendo emplear cualquier instrumento de compendio de datos como, por ejemplo, agendas, diarios, cartas, cuestionarios, encuestas, tests proyectivos, libros, anuncios, entrevistas, radio, televisión. También este método de investigación no solo se enfoca en los medios de comunicación, por lo que sirve también en marcos cada vez más variados, desde el contenido de las producciones personales como técnica auxiliar al análisis de datos obtenidos, a través de encuestas, entrevistas, registros de observación, etc". (Perez Serrano, 1984). Esto se ve reflejada en los instrumentos aplicados en la investigacion como lo son el cuestionario aplicado a los docentes y el reactivo aplicado a los estudiantes de primer año medio.

3.4 Descripción del diseño

Para poder comprender los errores cometidos por estudiantes de primer año medio en reducción y multiplicación de expresiones algebraicas se estudiarán las investigaciones de Socas, Engler, Pochulu, entre otros, que aportan al análisis y categorización de estos errores en un contexto escolar secundario en la educación chilena.

Para comenzar el diseño como la investigación se basa en un diseño emergente y análisis de contenido, se desarrollaran las siguientes etapas:

- Recolección de la información
- Codificación abierta
- Unidades de Registro

3.4.1 Recolección de la información

El estudio comienza con un cuestionario abierto aplicado a los docentes de matemáticas a cargo de las clases que reciben los estudiantes de primer año medio pertenecientes a la muestra de todos los estudiantes de esta investigación.

Luego de implementar el instrumento enfocado en ejercicios obtenidos desde la teoría de Martin Socas, se identifican los errores que cometen los estudiantes en reducción y multiplicación de expresiones algebraicas siendo estos desde ahora el objeto de estudio.

3.4.2 Codificación Abierta

Para iniciar el análisis, se utiliza la información entregada por docentes que permite generar conjeturas sobre el uso del error como una herramienta pedagógica, contrastando este con los objetivos de los Planes y Programas otorgados por el MINEDUC y la teoría propuesta por Socas.

Luego se realiza una tabla resumen de los errores **(Anexo Nª3)** que permiten analizarlos y clasificarlos a través de la teoría que propone Socas y Otros autores dando un sentido más profundo al resultado que llegan los estudiantes en su proceso inadecuado de un ejercicio determinado.

Utilizando la información recopilada en las tablas resumen, se interpreta la información que desarrollaron los estudiantes en el reactivo aplicado de manera porcentual para concretar resultados finales y comparar entre ellos mismos la frecuencia que tienen y lograr así una conexión entre la producción del error y su procedencia.

3.4.3 Unidades de Registro

En esta etapa se tomarán las clasificaciones de los errores para poder categorizar según su correspondencia teórica para comprender el contexto general en donde los estudiantes cometen los errores al finalizar el desarrollo de sus ejercicios de álgebra.

3.5 Instrumentos Empleados

3.5.1 Cuestionario abierto (Anexo Nº1)

El cuestionario abierto responde al primer objetivo específico de la investigación que es "Comparar las percepciones que tienen los docentes que realizan las clases de Matemática, sobre los conceptos de dificultad, obstáculo y error, en relación a las definiciones de Socas y los Planes y Programas de Estudio".

Objetivo general del cuestionario:

Conocer como los docentes de matemáticas conciben y diferencian los conceptos de dificultad, obstáculo y error, basado en su experiencia docente, en los colegios Saint Maurice´s y San José de San Bernardo. Estas definiciones serán analizadas desde el capítulo V: dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria del libro: *"La educación matemática en la enseñanza secundaria"*, por Martín M. Socas Robayna.

Objetivos específicos del cuestionario:

- Recopilar información sobre cuáles son los conceptos de dificultad, obstáculos y error en base a la experiencia de los profesores.

- Analizar si los docentes hacen una distinción entre los conceptos de dificultad, obstáculo y error.

- Comparar el conocimiento que tienen los profesores sobre los conceptos de dificultad, obstáculo y error con respecto a las definiciones que ofrece Socas.

Este cuestionario contempla cinco preguntas que permiten vislumbrar el conocimiento de los docentes con respecto al tema de estudio.

Las preguntas consideradas fueron las siguientes:

1.- ¿Cómo definiría dificultad?

2.- ¿Cómo definiría obstáculo?

3.- ¿Cómo definiría error?

4.- ¿Cuál(es) cree usted que es (son) el error que se ha producido con mayor frecuencia en el eje de algebra de primer año medio durante su experiencia como docente?

5.- ¿Conoce las posibles causas de este error? ¿De ser así cómo las ha abordado en experiencias posteriores con sus estudiantes?

6.- ¿Cree usted que es importante analizar los errores cometidos por los estudiantes en el eje de algebra de primer año medio? ¿Por qué?

3.5.2 Reactivo (Anexo Nª2)

El reactivo aplicado a los estudiantes aporta al segundo objetivo específico de la investigación que es Analizar los errores cometidos por estudiantes en el eje de álgebra en primer año medio específicamente en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas.

Objetivo general del instrumento:

Conocer los errores que cometen los estudiantes de primer año medio en la asignatura de matemáticas, específicamente en los contenidos de: reducción y multiplicación de expresiones algebraicas.

Objetivos específicos del instrumento:

- Recopilar información sobre cuáles son los errores que se producen con más frecuencia entre los estudiantes de primer año medio en los contenidos de: reducción y multiplicación de expresiones algebraicas.
- Analizar los errores cometidos que se producen con más frecuencia entre los estudiantes de primer año medio en los contenidos de: reducción y multiplicación de expresiones algebraicas.

Este cuestionario contiene dos ítems los cuales se dividen en:

a) Primer ítem: “Reducción de expresiones algebraicas”

b) Segundo ítem: “Multiplicación de expresiones algebraicas”

En ambos ítems se presentan cinco ejercicios que buscan encontrar los errores que cometen los estudiantes en los contenidos que son indicados respectivamente en los títulos. Los ejercicios propuestos se presentan en base a una síntesis de las teorías tratadas **(Anexo Nª3)**.

De lo recogido a partir de este reactivo se permite también establecer un análisis numérico que permite contextualizar la muestra y determinar los tipos de errores que se manifestaron con mayor frecuencia.

3.6 Validez y confiabilidad del estudio

La validez de este estudio es de tipo interna, esto implica que el análisis de los resultados obtenidos luego de aplicar los instrumentos permite rescatar las características principales de los actores de la investigación observada en la aplicación de los instrumentos, y al evaluar la forma en la cual los participantes la desarrollan, excluyendo preguntas de alternativas, se logra que los resultados finales sean más concretos y cercanos para los investigadores.

Así mismo Sampieri, Fernández, & Baptista (2010) señalan que *incluso, podemos evaluar más extensamente las dificultades y problemas en nuestras indagaciones, ubicados en todo el proceso de investigación y en cada una de sus etapas.*

Considerando el enfoque cualitativo se consideran las siguientes estrategias para validar el estudio:

- Incremento de validez: considera a dos establecimientos de dos sectores distintos de la región Metropolitana.

- Multiplicidad: variedad de preguntas con respecto al cuestionario que desarrollaron los docentes y al reactivo aplicado a los estudiantes.

- Explicación: análisis de la información recogida para concluir en un relación entre ellas.

- Utilidad: la finalidad es que sea de utilidad para el trabajo de futuros docentes de matemáticas.

- Diversidad: gran cantidad de respuestas diferentes a un mismo ejercicio matemático de algebra.

- Mejora: A través de la recurrencia de los errores se obtiene la categorización de estos lo que nos indica su forma y origen.

Ahora con respecto a la confiabilidad del estudio nuestros sujetos de estudio que son los estudiantes de primer año medio junto a los docentes, nos permiten la verificación de los instrumentos así como su semejanza y análisis entre la teoría previa y los resultados obtenidos.

3.7 Validación de los instrumentos

El reactivo aplicado a los estudiantes y el Cuestionario abierto aplicado a los profesores de dichos establecimientos, fueron validados por tres docentes de la Universidad Católica Silva Henríquez, Maritza Silva Acuña, Jorge Ávila Contreras y Pablo Figueroa Salgado, que ocupan los de cargos de Directora y Académicos de la Escuela de Educación Matemática e Informática respectivamente.

3.8 Recogida de la información

Como consecuencia de los instrumentos aplicados a los estudiantes de tres primeros medios de dos colegios particulares subvencionados de la región metropolitana, se procede a recoger la información reunida para su análisis.

3.8.1 Las etapas y su desarrollo

a) **Etapa 1: Cuestionario abierto**

El cuestionario se aplicó a 4 docentes en Junio 2015, quienes realizan clases a los cursos que fueron identificados en la muestra. La finalidad de esta etapa es comprender como el profesorado de los estudiantes de primer año concibe y diferencian los conceptos de dificultad, obstáculo y error.

b) **Etapa 2: Aplicación del reactivo**

Este instrumento se aplicó a 87 estudiantes pertenecientes a 3 primeros medios, 2 del colegio San José de San Bernardo y 1 del colegio Saint Maurice´s de Cerrillos. La finalidad de este instrumento era la identificación de los errores cometidos por los estudiantes.

3.9 Facilitadores y obstaculizadores

El principal facilitador fue el tiempo otorgado por los establecimientos educacionales para realizar la toma de muestras, tanto de los docentes como de los estudiantes.

Los docentes no tuvieron inconveniente en ceder tiempo de la clase tanto para que los estudiantes resolvieran el reactivo, como para que ellos mismo respondieran el cuestionario abierto.

Durante el desarrollo del estudio se presentaron los siguientes obstáculos:

1. La disposición de algunos estudiantes hacia la resolución del instrumento.

2. La metodología usada para hacer un cuadro resumen que permitiera ver todas las características que se obtuvieron de los reactivos realizados por los estudiantes.

Capítulo IV

“Análisis de la Información”

4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

4.1 Considerando las respuestas de los instrumentos

Una vez aplicado el reactivo y el cuestionario abierto, del primero se han seleccionado las respuestas que presentan los errores que más se repiten entre los estudiantes, y del segundo se consideran todas las percepciones de los docentes que respondieron al cuestionario.

4.2 Identificación de las respuestas

4.2.1 Cuestionario abierto a Docentes

El cuestionario fue respondido por cuatro Profesores de Matemáticas pertenecientes a los Colegios considerados para el estudio quienes realizaban las clases de Matemáticas y de Taller Matemáticas.

A continuación, se expresan textualmente las percepciones de los conceptos de “dificultad, obstáculo y error” tratados en la investigación que tienen los docentes de los estudiantes de primer año medio de los Colegios Sain´t Maurice´s y San José.

a) Dificultad:

D.1: “Barrera para la apropiación de un aprendizaje”

D.2: “El grado de un ejercicio dependiendo la complejidad en el desarrollo de la respuesta”

D.3: “La complejidad de los ejercicios a medida que se va avanzando en la unidad”

D.4: “Concepción de algo erróneo o equivoco que adopta un estudiante y lo confunde cuando aprende un nuevo conocimiento similar”

b) Obstáculo:

D.1: “Conceptos que presentan error para ciertas temáticas y que son validas en otras”

D.2: “Cuando en un ejercicio planteado los alumnos encuentran datos no relacionados con el tema o problema”

D.3: “Definiciones matemáticas enredadas que hacen que los estudiantes se equivoquen”

D.4: “Falencias de algún concepto matemático que impide resolver los ejercicios”

c) Error:

D.1: “Noción incorrecta de un objeto matemático que es difícil modificar”

D.2: “El alumno no puede desarrollar y/o resolver una actividad a través de un planteamiento inadecuado”

D.3: “Cuando los estudiantes responden mal algún ejercicio en las evaluaciones”

D.4: “Es cuando un estudiante no comprende totalmente algún concepto y al enfrentarse a él, este trata de resolverlo pero solo con la parte que entendió, obteniendo malos resultados”

Conoceremos también las interpretaciones de los docentes con respecto al error en algebra, como lo aborda en sus clases y si le dan importancia a este fenómeno de sus estudiantes. De acuerdo a las preguntas del cuestionario se obtienen las siguientes respuestas:

a) ¿Cuál(es) cree usted que es (son) el error que se ha producido con mayor frecuencia en el eje de algebra de primer año medio durante su experiencia como docente?

D.1: “Reducción de Términos semejantes”.

D.2: “Adición Algebraica y fracciones algebraicas”.

D.3: “Que sumen todas las expresiones incluyendo las que no poseen factor literal”.

D.4: “La aritmética de mezclar las propiedades de números enteros en la resolución de ejercicios de operaciones combinadas en algebra”.

b) ¿Conoce las posibles causas de este error? ¿De ser así cómo las ha abordado en experiencias posteriores con sus estudiantes?

D.1: El no reconocer lo que implica el factor literal dentro de un término algebraico.
A través de la ejercitación de actividades que impliquen valoración de expresiones.

D.2: Presentando los errores como ejemplos.

D.3: Haciendo que corrijan sus pruebas y marquen las respuestas que eran correctas en las que ellos se equivocaron.

D.4: Las causas son porque los estudiantes no aprendieron a cabalidad en años anteriores las propiedades de números enteros, por lo tanto cuando tienen que aplicarlo se confunden.
En ocasiones les muestro un ejemplo para ver si todos entienden o les repaso los contenidos.

c) ¿Cree usted que es importante analizar los errores cometidos por los estudiantes en el eje de álgebra de primer año medio? ¿Por qué?

D.1: “Por supuesto, ya que es la base para las actividades posteriores.”

D.2: “Es necesario conocer la epistemología del error para ver estrategias de sobrellevar, existen numerosos estudios de la ruptura de la aritmética al algebra por ende son fenómenos que deben hacernos ruido”

D.3: “Claro que es importante analizar los errores, pero lamentablemente el responder a tiempo a todo lo que el colegio y el sistema exige, no queda espacio para darle un análisis más profundo y poder así evitarlo más adelante”

D.4: “Creo que los errores son parte de la vida cotidiana y no solo de matemáticas, la diferencia es que si nosotros le damos las herramientas necesarias a nuestros estudiantes ellos podrán superar ese error.”

4.2.1.1 Análisis de dificultad, obstáculo y error según las profesoras de Matemática

Podemos ver en las respuestas de las docentes que D.1 y D.4 se refieren a la “dificultad” en relación a procesos de aprendizaje, a limitaciones o barreras que impiden el aprendizaje significativo del estudiante, mientras que D.2 y D.3 relacionan la “dificultad” específicamente con el grado de complejidad de los ejercicios, o mas bien al nivel de dificultad de los ejercicios, es decir relacionan la palabra “dificultad” directamente con la resolución de ejercicios propuestos en cada unidad.

Cuando se refieren a “obstáculo” solo las docentes D.3 y D.4 lo relacionan a los ejercicios en cuanto a equivocaciones e impedimentos conceptuales que limitan al estudiante para llegar al resultado correcto de algún ejercicio, sin embargo D.2 lo interpreta como un error en el enunciado referidos a distractores que no tienen relación con el desarrollo del ejercicio en si pero que los estudiantes se confunden y se equivocan. Y por último el docente D.1 quien considera un obstáculo la mezcla de conceptos entre una unidad y otra, haciendo que el estudiante responda de manera incorrecta.

Al preguntarles por su concepción en relación a la palabra “error” las docentes D.3 y D.4 lo llevan directamente al reflejo de los resultados incorrectos en determinados ejercicios, sin embargo D.3 solo lo identifica en las evaluaciones a diferencia de D.4 que lo generaliza para cada vez que el estudiante no comprende todo el contenido y al resolver sólo utiliza parte de lo que comprendió, obteniendo así respuestas incorrectas. Las docentes D.1 y D.2 difieren de las otras dos docentes señalando que el error tiene relación con una noción incorrecta que adopta el estudiante y que le cuesta mucho modificarla, y también la relación del error referido al mal planteamiento de una actividad o ejercicio lo que conlleva al estudiante a equivocarse.

4.2.1.2 Comparación entre la percepción del error de los docentes y las definiciones de Socas

Antes de comenzar el análisis debemos tener en cuenta que las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores (Socas, 1997).

De esta manera y aceptando que la naturaleza de las dificultades provienen de varias causas, nos encontramos con la sorpresa de que los docentes que participaron del cuestionario tienen percepciones muy similares a las que señala Socas con respecto a "dificultad" ya que dos de ellos D.2 y D.3 tienen relación con "Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos", mientras que D.1 y D.4 se relacionan con "Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos".

Los obstáculos en el margen educativo, específicamente en Socas (1997), las docentes D.3 y D.4 lo relacionan con "obstáculos de origen didáctico", donde tiene mayor participación el concepto matemático como objeto y su comprensión a la hora de resolver ejercicios, mientras que D.1 y D.2 se relacionan con los "obstáculos de origen epistemológico", donde se generan limitación en la apropiación de conceptos y su aplicación.

Por último, en relación al error tomaremos una cita de Socas (1997) quien señala que el error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste. Y, en este caso, los docentes que más se acercan a esta definición son D.2 y D.4 ya que relacionan el error como parte del proceso de enseñanza-aprendizaje a diferencia de los docentes D.1 y D.3 quienes definen al error más como equivocaciones casuales en las evaluaciones o de comprensión.

4.2.1.3 Relación de la percepción del error de los docentes y los objetivos de los Planes y Programas del MINEDUC

El Ministerio de Educación ofrece herramientas para desarrollar las clases, sin embargo existen ciertas incoherencias o poca relevancia en su construcción con respecto los objetivos de cada unidad, y así mismo tampoco existen entidades que evalúen o certifiquen que estos objetivos planteados en los Planes y Programas que se utilizan para que las planificaciones se cumplan.

Al observar las respuestas de los docentes de Matemáticas con respecto al trabajo de identificar, trabajar, y ver la utilidad del error en los procesos de enseñanza-aprendizaje de sus propios estudiantes, estos sí son capaces de identificarlos ya sea a través de las mismas evaluaciones o de la observación durante las clases y todos coinciden en que la mayor cantidad de errores está presente en relación a la reducción de expresiones algebraicas, sin embargo al momento de preguntar por sus causas dos de ellos coinciden en el no reconocimiento de conceptos y propiedades empleados y necesarios para resolver ejercicios de expresiones algebraicas, mientras que otros no dejan explícitas las causas de estos errores pero si el cómo abordarlos, esto es un poco contradictorio, entonces podríamos señalar que existen docentes que trabajan el error pero de manera general sin importar sus causas anteriores o particulares de cada estudiante.

En relación, al análisis de los errores de algebra los profesores concuerdan en que si son parte importante de los procesos educativos, sin embargo entre las respuestas, a pesar de su importancia que se le da, sólo una de las profesoras responde algo en coherencia a los resultados obtenidos en los reactivos señalando que frente a la gran cantidad de peticiones por parte del establecimiento y el Sistema Educacional se dejan de lado las respuestas equivocas de los estudiantes.

Considerando los Planes y Programas cuando se refieren a ¿Cómo promover el aprendizaje a través de la evaluación? En las orientaciones para evaluar se señala que retroalimentar a los alumnos sobre sus fortalezas y debilidades. Compartir esta información con los estudiantes permite orientarlos acerca de los pasos que deben seguir para avanzar. También da la posibilidad de desarrollar procesos metacognitivos y reflexivos destinados a favorecer sus propios aprendizajes; a su vez, esto facilita involucrarse y comprometerse con ellos (MINEDUC, 2011). Como se muestra anteriormente no se refieren al error como tal sino que lo tratan como una debilidad expresada en las evaluaciones.

En las Orientaciones didácticas ofrecidas en los Planes y Programas de Estudio se refiere al uso del error:

> “Usar adecuadamente el error ayuda a crear un ambiente de busqueda y accion. Un educador puede aprovechar la equivocación para inducir aprendizajes especialmente significativos, si lo hace de manera constructiva. Se debe considerar el error como un elemento concreto para trabajar la diversidad en clases y permitir que todos los alumnos alcancen los aprendizajes propuestos”. (MINEDUC, Orientaciones didácticas, 2011, p. 26)

Como se puede observar en primera instancia se refiere al uso óptimo del error dejando implícitamente expresada la importancia de utilizarlo dentro del aprendizaje significativo hacia los estudiantes a través de su involucración entre sus respuestas y la tarea docente. Luego, considera el error en referencia a la diversidad de internalización correcta de un conocimiento refiriéndose a que cada estudiante responde de distinta manera al desarrollo de los ejercicios y así mismo el objetivo propuesto seria que todos alcancen los aprendizajes propuestos en clases.

También se observa en el análisis anterior la intencionalidad de crear tanto aprendizajes significativos con el error como utilizarlo en el proceso de toda enseñanza de los estudiantes, está presente por parte del Ministerio de Educación de Chile.

4.3 Reactivo de Reducción y Multiplicación de expresiones algebraicas a estudiantes de primer año medio

De acuerdo al reactivo aplicado a los estudiantes de primer año medio, podemos destacar entre sus respuestas incorrectas los siguientes errores cometidos en cada uno de los ejercicios:

ITEM I: Reducción de términos semejantes		
Ejercicio propuesto	Respuesta correcta	Errores
A. $2x + 2 =$	$2x + 2$	• $4x$ • $3x$

		$2x$ $4 = x$ $2 \cdot (x + 1)$
B. $4 + 7b - 7b =$	4	$4b$ $4 + b$ $8b + 1b = 1b$ $4x + 14b^2$ b $0b + 4$
C. $-(5y + 1) + 2y =$	$-3y - 1$	$-3y + 1$ $3y - 1$ $-4y$ $-10y^2 + 2y$ $4y^2$ $6y$ $2y$ $-8y$
D. $-2x^2y + 4xy^2 =$	$-2x^2y + 4xy^2$	$2x^2y^2$ $2x^3y^3$ $2xy$ $-2x^3y^3$ $6x^3y^3$ $2xy \cdot (x + 2y)$ $-2xy$ $8x^3y^3$
E. $3a - 3b - 3a + 3b =$	0	$6a + 6b$ $0a + 0b$ $a^2 - b^2$ $6a = 6b$

ITEM II: Multiplicación de expresiones algebraicas		
Ejercicio propuesto	Respuesta correcta	Errores
A. $(2x)^2 \cdot 3x =$	$12x^3$	• $12x$ • $12x^2$ • $24x$ • $4x^2 \bullet 3x$
B. $k \cdot (r+t) =$	$kr + kt$	• $k \bullet rt$ • $kr + t$ • kr • krt
C. $(2x+2y)^2 =$	$4x^2 + 8xy + 4y^2$	• $4x^2 + 4y^2$ • $4x + 4y$ • $4x + 8xy + 4y$ • $2x^2 + 8xy + 2y^2$ • $8xy$ • $2x^2 + 2y^2$ • $4x^2 + y^2$ • $4xy^2$
D. $3a^2d \cdot 4d^4a =$	$12a^3d^5$	• $12a^8 4da$ • $7a^3d^5$ • $7d^6a$ • $12a^3d^3$
E. $(3pq - v^2x)^2 =$	$9p^2q^2 - 6pqv^2x + v^4x^2$	• $9p^2q^2 - v^4x^2$ • $3pq^2 - v^4x^2$ • $6p^2q^2 - v^3x^2$ • $9pq - 6pqv^2x + v^4x$ • $6p^2q^2 - v^2x^2$

		• $9pq - v^4x^2$ • $9pq^2 - v^4x^2$ • $9p^2q^2 - 6pqv^2x - v^4x^2$

4.4 Clasificación de los errores más frecuentes del reactivo

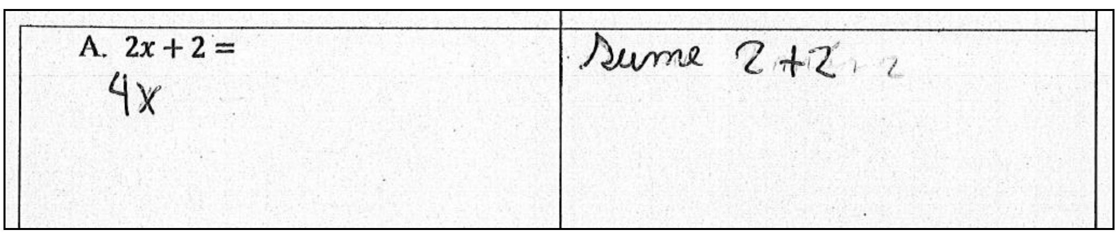
El análisis corresponde a los errores más frecuentes que cometieron los estudiantes de primer año medio en el desarrollo del reactivo. Se debe destacar que en este apartado se analizarán las respuestas en general de los estudiantes, es decir, el ejercicio errado que se muestra en las imágenes a continuación son un ejemplo de lo que los estudiantes desarrollaron de similar forma.

4.4.1 Ítem I: Reducción de términos semejantes

Ejercicio A)

$$\boxed{2x + 2 =}$$

Error:



A. $2x + 2 =$ $4x$	Sume 2+2

$4x$	"Sume 2+2"

De un total de 87 repuestas 28 fueron incorrectas y este error se repitió 22 veces siendo el más frecuente.

A través de la imagen se puede visualizar que el estudiante no reconoció términos semejantes y por esto sumó el número con el coeficiente numérico del monomio. De acuerdo a la clasificación que hace Carrillo de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al momento de aprender matemáticas, se puede considerar que este error cometido corresponde a una dificultad relacionada con la propia naturaleza de la matemática, ya que la naturaleza precisa, exacta y sin ambigüedades genera que los estudiantes cometan errores. De acuerdo a esta dificultad es posible determinar que este error se relaciona con la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos, ya que los aprendizajes matemáticos constituyen una cadena en la que cada conocimiento va enlazado con los anteriores.

Con respecto al obstáculo presente en la respuesta del estudiante y según lo que expresa D`Tall en Socas (1997) corresponde a un obstáculo cognitivo específicamente basado en la secuencia de un tema, ya que el estudiante no se familiarizo con las propiedades de los numero enteros para la posterior ampliación al algebra.

Precisando en el análisis del error y según Socas este corresponde a la no aceptación de la falta de clausura por parte del estudiante, ya que necesita cerrar la expresión donde Socas hace referencia a este tipo de error a través de lo siguiente x+7 donde el estudiante necesita llegar a un solo resultado, asumiendo que la expresión anterior es incompleta. Es por esto que el estudiante intenta resolver de alguna forma el ejercicio, no aceptando que el resultado correcto es el mismo del enunciado. Por otra parte el planteamiento del ejercicio describe a la vez la operación de sumar y el resultado, lo que corresponde al denominado “proceso-producto”.

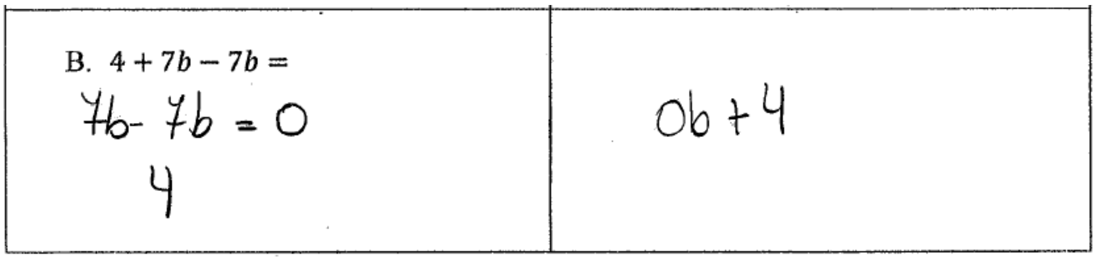
Ejercicio B)

$$\boxed{4 + 7b - 7b =}$$

Errores:

B. $4 + 7b - 7b =$ $4 + 7b - 7b =$ $4 + b = 4b$	$4 + 7b - 7b =$ $4 + b = 4b$

$4 + 7b - 7b =$ $4 + b = 4b$	$4 + 7b - 7b =$ $4 + b = 4b$



$7b - 7b = 0$ 4	$0b + 4$

De un total 87 repuestas, 17 fueron incorrectas el primer error se repitió 7 veces seguido de una reiteración de 4 veces.

A través de las imágenes se puede visualizar que los estudiantes operaron solo coeficientes numéricos $7b - 7b = b$ o $7b - 7b = 0b$ y además no reconocen términos semejante. El análisis específico a continuación hace alusión a ambos errores evidenciados.

De acuerdo a la clasificación que hace Carrillo de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al momento de aprender matemáticas, se puede considerar que este error cometido corresponde a una dificultad relacionada con la propia naturaleza de la matemática, ya que la naturaleza precisa, exacta y sin ambigüedades genera que los estudiantes cometan errores. De acuerdo a esta dificultad es posible determinar que este error se relaciona con la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos, ya que los aprendizajes matemáticos constituyen una cadena en la que cada conocimiento va enlazado con los anteriores.

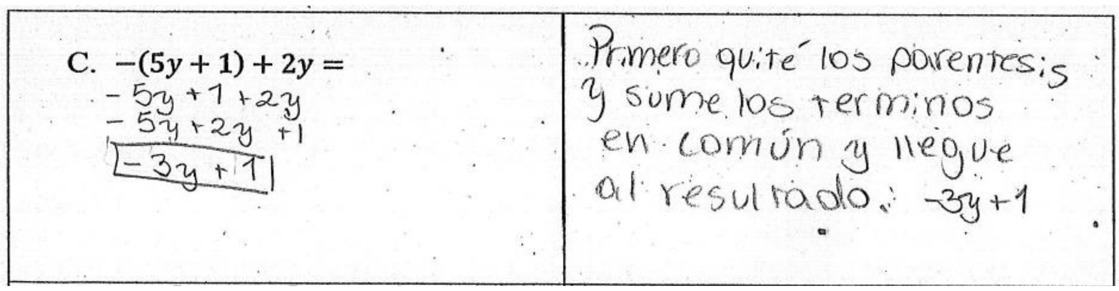
Con respecto al obstáculo presente en la respuesta del estudiante y según lo que expresa D`Tall en Socas (1997) corresponde a un obstáculo cognitivo específicamente basado en la secuencia de un tema, ya que el estudiante no se familiarizo con las propiedades de los numero enteros para la posterior ampliación al algebra.

Precisando en el análisis del error y según Socas este corresponde a un error que tiene su origen en la aritmética. Ya que el significado de los signos usados tanto en la aritmética como en el álgebra es el mismo, por lo tanto, el álgebra se puede considerar como la aritmética generalizada.

Ejercicio C)

$$\boxed{-(5y+1)+2y=}$$

Error 1:



C. $-(5y+1)+2y=$ $-5y+1+2y$ $-5y+2y+1$ $\boxed{-3y+1}$	Primero quite los parentesis y sume los terminos en común y llegue al resultado: $-3y+1$

$-5y\ +1\ +2y$ $-5y+2y+1$ $-3y+1$	"Primero quité los paréntesis y sume los términos en común y llegue al resultado $-3y+\ 1$"

De un total de 87 respuestas, 47 fueron incorrectas y este error se repitió 10 veces.

A partir de la resolución se puede observar que el estudiante no toma en consideración los elementos dentro del paréntesis, además no aplica de forma correcta la propiedad distributivita. No existen mayores errores en la resolución de este ejercicio.

Según la clasificación que hace Socas, este error corresponde al mal uso de la propiedad distributiva, los cuales tienen su origen en la aritmética, el mismo se puede apreciar según Socas en 3·(4·5)=3·4·3·5

Error 2:

C. $-(5y+1)+2y = 3y - 1$	$-5y - 1 + 2y$ $3y - 1$

$3y - 1$	$-5y - 1 + 2y$ $3y - 1$

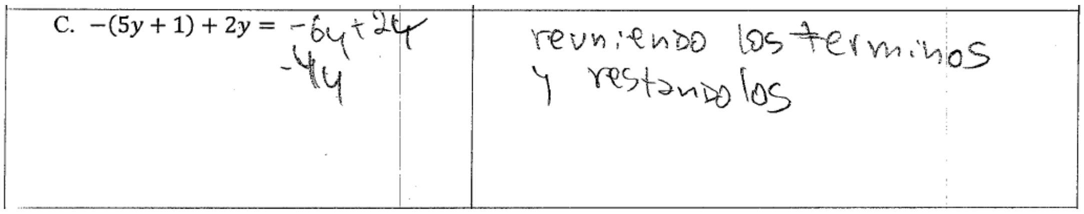
De un total de 87 respuestas, 47 fueron incorrectas y este error se repitió 5 veces.

Los estudiantes en este ejercicio aplicaron de manera correcta la propiedad distributiva y el reconocimiento de cuando los términos son semejantes, pero al momento de reducir estos términos, fallan en la operatoria de números enteros correspondiente a la aritmética trasladada al algebra. Por lo tanto la dificultad presente en este ejercicio por parte del estudiante es la referida a la propia naturaleza de la matemática, específicamente asociada a la estructura jerárquica.

Con respecto al obstáculo presente en la respuesta del estudiante y según lo que expresa D`Tall en Socas (1997) corresponde a un obstáculo cognitivo específicamente basado en la secuencia de un tema, ya que el estudiante no se familiarizo con las propiedades de los numero enteros para la posterior ampliación al algebra.

Por lo tanto y según Socas este error se encierra en los que tienen su origen en la aritmética.

Error 3:



C. $-(5y+1)+2y = -6y+2y$ $-4y$	reuniendo los terminos y restandolos

$-6y+2y$ $-4y$	“reuniendo los términos y restándolos”

De un total 87 repuestas, 47 fueron incorrectas y el error se repitió 4 veces.

En esta resolución se puede observar que el estudiante no reconoce términos semejantes, por lo tanto aplica una reducción incorrecta entre un monomio y un número.

De acuerdo a lo estudiado este tipo de error es posible que nazca por una dificultad nombrada por Socas como “Dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos”. El estudiante se ve confundido cuando en matemáticas aparecen ciertos elementos que no están en su diario vivir, produciéndose así una complejidad en la materia. Los estudiantes ocupan términos matemáticos en matemáticas, siendo esto una dificultad pues no existen relaciones que permita al estudiante tomar una idea de lo que se está tratando.

Error 4:

C. $-(5y+1)+2y =$	$-5 \cdot 2 \cdot y \cdot y + 2 \cdot 1 \cdot y =$ $-10y^2 + 2y$ Multiplique sume la letras.

	$-5 \cdot 2 \cdot y \cdot y + 2 \cdot 1 \cdot y =$ $-10y^2 + 2y$ “Multiplique, Sume las letras”

De un total 87 repuestas, 47 fueron incorrectas y el error se repitió 3 veces.

A partir de la resolución de este ejercicio, por parte del estudiante, se observa que el estudiante traslada la propiedad distributiva de la multiplicación a la adición, por lo mismo multiplica 2y por cada elemento que está dentro del paréntesis, omitiendo como primer proceso la distribución que hay del signo negativo (-) con respecto a los elementos que están dentro del paréntesis.

Según Socas este error corresponde a un error de procedimiento, más específicamente a un error relativo al mal uso de la propiedad distributiva, particularmente a la extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación con relación a la adición.

Error 5:

C. $-(5y+1)+2y =$ $(-5y+1)+2y$ $-6y+2y$ $4y^2$	Por el menos delante de el parentesis cambie el signo por negativo y luego reste $6y-2y$ me dio $4y^2$

$(-5y+1)+2y$ $-6y \ +3$ $4y^2$	“”Por el menos delante del paréntesis cambie el signo por negativo y luego reste 6y -2y me dio $4y^2$”

De un total 87 repuestas, 47 fueron incorrectas y el error se repitió 3 veces.

A partir de este ejercicio, se puede observar que el estudiante no reconoce términos semejante, por lo tanto, agrupa “5y” con “1” y luego distribuye de acuerdo al signo negativo (-) fuera del paréntesis, además el estudiante no resuelve correctamente la operatoria de números enteros.

Con respecto a lo que menciona Socas refiriéndose a Brousseau el obstáculo presente es de origen epistemológico ya que esta relacionado con el propio concepto matemático.

Este error cae en dos tipos de clasificación, en la de un error con origen en la aritmética, puesto que se nota una aplicación incorrecta en la resolución de números enteros y también al no comprender la idea del concepto matemático “términos semejante”, el estudiante cae en la dificultad que Socas nombra como “Dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos”. El estudiante se ve confundido cuando en matemáticas aparecen ciertos elementos que no están en su diario vivir, produciéndose así una complejidad en la materia. Los estudiantes ocupan términos matemáticos en matemáticas, siendo esto una dificultad pues no existen relaciones que permita al estudiante tomar una idea de lo que se está tratando.

Ejercicio D)

$$\boxed{-2x^2y + 4xy^2 =}$$

Error 1:

D. $-2x^2y + 4xy^2$ $2x^3y^3$	se suma los números y se suman los exponentes al ser iguales.

$2x^3y^3$	“Se suma los números y se suman los exponentes al ser iguales”

De un total de 87 repuestas 37 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 6 veces.

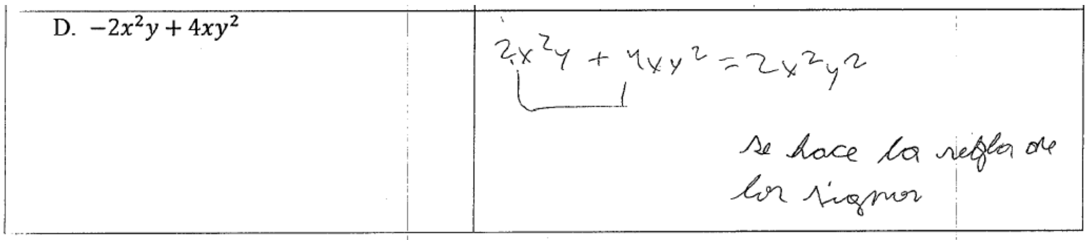
A partir de la resolución del ejercicio se puede decir que lo estudiantes no reconocen términos semejantes, restan los coeficientes numéricos y emplean la propiedad de multiplicación de potencia de igual base distinto exponente.

De acuerdo a la clasificación que hace Carrillo de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al momento de aprender matemáticas, se puede considerar que este error cometido corresponde a una dificultad relacionada con la propia naturaleza de la matemática, ya que la naturaleza precisa, exacta y sin ambigüedades genera que los estudiantes cometan errores. De acuerdo a esta dificultad es posible determinar que este error se relaciona con la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos, ya que los aprendizajes matemáticos constituyen una cadena en la que cada conocimiento va enlazado con los anteriores.

Con respecto al obstáculo presente en la respuesta del estudiante y según lo que expresa D`Tall en Socas (1997) corresponde a un obstáculo cognitivo específicamente basado en la secuencia de un tema, ya que el estudiante no se familiarizo con las propiedades de los numero enteros para la posterior ampliación al algebra.

Precisando en el análisis del error y según Socas este corresponde a la no aceptación de la falta de clausura por parte del estudiante, ya que necesita cerrar la expresión. Es por esto que el estudiante intenta resolver de alguna forma el ejercicio, no aceptando que el resultado correcto es el mismo del enunciado. Por otra parte el planteamiento del ejercicio describe a la vez la operación de sumar y el resultado, lo que corresponde al denominado “proceso- producto”.

Error 2:



D. $-2x^2y + 4xy^2$	$2x^2y + 4xy^2 = 2x^2y^2$ se hace la regla de los signos

	$\underbrace{2x^2y \;+\; 4xy^2} = 2x^2y^2$ “Se hace la regla de los signos”

De un total de 87 repuestas 37 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 4 veces.

El estudiante no reconoce términos semejante y por lo mismo agrupa en un resultado los dos términos algebraicos. De acuerdo a la clasificación que hace Carrillo de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al momento de aprender matemáticas, se puede considerar que este error cometido corresponde a una dificultad relacionada con la propia naturaleza de la matemática, ya que la naturaleza precisa, exacta y sin ambigüedades genera que los estudiantes cometan errores. De acuerdo a esta dificultad es posible determinar que este error se relaciona con la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos, ya que los aprendizajes matemáticos constituyen una cadena en la que cada conocimiento va enlazado con los anteriores.

Con respecto al obstáculo presente en la respuesta del estudiante y según lo que expresa D`Tall en Socas (1997) corresponde a un obstáculo cognitivo específicamente basado en la secuencia de un tema, ya que el estudiante no se familiarizo con las propiedades de los numero enteros para la posterior ampliación al algebra.

Precisando en el análisis del error y según Socas este corresponde a la no aceptación de la falta de clausura por parte del estudiante, ya que necesita cerrar la expresión. Es por esto que el estudiante intenta resolver de alguna forma el ejercicio, no aceptando que el resultado correcto es el mismo del enunciado. Por otra parte el planteamiento del ejercicio describe a la vez la operación de sumar y el resultado, lo que corresponde al denominado “proceso- producto”.

Ejercicio E)

$$\boxed{3a - 3b - 3a + 3b =}$$

Error 1:

E. $3a - 3b - 3a + 3b$ 0a + 0b	0a + 0b

$0a + 0b$	$0a + 0b$

De un total de 87 repuestas 29 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 5 veces.

De acuerdo a lo observado en el ejercicio se describe que el estudiante reconoce términos semejantes, aplican la reducción de estos pero reconoce una expresión algebraica no como un todo, sino por sus partes, y por lo mismo llega a la idea de operar los coeficientes numéricos de cada termino y no opera en forma conjunta el coeficiente numérico y el factor literal.

Con respecto al obstáculo presente en la respuesta del estudiante y según lo que expresa D`Tall en Socas (1997) corresponde a un obstáculo cognitivo específicamente basado en la secuencia de un tema, ya que el estudiante no se familiarizo con las propiedades de los numero enteros para la posterior ampliación al algebra.

Este error tiene directa relación con la operatoria en aritmética, es por esto que según Socas este error se encierra en el error que tiene su origen en la aritmética.

Error 2:

E. $3a - 3b - 3a + 3b$	$3a - 3a - 3b + 3b$ $a^2 - b^2$	ordenar terminos iguales

	$3a\ - 3a\ - 3b + 3e$ $a^2 - b^2$ “Ordenar términos semejantes”

De un total de 87 repuestas 29 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 4 veces.

De acuerdo a lo establecido por el estudiante se observa la no integración de las partes de un término algebraico, operando desde sus particularidades, Coeficientes numéricos y factor literal por separado.

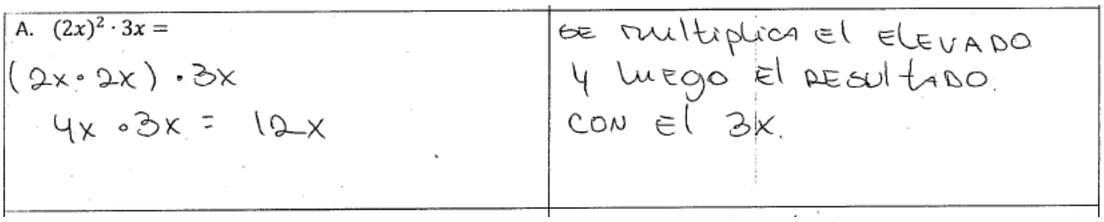
De acuerdo a la clasificación que hace Carrillo de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al momento de aprender matemáticas, se puede considerar que este error cometido corresponde a una dificultad relacionada con la propia naturaleza de la matemática, ya que la naturaleza precisa, exacta y sin ambigüedades genera que los estudiantes cometan errores. De acuerdo a esta dificultad es posible determinar que este error se relaciona con la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos, ya que los aprendizajes matemáticos constituyen una cadena en la que cada conocimiento va enlazado con los anteriores.

4.4.2 Ítem II: Multiplicación de expresiones algebraicas

Ejercicio A)

$$\boxed{(2x)^2 \cdot 3x =}$$

Error 1:



A. $(2x)^2 \cdot 3x =$

$(2x \cdot 2x) \cdot 3x$

$4x \cdot 3x = 12x$

se multiplica el elevado y luego el resultado con el 3x.

$(2x \cdot 2x) \cdot 3x$ $4x \cdot 3x = 12x$	“Se multiplica el elevado y luego el resultado con el 3x”

De un total de 87 repuestas 49 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 19 veces.

Al observar el desarrollo del estudiante se puede determinar que existe una comprensión básica del concepto de potencia, entendiendo este como “la multiplicación de la base tantas veces como lo indique el exponente”. El error se presenta cuando se multiplican los términos (2x · 2x) y se vuelve a repetir cuando multiplican (4x · 3x), la operación de multiplicación numérica es correcta, pero al multiplicar variables, estos no aplican la propiedad correspondiente a la multiplicación de potencias de igual base. Además de esto no se ve un trabajo con propiedades base para la resolución de este tipo de ejercicio como lo son la asociativa y conmutativa, entre otras.

Desde lo anterior se concluye que según Carrillo este error se puede relacionar con la dificultad asociada a la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos puesto que el estudiante no emplea la multiplicación de los factores literales.

Con respecto al obstáculo presente en la respuesta del estudiante y según lo que expresa D`Tall en Socas (1997) corresponde a un obstáculo cognitivo específicamente basado en la secuencia de un tema, ya que el estudiante no se familiarizó con las propiedades de los numero enteros para la posterior ampliación al algebra.

Teniendo en cuenta lo anterior se establece que según Socas este error tiene su origen en la aritmética.

Error 2:

A. $(2x)^2 \cdot 3x =$	$4x^2 . 3x = 12x^2$

	$4x^2 \cdot 3x = 12x^2$

De un total de 87 repuestas 49 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 10 veces.

De la observación de este ejercicio se puede determinar que los estudiantes no emplean la propiedad de multiplicación de igual base presentándose el error al multiplicar $4x^2 \cdot 3x$ cómo es posible ver, el resultado numérico es el correcto, pero no así el del factor literal. Existen dos posibilidades; la primera es que el estudiante visualiza que en el término $3x$ el exponente de este es cero, es decir $3x^0$. La segunda opción es que el estudiante solo mantenga el factor literal de mayor exponente.

Al producirse cualquiera de las dos opciones propuestas anteriormente presenciamos una dificultad que Socas nombra como "Dificultad asociada a los procesos matemáticos". Este tipo de dificultades se presentan debido a la naturaleza lógica de las matemáticas. Cuando no se demuestra algún concepto o idea se provoca en el estudiante un quiebre y este antes de usar la memoria usara su lógica provocando el error. También, Carrillo permite orientar este error hacia una dificultad de carácter lógico, eso referido a lo anterior.

Ejercicio B)

$$\boxed{k \cdot (r+t) =}$$

Error 1:

B. $k \cdot (r+t) =$ Krt	Uní Los terminos !!

krt	"Uní los términos"

De un total de 87 repuestas 23 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 7 veces.

De acuerdo a lo desarrollado por los estudiantes se observa el no manejo de la propiedad distributiva en este ejercicio provocando la "unión" de términos.

Error 2:

B. $k \cdot (r+t) =$ Kr + t kr + kt	mult. y sumo

$kr + t$	"Mult. Y sumo" "Multiplico y sumo"

De un total de 87 repuestas 23 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 3 veces.

En este ejercicio se puede notar, al igual que en el anterior, un problema en el manejo de la propiedad distributiva. En este caso solo se aplica la multiplicación de los términos más cercanos.

Desde ambas resoluciones mostradas se puede determinar que este tipo de errores son relativos al mal uso de la propiedad distributiva. Además es posible determinar que este tipo de errores es representación de la dificultad asociada al carácter lógico de la matemática, definida por Carrillo.

Ejercicio C)

$$\boxed{(2x + 2y)^2 =}$$

Error 1:

C. $(2x + 2y)^2 =$ $4x^2 + 4y^2$	elevo cada termino a 2 luego sumo terminos.

$4x^2 + 4y^2$	"Elevo cada termino a 2 luego sumo términos"

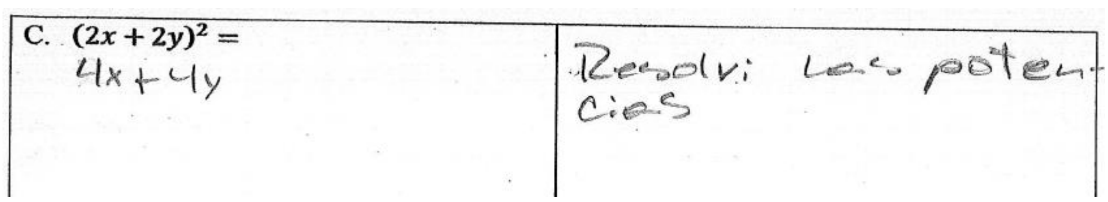
De un total de 87 repuestas 59 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 19 veces.

En el desarrollo de este ejercicio se puede notar que tal como lo menciona el estudiante "se eleva cada término al cuadrado". De acuerdo a esto se puede concluir que el estudiante extiende una propiedad multiplicativa de las potencias hacia la suma. Además es posible determinar que el estudiante no comprende el producto notable “cuadrado de binomio” y la resolución del mismo.

Con respecto a lo que menciona Socas refiriéndose a Brousseau el obstáculo presente es de origen epistemológico ya que está relacionado con el propio concepto matemático.

Contextualizando lo anterior, Socas propone este tipo de errores como “errores de procedimientos” donde la estructura en la que se relaciona el producto y la potencia se extiende fácilmente al caso de la suma de un modo inconsciente, asumido por los estudiantes como algo natural.

Error 2:



C. $(2x + 2y)^2 =$ $4x + 4y$	Resolvi las poten-cias

4x + 4y	“Resolví las potencias”

De un total de 87 repuestas 59 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 7 veces.

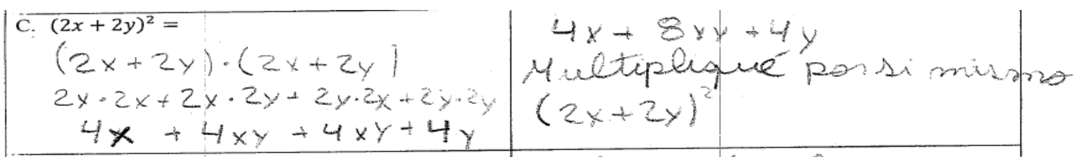
A partir de lo observado en la resolución de ejercicio se puede observar que se eleva cada término al cuadrado. De acuerdo a esto se puede concluir que el estudiante extiende una propiedad multiplicativa de las potencias hacia la suma.

Además es posible determinar que el estudiante no comprende el producto notable “cuadrado de binomio” y la resolución del mismo. Además la resolución de las potencias se ve solo en el coeficiente numérico.

Con respecto al obstáculo presente en la respuesta del estudiante y según lo que expresa D`Tall en Socas (1997) corresponde a un obstáculo cognitivo específicamente basado en la secuencia de un tema, ya que el estudiante no se familiarizo con las propiedades de los numero enteros para la posterior ampliación al algebra

Contextualizando lo anterior y en similitud con el error anterior, Socas propone este tipo de errores como “errores de procedimientos” donde la estructura en la que se relaciona el producto y la potencia se extiende fácilmente al caso de la suma de un modo inconsciente, asumido por los estudiantes como algo natural. Además se presenta una dificultad correspondiente a, según Carrillo, “dificultad relacionada con la estructura jerárquica” la cual menciona el enlace de los conocimientos anteriores con los nuevos, mostrándose esto en la no aplicación de la propiedad de potencia ($(ab)^2 = a^2 b^2$).

Error 3:



$(2x + 2y)(2x + 2y)$ $2x \cdot 2x + 2x \cdot 2y + 2y \cdot 2x + 2y \cdot 2y$ $4x + 4xy + 4xy + 4y$	$4x + 8xy + 4y$ “Multiplique por sí mismo” $(2x + 2y)^2$

De un total de 87 repuestas 59 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 5 veces.

En la representación de este ejercicio podemos observar un procedimiento de término a término en base a la potenciación del binomio propuesto. El error se presenta en la multiplicación de factores literales cuando el estudiante no utiliza la propiedad de multiplicación de potencias de igual base.

Desde lo anterior se concluye que según Carrillo este error se puede relacionar con la dificultad asociada a la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos puesto que el estudiante no emplea la multiplicación de los factores literales teniendo su origen propiamente tal en la aritmética según Socas.

Ejercicio D)

$$\boxed{3a^2d \cdot 4d^4a =}$$

En este ejercicio de un total de 87 respuestas 25 fueron incorrectas.

Los errores cometidos en este ejercicio se tornan demasiados dispersos en lo que a tipos de errores se refiere. Debido a esto los investigadores deciden no referirse a un error específico, sino que más bien generalizar y obtener conclusiones a partir de estos, lo que se detalla a continuación[2].

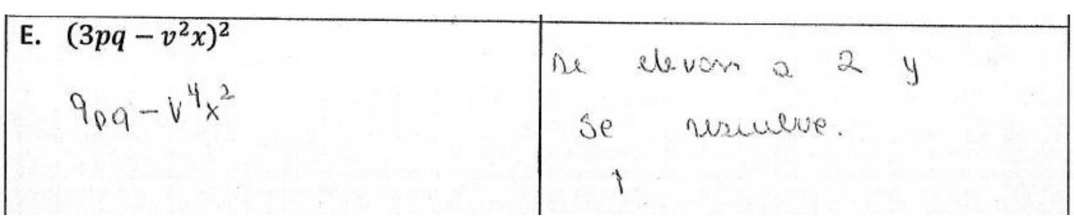
Los ejercicios propuestos por los estudiantes en este ejercicio presentan en su mayoría dificultades del orden de la aritmética, específicamente en el uso de potencias que conlleva a la dificultad propuesta por Carrilo como "Dificultad relacionada a la estructura jerárquica" la cual se refiere al enlace de conocimientos.

Con respecto al obstáculo presente en la respuesta del estudiante y según lo que expresa D`Tall en Socas (1997) corresponde a un obstáculo cognitivo específicamente basado en la secuencia de un tema, ya que el estudiante no se familiarizo con las propiedades de los numero enteros para la posterior ampliación al algebra.

Ejercicio E)

$$\boxed{(3pq - v^2x)^2 =}$$

Error 1:

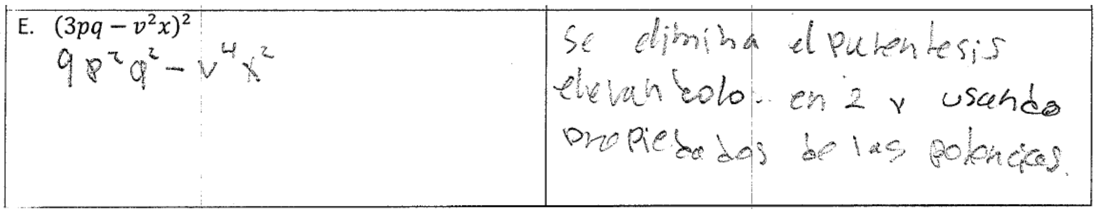


E. $(3pq - v^2x)^2$ $9pq - v^4x^2$	se elevan a 2 y se resuelve.

$9pq - v^4x^2$	"Se eleva a 2 y se resuelve"

[2] Ver ANEXO N°3, Tablas resumen de errores

De un total de 87 repuestas 68 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 10 veces.



E. $(3pq - v^2x)^2$ $9p^2q^2 - v^4x^2$	Se elimina el parentesis elevandolo en 2 y usando propiedades de las potencias.

$9p^2q^2 - v^4x^2$	“Se elimina el paréntesis elevándolo en 2 y usando propiedades de las potencias”

De un total de 87 repuestas 68 fueron incorrectas y este tipo de error se repitió 6 veces.

Desde lo presentado en el desarrollo del ejercicio se puede inferir que el estudiante, en ambos errores, no aplica la resolución de cuadrado de binomio que era lo que se esperaba. Además el estudiante eleva cada termino al exponente propuesto, extendiendo la propiedad de producto en potencias ($(ab)^2 = a^2 \cdot b^2$) a la resta. Si bien el estudiante conoce al propiedad no sabe dónde aplicarla, puesto que cuando debe resolver $(3pq)^2$ (segundo tipo de error) solamente es el coeficiente numérico el que se eleva a 2 pero no el factor literal.

Según Socas un error de procedimiento es lo que se presenta en este ejercicio en ambos tipos de errores, pues la estructura en la que se relaciona el producto y la potencia se extiende fácilmente al caso de la suma, en este caso resta de un modo inconsciente.

El segundo tipo de error, presentan una dificultades del orden de la aritmética, específicamente en el uso de potencias que conlleva a la dificultad propuesta por Carrilo como “Dificultad relacionada a la estructura jerárquica” la cual se refiere al enlace de conocimientos.

Con respecto al obstáculo presente en la respuesta del estudiante y según lo que expresa D`Tall en Socas (1997) corresponde a un obstáculo cognitivo específicamente basado en la secuencia de un tema, ya que el estudiante no se familiarizo con las propiedades de los numero enteros para la posterior ampliación al algebra.

Error 2:

Desde lo presentado en el desarrollo del ejercicio se puede inferir que el estudiante no aplica la resolución de cuadrado de binomio que era lo que se esperaba. Además el estudiante eleva cada termino al exponente propuesto, extendiendo la propiedad de producto en potencias ($(ab)^2 = a^2b^2$) a la resta. Si bien el estudiante conoce al propiedad no sabe dónde aplicarla, puesto que cuando debe resolver $(3pq)^2$ solamente es el coeficiente numérico el que se eleva a 2 pero no el factor literal.

Según Socas un error de procedimiento es lo que se presenta en este ejercicio, pues la estructura en la que se relaciona el producto y la potencia se extiende fácilmente al caso de la suma, en este caso resta de un modo inconsciente.

Según la clasificación de errores que hace Socas se muestran errores referidos a la ausencia de sentido, específicamente en errores de procedimientos donde la estructura en la que se relaciona el producto y la potencia se extiende fácilmente al caso de la suma de un modo inconsciente, asumido por los estudiantes como algo muy natural $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

4.5 Interpretación porcentual de los errores

Luego de recopilar la información del reactivo aplicado a los cursos de primer año medio, 2 del colegio San José de San Bernardo y 1 del colegio Saint Maurice´s de Cerrillos se obtuvieron los siguientes gráficos en relación a las respuestas incorrectas, más conocidas como errores.

4.5.1 Ítem I: Reducción de expresiones algebraicas.

a) $2x + 2 =$

De acuerdo al primer ejercicio propuesto, las respuestas incorrectas fueron 28 de 87, que corresponden al 32% de los estudiantes, entre sus representaciones erróneas se destaca el resultado: “4x”, el cual está relacionado con la no aceptación de la falta de clausura. La imagen 5 nos muestra el porcentaje correspondiente a los errores cometidos en el primer ejercicio:

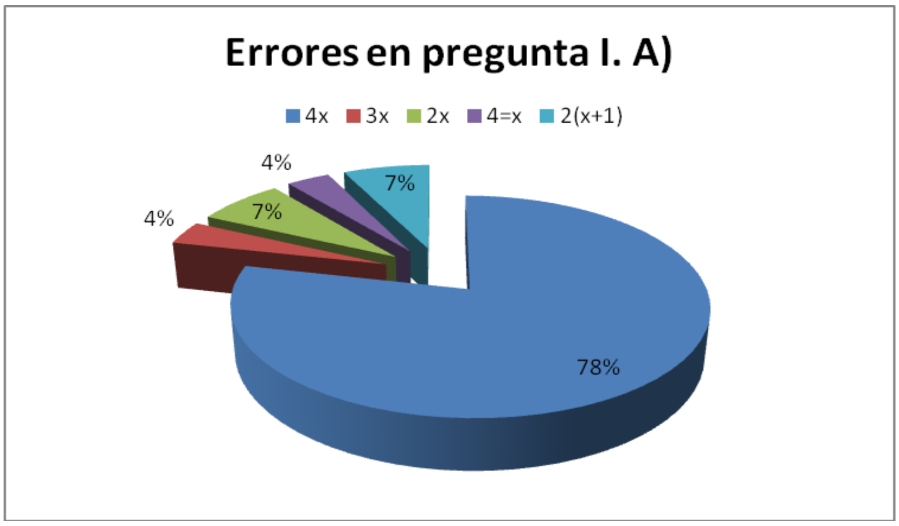


Imagen 5

b) $4 + 7b - 7b =$

En el segundo ejercicio propuesto, las respuestas incorrectas fueron 17 de 87, que corresponden al 20% de los estudiantes, entre sus representaciones erróneas se destaca el resultado: “4b”, el cual está relacionado con dificultad relacionada con la propia naturaleza de la matemática este error se relaciona con la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos. La imagen 6 nos muestra el porcentaje correspondiente a los errores cometidos en el segundo ejercicio:

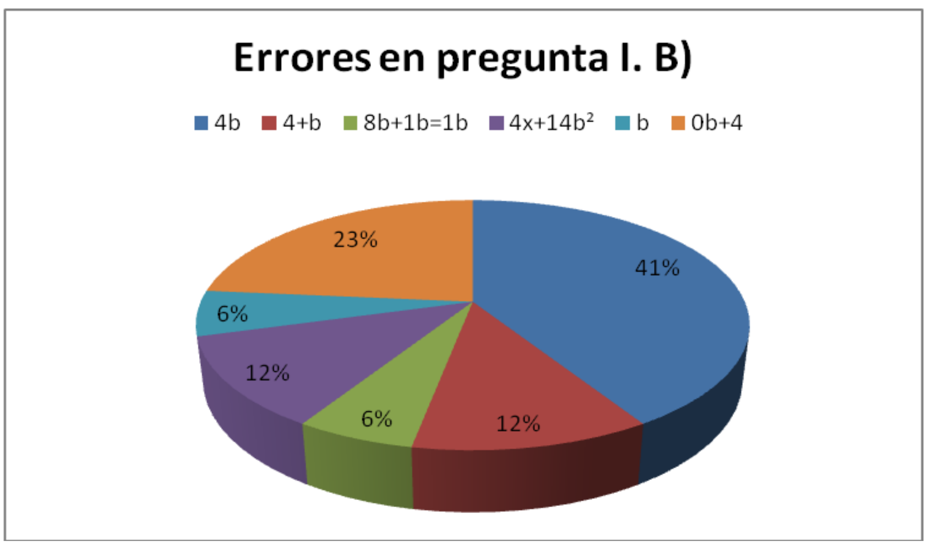


Imagen 6

c) $-(5y+1)+2y=$

Con respecto al tercer ejercicio propuesto, las respuestas incorrectas fueron 47 de 87, que corresponden al 54% de los estudiantes, entre sus representaciones erróneas se destaca el resultado: *"(-3y+1)", "(3y-1)", y "(-4y)",* siendo entre estos el 41% de los estudiantes con errores relacionados al mal uso de la propiedad distributiva, los cuales tienen su origen en la aritmética dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos. También consideramos la gran cantidad de estudiantes correspondientes a un 24% de quienes respondieron de forma incorrecta y que su resultado no fue justificado, estos han sido categorizados como "otras respuestas" los errores ahí cometidos son: "4y", "4xy", "7y", "7y+1", entre otros. La imagen 7 nos muestra el porcentaje correspondiente a los errores cometidos en el tercer ejercicio:

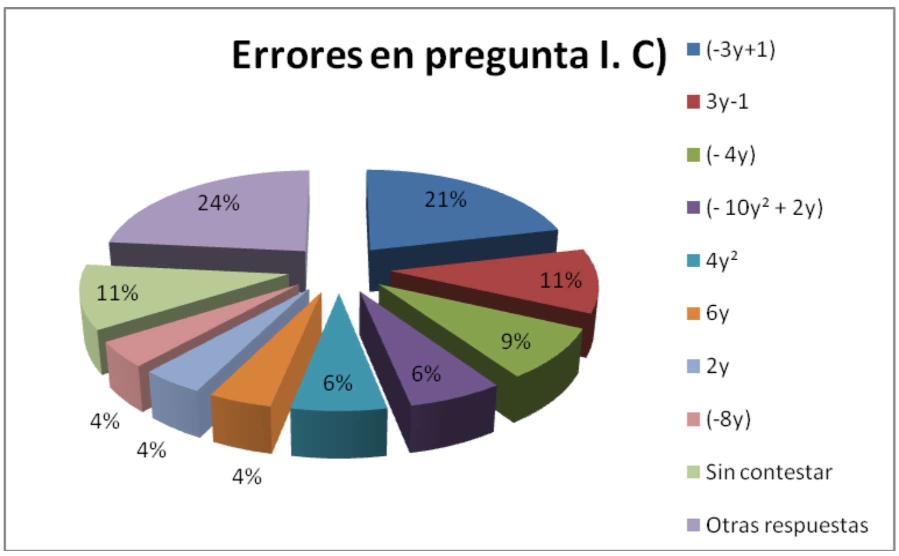


Imagen 7

d) $-2x^2y+4xy^2$

Con respecto al cuarto ejercicio propuesto, las respuestas incorrectas fueron 37 de 87, que corresponden al 43% de los estudiantes, entre sus representaciones erróneas se destaca el resultado*: "$2x^2y^2$", "$2x^3y^3$", y "2xy(x+2y)"*, siendo entre estos el 38% de los estudiantes con errores relacionados a dificultades relacionadas con la propia naturaleza de la matemática y a la no aceptación de la falta de clausura por parte del estudiante. También consideramos la gran cantidad de estudiantes correspondientes a un 24% de quienes no respondieron el ejercicio, estos han sido categorizados como "sin contestar". La imagen 8 nos muestra el porcentaje correspondiente a los errores cometidos en el cuarto ejercicio:

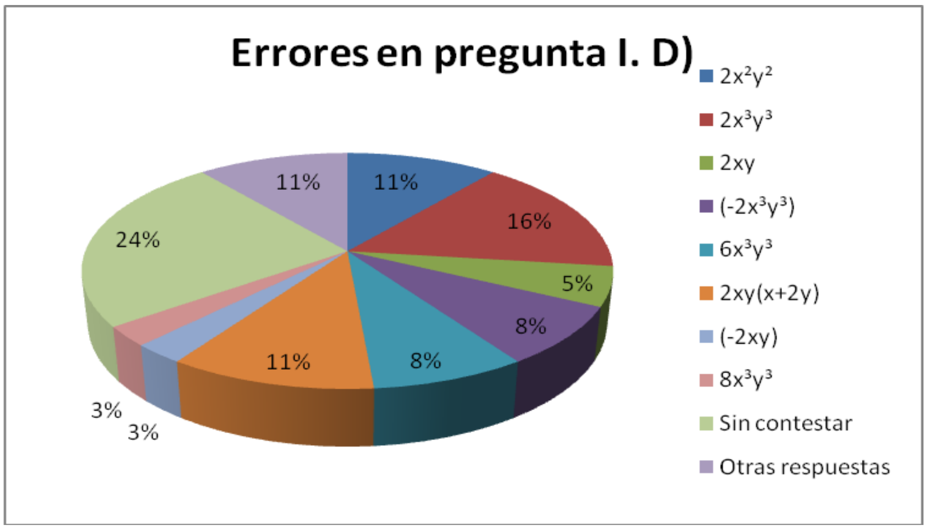


Imagen 8

e) $3a - 3b - 3a + 3b$

En relación al quinto ejercicio propuesto, las respuestas incorrectas fueron 29 de 87, que corresponden al 33% de los estudiantes, entre sus representaciones erróneas se destaca el resultado*: "0a + 0b" y "a² - b²",* siendo entre estos el 31% de los estudiantes con errores relacionados al se relaciona con la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos. También consideramos la gran cantidad de estudiantes correspondientes a un 31% de quienes llegaron a otros resultados pero sin justificación, han sido categorizados como "otros" y son: *"4b", "a+b", "a-2b",* entre otros. Además muchos estudiante no contestaron el ejercicio estos han sido categorizados como "sin contestar" correspondiente a un 28%. La imagen 9 nos muestra el porcentaje correspondiente a los errores cometidos en el quinto ejercicio:

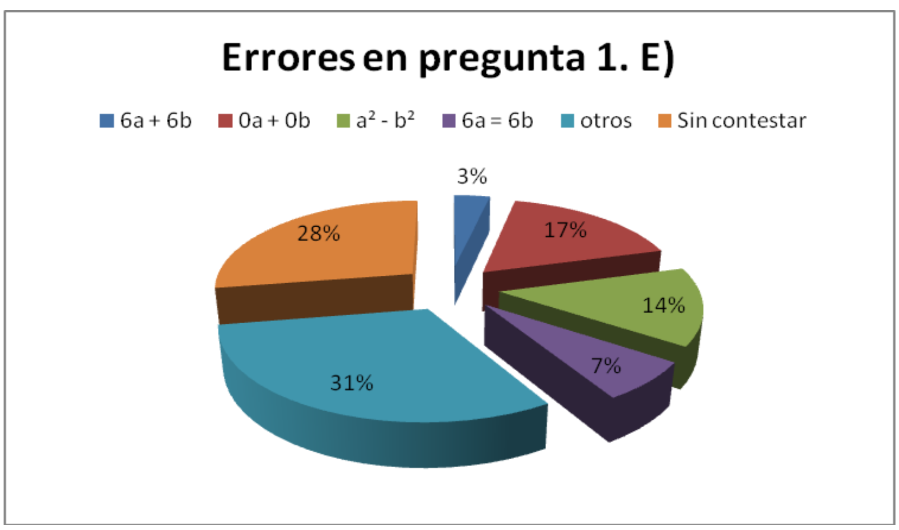


Imagen 9

4.5.2 Item II: Multiplicación de expresiones algebráicas

a) $(2x)^2 \cdot 3x =$

En relación al primer ejercicio propuesto, las respuestas incorrectas fueron 49 de 87, que corresponden al 56% de los estudiantes, entre sus representaciones erróneas se destaca el resultado*: "$12x^2$", "$12x$", y "$4x^2 \cdot 3x$"* siendo entre estos el 69% de los estudiantes con errores relacionados a la dificultad asociada a la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos. También consideramos la gran cantidad de estudiantes correspondientes a un 27% de quienes llegaron a otros resultados pero sin justificación, han sido categorizados como "otros" y son: "9x", "$36x^2$", "$7x^2$", "$6x^3$", "$2x^3$", entre otros. La imagen 10 nos muestra el porcentaje correspondiente a los errores cometidos en el quinto ejercicio:

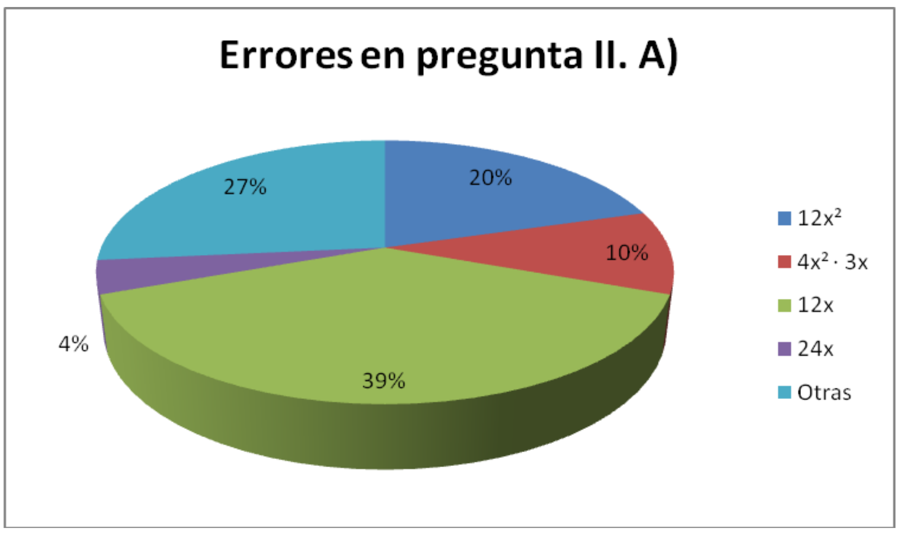


Imagen 10

b) $k \cdot (r + t) =$

Con respecto al segundo ejercicio propuesto, las respuestas incorrectas fueron 23 de 87, que corresponden al 26% de los estudiantes, entre sus representaciones erróneas se destaca el resultado*: "$k \cdot rt$", "$kr + t$" y "krt",* siendo entre estos el 57% de los estudiantes con errores relacionados al de la dificultad asociada al carácter lógico de la matemática. También consideramos la gran cantidad de estudiantes correspondientes a un 39% de quienes no respondieron el ejercicio, estos han sido categorizados como "sin contestar". La imagen 11 nos muestra el porcentaje correspondiente a los errores cometidos en el segundo ejercicio:

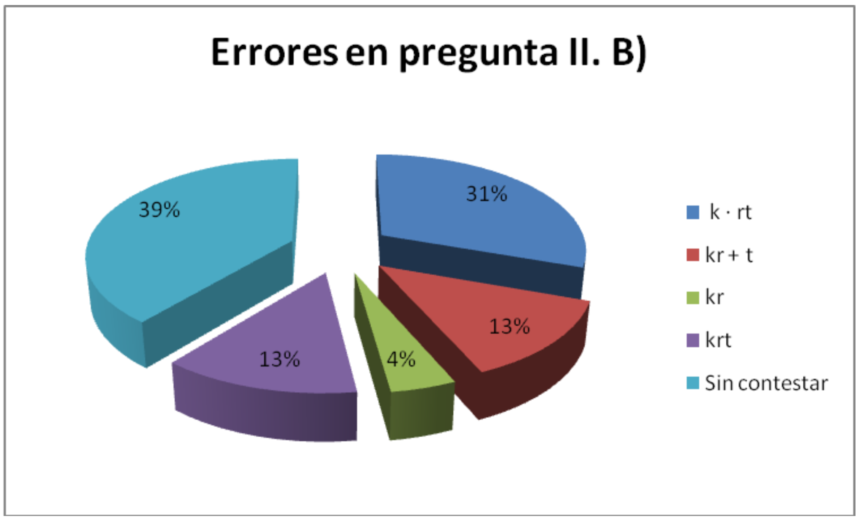


Imagen 11

c) $(2x + 2y)^2 =$

De acuerdo al tercer ejercicio propuesto, las respuestas incorrectas fueron 59 de 87, que corresponden al 68% de los estudiantes, entre sus representaciones erróneas se destaca el resultado: *"$4x^2+4y^2$", "$4x+4y$", "$4x+8xy+4y$", "$8xy$" y "$2x^2+2y^2$"* siendo entre estos el 67% de los estudiantes con errores relacionados a errores de procedimientos. También consideramos la gran cantidad de estudiantes correspondientes a un 20% de quienes llegaron a otros resultados pero sin justificación, han sido categorizados como "otros" y son: "4xy", "$4x^2y^2$", entre otros. La imagen 12 nos muestra el porcentaje correspondiente a los errores cometidos en el tercer ejercicio:

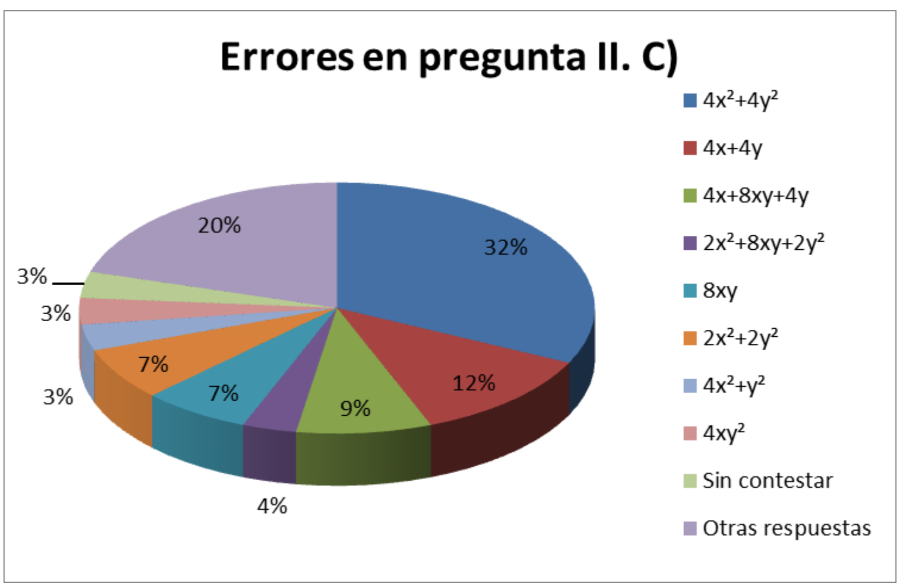


Imagen 12

d) $3a^2d \cdot 4d^4a$

En esta pregunta existen dos extremos del ejercicio ya que solo se equivocaron 25 estudiantes, de los cuales son mucho los estudiantes que no contestaron el ejercicio y ademas los que contestaron algo que no tiene ningún vínculo con lo solicitado. Dentro de las respuestas incorrectas fueron 25 de 87, que corresponden al 29% de los estudiantes, en este caso daremos importancia a las diversas respuestas incorrectas correspondientes a un 40% de quienes llegaron a otros resultados pero sin justificación, han sido categorizados como “otros” y son: “$7a^4$”, “$12da^6$”, entre otros. Además muchos estudiantes no contestaron el ejercicio estos han sido categorizados como “sin contestar” correspondiente a un 40%. La imagen 13 nos muestra el porcentaje correspondiente a los errores cometidos en el cuarto ejercicio:

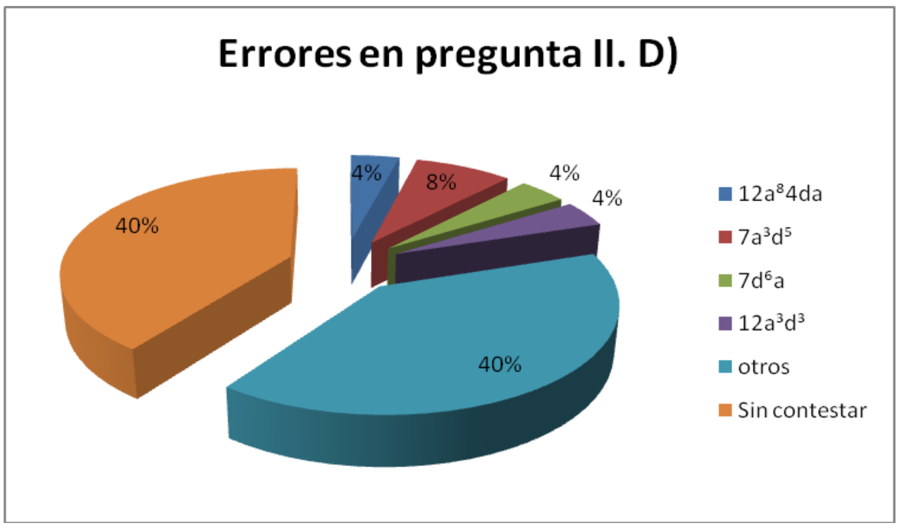


Imagen 13

e) $(3pq - v^2x)^2$

Al igual que en el ejercicio anterior se destaca la gran cantidad de errores y ejercicios sin resolver que forman parte del 59% de las respuestas incorrectas. En relación al resultado final 68 de 87 estudiantes obtienen una respuesta incorrecta que corresponde al 78% del total de los estudiantes evaluados, entre estas respustas se destacan: “$9p^2q^2$-v^4x^2” y “$9pq$-v^4x^2”. Ademas se consideran tambien las “otras respuestas” que generaron los estudiantes siendo: “$3v^4$”, “$12pq$-v^8”, “$9p^2q^2 + v^4x^2$”, entre otros. La imagen 14 nos muestra el porcentaje correspondiente a los errores cometidos en el cuarto ejercicio:

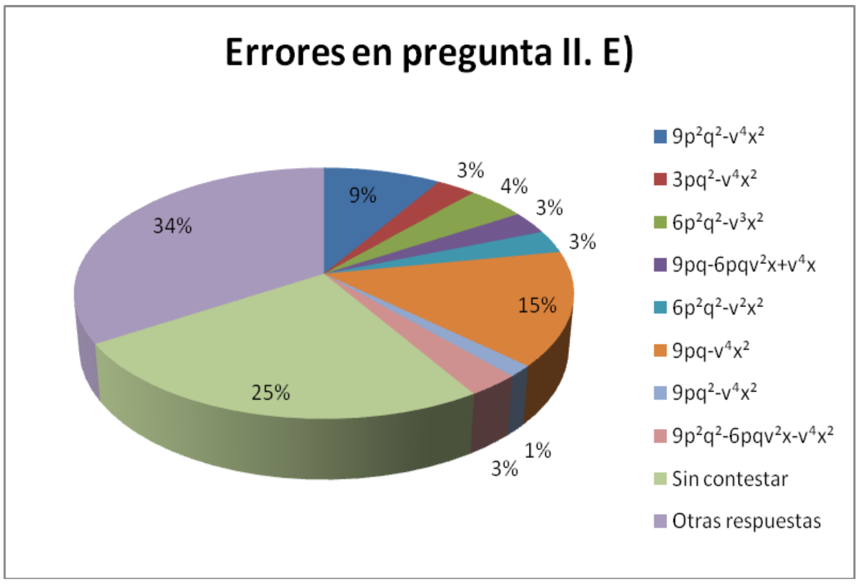

Errores en pregunta II. E)
9%
3%
4%
3%
3%
15%
1%
3%
25%
34%
9p²q²-v⁴x²
3pq²-v⁴x²
6p²q²-v³x²
9pq-6pqv²x+v⁴x
6p²q²-v²x²
9pq-v⁴x²
9pq²-v⁴x²
9p²q²-6pqv²x-v⁴x²
Sin contestar
Otras respuestas

Imagen 14

4.6 Categorización de errores más frecuentes del reactivo

Ejercicio	Error	Clasificación	Categoría
$2x + 2 =$	*4x*	Falta de clausura	Errores que tienen su origen en un obstáculo.
$4 + 7b - 7b =$	*4b*	Error que tiene su origen en la aritmetica	Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
$-(5y + 1) + 2y =$	*-3y + 1*	Relativo al mal uso de la propiedad distributiva.	Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
$-2x^2y + 4xy^2$	$2x^3y^3$	Falta de clausura	Errores que tienen su origen en un obstáculo.
$3a - 3b - 3a + 3b$	$0a + 0b$	Error relativo a la aritmética	Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
$(2x)^2 \cdot 3x =$	*12x*	Error relativo a la aritmética	Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
$k \cdot (r + t) =$	$k \cdot rt$	Relativo al mal uso de la propiedad distributiva	Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
$(2x + 2y)^2 =$	$4x^2+4y^2$	Errores de procedimiento	Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
$3a^2d \cdot 4d^4a$	*No existe error frecuente*	-	-
$(3pq - v^2x)^2$	$9pq\text{-}v^4x^2$	Errores de procedimiento	Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.

Capítulo V
“Conclusiones”

Conclusiones

El estudio del error se ha desarrollado desde 1917 hasta la fecha, abarcado desde distintas ideas y autores como por ejemplo Socas, Engler, Pochulu, entre otros con el objetivo de definir y categorizar estos errores y en algunos casos ofrecer sugerencias a cerca de los mismos.

Los errores cometidos por las personas son parte importante de la construcción de conocimiento, pues a partir de ellos es posible su análisis y así el descubrimiento de nuevos conocimientos.

Existen tres elementos importantes que ayudan a la comprensión y explicación de los errores que cometen los estudiantes de primer año medio en reducción y multiplicación de expresiones algebraicas, los cuales son: dificultad, obstáculo y error. Las dificultades se conectan y forman redes complejas que se refuerzan generando un obstáculo y este se aprecia de manera empírica a través del error.
Con respecto a las dificultades y a las clasificaciones enunciadas en el capítulo II, los estudiantes presentan en su mayoría dificultades asociadas con la propia naturaleza de la matemática, destacando la asociada a la estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos, ya que la naturaleza precisa, exacta y sin ambigüedades genera que los estudiantes cometan errores. Se puede visualizar este tipo de dificultad cuando los estudiantes no amplían las propiedades de números enteros en la resolución de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas.

El obstáculo es un elemento importante para entender y organizar los errores, porque este ya no se entiende como una ausencia de conocimiento, sino que es un conocimiento que en algún momento fue satisfactorio en un contexto determinado, pero que al momento de ampliarlo a otros nuevos contextos problemáticos no cumple con los requerimientos necesarios. Se puede visualizar que el obstáculo presente en este estudio corresponde al cognitivo, enunciado por D`Tall citado en Socas específicamente en “obstáculos basados en la secuencia de un tema”, ya que este obstáculo se presenta por la no familiarización con los conceptos matemáticos que tienen un grado de complejidad y no existe un orden en su aprendizaje, por ejemplo se genera un obstáculo en la mayoría de los estudiantes participantes de esta investigación cuando no se familiarizan de manera ordenada primero con las propiedades de números enteros y posteriormente con el álgebra.

Cuando se analiza la información entregada por los docentes de matemáticas en el cuestionario abierto se concreta el objetivo de “Comparar las percepciones que tienen los docentes que realizan las clases de Matemática, sobre los conceptos de dificultad, obstáculo y error, en relación a las definiciones de Socas y los Planes y Programas de Estudio.”, donde se evidenció que los docentes sí tienen una percepción de las definiciones de dificultad, obstáculo y error, pero a pesar de esto los estudiantes cometen errores, lo que queda evidenciado en el análisis del reactivo realizado por los estudiantes. Además varios de ellos coinciden en sus percepciones con las definiciones propuestas por Socas.

Al momento de sintetizar las respuestas de los estudiantes en las tablas de frecuencia, y enfocándose en las respuestas incorrectas de cada ejercicio del reactivo aplicado que posteriormente se analizaron a partir de lo expuesto en el marco teórico específicamente en relación a los tipos de dificultades, obstáculo y error, se concreta el objetivo de “Analizar los errores cometidos por estudiantes en el eje de álgebra en primer año medio específicamente en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas”, donde se revela que en general la mayoría de los estudiantes reproducen errores que tienen relación con un “Error en la aritmética” lo que conlleva directamente a posicionarlos en la categoría de “Errores que tienen su origen en ausencia de sentido” lo que implica que gran parte de los estudiantes han tenido un aprendizaje no significativo en la aritmética, por ejemplo en las propiedades de operaciones combinadas en número enteros y el trabajo con los signos.

Con respecto al error y de acuerdo al último objetivo que indica el “Clasificar los errores cometidos por estudiantes en el eje de álgebra en primer año medio específicamente en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas” y contestando a la pregunta de investigación “¿A cuáles categorías pertenecen los errores cometidos por estudiantes de primer año medio en el eje de álgebra específicamente en los contenidos de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas?”, podemos señalar que existen dos grandes categorías a las que pertenecen los errores cometidos por estudiantes de primer año medio en reducción y multiplicación de expresiones algebraicas: la primera de ellas referida a los “Errores que tienen su origen en un obstáculo”, y la segunda a “Errores que tienen su origen en ausencia de sentido”. Estas categorías nos permiten clasificar los errores más frecuentes de los estudiantes evidenciados en la aplicación del reactivo de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas.

En síntesis las dificultades del aprendizaje de las matemáticas se relacionan directamente con los obstáculos y, así mismo, estos con los errores, porque en este caso, los estudiantes en su mayoría cometen errores que tiene su origen en la ausencia de sentido, específicamente en errores en álgebra que tiene su origen en la aritmética, referido por ejemplo a la generalización de las propiedades de los números enteros al algebra, por lo tanto el obstáculo presente en los errores cometidos por los estudiantes es basado en la secuencia de un tema que a su vez se relaciona con la dificultad asociada a la propia naturaleza de la matemática y específicamente a la estructura jerárquica de los conocimientos.

Los errores son un antecedente constante en el proceso educativo y son el reflejo objetivo del proceso de los estudiantes al momento de aplicar sus conocimientos previos a los nuevos aprendizajes, por lo mismo es fundamental conocer el origen de los errores para entregar como docentes las herramientas y habilidades necesarias en base a los errores de los estudiantes para que ellos sean capaces de superarse frente a un nuevo aprendizaje.

La investigación da pie para ser utilizada en nuevos estudios que abarquen el análisis y uso de los errores cometidos por los estudiantes en reducción y multiplicación de expresiones algebraicas, para la construcción y posterior aplicación de una secuencia didáctica que contribuya a evitar los tipos de errores que muestra esta investigación. (MINEDUC, Agencia de Calidad de la Educación)

Bibliografía

Bélanger, J. (1999). *Imágenes y realidades del conductismo.* Universidad de Oviedo.

Carrillo, B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. *Innovacion y experiencias educativas*, 1-10.

Educación, A. d. (2011). *Resultados TIMSS.* Chile: División de estudios TIMSS & PIRLS.

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemáticas. *Premisa*, 23-32.

González Monteagudo, J. (2000). El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: Nuevas respuestas para viejos interrogantes. *ResearchGate*, 227-246.

MINEDUC. (2011). ¿Cómo promover el aprendizaje a traves de la evaluación? En *Programas de estudio* (pág. 19). Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

MINEDUC. (2011). Orientaciones didácticas. En *Programas de estudio* (pág. 26). Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

MINEDUC. (2011). *Planes y Programas de Estudio: Unidad de Currículum y Evaluación.* Santiago: Ministerio de Educación.

MINEDUC. (2013). *Bases Curriculares de 7º básico a 2º medio Matemática.* Santiago de Chile: Mineduc.

MINEDUC. (s.f.). *Agencia de Calidad de la Educación*. Recuperado el 15 de Mayo de 2015, de Agencia de Calidad de la Educación: http://www.agenciaeducacion.cl/simce/que-es-el-simce/

MINEDUC. (s.f.). *Agencia de Calidad de la Educación*. Recuperado el 17 de Mayo de 2015, de Agencia de Calidad de la Educación: http://www.agenciaeducacion.cl/terce/

MINEDUC. (s.f.). *Agencia de Calidad de la Educación*. Recuperado el 1 de Junio de 2015, de Agencia de Calidad de la Educación: http://www.agenciaeducacion.cl/pisa-programme-for-international-student-assessment/

Moreno, L. R. (2011). *Dificultades de aprendizaje en matemática.* Recife.

Perez Serrano, G. (1984). *El análisis de contenido de la prensa. La imagen de la universidad .* Madrid: UNED.

Pochulu, M. (2006). *Errores y Dificultades en Matemáticas.* Buenos Aires: Editorial Nacional Villa Maria.

Pochulu, M. D. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*.

Porta, D., & Silva, M. (2003). *"La investigación cualitativa: El Análisis de Contenido en la investigación educativa".* Mar de Plata.

Rico, L. (2000). *La educación Matemática en la enseñanaza secundaria.* Barcelona: Horsori.

Rico, L., Kilpatrick, J., & Gómez, P. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemática. En L. Rico, *Educación Matemática* (págs. 69-108). Iberoaméricana.

Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación .* INTERAMERICANA: Mc Graw Hill.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educacion secundaria. En L. Rico, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 125-154). Barcelona: Horsori.

Vargas, J., Pochulu, M., & Abrate, R. (2006). *Errores y dificultades en matemáticas.* Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa Maria.

ANEXOS

ANEXO Nº1

“Cuestionario”

Anexo N°1

“Cuestionario abierto para conocer la apropiación de conceptos referidos a dificultades, obstáculos y errores”.

Datos del docente

Genero del docente:	O Masculino	O Femenino
Nombre:		
Edad:		
Título Profesional:		
Institución:		
Grado Académico 1:		
Institución:		
Grado Académico 2:		
Institución:		
Años de experiencia docente:		
Colegio donde trabaja actualmente:		

Desde su experiencia y en relación a los procesos enseñanza-aprendizaje en el área de la Matemática:

1.- ¿Cómo definiría dificultad?

____

____

2.- ¿Cómo definiría obstáculo?

____

____

3.- ¿Cómo definiría error?

____

____

4.- ¿Cuál(es) cree usted que es (son) el error que se ha producido con mayor frecuencia en el eje de algebra de primer año medio durante su experiencia como docente?

____

____

5.- ¿Conoce las posibles causas de este error? ¿De ser así cómo las ha abordado en experiencias posteriores con sus estudiantes?

____

____

6.- ¿Cree usted que es importante analizar los errores cometidos por los estudiantes en el eje de algebra de primer año medio? ¿Por qué?

____

____

____

¡Gracias por su tiempo!

Investigadores:

- Almiray Cuevas, Mauricio
- Araya Hormazabal, Debora
- Quiñones Ríos, Mitzy

Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, trabajo de Seminario de Tesis, Junio 2015.

ANEXO Nº2

“Reactivo”

ANEXO N°2

Reactivo: Ejercicios de reducción y multiplicación de expresiones algebraicas.

Datos del estudiante

Genero del estudiante:	O Masculino O Femenino
Nombre:	
Edad:	
Curso:	
Colegio donde estudia actualmente:	

Instrucciones:

.

- No se responderán dudas o consultas.
- Escribe de forma clara el desarrollo de cada ejercicio.
- El desarrollo de este instrumento es de carácter personal.
- Este instrumento no será calificado.
- Tiempo límite duración 30 minutos.

I Reduce los términos algebraicos

	¿Cómo llegaste al resultado?
A. $2x + 2 =$	
B. $4 + 7b - 7b =$	

C. $-(5y+1)+2y=$	
D. $-2x^2y+4xy^2$	
E. $3a-3b-3a+3b$	

II Resuelve las siguientes multiplicaciones de expresiones algébricas

	¿Cómo llegaste al resultado?
A. $(2x)^2 \cdot 3x =$	

B. $k \cdot (r + t) =$	
C. $(2x + 2y)^2 =$	
D. $3a^2d \cdot 4d^4a$	
E. $(3pq - v^2x)^2$	

¡Gracias por su tiempo!

Investigadores:

- Almiray Cuevas, Mauricio
- Araya Hormazabal, Debora
- Quiñones Ríos, Mitzy

Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, trabajo de Seminario de Tesis, Junio 2015

ANEXO Nº3

“Tablas de resumen”

Errores más frecuentes en los reactivos aplicados

“Tablas resumen de errores”

Tabla 1

<table>
<tr><th rowspan="5">Colegio</th><th colspan="7">Ítem I: Reducción de términos semejantes</th></tr>
<tr><th colspan="2">Ejercicio:</th><th colspan="4">A. 2x + 2</th><th rowspan="4">Total estudiantes</th></tr>
<tr><th colspan="6">Tipos de respuesta de los estudiantes</th></tr>
<tr><th>Respuestas Correctas</th><th colspan="5">Respuestas Incorrectas</th></tr>
<tr><th>2x+2</th><th>4x</th><th>3x</th><th>2x</th><th>4=x</th><th>2(x+1)</th></tr>
<tr><td>San José 1°medio A</td><td>17</td><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>24</td></tr>
<tr><td>San José 1°medio B</td><td>23</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>24</td></tr>
<tr><td>Saint Maurice´s 1°medio</td><td>19</td><td>16</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>39</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Total de respuestas</td><td rowspan="2">59</td><td>22</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td rowspan="2">87</td></tr>
<tr><td colspan="5">28</td></tr>
<tr><td>Porcentaje de respuestas</td><td>67,8%</td><td colspan="5">32,2%</td><td>100%</td></tr>
</table>

Tabla 2

<table>
<tr><th rowspan="5">Colegio</th><th colspan="7">Ítem I: Reducción de términos semejantes</th><th rowspan="5">Total estudiantes</th></tr>
<tr><th colspan="2">Ejercicio:</th><th colspan="5">B. 4 + 7b - 7b</th></tr>
<tr><th colspan="7">Tipos de respuesta de los estudiantes</th></tr>
<tr><th>Respuestas Correctas</th><th colspan="6">Respuestas Incorrectas</th></tr>
<tr><th>4</th><th>$4b$</th><th>$4+b$</th><th>$8b+1b=1b$</th><th>$4x+14b^2$</th><th>b</th><th>$0b+4$</th></tr>
<tr><td>San José 1°medio A</td><td>21</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>24</td></tr>
<tr><td>San José 1°medio B</td><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>24</td></tr>
<tr><td>Saint Maurice´s 1°medio</td><td>29</td><td>7</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>39</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Total de respuestas</td><td rowspan="2">70</td><td>7</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td rowspan="2">87</td></tr>
<tr><td colspan="6">17</td></tr>
<tr><td>Porcentaje de respuestas</td><td>80,5%</td><td colspan="6">19,5%</td><td>100%</td></tr>
</table>

Tabla 3

Colegio	Ítem I: Reducción de términos semejantes											Total estudiantes
	Ejercicio:	C. -(5y+1) + 2y										
	Tipos de respuesta de los estudiantes											
	Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas										
	$(-3y-1)$	$(-3y+1)$	$3y-1$	$(-4y)$	$(-10y^2+2y)$	$4y^2$	$6y$	$2y$	$(-8y)$	*Sin contestar*	*Otras respuestas*	
San José 1°medio A	9	8	2	0	2	0	0	0	0	1	2	24
San José 1°medio B	17	1	3	0	0	0	0	0	0	3	0	24
Saint Maurice´s 1°medio	14	1	0	4	1	3	2	2	2	1	9	39
Total de respuestas	**40**	**10**	**5**	**4**	**3**	**3**	**2**	**2**	**2**	**5**	**11**	**87**
		47										
Porcentaje de respuestas	**46%**	**54%**										**100%**

Tabla 4

Colegio	Ítem I: Reducción de términos semejantes											Total estudiantes
	Ejercicio:	D. (- $2x^2y + 4xy^2$)										
	Tipos de respuesta de los estudiantes											
	Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas										
	$(-2x^2y + 4xy^2)$	$2x^2y^2$	$2x^3y^3$	$2xy$	$(-2x^3y^3)$	$6x^3y^3$	$2xy(x+2y)$	$(-2xy)$	$8x^3y^3$	*Sin contestar*	*Otras respuestas*	
San José 1°medio A	13	1	2	2	0	0	2	0	0	2	2	24
San José 1°medio B	23	1	0	0	0	0	0	0	0			24
Saint Maurice´s 1°medio	14	2	4	0	3	3	2	1	1	7	2	39
Total de respuestas	**50**	**4**	**6**	**2**	**3**	**3**	**4**	**1**	**1**	**9**	**4**	**87**
		37										
Porcentaje de respuestas	**57,5%**	**42,5%**										**100%**

Tabla 5

Colegio	Ítem I: Reducción de términos semejantes							Total estudiantes
	Ejercicio:	**E. 3a - 3b - 3a + 3b**						
	Tipos de respuesta de los estudiantes							
	Respuestas Correctas	**Respuestas Incorrectas**						
	0	$6a + 6b$	$0a + 0b$	$a^2 - b^2$	$6a = 6b$	$otros$	$Sin\ contestar$	
San José 1°medio A	16	1	0	1	1	1	4	24
San José 1°medio B	15	0	5	0	1	1	2	24
Saint Maurice´s 1°medio	27	0	0	3	0	7	2	39
Total de respuestas	**58**	**1**	**5**	**4**	**2**	**9**	8	**87**
		29						
Porcentaje de respuestas	**66,7%**	**33,3%**						**100%**

Tabla 6

Colegio	Ítem II: Multiplicación de expresiones algebraicas						Total estudiantes
	Ejercicio:	**A. $(2x)^2 \cdot 3x$**					
	Tipos de respuesta de los estudiantes						
	Respuestas Correctas	**Respuestas Incorrectas**					
	$12x^3$	$12x^2$	$4x^2 \cdot 3x$	$12x$	$24x$	*Otras respuestas*	
San José 1°medio A	9	3	3	4	2	3	24
San José 1°medio B	14	5	0	4	0	1	24
Saint Maurice´s 1°medio	15	2	2	11	0	9	39
Total de respuestas	**38**	**10**	**5**	**19**	**2**	**13**	**87**
		49					
Porcentaje de respuestas	**43,7%**	**56,3%**					**100%**

Tabla 7

Colegio	Ítem II: Multiplicación de expresiones algebraicas						Total estudiantes
	Ejercicio:	**B. $k \cdot (r + t)$**					
	Tipos de respuesta de los estudiantes						
	Respuestas Correctas	**Respuestas Incorrectas**					
	$kr+kt$	$k \cdot rt$	$kr + t$	kr	krt	*Sin contestar*	
San José 1°medio A	18	0	2	0	1	3	24
San José 1°medio B	23	0	0	0	1	0	24
Saint Maurice´s 1°medio	23	7	1	1	1	6	39
Total de respuestas	**64**	**7**	**3**	**1**	**3**	**9**	**87**
		23					
Porcentaje de respuestas	**73,6%**	**26,4%**					**100%**

Tabla 8

Colegio	Ítem II: Multiplicación de expresiones algebraicas											Total estudiantes
	Ejercicio:	**C. $(2x + 2y)^2$**										
	Tipos de respuesta de los estudiantes											
	Respuestas Correctas	**Respuestas Incorrectas**										
	$4x^2+8xy+4y^2$	$4x^2+4y^2$	$4x+4y$	$4x+8xy+4y$	$2x^2+8xy+2y^2$	$8xy$	$2x^2+2y^2$	$4x^2+y^2$	$4xy^2$	*Sin contestar*	*Otras respuestas*	
San José 1°medio A	7	10	1	1	2	0	0	0	0	0	3	24
San José 1°medio B	14	4	2	2	0	0	0	0	0	0	2	24
Saint Maurice´s 1°medio	7	5	4	2	0	4	4	2	2	2	7	39
Total de respuestas	**28**	**19**	**7**	**5**	**2**	**4**	**4**	**2**	**2**	**2**	**12**	**87**
		59										
Porcentaje de respuestas	**32,2%**	**67,8%**										**100%**

Tabla 9

Colegio	Ítem II: Multiplicación de expresiones algebraicas							Total estudiantes
	Ejercicio:			**D. $3a^2d\cdot 4d^4a$**				
	Tipos de respuesta de los estudiantes							
	Respuestas Correctas	**Respuestas Incorrectas**						
	$12a^3d^5$	$12a^84da$	$7a^3d^5$	$7d^6a$	$12a^3d^3$	*otros*	*Sin contestar*	
San José 1°medio A	16	1	0	0	0	2	5	24
San José 1°medio B	22	0	0	0	0	1	1	24
Saint Maurice´s 1°medio	24	0	2	1	1	7	4	39
Total de respuestas	**62**	**1**	**2**	**1**	**1**	**10**	10	**87**
		25						
Porcentaje de respuestas	**71,3%**	**28,7%**						**100%**

Tabla 10

Colegio	Ítem II: Multiplicación de expresiones algebraicas											Total estudiantes
	Ejercicio:	E. $(3pq - v^2x)^2$										
	Tipos de respuesta de los estudiantes											
	Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas										
	$9p^2q^2\text{-}6pqv^2x{+}v^4x^2$	$9p^2q^2\text{-}v^4x^2$	$3pq^2\text{-}v^4x^2$	$6p^2q^2\text{-}v^3x^2$	$9pq\text{-}6pqv^2x{+}v^4x$	$6p^2q^2\text{-}v^2x^2$	$9pq\text{-}v^4x^2$	$9pq^2\text{-}v^4x^2$	$9p^2q^2\text{-}6pqv^2x\text{-}v^4x^2$	*Sin contestar*	*Otras respuestas*	
San José 1°medio A	4	0	2	1	0	0	8	0	0	6	3	24
San José 1°medio B	12	1	0	1	2	2	2	0	0	0	4	24
Saint Maurice´s 1°medio	3	5	0	1	0	0	0	1	2	11	16	39
Total de respuestas	**19**	**6**	**2**	**3**	**2**	**2**	**10**	**1**	**2**	**17**	**23**	**87**
		68										
Porcentaje de respuestas	**21,8%**	**78,2%**										**100%**