FACULTAD DE EDUCACIÓN
Escuela de Educación en Humanidades y Ciencias
Departamento de Educación Matemática

BÚSQUEDA DE UNA METODOLOGÍA EFICIENTE PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CÓNICAS. UNA EXPERIENCIA PRÁCTICA.

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:

JESSICA IBARRA COFRÉ

JASMIN RAMOS FERNANDEZ

INGRID ROCHA CELIS

PROFESOR GUÍA: FRANCISCO JAVIER GOMEZ FERNANDEZ

SANTIAGO – CHILE

2011

Agradecimientos

Queremos agradecer sinceramente aquellas personas que compartieron, entregaron y apoyaron con sus conocimientos el desarrollo de esta experiencia y que estuvieron con nosotras incondicionalmente. En especial al profesor Alonso Quiroz por guíanos con sus ideas, recomendaciones en esta investigación y apoyo incondicional, también agradecemos al profesor Patricio Pérez por el apoyo total que nos brindo en esta experiencia.

Dedicatoria

A mis hijos Sebastián, Ricardo y Martin por todas las veces que no pudieron tener a una mamá de tiempo completo, por el apoyo que me brindaron, la fuerza necesaria para lograr las metas .Es por eso les dedico esta tesis con mucho amor porque son el motor que me obliga a funcionar y ser cada día mejor.

Hijos recuerden que siempre cuentan conmigo y que eternamente los voy amar su mamá.

Jessica Ibarra Cofré.

Agradezco a toda la gente que estuvo conmigo en este proceso tan lindo que formo parte de mi desarrollo como profesional y como ser humano, a mis compañeras y amigas por soportarnos y por apoyarnos siempre, a mi familia por estar ahí y por comprenderme cuando yo no estaba ahí, a mis profesores por el apoyo incondicional como amigos y como colegas. Finalmente a Dios por darme la fuerza para seguir cada día y guiarme en este camino largo, que es mi vida.

Jazmín Ramos Fernández.

En primer lugar quiero agradecer a los profesores que me guiaron en este proceso tan importante en mi vida, también a mis compañeras y amigas, pero en especial a mi querido Alejandro por haberme motivado y apoyado incondicionalmente en mi desarrollo como profesional y en cada etapa de ésta, también agradezco la paciencia y todos los sacrificios involucrados en todo este tiempo.

Ingrid Rocha Celis

INDICE

Páginas

INTRODUCCIÓN

La presente investigación pretende generar una metodología[1] eficiente para la enseñanza de las secciones cónicas, poniendo en el foco la enseñanza y aprendizaje de las cónicas, en particular la Elipse, para lo anterior se aplican dos metodologías de enseñanza una tradicional (pasiva) y otra innovadora (activa) que fomenta la participación de los estudiantes, haciendo un aporte a la enseñanza de la geometría que actualmente se encuentra desvalorizada en nuestro país.

Debido a que en Chile son escasas las investigaciones relacionadas con las metodologías de enseñanza para la geometría, por tanto proponemos una metodología innovadora para las cónicas en especial de la elipse, además constatamos que en los planes y programas del curso regular de tercer año medio no está contemplada la unidad de las secciones cónicas, también los docentes no innovan en sus metodologías de enseñanza y tampoco se atreven a cambiar o a transformar su estructura de clases.

Para llevar a cabo esta investigación aplicamos dos metodologías de enseñanza en dos contextos educativos diferentes, uno de ellos, es el Liceo Nacional de Maipú institución municipal que se caracteriza por su excelencia académica, por otro lado el Centro Técnico Profesional CTP que no posee un buen nivel de excelencia académica. La estructura del contenido está basada en la teoría de Van Hiele[2] en cuanto a la estructura del contenido y en Duval[3], respecto a los diferentes registros semióticos para el aprendizaje de la elipse.

Por otra parte para la recolección de información de datos, se aplicaron dos instrumentos de medición, una prueba formativa que se sustentada en los niveles de Van Hiele que arroja datos cuantitativos[4] sobre el aprendizaje obtenidos por los estudiantes luego de la experiencia práctica. También se realizó un cuestionario que proyecta resultados cualitativos respecto de la percepción de los estudiantes sobre las metodologías aplicadas.

Finalmente se realizó un análisis estadístico de los resultados obtenidos a través de los instrumentos de medición mencionados anteriormente, comparando la eficacia las metodologías planteadas en la muestra seleccionada.

[1] **Metodología**: Tratado del método, ciencia del método. Investigación sistemática y formulación de métodos que debe usarse en la investigación científica.
[2] **Van Hiele**: Propone un modelo de aprendizaje en la Geometría. Establece por niveles el conocimiento que se adquiere de la Geometría.
[3] **Duval**: Señala que el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semiótica.
[4] **Datos Cuantitativos**: Cuando los valores de los datos representan diferentes magnitudes, decimos que son datos cuantitativos.

CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 EL PROBLEMA:

El estudio de las cónicas en la vida cotidiana permite a los estudiantes la interacción con el espacio en el cual vivimos, también se considera como una herramienta para el entendimiento de las distintas formas en que se presenta en el diario vivir. Según el autor *"… la enseñanza de las secciones cónicas debiera enfatizar la geometría de estos objetos como secciones planas en superficies cónicas, o - para la elipse - en cilindros. Al principio esta aproximación puede parecer muy difícil pero hay muchas ventajas valiosas. En particular esto ayuda a desarrollar el entendimiento espacial. Las gráficas de computadora pueden resultar útiles para familiarizar a los alumnos con las secciones cónicas, pero es más importante que nunca el mostrar también modelos reales de las formas geométricas que se puedan tocar y sentir"* (Lundsgaard Hansen, 2001).

Se cree que es de gran relevancia el estudio de las cónicas en especial de la elipse, por que las secciones cónicas han jugado un rol central en la ciencia, especialmente en el siglo XVII cuando Kepler descubrió las descripciones del movimiento planetario y más tarde por Newton al finales del siglo XVII cuando, en uno de los mayores adelantos en la ciencia, él dedujo la ley de gravitación, que la forma de la órbita de los planetas era una elipse (Programa de estudio de 3°año medio, diferenciado "Algebra y Modelos Analíticos").

En nuestro país no se valora la geometría analítica, ni tampoco existen metodologías didácticas e innovadoras que presenten una estructura de aprendizaje que sean interesantes para la enseñanza de las cónicas en especial de la elipse. Según las publicaciones en la revista oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame) nos señala que, *"La enseñanza de la geometría ha sido objeto de numerosos estudios, ha generado varias experiencias, pero sigue siendo una asignatura pendiente. Cabria preguntarse dónde está el punto más débil de la cuestión…"* (Contreras de la fuente, Contreras Quesada, & Garcia Armenteros, 2002, págs. 111-132)

El contenido de las secciones cónicas no está incluido en el programa regular de tercer año medio, solo se estudia en el programa diferenciado "Algebra y modelos analíticos" del Ministerio de Educación (MINEDUC), por tanto el conocimiento de las cónicas no es transmitido a todos los estudiantes de educación media, siendo este contenido de gran importancia no solo para el estudio en sus diferentes registros algebraicos y gráficos, sino también como parte de la cultura.

Esto con lleva a que se limite al estudiante en el desarrollo de un pensamiento geométrico más abstracto y del razonamiento lógico, como también habilidades visuales, de comunicación, dibujo, conversión, aplicación y resolución de problemas, etc. (Gamboa Araya, 2010).

Tomando en cuenta las razones mencionadas anteriormente se pretende encontrar metodologías de enseñanza que ayuden en el aprendizaje de la geometría, específicamente las cónicas dándole respuesta a esta inquietud y aplicando una metodología activa.

1.2 JUSTIFICACIÓN

El problema que se ha abordado en esta investigación radica principalmente en generar una metodología de enseñanza eficaz para el aprendizaje de las cónicas en especial de la elipse.

La elipse juega un rol central en la vida real, como por ejemplo en las órbitas que forman los planetas alrededor del sol siendo estas de forma elíptica, los cometas y los satélites también forman orbitas elípticas, también en óptica y en la propagación de ondas se utilizan lentes de forma elípticas. Además podemos encontrar edificaciones con planta elíptica, un ejemplo es la iglesia del Monasterio de San Bernardo, más conocido como "Las Bernardas" en Alcalá de Henares. Según lo que se expresa en el párrafo: *"La geometría ha sido desde los inicios de la humanidad un mecanismo utilizado para encontrar soluciones a los problemas más comunes de quienes la han aplicado en su vida, pues, entre otros usos, facilita la medición de estructuras sólidas reales, tanto tridimensionales como superficies planas y además es bastante útil para la realización de complejas operaciones matemáticas"* (buenastareas, 2010). En fin existen bastantes aplicaciones respecto de las secciones cónicas, por lo tanto se considera muy importante poder transmitir y culturizar mostrando este conocimiento matemático a los estudiantes.

Dentro de los planes y programas de Tercer Año medio (MINEDUC)[5] no se incluye la unidad de secciones cónicas, por tanto los docentes no entregan este conocimiento y no le dan la importancia que debiera tener este contenido. En nuestro país son escasas las investigaciones y prácticas de metodologías innovadoras para la enseñanza de la geometría en general.

Las razones de esta problemática que se consideran son que a lo mejor los docentes no cuentan con los conocimientos suficientes de geometría analítica, no conocen el contenido o no están al tanto de las metodologías necesarias para poder enseñar este contenido. Respecto de lo anterior se considera que la enseñanza entregada por el docente es limitada, lo que afecta directamente al estudiante en desarrollar un pensamiento geométrico más abstracto y a la adquisición de nuevas habilidades cognitivas[6], tal como lo describen las orientaciones didácticas que aparecen en los planes y programas diferenciado de tercer año medio, *"En la enseñanza escolar, el tema de los lugares geométricos, el conjunto de puntos que satisface ciertas condiciones determinadas, permite promover el pensamiento asociado a imágenes y relacionar*

[5] MINEDUC: Ministerio de Educación de Chile.
[6] **Cognitivas**: Es el conjunto de información almacenada mediante la experiencia o el aprendizaje**.**

claramente los registros gráfico, algebraico y numérico" (Ministerio de Educación).Cabe mencionar que el estudio de los lugares geométricos favorece el desarrollo de un pensamiento más analítico y abstracto lo que es necesario en niveles de enseñanza más avanzados.

Actualmente en Chile, la mayoría de los docentes no conoce alguna metodología que organice o estructure la enseñanza de la geometría, por eso las metodologías planteadas consideran la organización y estructuración que nos entrega Van Hielen, tal como se expresa a continuación *"partir de un trabajo manipulativo para ir afianzando el conocimiento y llegar a etapas posteriores de abstracciones y generalizaciones de los conceptos trabajados"* (Lòpez Sanchez), la metodología de enseñanza propuesta es un método activo que tiene una estrecha relación con la teoría de Van Hiele, que señalamos a continuación *"En este documento pretendo mostrar una metodología de trabajo en el aula, basada en las investigaciones de los esposos Van Hielen…Es una metodología activa por parte del alumnado y profesorado, con bases en el constructivismo y con la finalidad de la adquisición de competencias básicas en el área de matemáticas"* (López Sanchez).

El trabajar con Metodologías de enseñanza dinámica y estructurada facilita al docente entregar con una mayor claridad los conceptos más simples a lo más complejos, para un mejor entendimiento y motivación de parte de los estudiantes respecto de los contenidos de las cónicas

1.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Es posible generar un método eficiente para la enseñanza de las cónicas en especial de la elipse, aplicable en contextos educativos diferentes, a partir de la aplicación de dos metodologías alternativas?

1.4 OBJETIVO GENERAL

Generar un método eficiente para la enseñanza de las cónicas en especial de la elipse, aplicable en contextos educativos diferentes, a partir de la aplicación de dos metodologías alternativas.

1.5 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Fundamentar la importancia y la efectividad de la teoría de Van Hiele para la enseñanza de la Elipse, describiendo componentes esenciales.

- Aplicar dos metodologías de enseñanza en dos contextos educativos diferentes utilizando el las metodologías de enseñanza activa y pasiva.

- Evaluar los logros de aprendizaje en los diferentes contextos educativos con las diferentes metodologías una activa y la otra pasiva.

- Evaluar la experiencia de enseñanza, recogiendo la información, a través de los instrumentos de evaluación[7] creados, propuestos a los estudiantes.

- Analizar el resultado de la información recolectada y a partir de dicho análisis determinar los factores que facilitan el aprendizaje de los temas tratados.

- Diseñar dos propuesta Metodológica para la enseñanza de las cónicas, a partir del análisis efectuado.

[7] **Instrumento de Evaluación**: Se pueden definir los instrumentos como los recursos que se emplean para recolectar y registrar información y deben poseer ciertas condiciones para que se garantice la validez, la confiabilidad, la practicidad y otros elementos típicos, de una evaluación de calidad.

CAPITULO II: MARCO REFERECIAL

2.1 INTRODUCCION DEL MARCO REFERENCIAL

Para el desarrollo del estudio se aplicaron dos metodologías una activa y otra pasiva relacionada con las actividades para la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. La primera es la que pretende alcanzar el desarrollo de las capacidades del pensamiento crítico y creativo, donde las actividades de aprendizajes están centradas en el estudiante y la segunda se acentúa en la actividad del profesor permaneciendo el estudiante en forma pasiva y sólo recibe conocimiento.

Con la implementación de las metodologías mencionadas anteriormente se pretende guiar y construir los conceptos necesarios para el aprendizaje de la elipse considerando a los niveles de Van Hiele *"Se trata de un modelo evolutivo del pensamiento, enfocado hacia la geometría, es decir, no es aplicable para todas las ramas de las matemáticas. Es un modelo que permite enfrentarse a un nuevo tema paso a paso, yendo de menos a más, relacionando todo lo anterior con lo nuevo, para que así los alumnos se vayan formando un esquema sobre la temática en donde relacione todos los puntos, dando lugar a que pueda provocarse un aprendizaje significativo".* (López Azuaga)

Para las metodologias activa y pasiva se utilizan diversas recursos didacticos y representaciones para poder alcanzar el aprendizaje de los conceptos que se desean enseñar, es decir,se pretende presentar el contenido relacionando con distintos registros matemáticos como el algebráicos, geométricos o abstractos entre otros.

Respecto de las representaciones nos basamos en Duval que considera las distintas representaciones que el alumno pueda alcanzar de un concepto matemático, donde enfatiza particularmente en las representaciones semióticas que ayudan al trabajo escolar.

2.2 ENFOQUES DIDÁCTICOS

2.2.1 Teoría Conductista

"La teoría conductista se se centra en la conducta observable intentando hacer un estudio totalmente empírico de la misma y queriendo controlar y predecir esta conducta. Su objetivo es conseguir una conducta determinada, para lo cual analiza el modo de conseguirla" (Educarchile)**.** La teoría conductista explica lo que se observa y evalúa el comportamiento del ser humano, al igual que su entorno. Estos cambios en el comportamiento deben ser razonablemente objetivos y por lo tanto, deben ser medidos.

Los conductistas definen el aprendizaje sólo como la adquisición de nuevas conductas o comportamientos, que reflejan una adquisición de conocimientos o habilidades a través de la experiencia.

El conductismo establece

- El aprendizaje como una vinculación o conexión de estímulos y respuestas.
- El aprendizaje es un cambio en la capacidad o disposición humana, relativamente duradero. Su objeto de estudio se centra en la adquisición de destrezas y habilidades, en el razonamiento y en la adquisición de conceptos.
- La importancia de considerar las variables ambientales en el aprendizaje.
- Estimula el desarrollo de hábitos y habilidades relacionados con el contenido de la enseñanza, provocando una mayor motivación hacia el aprendizaje

De esta teoría se plantearon dos variantes: el condicionamiento clásico describe una asociación entre estímulos como (condicionado o incondicionado y una respuesta).

El condicionamiento instrumental u operante persigue la consolidación de la respuesta según el estimulo. *"La teoría de los refuerzos es una conducta aprendida"* (Skinner), entonces para que exista el aprendizaje según esta teoría, se debe reforzar la conducta ya sea por un estímulo positivo o también un estímulo negativo. Así se logra aumentar la probabilidad que se repita un comportamiento de aprendizaje en su entorno.

Para los conductistas el aprendizaje es una manera de modificar el comportamiento, los maestros deben de proveer a los estudiantes con un ambiente adecuado para el refuerzo de las conductas deseadas. Esta corriente considera a la psicología como una ciencia que predice y controla la conducta, lo que excluye los estados y eventos mentales como objeto de estudio.

2.2.2 Teoría Constructivista

"Es la idea que mantiene que el individuo ,tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores" (Educarchile). El constructivismo es modelo de enseñanza y aprendizaje activo que pone al estudiante como centro de desarrollo de las dinámicas educativas, basado en la reflexión de manera que el educando va construyendo mentalmente su entendimiento de la realidad, con base en el conocimiento previo, a las nuevas experiencias y de las interacciones que se puede establecer con el medio.

El constructivismo establece

- El estudiante debe crear su propia interpretación del mundo de la información y que el propósito de la instrucción no es enseñar información si no crear situaciones donde el estudiante interpreta la información para entenderla.

- La importancia de los conocimientos previos, de las creencias y de las motivaciones de los alumnos.
- Organizar situaciones para que los estudiantes puedan trabajar con contradicciones para descubrirlas, analizarlas y discutirlas.
- La educación trabaja mejor cuando se concentra en el pensamiento crítico y el entendimiento, en lugar de dedicarse a la memorización. El constructivismo se concentra en el aprendizaje de cómo pensar y entender.
- Estimular el trabajo de grupo con los compañeros para utilizarlo como recursos (trabajo colaborativo).

El constructivismo ha sido definido como un producto natural de las experiencias encontradas en los contextos o ambientes de aprendizaje en los cuales el conocimiento que ha de ser aprendido es clasificado y ordenado de una manera natural.

La escuela debe contribuir al desarrollo de la responsabilidad en sus alumnos, educándolos para la toma de decisiones y permitiéndoles hacerlo. Naturalmente, el estudiante debe asumir las consecuencias de sus actuaciones. Podemos concluir que la escuela debe educar hacia una libertad responsable. Hablamos de un código moral y disciplinario con alto respeto a la dignidad del educando, donde todos los integrantes del sistema propicien la sana convivencia de la comunidad y la sociedad. Los paradigmas educativos tienen que cambiar para que el estudiante verdaderamente sea el centro del proceso educativo y el maestro asuma un papel más activo como el gerente de todo el proceso.

2.2.3 Teoría Cognitivista

"El cognitivismo abandona la orientación mecanicista pasiva del conductismo y concibe al sujeto como procesador activo de la información a través del registro y organización de dicha información para llegar a su reorganización y reestructuración en el aparato cognitivo del aprendiz. Aclarando que esta reestructuración no se reduce a una mera asimilación, sino a una construcción dinámica del conocimiento" (Educarchile).

La teoría cognitivista pone gran interés en el modo en que las personas adquieren las representaciones visuales del mundo y esas imágenes se guardan en la memoria formando parte de la estructura cognitiva del individuo. Entonces toda esa información puede ser recuperada y utilizada para el aprendizaje.

Por otra parte el cognitivismo considera que el aprendizaje se realiza mediante la relación de diversos aspectos que se han registrado en la memoria, aunque hayan ocurrido en tiempos distintos, la información que ha sido guardada en la memoria puede converger para producir un nuevo conocimiento, esto es producto de la lógica. Por tanto el aprendizaje es visto como un cambio en el significado de las experiencias del estudiante, de tal manera que éste sea capaz de construir nuevos significados en su estructura cognitiva.

El cognitivismo establece que en lugar de visualizar el aprendizaje como una modificación de la conducta, se habla de una modificación en el estudiante, es decir en su estructura cognitiva. De esta manera un contenido es aprendido cuando es adquirido, procesado, retenido y también es posible recuperarlo de la memoria.

Entonces el cognitivismo expone que una vez que la información es organizada y estructurada en la memoria, esta reestructuración se considera como procesos de construcción de asimilación y acomodación de conocimiento, en términos piagetianos. Estos conceptos se refieren a que no se trata de un cambio solo cuantitativo (en la probabilidad de la respuesta), sino cualitativo (en el significado de esa respuesta); no es un cambio originado en el mundo externo, sino en la propia necesidad interna de reestructurar nuestros conocimientos, o de corregir sus desequilibrios; no cambian los elementos aislados (estímulos y respuestas), sino las estructuras de las que forman parte (teorías y modelos); en fin, no es un cambio mecánico, sino que requiere una implicación activa, basada en la reflexión y la toma de conciencia por parte del sujeto.

Principios del cognitivismo:

- Se pone énfasis en la participación activa del estudiante en el proceso de aprendizaje.
- Uso de análisis jerárquico[8] para identificar e ilustrar relaciones de prerrequisitos para el aprendizaje.
- Énfasis en la estructuración, organización y secuencia de la información para facilitar su óptimo procesamiento.
- Propone la creación de ambientes de aprendizaje que permitan y estimulen a los estudiantes a hacer conexiones con el material aprendido.

2.3 MODELO VAN HIELE

Podemos observar diferentes figuras geométricas y estamos rodeados en la cotidianeidad de estas, las cuales podemos estudiar de forma experimental sus formas mediante la observación de los objetos para así poder analizar su espacio y aplicar nuestros conocimientos.

La observación espacial es fundamental para el estudio geométrico, ya que podemos reconocer las figuras geométricas, sus propiedades y las relaciones de estas figuras entre el espacio y el plano.

[8] Análisis Jerárquico: sirve para tratar problemas de toma de decisiones, establecimiento de medidas, control, jerarquización y protocolos.

Para el trabajo de la geometría podemos desarrollar actividades con recursos manipulativos para captar la atención del alumnado y también podemos usar otras áreas de las matemáticas para la comprensión de la geometría.

Las ideas de los párrafos precedentes se deben al matrimonio formado por Dina y Pierre Van Hiele, aunque fue difundido por Pierre ya que Dina murió prematuramente, el libro original donde se desarrolla la teoría se titula "Structure and Insight".

Las ideas principales son que los aprendizajes de la geometría se desarrolla pasando por determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que estos no van asociados a la edad y que para alcanzar un nivel se debe pasar por el anterior. También podemos destacar que el mayor o menor dominio de un contenido depende de en qué nivel esta el alumno. (Fouz, 2001)

La teoría de Van Hiele nos dice que alcanzar un nivel superior de pensamiento significa que una persona es capaz, respecto a determinadas operaciones, y aplicarlas a nuevos objetos.

2.3.1 Niveles de Van Hiele

Los niveles de Van Hiele son cinco (Fouz, 2001) y suelen nombrarlo del 1 al 5 pero es más ocurrente la notación de 0 al 4 y se denominan como:

- NIVEL 0: Visualización o Reconocimiento
- NIVEL 1: Análisis
- NIVEL 2: Ordenación y Clasificación
- NIVEL 3: Deducción Formal
- NIVEL 4: Rigor

Se dice que llegar al Nivel 4 es inalcanzable para un estudiante no universitario, también es importante señalar que depende del contenido el nivel alcanzado. A continuación se especifican los niveles desde la perspectiva de los estudiantes:

- NIVEL 0: Visualización o Reconocimiento
  Sólo se reconoce la forma o la figura sin propiedades ni componentes y se asemejan con objetos del entorno, por ejemplo reconocen una figura circular como un círculo y lo comparan con una rueda.

- NIVEL 1: Análisis
  Se perciben las propiedades y las componentes de la figura, pero no relaciona las figuras ni propiedades con otras y tampoco puede definir o clasificar la figura por medio de estas propiedades.

- NIVEL 2: Ordenación y Clasificación
  Se definen de manera formal las figuras geométricas tanto como en propiedades y también en sus características, reconoce que estas propiedades provienen de

otras y establece relaciones entre las propiedades, puede seguir las demostraciones pero en muchos casos no entiende por falta de axiomas geométricos.

- NIVEL 3: Deducción Formal

  En este nivel puede deducir y hacer demostraciones lógicas y formales, ya que se manejan los sistemas axiomáticos de las matemáticas[9], se comprende cómo llegar de diferentes proposiciones a un mismo resultado, para esto debe tener un alto nivel de razonamiento lógico y también una visión globalizada de las Matemáticas.

- NIVEL 4: Rigor

  Se conoce los diferentes tipos de sistemas axiomáticos, se pueden analizar y comparar diferentes geometrías. Se puede trabajar con geometría analítica alcanzando el más alto nivel de rigor matemático.

Los niveles se caracterizan por que son secuenciales, jerarquizados, son recursivos y cada nivel tiene un lenguaje característico, también podemos mencionar que lo que es implícito de un nivel se vuelve explicito en el nivel siguiente, esta idea se verá en un esquema y será más explicativo.

	Elementos Explícitos	**Elementos Implícitos**
NIVEL 0	Figuras y Objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL1	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 2	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de Teoremas
NIVEL 3	Deducción formal de Teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)
NIVEL 4	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)	

(Este cuadro fue construido en base a la información otorgada por el texto Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría por Fernando Fouz).

Para alcanzar a cada uno de estos niveles existe un tipo de paso entre niveles, estos se llaman fases y están entre estos niveles, estas fases nos darán una idea de cómo organizar las actividades. Van Hiele resalta que no importa la edad o madurez para el uso de estos niveles sino la enseñanza recibida.

[9] **Sistemas Axiomáticos de las Matemáticas**: consiste en un conjunto de axiomas que se utilizan, mediante deducciones, para demostrar teoremas.

2.3.2 Fases de Van Hiele

Las fases que postula Van Hiele son cinco (Fouz, 2001) y se llaman:

FASE 1ª: PREGUNTA/INFORMACIÓN

FASE 2ª: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

FASE 3ª: EXPLICACIÓN (EXPLICITACIÓN)

FASE 4ª: ORIENTACIÓN LIBRE

FASE 5ª: INTEGRACIÓN

A continuación se especifica cada fase.

FASE 1ª: PREGUNTA/INFORMACIÓN

Esta primera fase es oral y se trata de sacar la mayor información del estudiante para ubicarlo en cualquiera de los niveles anteriores.

FASE 2ª: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

En esta fase es muy importante la didáctica del profesor y como este va guiar una o una secuencia de actividades para el aprendizaje del alumno.

FASE 3ª: EXPLICACIÓN (EXPLICITACIÓN)

Es una fase de interacción entre los alumnos, el profesor solamente guía el lenguaje de los alumnos, esta fase es muy importante ya que los alumnos se motivan a la comunicación, a organizar las ideas y a expresarlas de manera entendible.

FASE 4ª: ORIENTACIÓN LIBRE

Es como aplicamos los contenidos anteriores en una actividad más bien abierta, para que puedan ser abordados de diferentes maneras.

FASE 5ª: INTEGRACIÓN

En esta fase vamos a sintetizar los contenidos anteriores, y debemos hacer una especie de red interna de conocimientos aprendidos.

2.4 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Para estudiar lo fenómenos relativos al conocimiento es imprescindible recurrir a la noción de representación. Porque sin una actividad de representación, un sujeto no puede movilizar ningún conocimiento. Por esto no es sorprendente que la noción de representación se haya impuesto en psicología para el estudio de la adquisición de conocimientos de sus tratamientos.

Ahora bien esta noción se ha introducido en tres momentos y cada vez de manera diferente.

2.4.1 Representación Mental

Piaget estudiaba las creencias y las explicaciones de los niños pequeños (La representación del mundo por el niño) con respecto a los fenómenos naturales y físicos, considerando errores lo considera como índices de otras visiones y otra lógica. Después recurre a la noción de representación como evocación de los objetos ausentes para caracterizar la novedad del último de los estados de la inteligencia sensorio-motor[10].

2.4.2 Representación Interna o Computacional

Aquí se nos plantean dos preguntas:

1.- ¿Bajo qué forma las informaciones viniendo del exterior pueden entrar en el sistema? Es decir, que descripción, hecha con símbolos utilizados por el sistema, permite captar las informaciones del exterior.

2.- ¿Cuáles son las reglas que van a permitir la transformaciones al interior del sistema?, ¿esta transformación debe ser de tipo cálculo?

Las representaciones son esenciales para que una información pueda ser descrita y tomada en cuenta en un sistema de tratamiento. Esto se trata de una codificación de la información. Por código, se entiende como el medio por el cual es representada una información. Y el más usado en los modelos computacionales de la cognición. Contribuido todo esto, para su generalización, por la psicolingüística y las investigaciones sobre la memoria semántica.

2.4.3 Representación Semiótica

Cuyo representante es Duval, con trabajos sobre la adquisición de conocimientos mediante registros matemáticos y sobre las diferentes formas de reconocer, relacionar estos registros con otros por ejemplo relacionar los sistemas particular de signos con el lenguaje la escritura algebraica o los gráficos cartesianos el pasar de un registro a otro es llamado como conversión de representación.

- ❖ Representaciones Semióticas y Aprendizajes
  Hay tres grandes tipos de representaciones:

[10] **Inteligencia Sensorio Motor**: constituye un sistema equilibrado de las diversas maneras posibles de desplazarse materialmente en el espacio próximo, sin alcanzar el rango de un instrumento de pensamiento. El grupo de desplazamientos es un ejemplo de la construcción de una estructura que depende de la coordinación progresiva de los esquemas de acción del sujeto y de la información proporcionada por la experiencia física y que acaba por convertirse en un instrumento fundamental para la organización del mundo exterior.

	INTERNA	EXTERNA
CONCIENTE	Mental Función de objetivación	Semiótica Función de objetivación Función de expresión Función de tratamiento intencional
NO CONCIENTE	Computacional Función de tratamiento automático o casi instantáneo	

Como muestra el cuadro anterior, las representaciones semióticas son a la vez conscientes y externas, además que ellas en general se dividen en dos grandes clases: las analógicas como las imágenes, que conservan las relaciones entre los elementos del modelo y las representaciones. Y las no analógicas, que no conservan ninguna relación del modelo, pero pueden representar operaciones o transformaciones del modelo (Bresson. 1987).

Las representaciones mentales, son consientes e internas, ya que permiten la observación de un objeto en ausencia de todo significante perceptible, éstas se identifican con las imágenes mentales, ya que tienen un dominio más amplio que el de las imágenes, están asociadas a las proyecciones más difusas y globales que reflejan los conocimientos, los valores que comparte un individuo con su medio, o aquellas que reflejan sus deseos.

Y por último las representaciones computacionales, que son internas o inconscientes ya que inconscientemente codificamos la información que pasa por nuestros ojos u oídos y lo hacemos en nuestro computador personal que es nuestro cerebro.

2.5 DIDÁCTICA DE LAS METODOLOGÍAS

2.5.1 Didáctica Tradicional

El maestro desempeña en la situación docente el papel de protagonista que no se preocupa por los problemas y dificultades que pueden afligir a los estudiantes, ni por las consecuencias resultantes.

El alumno es el elemento pasivo y receptor del saber dictado por el maestro, su cometido es escuchar, repetir y obedecer, sin procurar pensar o reconstruir los conocimientos que le transmite el maestro.

El objetivo es algo teórico y remoto, que no influye sobre la situación didáctica; las tareas escolares no se relacionan con él ni tampoco con la vida presente o venidera del alumno, predomina la rutina de los ejercicios y las lecciones repetidas de memoria. La forma en que se consideran los objetivos específicos hace que se atomicen los conocimientos.

La asignatura es un valor autónomo con el que los alumnos se deben conformar; los contenidos que la conforman se aprenden al pie de la letra sin más cuestiones, los propios profesores son sus esclavos, repitiéndolos fielmente, sin alguna alteración o revisión crítica.
El método es un problema del profesor que enseña y no del alumno que aprende. Método es solo el modo que tiene el profesor, de organizar y exponer la materia, sin considerar su relación con el estudiante.
En la escuela tradicional escuchamos afirmaciones tales como la práctica es el momento final de las aportaciones de la teoría aprendida", "el alumno necesita conocer la teoría para contar con todos los elementos para practicar", etc. Las clases son verbalistas sobrecargadas de conceptos, teorías y principios, y en la mayoría de los casos la actividad del alumno es reducida solo a la recepción; inclusive hasta los conocimientos prácticos son teorizados, muchas veces la práctica queda para el futuro y a la iniciativa del alumno; por ende, el conocimiento es memorístico, teorizante y parcializado. El maestro que ha sido formado en la disociación teoría-práctica, en el verbalismo y en la parcelación del conocimiento, manifiesta una tendencia a separar los contenidos de su disciplina y la metodología de enseñanza ya que aprendió a teorizar.

2.5.2 Didáctica Moderna

El alumno es el factor personal decisivo en la situación escolar; es activo y emprendedor, para él se organiza el proceso y se administra la enseñanza, los profesores están para orientarlos en la educación y en su aprendizaje con el fin de desenvolver su inteligencia y formar su carácter y personalidad, exigiendo que haya interacción y una activa ejercitación de sus aptitudes, en experiencias de real valor y provecho, desde el punto de vista educativo.
El maestro actúa como elemento que estimula, orienta y controla el aprendizaje de los alumnos, adaptando la enseñanza a su capacidad real y a sus limitaciones, aclarando sus dudas y ayudándolos en sus dificultades, estimulando a que desarrollen los hábitos de estudio y la reflexión.
El objetivo es el factor decisivo que dinamiza todo el trabajo escolar, dándole sentido valor y dirección, todo el trabajo del profesor y de los alumnos se desarrolla en función de él, con la vista en las metas propuestas bien definidas y que habrán de alcanzase progresivamente, respetando el nivel de maduración en que se encuentran los estudiantes.
La asignatura es el reactivo específico de la cultura que el profesor emplea en su obra educativa, está en función de las necesidades y la capacidad real de los alumnos, dependiendo de esto su selección, programación, dosificación y presentación en términos didácticos; el alumno no existe para la materia sino que es ésta la que existe para servir al alumno que se educa, en la medida de su capacidad para asimilarla, formando estructuras mentales definidas.
El método pasa a ser un problema de aprendizaje y no de la enseñanza, para Mattos (1974) "el buen método es la mejor manera de hacer que el alumno aprenda" y no la de permitir que el profesor exhiba u organice sus conocimientos para imponérselos a los alumnos dentro de las estructuras lógicas de los adultos. Está en parte condicionado por

la naturaleza específica de la materia, pero se relaciona principalmente con la psicología especial del alumno que realiza el aprendizaje en el nivel de madurez en que se encuentra.
Una tendencia general de los diferentes enfoques actuales del aprendizaje es considerar que éste es un proceso de construcción del significado y que la enseñanza del salón de clases deberá promover alumnos constructivos con la capacidad para asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje y la capacidad de evaluar su propio conocimiento.

2.6 METODOLOGÍAS DE ENSEÑANZA

Los métodos en cuanto a las actividades de los alumnos son:

2.6.1 Método Pasivo

Cuando se acentúa la actividad del profesor, permaneciendo los alumnos en actitud pasiva, y recibiendo los conocimientos suministrados por el maestro a través de dictados, lecciones marcadas en el libro, exposiciones dogmáticas o preguntas y respuestas. Estos procedimientos didácticos, condenados por todas las corrientes pedagógicas, imperan todavía en muchas escuelas.

2.6.2 Método Activo

Cuando se tiene en cuenta el desarrollo de la clase contando con la participación del alumno. En este caso el método se convierte en mero recurso de activación e incentivo del educando para que sea él quien actúe, física o mentalmente, de suerte que realice un auténtico aprendizaje, convirtiéndose el profesor en un orientador, un guía, un incentivador y no en un transmisor del conocimiento, un enseñante.
Un conjunto de métodos de participación activa del estudiante se agrupan en la llamada, "la enseñanza problémica". La enseñanza problémica, eleva el grado de actividad mental en el alumno, propiciando su pensamiento creador contribuyendo de esta forma al desarrollo de su personalidad. Cabe señalar, no obstante; que el método problémico no puede ni debe ser utilizado en todos los contenidos, pues se le da preferencia a aquellos en los que los objetivos demandan un nivel de asimilación productivo o creador.

2.7 ROL DEL PROFESOR

El profesor es el responsable directo de los aprendizajes de sus alumnos, el Marco de la Buena Enseñanza (2003) plantea que:

"Los docentes tienen un papel protagónico en el esfuerzo de la reforma educacional por mejorar los aprendizajes de todos nuestros estudiantes. Tal como lo demuestran diversas investigaciones, la calidad del desempeño de los docentes, entre otros factores, es uno de

los que tiene una alta incidencia en los logros de aprendizaje de los estudiantes" (pág. 39).

El profesor como mediador

El mediador del aprendizaje trata de desarrollar las capacidades potenciales (inteligencia como capacidad potencial) de un aprendiz, por medio de estrategias de aprendizaje. Y también las disposiciones básicas, tales como la motivación y la afectividad (valores / actitudes)

CAPITULO III: MARCO METODOLÓGICO

3.1 TIPO DE METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN REALIZADA

La presente investigación se caracteriza por tener un enfoque cualitativo, por que analiza características sin pretender una confirmación para la población, es decir el estudio es válido solo para la muestra seleccionada. También se considera el estudio de tipo cuantitativo en cuanto a la forma de recolección de los datos a través de un instrumento de evaluación formativa.

La investigación cuantitativa, es el estudio de experiencia práctica que más se aproxima a la investigación, ya que se realizó una intervención de enseñanza en el aula con diferentes métodos didácticos por parte de los investigadores, considerando una muestra de cuatro cursos de tercer año medio de dos liceos de la comuna de Maipú. Se aplicó una evaluación formativa a los estudiantes, se obtuvieron sus resultados que posteriormente se analizarán. De esta manera se recolectó información y posteriormente se realizará un análisis estadístico de la información respecto de los resultados que revelaron los estudiantes.

La investigación de tipo cuantitativa, *"es aquella en la que se recogen y analizan datos cuantitativos (que se pueden contar) sobre variables. La investigación cuantitativa utiliza técnicas como los cuestionarios, inventarios, encuestas, etc.; los cuales originan datos susceptibles de análisis estadísticos"* (Quevedo & Castaño, 2002)".

Por otra parte la metodología de estudio utilizada en esta investigación, es de carácter inductivo, tal como se expresa a continuación

"Generalmente asociado a investigaciones cuantitativas, consiste en establecer enunciados universales ciertos a partir de la experiencia, esto es, ascender lógicamente a través del conocimiento científico, desde la observación de los fenómenos o hechos de la realidad, a la ley universal que los contiene. Según este método, se admite que cada conjunto de hechos de la misma naturaleza está regido por una ley universal. El objetivo científico es enunciar esa ley universal partiendo de la observación de los hechos" (Tapia, 2002).

Para la realización del estudio consideramos interesante poder realizar intervenciones de enseñanza dentro del aula aplicando metodologías de enseñanza activa y pasiva y tomando en cuenta los niveles de aprendizaje que propone Van Hiele. La finalidad del estudio es generar una metodología de enseñanza que sea efectiva poniendo interés en las secciones cónicas.

Respecto de la muestra seleccionada se caracteriza por ser de tipo intencionada y no aleatoria, ya que no se pretende que sea un caso representativo dentro de la población, sino que solo se limita a el estudio de la muestra seleccionada y el tipo de investigación es correlacional por que la intención es medir las variables contempladas, estableciendo se grado de correlación y saber el comportamiento del concepto o la variable involucrada, el siguiente párrafo especifica esta idea

"La investigación correlacional… es un tipo de estudio que tiene como propósito evaluar la relación que existe entre dos o más conceptos, categorías o variables (en un contexto particular). Los estudios cuantitativos correlaciónales miden el grado de relación entre esas dos o más variables (cuantifica relaciones). Es decir, mide cada variable presuntamente relacionada y después mide y analiza la correlación. Tales correlaciones se expresan en hipótesis sometidas a prueba." (Hernández, 2003, pág. 121).

3.2 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño de la investigación se basa en el diseño experimental ya que tomamos cuatro muestras, seleccionando intencionadamente dos liceos de diferentes estratos sociales, donde se les aplica una intervención basada en la entrega de dos metodologías diferentes de un mismo contenido que en este caso es la elipse, y las diferentes metodologías son la pasiva y la activa. Luego de intervenir se evaluará lo aprendido por los estudiantes en estas dos clases, esta evaluación está basada en los niveles de Van Hiele, y se contrastaran estos diferentes resultados contrastando las variables metodología del profesor y el aprendizaje del alumno, y también contrastar los dos tipos de alumnos y cuál fue el nivel de aprendizaje alcanzado en estas situaciones.

"La investigación experimental consiste en la manipulación de una (o más) variable experimental no comprobada, en condiciones rigurosamente controladas, con el fin de describir de qué modo o por qué causa se produce una situación o acontecimiento particular. El experimento provocado por el investigador, le permite introducir determinadas variables de estudio manipuladas por él, para controlar el aumento o disminución de esas variables y su efecto en las conductas observadas." (Grajales).

3.3 RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

El estudio considera la muestra de dos liceos:

- Dos cursos de tercer año medio NM3 pertenecientes al Liceo Nacional de Maipú, ubicado en la comuna de Maipú y de carácter municipal

- Dos cursos de tercer año medio NM3 pertenecientes al Centro Técnico Profesional – CTP, ubicado en la comuna de Maipú y de carácter municipal

En la investigación exponemos una muestra no probabilística porque seleccionamos la muestra de manera intencional y solo se utiliza la muestra seleccionada, tal como se expresa a continuación, *"la muestra dirigida selecciona sujetos "típicos" con la vaga esperanza de que sean casos representativos de una población determinada".* (Hernádez Sampieri, Fernández Collao).
La muestra seleccionada supone un procedimiento de selección informal, en donde
"la elección de los elementos no depende de la probabilidad, sino de causas relacionadas con las características de la investigación o de quien hace la muestra. Aquí el procedimiento no es mecánico, ni con base en formulas de probabilidad, sino que

depende del proceso de toma de decisiones de una persona o de un grupo de personas y, desde luego, las muestras seleccionadas obedecen a otros criterios de investigación". (Hernádez Sampieri, Fernández Collao).

3.4 INSTRUMENTO DE MEDICIÓN

Para la recolección de la información se utilizaran los siguientes instrumentos de medición, los cuales servirán para analizar las variables del diseño propuesto anteriormente.

Evaluación formativa:

La evaluación formativa se utilizará para recopilar la información, recurso que servirá para realizar un análisis del logro de los objetivos propuestos si es que fueron o no cumplidos en el asunto pedagógico que se proyectó. Además permitirá decidir qué aspectos de los métodos utilizados u otra variable involucrada debe ser mejorada.

Es importante señalar que en la evaluación los estudiantes deberán responder a preguntas que se limitan a la clase propuesta y el aprendizaje de los contenidos desarrollados en la clase.

Cuestionario:

"En el cuestionario cerrado, las preguntas marcan al encuestado una determinada forma de respuesta y una cantidad limitada de selección de respuestas. Los cuestionarios cerrados se utilizan para obtener información factual, valorar el acuerdo o el desacuerdo respecto de una propuesta, conocer la postura del encuestado respecto de una serie de juicios, etc." (ec.europa.eu)

El cuestionario se aplicara a los estudiantes luego de que se haya realizado la clase, por tanto a través de este instrumento se obtendrán datos relevantes para saber la percepción de los estudiantes en cuanto a la metodología propuesta. Además se analizarán las respuestas de acuerdo a las dos muestras consideradas en este estudio, es decir los estudiantes del nivel NM3.

3.5 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Para la realización de un análisis más detallado de la investigación, se utilizan los instrumentos mencionados anteriormente, además se recurre a una evaluación cuantitativa para comparar los resultados de los aprendizajes logrados por los estudiantes, para luego mostrar gráficamente los datos se interpretan los resultados respecto de los objetivos propuestos para llevar a cabo la aplicación de las clases.

En este estudio se considera la intervención por parte del grupo de investigadores durante el proceso de aplicación de las metodologías de enseñanza dentro del aula. Por tanto se presenta información muy valiosa para el lector, además de contribuir a la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

CAPITULO IV: IMPLEMENTACION DE LAS METODOLOGIAS DISEÑADAS PARA EL ESTUDIO

4.1 PLANIFICACIÓN DIDÁCTICA

ASIGANTURA : Matemáticas

CURSO : Plan diferenciado de 3°año medio

UNIDAD TEMÁTICA 2: Lugares Geométricos

LOGRO: Aplicar los conceptos previos de distancia, el Teorema de Pitágoras, Cuadrado de binomio, lenguaje algebraico para el análisis de la geometría analítica y los lugares geométricos.

HORAS SEMANALES : 3

EVALUACIÓN : Mínima calificación aprobatoria 60%

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTENIDOS	METODOLOGÍA	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE
Lugares Geométricos: Reconocer que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas.	• Distancia entre dos puntos. • La circunferencia, la Parábola, La Elipse, y La Hipérbola como lugar geométrico. • Deducción de la Ecuación general con centro en el origen de los cuatro lugares geométricos • Ecuación General de la circunferencia, Parábola, Elipse e Hipérbola.	Activo-participativa Inductiva Indagatoria Analítico Deductiva	Desarrollan guías donde deben aplicar distancia entre dos puntos. Deducción de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen. Deducción de la ecuación de la circunferencia trasladada. Resuelven gráficamente problemas con circunferencias, rectas y parábolas. Desarrollan guía de ejercitación. Buscan en Biblioteca ejercitación relativa al tema.

TRANSVERSALIDAD	RECURSOS	EVALUACIÓN	TIEMPO
Valorar los aportes del medio en que se vive y reconocer el uso de la teoría en la solución de problemas históricos cotidianos. Valorar la búsqueda de información en Biblioteca, como forma de auto aprendizaje e investigación. Valorar el estudio de la Geometría Analítica como una aportación a la Física Astronómica.	Ordenador. www.eduteka.org www.sectormatemática.cl “Módulos Instalables de Análisis y aprendizaje” Guías de aprendizaje. Cuaderno de Clase. Módulos de Aprendizaje. Pizarra electrónica Material Bibliográfico relativo al contenido.	EVALUACIÓN ESCRITA Resuelven ejercitación sobre geometría Analítica.	Septiembre

Esta es la planificación ideal de la unidad de “Los lugares geométricos”, con la que se orienta el desarrollo de la experiencia de aprendizaje de la elipse.

4.2 ANTECEDENTES DE LOS ESTABLECIMIENTOS

Ambos establecimientos se encuentran actualmente en toma indefinida, esto debido a la contingencia social que ocurre en ese momento, debido a periodo de revolución estudiantil por la educación, esto provoca la baja asistencia en gran parte de los establecimientos educacionales en Chile.

4.2.1 Liceo Nacional de Maipú

Dirección: Avenida Portales 2471

Comuna: Maipú-Santiago Chile

Teléfonos: 56(2)5852308/5852309/5852311

Pagina Web: www.liceonacionaldemaipu.cl

Matricula: 1700 alumnos

Cursos: 7°básico a 4°año medio

Tipo: Liceo de varones, científico- humanista

Modalidad: Jornada escolar completa

Director: Carlos Fernández López

Visión y Misión de Liceo Nacional de Maipú

- Visión: Constituirse en un establecimiento educacional líder de la comuna, de excelencia académica, que desde el ámbito público brinde la posibilidad de acceso a la educación superior a la población escolar de Maipú en igualdad de condiciones.
- Misión: Desarrollar una formación integral, basada en capacidades, destrezas, conocimientos y habilidades que apuntan a la excelencia académica para ingresar a la universidad.

Resultados SIMCE

AÑO/AREA	LENGUAJE	MATEMATICA	NATURALEZA	SOCIEDAD
2006 2°Medio	320	346	-	-
2007 8°Básico	309	322	321	313
2008 2°Medio	312	335	-	-
2009 8°Básico	306	324	332	308
2010 2°Medio	311	340	-	-

Los 25 mejores resultados PSU de colegios Municipales
Enviado por José Antonio Vergara
Diciembre 22, 2008

El siguiente es el listado de los 25 colegios Municipales del país con mejor puntaje PSU 2008. Los datos están basados en la información oficial entregada por el DEMRE[11] y corresponde al promedio de la PSU de Lenguaje y Matemática. El listado es encabezado por el Instituto Nacional de Santiago, que se ubicó en el lugar 11 a nivel nacional.

[11] **DEMRE**: Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional.

En el Liceo Nacional de Maipú es un establecimiento Municipal, de excelencia académica, donde asisten 1700 estudiantes varones, consta con una disciplina de rigor. En estos momentos se encuentra en toma por lo que actualmente se encuentra cumpliendo sus funciones de enseñanza en otro establecimiento que es la Escuela Básica San Martin, debido a la contingencia social que ocurre en el momento los estudiantes han tenido que adecuarse a los recursos del establecimiento.

	ESTABLECIMIENTO	LUGAR	PUNTAJE PSU 2008
1	Instituto nacional	Santiago	678,9
2	Liceo Carmela Carvajal de Prat	Providencia	655,0
3	Liceo Republica de Siria	Ñuñoa	641,0
4	Liceo José Victorino Lastarria	Providencia	634,6
5	Liceo Augusto D´Halmar	Ñuñoa	632,2
6	Liceo N°1 Javiera Carrera	Santiago	626,3
7	Liceo Nacional	Maipú	618,9
8	Internado Nac. Femenino Carmela Silva	Ñuñoa	613,2
9	Liceo N°7 de niñas de Providencia	Providencia	608,9
10	Liceo de Aplicación A-9	Santiago	604,7
11	Liceo Juan Bautista Contardi	Punta Arenas	603,8
12	Liceo Municipal Amanda Labarca	Vitacura	592,1
13	Liceo Polivalente Arturo Alessandri Palma	Providencia	585,9
14	Liceo Andres Bello	San Miguel	583,1
15	Liceo A-10 Manuel Barros Borgoño	Santiago	578,8
16	Liceo Abate Molina	Talca	877,8
17	Liceo lenka Franulic	Ñuñoa	574,2
18	Internado Nacional Barros Arana	Santiago	564,8
19	Colegio Republica del Brasil	Concepción	562,9
20	Colegio San Francisco del Alba	las Condes	560,4
21	Liceo Teresa Prats de Sarratea	Santiago	557,7
22	Liceo Italia	Chaitén	557,6
23	Liceo Rector Armando Robles Rivera	Valdivia	557,0
24	Liceo Oscar Castro Zúñiga	Rancagua	556,9
25	Liceo Luis Cruz Martínez	Calama	555,6

4.2.2 Centro Técnico Profesional

En el Centro Técnico Profesional se efectúa la clase pasiva en el tercer año medio B con la unidad de las cónicas: La elipse basada en los niveles de Van Hiele. Se da inicio poniendo aprendizaje y objetivo de la clase. Introducimos la clase comentando un poco del descubrimiento de la historia de la elipse, de aplicación de Kleper en el sistema solar basada en la elipse, se explica a grandes rasgos el trazo del jardinero.

Se inicia la clase mostrando que la elipse se forma por la intersección de un cono y un plano en forma oblicua, se define la elipse como lugar geométrico y sus elementos, se hace la deducción de la elipse, mediante la aplicación de la definición con los conceptos de distancia entre dos puntos.

Se explican algunos ejemplos, en lo que se tuvo que detener para reforzar el teorema de Pitágoras y el cuadrado de binomio, donde muchos alumnos no recordaban o no poseían los conocimientos previos, puesto que no fueron entregados en su debido tiempo de enseñanza.

Los estudiantes se veían muy interesados, existía un ambiente de respeto, realizaban preguntas de los ejemplos haciendo relación a los elementos y a la ecuación canónica de la elipse, lo que se le hace un refuerzo a partir de la pregunta realizada.

Dirección: Segunda Transversal N°1900

Comuna: Maipú-Santiago Chile

Teléfonos: (2) 5852312

Contacto: mmuñoz@codeduc.cl

Matricula: 1280 alumnos

Cursos: 1°Básico a 4° Medio

Tipo: Liceo Mixto, Técnico Profesional

Modalidad: Jornada escolar completa

AÑO/AREA	LENGUAJE	MATEMATICA	NATURALEZA	SOCIEDAD
2009 4°Básico	233	194	202	-
2009 8°Básico	206	220	213	216
2009 2°Medio	234	220	-	-

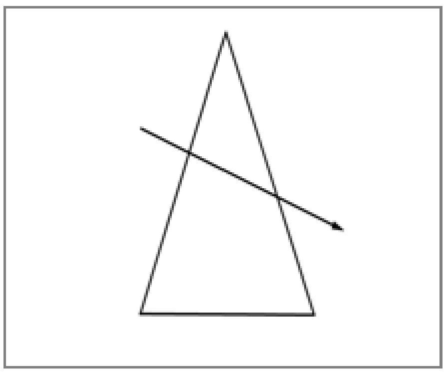
(SIMCE; MINISTERIO DE EDUCACION)

4.3 Método Pasivo y Activo aplicada en la investigación.

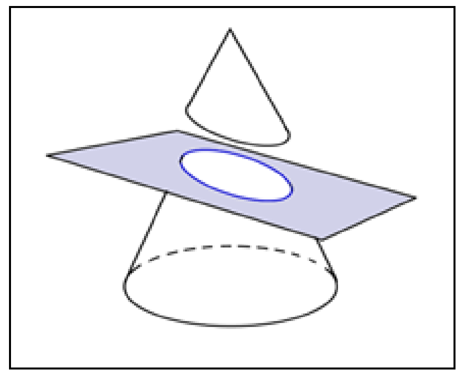
4.3.1 Desarrollo y Análisis de la aplicación del Método Pasivo.

Clase Pasiva

La Elipse se genera cuando un plano corta en forma oblicua a la base de un cono circular.



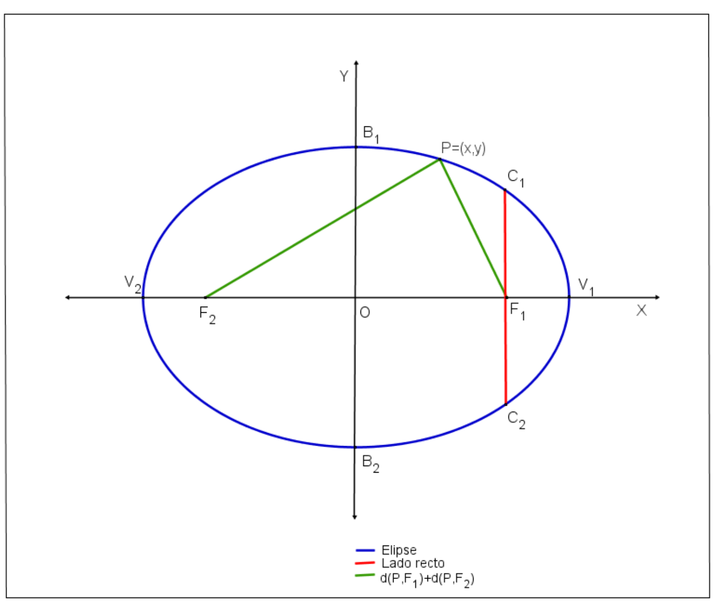
Vista lateral del cono



Cono interceptado con el plano

Definición: una Elipse es una curva cerrada y plana que corresponde al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos puntos fijos del plano, se llaman focos y se designan por F_1 y F_2 Entonces se cumple que la distancia desde el punto $P=(x,y)$ a los focos F_1 y F_2.

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=\text{constante}$$



Definición de Lugar Geométrico

Se denomina lugar geométrico al conjunto de los puntos del plano que satisfacen una determinada propiedad. Dicha propiedad se enuncia habitualmente en términos de distancias a puntos, rectas o circunferencias fijas en el plano y/o en términos del valor de un ángulo.

En muchas ocasiones, los lugares geométricos que satisfacen una propiedad dada son elementos sencillos (una recta, una circunferencia, una curva cónica), mientras que en otras ocasiones pueden corresponderse con trazados mucho más complejos.

Ejemplos de lugares geométricos elementales son la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo, una circunferencia, una recta paralela a otra. También las curvas cónicas se pueden considerar como lugares geométricos. Así una elipse es el lugar geométrico de la suma de las distancias de un punto a dos dados (los focos) que es constante.

Los elementos de la elipse son:

Focos (F) : son los puntos fijos F_1 y F_2: $F_1=(c,0), F_2=(-c,0)$

Recta Focal: la recta $\overleftrightarrow{V_1V_2}$ a la que pertenecen los focos: $V_1=(a,0), V_2=(-a,0)$

Recta Secundaria: la simetral $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ del segmento F_1 y F_2: $B_1=(0,-b), B_2=(0,b)$

Centro(O) : punto de intersección de las rectas focal y secundaria que equidista de los focos

Vértices(V) : puntos de intersección de la elipse con la recta focal se designan por V_1yV_2

Semieje Mayor: segmento $\overline{V_1V_2}$ que se considera de longitud $2a$; a es el valor del semieje mayor.

Semieje Menor: segmento de la recta secundaria interceptada por la elipse. Se considera de longitud $2b$; b es el valor del semieje menor.

Distancia focal: longitud del segmento $\overline{F_1F_2}$ es $2c$.

Lado recto: Segmento de recta perpendicular al eje mayor, contiene a un foco (Cualquiera de los dos) y sus extremos se localizan sobre la elipse. La longitud del lado recto se denomina **Ancho focal**

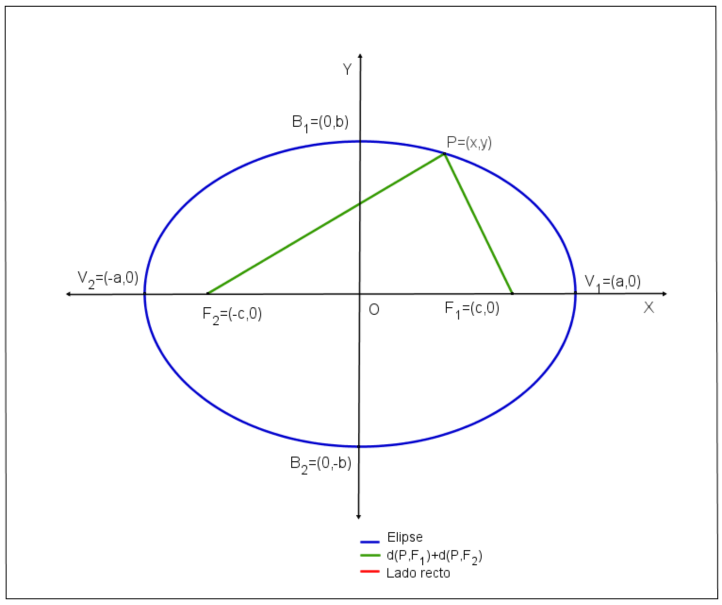
Las coordenadas del lado recto son: C_1=(c, y) y C_2=(c,-y) y su medida es $\frac{2b^2}{a}$

Demostración de la ecuación de la elipse con centro en el origen.

La ecuación de la elipse con centro en el origen, también es llamada la ecuación canónica con orientación horizontal.

Para poder encontrar la ecuación de la elipse, expresaremos las distancias entre $P=(x,y)$ y los focos $F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$ en función de sus coordenadas.

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$



Luego para demostrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen utilizaremos el concepto de distancia entre dos puntos del plano,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Tomando en cuenta los puntos $F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}=2a$$

Despejamos una la raíz de la izquierda

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}$$

Elevando al cuadrado toda la expresión

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes, nos queda

$$2xc=4a^2-4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}-2xc$$

Sumando términos semejantes

$$xc=a^2-a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

Luego elevando al cuadrado ambas expresiones

$$\left(xc-a^2\right)^2=\left(-a\sqrt{(c-x)^2+y^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes nos queda

$$x^2c^2+a^4=a^2c^2+a^2x^2+a^2y^2$$

Utilizando el Teorema de Pitágoras, reemplazamos c por $a^2-b^2=c^2$

$$x^2\left(a^2-b^2\right)+a^4=a^2\left(a^2-b^2\right)+a^2x^2+a^2y^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes obtenemos

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo toda la expresión por a^2b^2 y simplificando obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por lo tanto, esta es la **ecuación canónica de la elipse con orientación horizontal.**

Observación 1: para saber si la orientación de la elipse es horizontal o vertical debemos fijarnos en la ecuación de la elipse:

- Si el denominador mayor esta debajo de x^2 la elipse es horizontal
- Si el denominador mayor esta debajo de y^2 la elipse es vertical

Observación 2: Dado que $a > b$, también $a^2 - b^2 = c^2$, entonces $a^2 - b^2 = c^2$ es un número positivo.

Ejemplos

1. Encontrar los elementos de la Elipse para la ecuación $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$

Solución:

Como la ecuación de la elipse es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Tomamos los denominadores de ecuación para encontrar el valor de a y b:

$$a^2 = 49 / \sqrt{\ } \qquad\qquad b^2 = 4 / \sqrt{\ }$$
$$a = \pm 7 \qquad\qquad b = \pm 2$$

Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de a y b, porque representan el valor de las distancias de los semiejes de la elipse.

Entonces los valores de semiejes de la elipse son:

Semieje mayor $2a = 2 \cdot 7 = 14$

Semieje menor: $2b = 2 \cdot 2 = 4$

Ahora calcularemos el valor de c que representa la distancia del foco. Recordemos que la distancia de un punto $P = (x, y)$ a los focos es igual al valor de todo el semieje mayor $2a = 14$

Utilizaremos el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de c .

Reemplazamos los valores de a y b:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$4 + c^2 = 49$$

$$c^2 = 49 - 4$$

$$c^2 = 45 / \sqrt{\ }$$

$$c = \pm 3\sqrt{5}$$

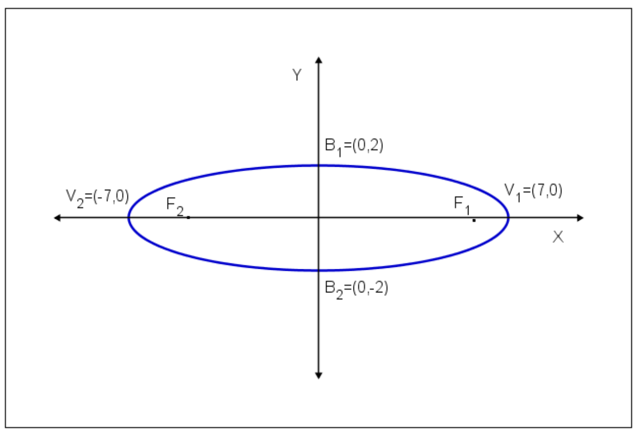
Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de c , porque representa el valor de la distancia focal de la elipse.

Entonces ahora podemos obtener las coordenadas de los focos con el valor de c

Focos: $F_1 = \left(3\sqrt{5}, 0\right)$ y $F_2 = \left(-3\sqrt{5}, 0\right)$

Vértices: $V_1 = (7,0)$ y $V_2 = (-7,0)$

Gráfica de elipse:



2. Obtén el valor de los ejes, vértices y gráfica de la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solución:

Debemos obtener la forma de la ecuación canónica de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Entonces, $4x^2 + 9y^2 = 36$

Dividiendo por 36 , $4x^2 + 9y^2 = 36 / \cdot \frac{1}{36}$

Queda la siguiente expresión $\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$

Simplificando, obtenemos la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Luego para saber si la orientación de la elipse es horizontal o vertical debemos fijarnos en la ecuación de la elipse:

- Si el denominador mayor esta debajo de x^2 la elipse es horizontal
- Si el denominador mayor esta debajo de y^2 la elipse es vertical

Recordemos que denotamos el semieje mayor con la letra a y semieje menor con letra b . Ahora calcularemos el valor de las distancias de los semiejes:

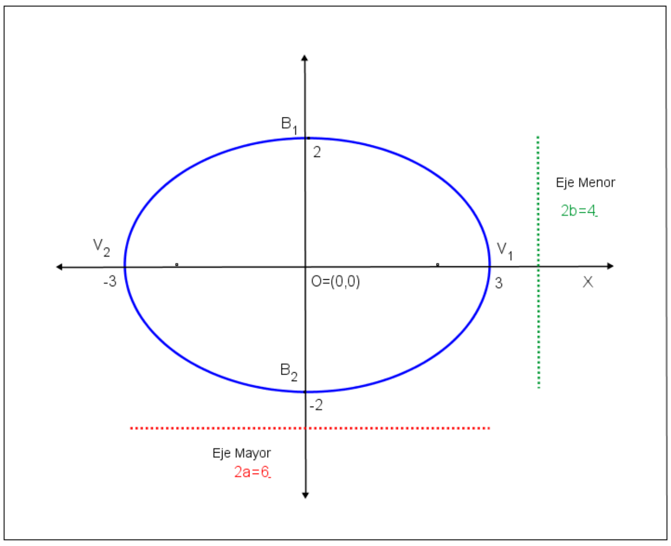
$$a^2 = 9 / \sqrt{\ } \qquad b^2 = 4 / \sqrt{\ }$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{9} \qquad\qquad \sqrt{b^2} = \sqrt{4}$$
$$a = \pm 3 \qquad\qquad b = \pm 2$$

Entonces tenemos que:

- El Centro de la Elipse es $C = (0,0)$ porque la ecuación canónica está centrada en origen.
- Semieje mayor: $2a = 2 \cdot 3 = 6$
- Semieje menor: $2b = 2 \cdot 2 = 4$

Luego para obtener los datos pedidos debemos graficar la elipse

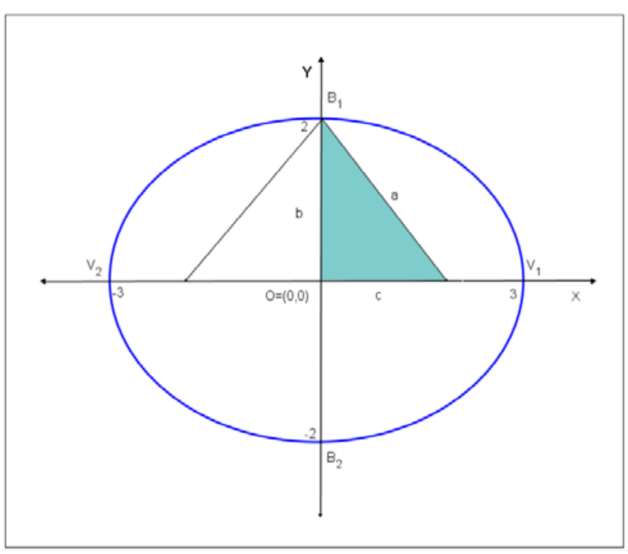


Por tanto podemos calcular las coordenadas de los vértices:

$$V_1 = (3,0)\,;\; V_2 = (-3,0)$$
$$B_1 = (0,2)\,;\; B_2 = (0,-2)$$

Ahora calcularemos el valor de c que representa la distancia del foco. Recordemos que la distancia de un punto $P = (x,y)$ a los focos es igual al valor de todo el semieje mayor $2a = 2 \cdot 3 = 6$

Entonces en la gráfica al hacer coincidir el punto $P = (x,y)$ con el eje menor se forman dos triángulos rectángulos congruentes, tomaremos solo uno para encontrar el valor de c utilizando el teorema de Pitágoras.



Aplicando el Teorema de Pitágoras

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Reemplazamos los valores del triangulo rectángulo

$$2^2 + c^2 = 3^2$$
$$4 + c^2 = 9$$
$$c^2 = 9 - 4$$
$$c^2 = 5 / \sqrt{\ }$$
$$c = \pm\sqrt{5}$$

Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de c , porque representa el valor de la distancia focal de la elipse.

Finalmente las coordenadas de los focos son: $F_1 = \left(\sqrt{5},0\right)$; $F_2 = \left(-\sqrt{5},0\right)$

4.3.1.1 Liceo Nacional de Maipú

En el Liceo Nacional, se realiza la clase con el método pasivo, en el tercer año medio E. El contenido es la unidad de las cónicas, pero solamente de la elipse. Se inicia la clase comunicando a los estudiantes el objetivo y aprendizajes esperados.

Introducimos la clase comentando brevemente la historia de la elipse, destacando a Kleper (científico matemático) con su descubrimiento en 1610 que los planetas giraban alrededor del sol, de modo que sus trayectorias son elípticas y el sol ocuparía uno de los focos (Planetas).

Se inicia la clase explicando y mostrando gráficamente que la elipse se forma por la intersección de un cono de base circular con un plano con inclinación oblicua, luego se define la elipse como lugar geométrico y se introduce el concepto de distancia desde un punto a los focos que es igual a una constante. Se muestra la elipse en el plano cartesiano, inmediatamente se define que es un lugar geométrico, luego se nombran y definen los elementos de la elipse. En seguida se deduce la ecuación de la elipse, tomando en cuenta el concepto de distancia entre dos puntos y el Teorema de Pitágoras.

En seguida se explican dos ejemplos, pero antes se recuerdan conocimientos previos vistos en cursos anteriores como el teorema de Pitágoras mencionado anteriormente y el desarrollo del cuadrado de binomio. Se les presenta a los estudiantes ejemplos considerando los niveles de aprendizaje de Van Hiele, en donde las preguntas de los ejemplos refuerzan conceptos de la elipse, gráfica de la elipse con sus elementos y el uso la ecuación de la elipse con centro en el origen, todo relacionado con lo expuesto en la clase.

Respecto del ambiente de la clase, los alumnos se mostraron muy interesados, se genero un ambiente de respeto, los estudiantes realizaban preguntas relacionadas con los ejemplos que se les propuso en clase, como la ubicación de elementos de la elipse, la ecuación de la elipse. Se aprovechan estas instancias para reforzar conceptos importantes.

4.3.1.2 Centro Técnico Profesional

En el Centro Técnico Profesional se efectúa la clase pasiva en el tercer año medio B con la unidad de las cónicas: La elipse basada en los niveles de Van Hiele. Se da inicio poniendo aprendizaje y objetivo de la clase. Introducimos la clase comentando un poco del descubrimiento de la historia de la elipse, de aplicación de Kleper en el sistema solar basada en la elipse, se explica a grandes rasgos el trazo del jardinero.

Se inicia la clase mostrando que la elipse se forma por la intersección de un cono y un plano en forma oblicua, se define la elipse como lugar geométrico y sus elementos, se hace la deducción de la elipse, mediante la aplicación de la definición con los conceptos de distancia entre dos puntos.

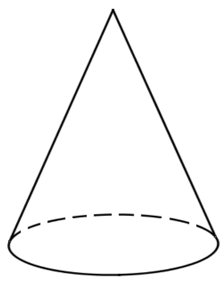
Se explican algunos ejemplos, en lo que se tuvo que detener para reforzar el teorema de Pitágoras y el cuadrado de binomio, donde muchos alumnos no recordaban o no poseían los conocimientos previos, puesto que no fueron entregados en su debido tiempo de enseñanza.

Los estudiantes se veían muy interesados, existía un ambiente de respeto, realizaban preguntas de los ejemplos haciendo relación a los elementos y a la ecuación canónica de la elipse, lo que se le hace un refuerzo a partir de la pregunta realizada.

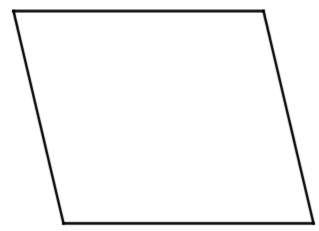
4.3.2 Desarrollo y Análisis de la aplicación del Método Activo.

Clase Activa

<u>Cónicas</u>: Sección de un cono



+



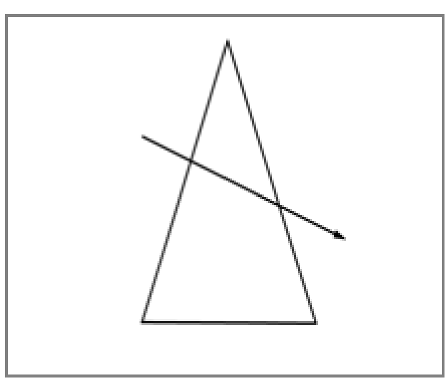
Cono de base Circular

Plano

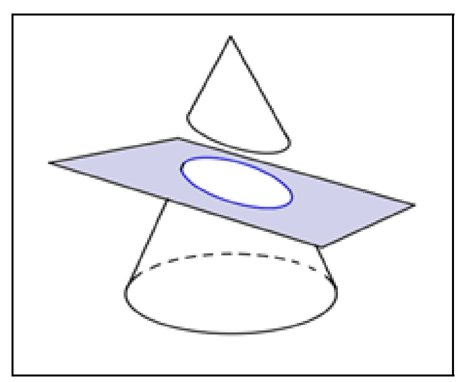
Una cónica es una figura que se obtiene al cortar un cono de base circular con un plano. El plano puede tener varias inclinaciones las que al cortar el cono originan varias figuras como la Circunferencia, Elipse, Parábola, Hipérbola.

En este caso estudiaremos solo la Elipse.

La Elipse se genera cuando el plano corta en forma oblicua a la base



Vista lateral del cono



Cono interceptado con plano

Ahora construiremos la curva que se genero donde utilizaremos los siguientes materiales:

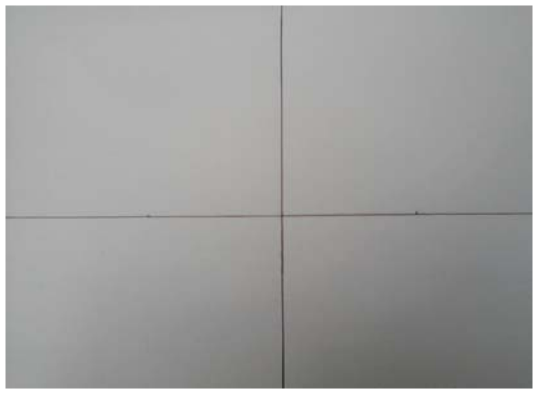
-1 hoja de block

-2 chinches con punta

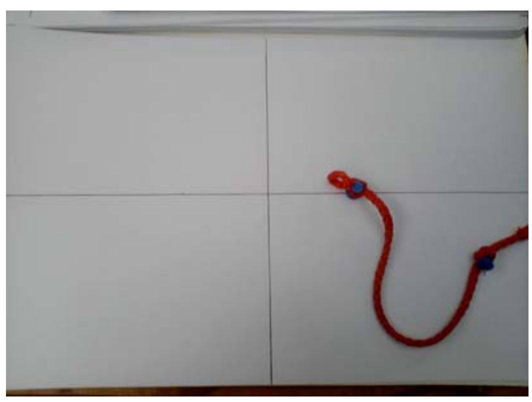
-Cáñamo

Construcción de la Elipse

Realizaremos el trazado de una elipse, para ello tomamos una hoja de papel y la dividimos en dos partes iguales, trazando dos rectas una vertical y otra horizontal que se cortan en el punto o centro de la hoja, entonces se forman ángulos rectos.

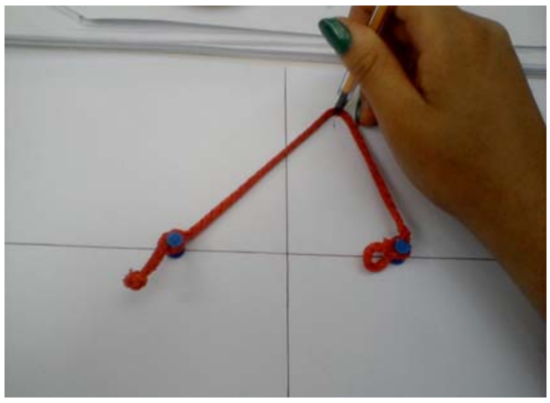


Marcamos dos puntos en la recta horizontal y que estén en la misma distancia del punto que llamaremos centro en donde se interceptan las dos rectas que se dibujaron.

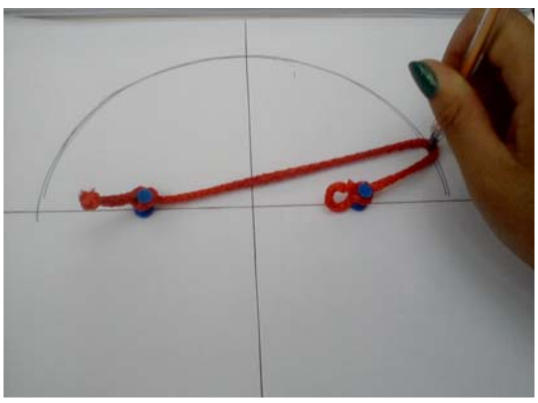


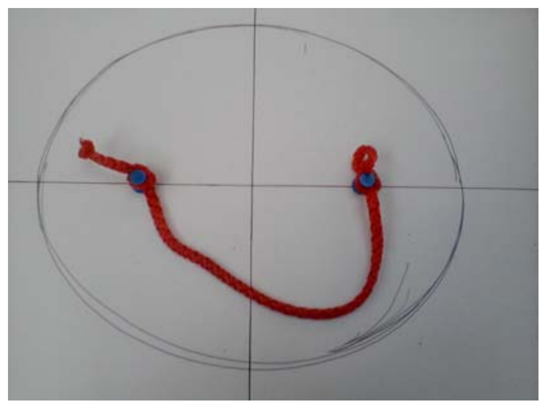
Luego se deben insertar los chinches en los puntos marcados anteriormente. Tomamos una cuerda que vamos a sujetar a dos chinches en sus extremos y los vamos a clavar en los puntos que marcamos, estos deben quedar bien fijos.

Después tomamos un lápiz y con él realizamos el dibujo que resulta al tensar la cuerda todo el tiempo sin soltar el lápiz, tal como se muestra en la figura.

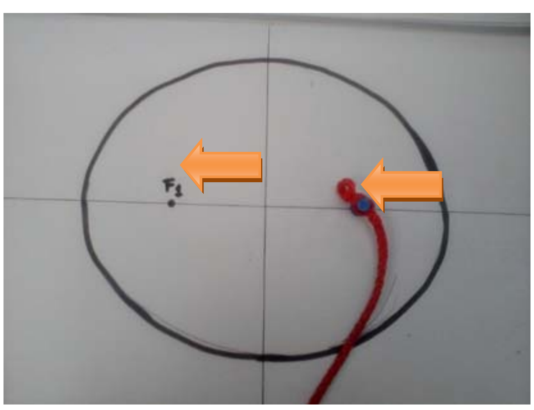


Deslizamos el lápiz hacia arriba procurando que la cuerda este siempre tensada y luego se hace lo mismo hacia abajo obteniendo como resultado la elipse, tal como se muestra en la figura.





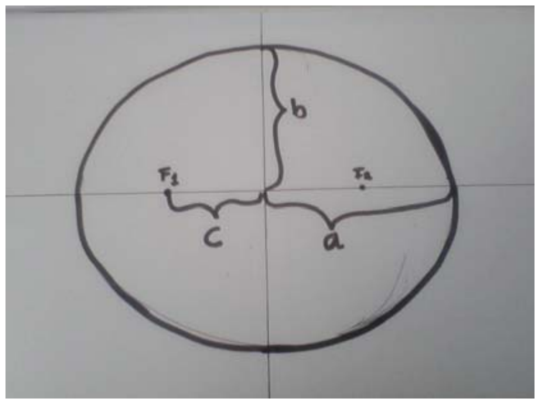
Luego remarcamos la elipse y anotamos los elementos principales de la elipse. El punto se va llamar centro de elipse y la vamos denominar con la letra O. Los dos puntos que se ha sujeto la cuerda van representar los focos F_1 y F_2



Los puntos más lejanos de la elipse se van llamar vértice

Si ponemos la cuerda recta y tensa desde el vértice 1 al vértice 2 esa distancia representa el semieje mayor denotado como $2a$. Entonces desde V_1 al centro se llama a y desde V_2 al centro también.

La suma de las distancia a dos puntos fijos llamados focos es siempre la misma constante igual $2a$.



Si tomamos un punto cualquiera de la elipse, la suma de la distancia que existe desde el punto $P=(x,y)$ cualquiera a los focos F_1 y F_2 es la misma distancia que hay entre el vértice 1 y el vértice 2.

-La distancia que existe desde B_2 a B_1 se llama $2b$ y se conoce con el nombre semieje menor. Entonces desde B_2 al centro se llama b y desde B_1 al centro se llama igual.

La distancia F_1 y F_2 va ser $2c$ y se conoce como distancia focal. Entonces desde F_1 al centro se llama c y desde F_2 al centro se llama igual.

En resumen los elementos de La Elipse son:

Centro de la elipse: O= (0,0)

Focos: $F_1=(c,0)$; $F_2=(-c,0)$

Vértices: $V_1=(a,0)$; $V_2=(-a,0)$, $B_1=(0,b)$; $B_2=(0,-b)$

-La distancia que hay del V_1 a V_2 se conoce con el nombre de **Semieje mayor** y es igual a $2a$

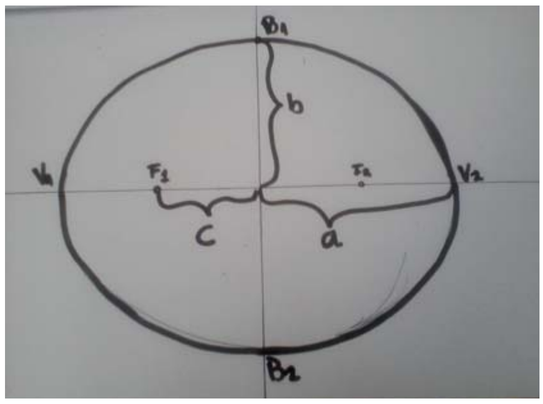
-La distancia que hay desde B_1 a B_2 se conoce con el nombre **Semieje menor** y es igual a $2b$

-La distancia F_1 *y* F_2 va ser $2c$ y se conoce con el nombre de **Distancia focal**

-Lado recto: Segmento de recta perpendicular al eje mayor, contiene a un foco (Cualquiera de los dos) y sus extremos se localizan sobre la elipse. La longitud del lado recto se denomina **Ancho focal**

Las coordenadas del lado recto son: $C_1=(c,y)$ y $C_2=(c,-y)$ y su medida es $\frac{2b^2}{a}$

La construcción final que obtenemos de la elipse es la siguiente:



Ahora construiremos la definición de elipse.

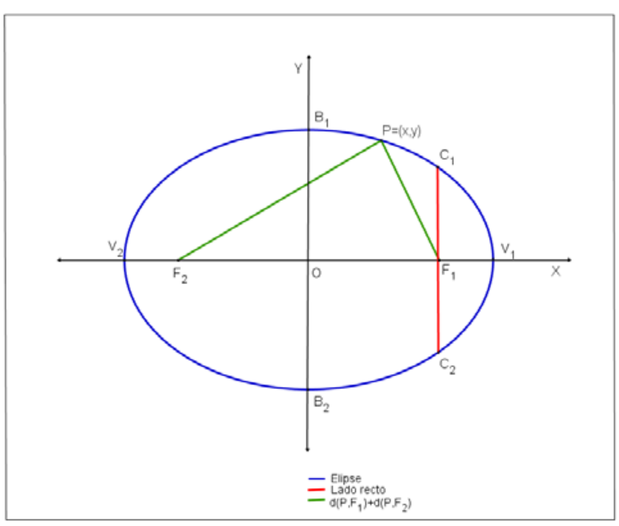
La elipse es una curva cerrada y plana que corresponde al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos puntos fijos del plano, se llaman focos y se designan por F_1 y F_2 .

Entonces se cumple que la distancia desde el punto $P=(x,y)$ a los focos F_1 y F_2 es igual a $2a$.

$$d\left(P,F_1\right)+d\left(P,F_2\right)=2a$$

La construcción anterior la podemos ubicar en el plano cartesiano, en que nos podemos dar cuenta con más detalle de las coordenadas de vértices y focos.

Ahora que conocemos las coordenadas de los focos, demostraremos la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen. A continuación tenemos la grafica de la elipse con todos sus elementos con sus coordenadas respectivas.



Luego para demostrar la ecuación de la elipse con centro en el origen utilizaremos la siguiente expresión de distancia entre dos puntos del plano. Para esto necesitaremos las coordenadas de los focos y del punto P.

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

Coordenadas de focos: $F_1=\left(c,0\right)$ y $F_2=\left(-c,0\right)$ y coordenadas de punto $\mathrm{P}=\left(\mathrm{x,y}\right)$

Por demostrar: $d\left(P,F_1\right)+d\left(P,F_2\right)=2a$

Tomaremos los puntos $F_1=\left(c,0\right)$; $P=\left(x,y\right)$ y $F_2=\left(-c,0\right)$; $P=\left(x,y\right)$

Reemplazamos los puntos en expresión de distancia

$$\sqrt{\left(x+c\right)^2+\left(y-0\right)^2}+\sqrt{\left(c-x\right)^2+\left(0-y\right)^2}=2a$$

Despejamos una la raíz de lado izquierdo

$$\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=2a-\sqrt{\left(c-x\right)^2+\left(0-y\right)^2}$$

Elevando al cuadrado toda la expresión

$$\left(\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{\left(c-x\right)^2+\left(0-y\right)^2}\right)^2$$

Recordando que el cuadrado de binomio es $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes, nos queda

$$2xc=4a^2-4a\sqrt{\left(c-x\right)^2+y^2}-2xc$$

Sumando términos semejantes

$$xc=a^2-a\sqrt{\left(c-x\right)^2+y^2}$$

Luego elevando al cuadrado ambas expresiones

$$\left(xc-a^2\right)^2=\left(-a\sqrt{\left(c-x\right)^2+y^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes nos queda

$$x^2c^2+a^4=a^2c^2+a^2x^2+a^2y^2$$

Ahora reemplazamos c por $a^2-b^2=c^2$

Nota:

$$x^2\left(a^2-b^2\right)+a^4=a^2\left(a^2-b^2\right)+a^2x^2+a^2y^2$$

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividiendo toda la expresión por a^2b^2 y simplificando obtenemos la Ecuación canónica de la elipse con centro en el origen y orientación horizontal.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Por lo tanto, esta es la **ecuación canónica de la elipse con orientación horizontal.**

Observaciòn1: para saber si la orientación de la elipse es horizontal o vertical debemos fijarnos en la ecuación de la elipse:

- Si el denominador mayor esta debajo de x^2 la elipse es horizontal
- Si el denominador mayor esta debajo de y^2 la elipse es vertical

Observación 2: Dado que $a > b$, también $a^2 - b^2 = c^2$, entonces $a^2 - b^2 = c^2$ es un número positivo.

Ejemplos:

1. Encontrar los elementos de la Elipse para la ecuación $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$

Solución:

Como la ecuación de la elipse es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Tomamos los denominadores de ecuación para encontrar el valor de a y b:

$$a^2 = 49 / \sqrt{\ } \qquad\qquad b^2 = 4 / \sqrt{\ }$$
$$a = \pm 7 \qquad\qquad b = \pm 2$$

Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de a y b, porque representan el valor de las distancias de los semiejes de la elipse.

Entonces los valores de semiejes de la elipse son:

Semieje mayor $2a = 2 \cdot 7 = 14$

Semieje menor: $2b = 2 \cdot 2 = 4$

Ahora calcularemos el valor de c que representa la distancia del foco. Recordemos que la distancia de un punto $P = (x, y)$ a los focos es igual al valor de todo el semieje mayor $2a = 14$

Utilizaremos el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de c.

Reemplazamos los valores de a y b:

$$b^2 + c^2 = a^2$$
$$4 + c^2 = 49$$
$$c^2 = 49 - 4$$
$$c^2 = 45 / \sqrt{\ }$$
$$c = \pm 3\sqrt{5}$$

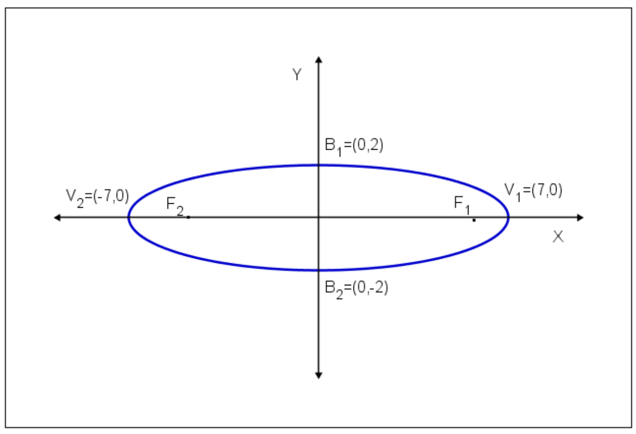
Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de c , porque representa el valor de la distancia focal de la elipse.

Entonces ahora podemos obtener las coordenadas de los focos con el valor de c

Focos: $F_1 = \left(3\sqrt{5},0\right)$ y $F_2 = \left(-3\sqrt{5},0\right)$

Vértices: $V_1 = (7,0)$ y $V_2 = (-7,0)$

Gráfica de elipse:



2. Obtén el valor de los ejes, vértices y gráfica de la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solución:

Debemos obtener la forma de la ecuación canónica de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Entonces, $4x^2 + 9y^2 = 36$

Dividiendo por 36 , $4x^2 + 9y^2 = 36 / \cdot \frac{1}{36}$

Queda la siguiente expresión $\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$

Simplificando, obtenemos la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Luego para saber si la orientación de la elipse es horizontal o vertical debemos fijarnos en la ecuación de la elipse:

- Si el denominador mayor esta debajo de x^2 la elipse es horizontal
- Si el denominador mayor esta debajo de y^2 la elipse es vertical

Recordemos que denotamos el Semieje mayor con la letra a y Semieje menor con letra b. Ahora calcularemos el valor de las distancias de los semiejes:

$$a^2 = 9 / \sqrt{\ } \qquad\qquad b^2 = 4 / \sqrt{\ }$$

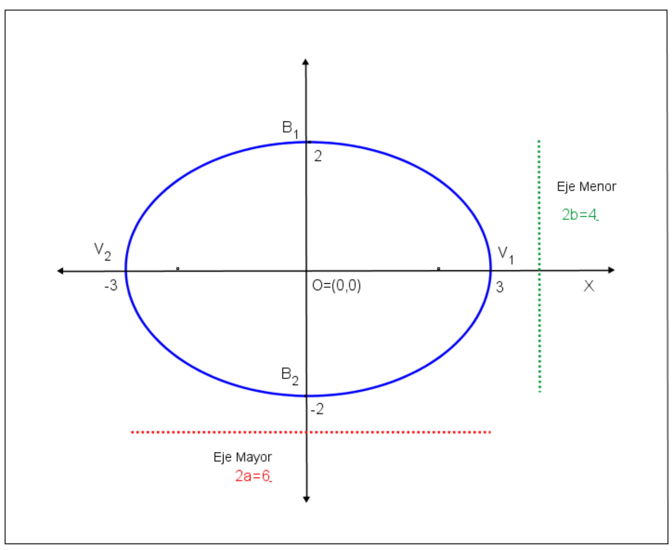
$$\sqrt{a^2} = \sqrt{9} \qquad\qquad \sqrt{b^2} = \sqrt{4}$$

$$a = \pm 3 \qquad\qquad b = \pm 2$$

Entonces tenemos que:

- El Centro de la Elipse es $C = (0,0)$ porque la ecuación canónica está centrada en origen.
- Semieje mayor: $2a = 2 \cdot 3 = 6$
- Semieje menor: $2b = 2 \cdot 2 = 4$

Luego para obtener los datos pedidos debemos graficar la elipse



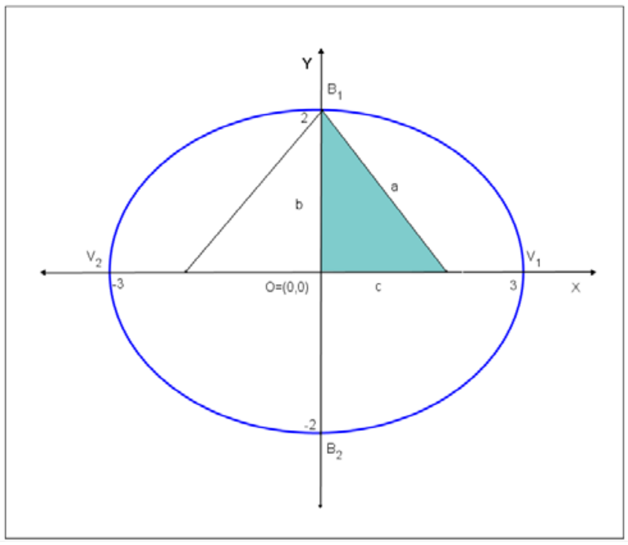
Por tanto podemos calcular las coordenadas de los vértices:

$$V_1 = (3,0);\ V_2 = (-3,0)$$

$$B_1 = (0,2);\ B_2 = (0,-2)$$

Ahora calcularemos el valor de c que representa la distancia del foco. Recordemos que la distancia de un punto $P = (x, y)$ a los focos es igual al valor de todo el semieje mayor $2a = 2 \cdot 3 = 6$

Entonces en la gráfica al hacer coincidir el punto $P = (x, y)$ con el semieje menor se forman dos triángulos rectángulos congruentes, tomaremos solo uno para encontrar el valor de c utilizando el teorema de Pitágoras.



Aplicando el Teorema de Pitágoras

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Reemplazamos los valores del triangulo rectángulo

$$2^2 + c^2 = 3^2$$
$$4 + c^2 = 9$$
$$c^2 = 9 - 4$$
$$c^2 = 5 / \sqrt{\ }$$
$$c = \pm\sqrt{5}$$

Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de c , porque representa el valor de la distancia focal de la elipse.

Finalmente las coordenadas de los focos son: $F_1 = \left(\sqrt{5},0\right)$; $F_2 = \left(-\sqrt{5},0\right)$

4.3.2.1 Liceo Nacional de Maipú

En el Liceo Nacional de Maipú se realizó la clase activa en el tercer año B, especificando los objetivos y aprendizaje esperados de la clase en forma oral y escrita en la pizarra al principio de la clase. Presentamos el contenido de elipse mostrando una presentación en prezi donde hay un video incorporado, de los tipos de cónicas que resulta al interceptar un plano en un cono, logrando una buena recepción en los alumnos donde se capta la atención y motivación en el desarrollo de la presentación, se les explica a grandes rasgos de la teoría de Kepler y los alumnos preguntan si todas las trayectorias de los planetas son iguales, se respondió a la interrogante del estudiante que no ya que solo los planetas cercanos al sol tienen esta trayectoria elíptica, también se explico la relación la elipse y el trazado del jardinero, un estudiante pregunto un ejemplo en la vida real del trazado del jardinero, por tanto la respuesta que se entrego fue la plaza de San Pedro del Vaticano.

Para la construcción se trabajo con los materiales que se le entregaron a los estudiantes que fueron una hoja de block marcada en cuatro formando ángulos rectos, dos chinches amarrados con una pitilla y un lápiz grafito, en esta etapa se generó una gran interacción entre los alumnos y del profesor a los alumnos en un ambiente de colaboración entre los actores presentes, se desarrolló la construcción poniendo dos colgadores a presión amarrados entre ellos con una pitilla en la pizarra, se comenzó dibujando la elipse con el plumón, tensando la cuerda que a sujetan los chupones, los estudiantes realizan el mismo procedimiento pero con los materiales entregados ,se encontraban muy motivados que preguntaban qué pasos tenían que seguir, empezaron a identificar los elementos de la elipse, construyendo la definición de la elipse, realizando la demostración de la elipse en conjunto, lo que con llevo a una participación activa de los estudiantes, puesto que aportaban con los conocimientos anteriores como la definición de distancia, el Teorema de Pitágoras y cuadrado de binomio, se realizaron algunos ejemplos en donde les resultó fácil la comprensión de ellos, pero aún así preguntaban los elementos de la elipse.

4.3.2.2 Centro Técnico Profesional

En el Centro Técnico Pedagógico se realiza la clase activa en el tercer año A, especificando los objetivos y aprendizaje esperados de la clase en forma oral y escrita en la pizarra. Presentamos el contenido de elipse mostrando una presentación en prezi y el video donde se muestra un cono interceptado por un plano de diferentes formas donde se obtienen distintas cónicas, se puede observar que la atención de los estudiantes es mayor, se les explica en grandes rasgos la teoría de Kepler y la relación con la elipse, un estudiante pregunta durante la clase, ¿Todos los panetas hacen el mismo recorrido? Se les responde al estudiante que los planetas más cercanos al sol tienen orbitas elípticas, se explica el trazado del jardinero y surge otras interrogantes ¿hay en Chile lugares con forma elíptica?, se les responde que si como la mina de Chuquicamata tiene forma elíptica, ¿existen estadios con forma elíptica? El estadio de Italia Giuseppe Meazza, y en Chile la pista de maratón, ciclismo en el estadio Nacional son elípticas.

Los estudiantes quedaron impresionados con el tipo de metodología usada lo que fue fácil captar la atención y motivación de ellos.

Para la construcción se trabaja con los materiales que se le entregan a los estudiantes que son una hoja de block marcada en cuatro formando ángulos rectos, dos chinches amarrados con una pitilla y un lápiz grafito, se desarrolla la construcción poniendo dos chupones amarrados entre ellos con una pitilla en la pizarra, se comienza a dibujar la elipse con el plumón, tensando la cuerda que a sujetan los chupones, los estudiantes realizan el mismo procedimiento pero con los materiales entregados , se encontraban muy entusiasmados lo que se genero un clima muy agradable donde los alumnos preguntaban en forma respetuosa y esperando su turno para que se les respondiera los pasos a seguir en su construcción de la elipse, empezamos a identificar los elementos de la elipse, construimos la definición de la elipse, realizamos la demostración de la elipse, aquí tuvimos que reforzar los conocimientos olvidados por los estudiantes que era el teorema de Pitágoras y el cuadrado del binomio, además se realizan algunos ejemplos donde se logra la participación activa de los estudiantes en cada instante de la clase, para el profesor a cargo del curso Boris Verdugo le llamo la atención y quedo muy contento con tipo de metodología usada porque comentaba que en el Liceo no se trabajaba así ya que la mayoría de los profesores no trabajan motivados con el tipo de estudiantes.

4.4 IMPLEMENTACIÓN DE LAS EVALUACIONES

El procedimiento que permitió recabar información necesaria para la investigación, consistió en procedimientos cuantitativas y cualitativos en un mismo estudio, en una serie de investigaciones para responder a un planteamiento del problema del aprendizaje con dos metodologías distintas basaba en los niveles de Van Hiele.
Desde la perspectiva cuantitativa los datos obtenidos serán analizados estadísticamente: estadísticos descriptivos; prueba estadística para evaluar los aprendizajes de los estudiantes.

Desde la perspectiva cualitativa se realizaron análisis de cuestionario abierto y de observaciones en terreno.

La recopilación de datos se centró en una evaluación formativa de aprendizaje de la unidad de la elipse con dos métodos de enseñanza diferentes que son el pasivo y activo, y además un cuestionario de opinión (estudiantes).

4.4.1 Evaluación Formativa y Cuestionario

Esta evaluación Formativa se basa en la teoría de Van Hiele cuya ideas básicas son que "el aprendizaje de la Geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento", "que no van asociados a la edad" y "que sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente". Es más, se señala que cualquier persona, y ante un nuevo contenido geométrico a aprender, "pasa por todos esos niveles y, su mayor o menor dominio de la Geometría, influirá en que lo haga más o menos rápidamente".
Entonces para finalizar Van Hiele señala que "no hay un método panacea para alcanzar un nivel nuevo pero, mediante unas actividades y enseñanza adecuadas se puede pre disponer a los estudiantes a su adquisición".
El propósito del instrumento de evaluación es verificar que los estudiantes adquieren los conceptos entregados de acuerdo a la clase propuesta, esta evaluación esta estructuradas de acuerdo a los niveles de aprendizaje de Van hiele, tomando en cuenta las habilidades que intervienen en estos niveles, estos van desde un nivel más simple hasta un nivel más complejo, como por ejemplo reconocer las figuras hasta manejar sistemas axiomáticos de las matemáticas.

EVALUACIÓN FORMATIVA

NOMBRE:____________________________CURSO:_________FECHA:_________

INSTRUCCIONES:

- Lea atentamente y responda las siguientes preguntas de acuerdo a la clase expuesta.
- Utilice lápiz de mina.

I. SELECCIÓN MULTIPLE

1. ¿Qué es una elipse?

a) Es una figura geométrica.
b) Es una curva cerrada y plana que corresponde al lugar geométrico.
c) Es una función cerrada y corresponde al lugar geométrico.
d) Es una circunferencia achatada.

2. ¿Cómo se forma la elipse?

a) Se genera de una ecuación cuadrática
b) Se genera con un cono cortado en partes iguales
c) Se genera cuando el plano corta en forma oblicua a un cono de base circular
d) Se genera cuando el plano corta la base del cono

3. ¿Cuál de estas expresiones representa la ecuación de la elipse?

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

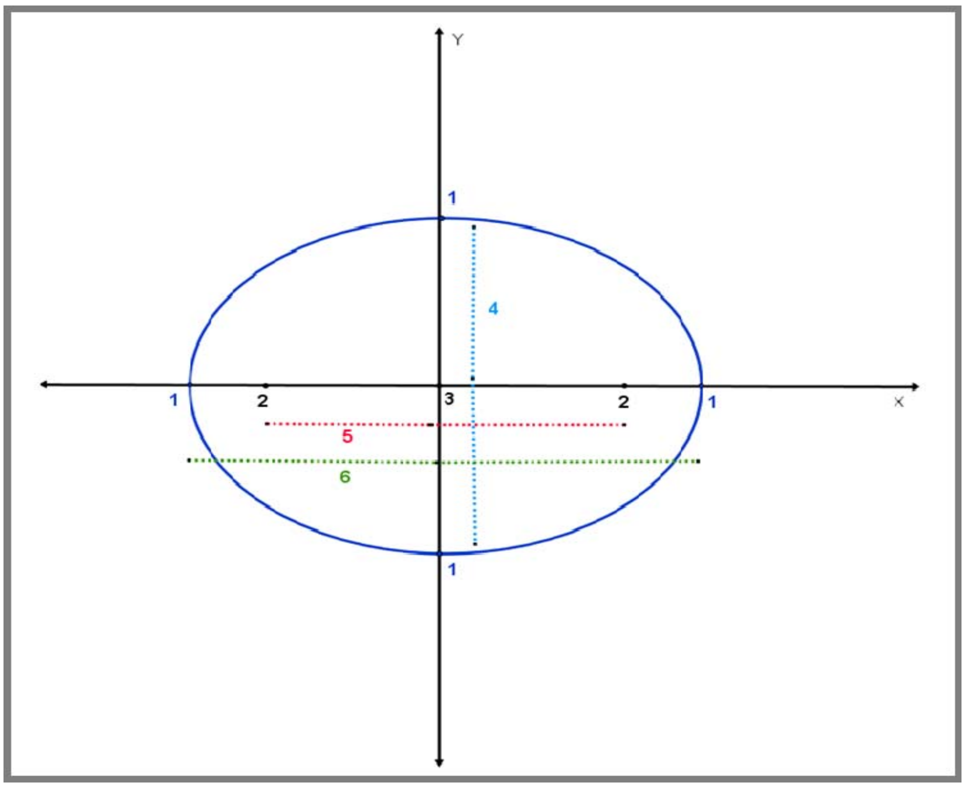
b) $2xc=4a^2-4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}-2xc$

c) $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

d) $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$

II. DESARROLLO

1. Escribe en dentro de los paréntesis que están abajo de la figura, el número que corresponda según los elementos de la gráfica de la Elipse.



( ) Distancia Focal

( ) Centro

( ) Distancia eje menor

( ) Vértices

( ) Distancia eje mayor

( ) Focos

2. Utilizando la ecuación canónica encuentre los elementos de la Elipse y dibújela, para la ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Cuestionario Dirigido al Alumnado para Evaluar el Desarrollo de la Unidad Didáctica

Unidad: Fecha:

	De acuerdo	Medianamente de acuerdo	De acuerdo
❖ **¿Te ha resultado interesante la unidad didáctica de la elipse?**			
❖ **¿Han sido suficiente los materiales proporcionados para desarrollar la experiencia de aprendizaje?**			
❖ **¿Te gusto el tipo de metodología implementada para el aprendizaje de la elipse?**			
❖ **¿El tiempo que se ha dado ha sido suficiente para desarrollar la actividad?**			

En general la reacción de los estudiantes fue de extrañeza, puesto que no esperaban ser evaluados, la evaluación formativa y el cuestionario se aplica a las dos tipos de metodología activa y pasiva, realizada en ambos establecimientos.

En la evaluación se deben aplicar los contenidos aprendidos durante la clase presentada y evaluar las metodologías expuestas, los estudiantes hacen comentarios entre ellos, pero después se ponen a realizar la evaluación, una vez que terminan de hacer la evaluación, se debe recolectar la información para hacer un análisis de ella.

ESCALA DE VALORACIÓN DE EVALUACIÓN FORMATIVA

Escala		Niveles	No Logrado (0)	Parcialmente Logrado (1)	Logrado (2)	Puntaje Final por objetivo
Objetivos	1. Identifica la definición formal de la elipse	Nivel 2	No responde nada	Coloca la alternativa a, c o d	Coloca la alternativa b	
	2. Utiliza el concepto de origen de la curva	Nivel 2	Coloca la alternativa b o d	Coloca la alternativa a	Coloca la alternativa c	
	3. Identifica algebraicamente la forma de la ecuación canoníca de la elipse	Nivel 1	Coloca la alternativa b	Coloca la alternativa c o d	Coloca la alternativa a	
	4. Reconoce la figura de la elipse	Nivel 0	No reconoce ningún elemento o distancia	Reconoce los elementos o las distancias	Reconoce los elementos y distancias	
	5. Aplica en forma correcta los elementos de la elipse	Nivel 1	No reconoce ningún elemento	Reconoce hasta dos elementos	Reconoce todos los elementos	
	6. Relaciona las distancia de los elementos de la elipse	Nivel 1	No reconoce ninguna distancia	Reconoce hasta dos distancias	Reconoce todos las distancias	
	7. Analiza la ecuación de la elipse	Nivel 3	No relaciona los elementos de la elipse con su ecuación	Relaciona solo los elementos a y b	Relaciona los elementos a, b y c	
	8. Identifica gráficamente la distancia de los elementos de la elipse	Nivel 2	No dibuja los elementos de las distancias	Dibuja solo los semiejes	Dibuja los semiejes y la distancia focal.	
	9. Aplica el teorema de Pitágoras	Nivel 3	No aplica el teorema de Pitágoras	Formula que se trabaja con el teorema de Pitágoras pero no lo aplica	Aplica de buena manera el teorema de Pitágoras	
	10. Relaciona y obtiene los elementos gráficos mediante la ecuación canónica	Nivel 3	No relaciona los elementos con la ecuación canónica	Solo Relaciona los elementos con la ecuación canónica	Relaciona y obtiene los elementos gráficos mediante la ecuación canónica	
Puntaje Final por Escalas						Total:

Esta escala de valoración está diseñada basándonos en los niveles de Van Hiele, tomamos los primeros cuatro niveles ya que el ultimo es mas autónomo del alumno y es necesario un mayor seguimiento.

En la evaluación se presentan los niveles de Van Hiele, con las siguientes características

- NIVEL 0: Visualización o Reconocimiento
  Solo se reconoce la forma o la figura sin propiedades ni componentes y se asemejan con objetos del entorno, por ejemplo reconocen una figura circular como un círculo y lo comparan con una rueda.

- NIVEL 1: Análisis
  Se perciben las propiedades y las componentes de la figura, pero no relaciona las figuras ni propiedades con otras y tampoco puede definir o clasificar la figura por medio de estas propiedades.

- NIVEL 2: Ordenación y Clasificación
  Se definen de manera formal las figuras geométricas tanto como en propiedades y también en sus características, reconoce que estas propiedades provienen de otras y establece relaciones entre las propiedades, puede seguir las demostraciones pero en muchos casos no entiende por falta de axiomas geométricos.

- NIVEL 3: Deducción Formal
  En este nivel puede deducir y hacer demostraciones lógicas y formales, ya que se manejan los sistemas axiomáticos de las matemáticas, se comprende cómo llegar de diferentes proposiciones a un mismo resultado, y para esto debe tener un alto nivel de razonamiento lógico y también una visión globalizada de las Matemáticas.

CAPITULO V: ANÁLISIS DE DATOS

5.1 VARIABLES A INVOLUCRADAS

Nuestras variables a trabajar son:

- Liceo Nacional Pasiva
- Liceo Nacional Activa
- Centro Técnico Profesional Pasiva
- Centro Técnico Profesional Activa

Nos apoyamos para el libro Metodología de la Investigación, cuyos autores son Roberto Hernández Sampieri, Carlos Fernández Collado, Pilar Baptista Lucio.

5.2 ANÁLISIS DE GRÁFICOS

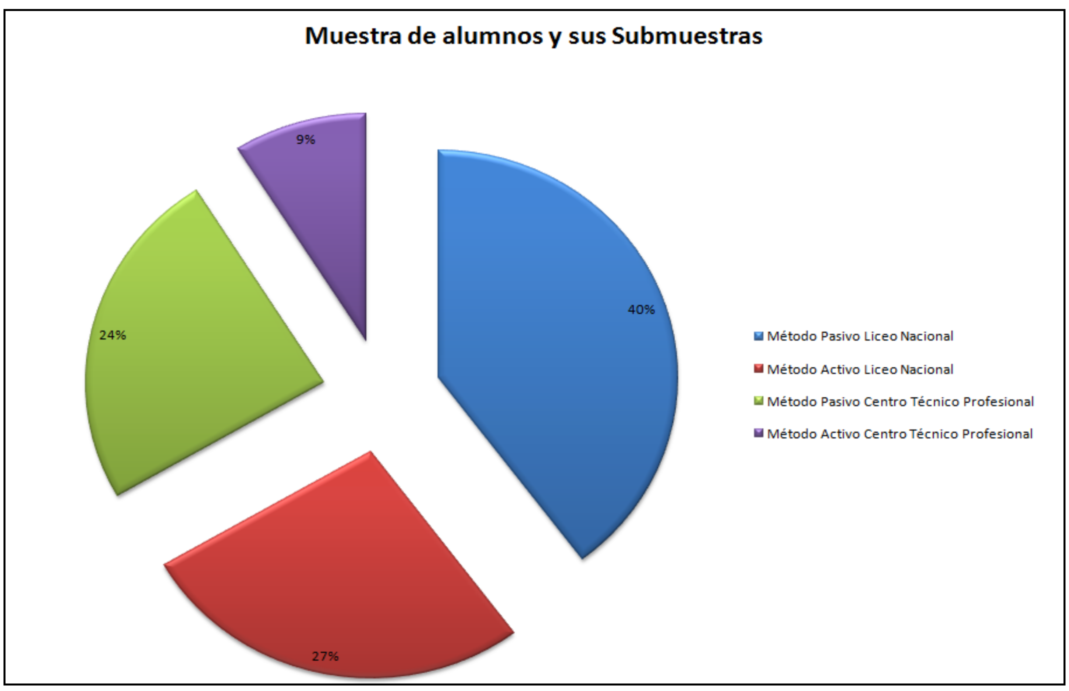


Gráfico Nº1

La muestra consta de 78 estudiantes, donde muestra el porcentaje de alumnos que fueron evaluados, se encontró una baja de asistencia de parte de los estudiantes de ambos establecimientos debido a la contingencia, puesto que ambos establecimientos se encontraban en toma, el grafico Nº1 muestra que se dividen en subgrupos ya que se aplican los dos tipos de metodologías Pasiva y Activa, a ambos establecimientos a los mismos niveles de educación NM3.

Lo que podemos recabar mediante este estudio que en el Liceo Nacional de Maipú el 40% de los estudiantes se les aplicó el método Pasivo que equivalen a 31 estudiantes del tercer año E, y el 27 % se les realiza la clase activa que corresponden a 21 estudiantes del tercer año B.

En el Centro Técnico Profesional de Maipú se obtiene la siguiente información, el 24 % de los estudiantes se les aplicara la clase pasiva que corresponden a 19 alumnos del tercer año B y al 9% se les realiza el enfoque activo lo que corresponde a 7

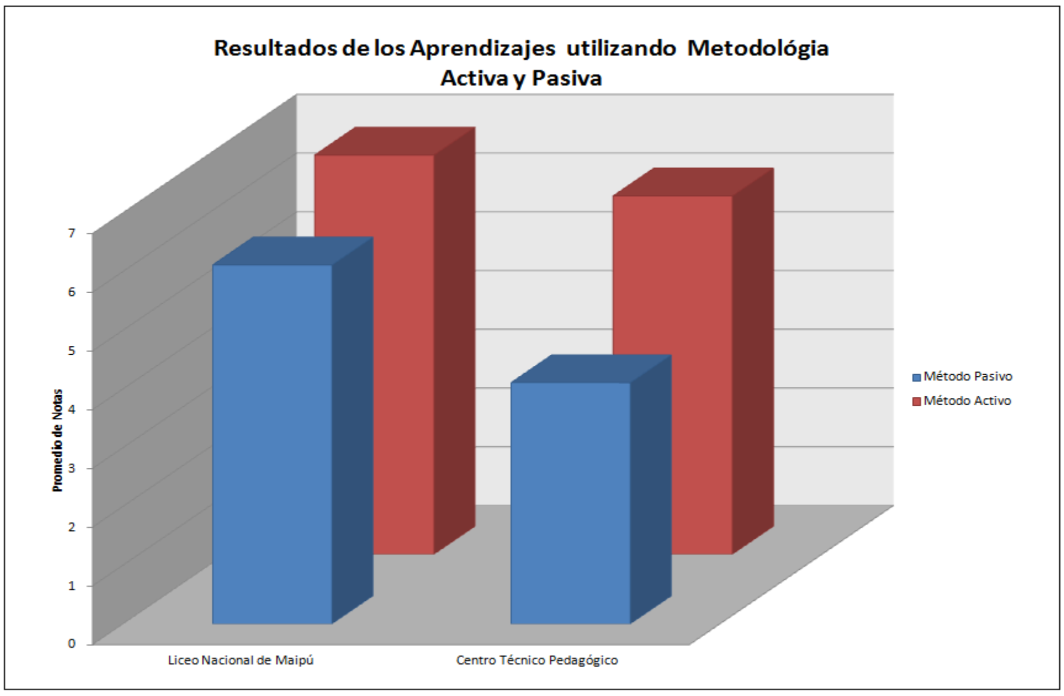


Grafico N°2

En el presente gráfico podemos analizar el promedio de notas de las cuatro clases, en ambos liceos la clase con el enfoque metodológia activa tuvo un mayor rendimiento, con esto se afirma que la visualizacion y construccion de los contenidos es un aporte a la enseñanza de las matemáticas y en especial de la elipse.

La diferencia entre la clase pasiva y activa del Liceo Nacional de Maipú es de 0,68556068 decimas, y la diferencia entre la clase activa y pasiva del Centro Técnico Profesional es de 1,99473684. Con esto podemos indicar que en ambos liceos los estudiantes aprenden con las clases activa

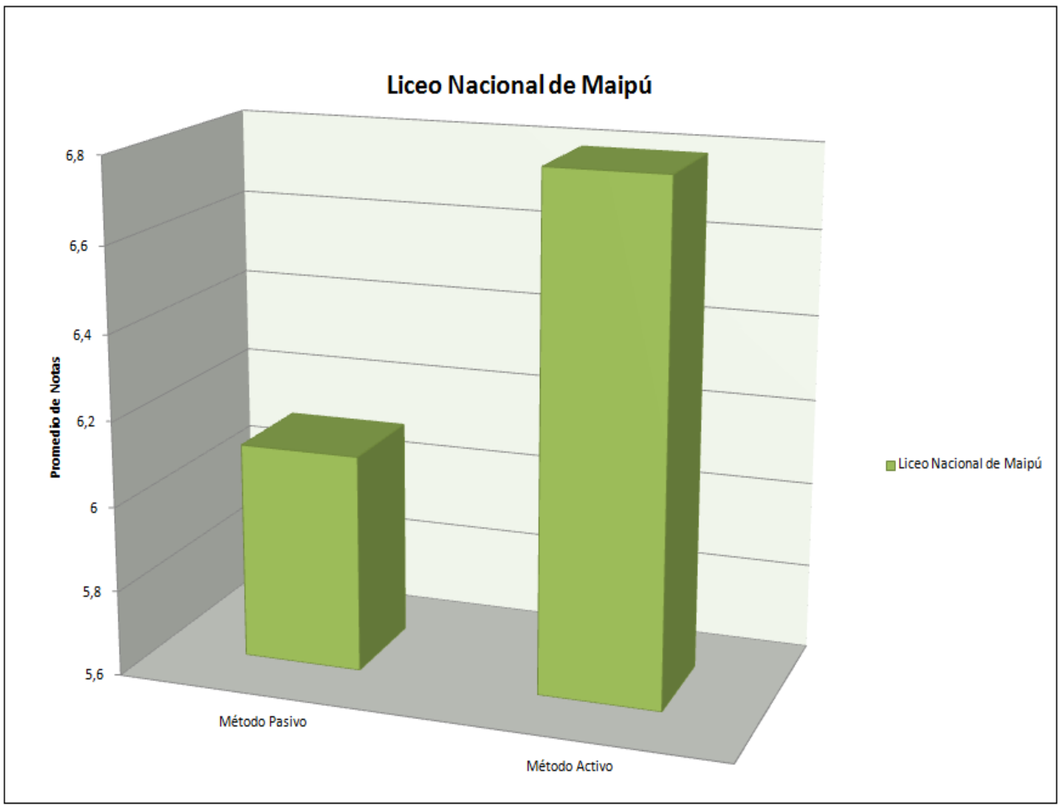


Gráfico N°3

El gráfico Nº3 presenta al Liceo Nacional de Maipú con sus dos clases usando los dos enfoques metodológicos, activo y pasivo basados en la teoría de Van Hiele, Se puede señalar que los estudiantes tuvieron mayor aprendizaje con el método activo que con el pasivo.

En la clase activa al usar la tics, mostrar la presentación en prezi y el video donde se muestra un cono interceptado por un plano de diferentes formas donde se obtienen distintas cónicas, se puede observar que la atención de los estudiantes es mayor, por lo que se les solicita realizar la construcción de la elipse con los materiales entregados, la participación de los estudiantes es activa en la construcción de su propio conocimiento.

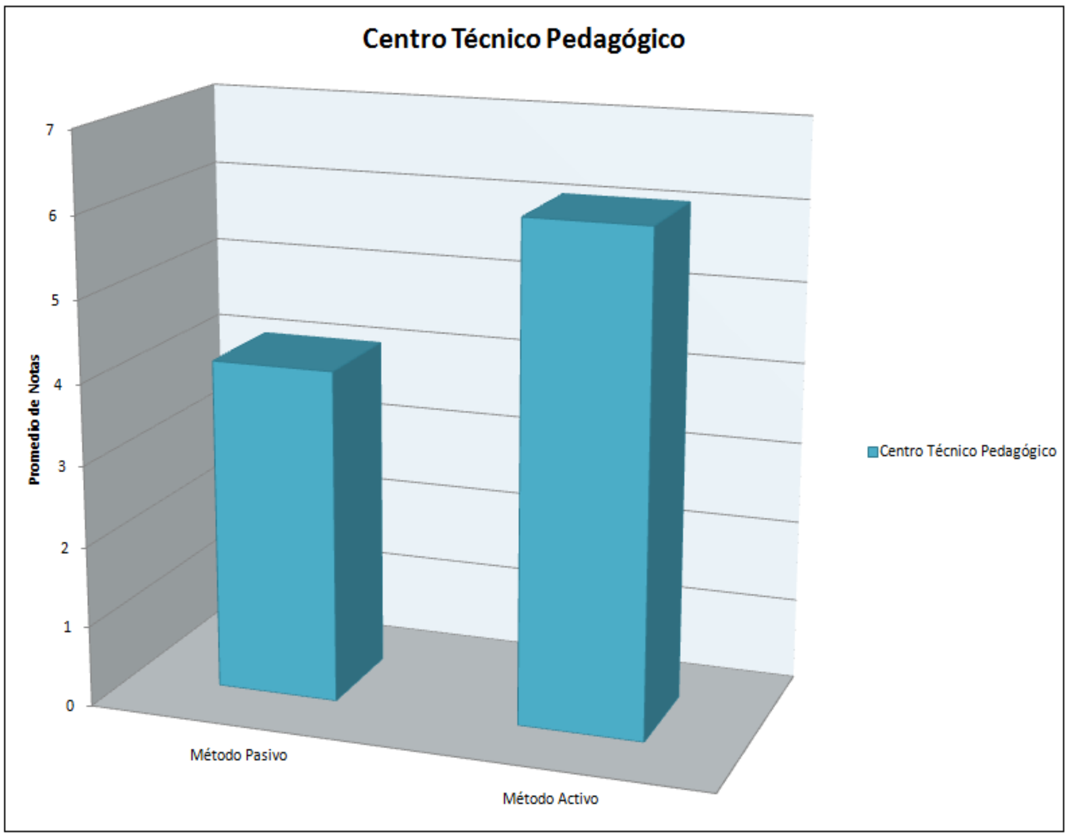


Gráfico N°4

El gráfico se muestran los resultados del Centro Técnico Profesional, se puede visualizar que los estudiantes aprenden más y mejor con la clase activa que con la pasiva, a pesar de que este tipo de estudiantes no posee los conocimientos previos necesarios para el estudio de la elipse. Al usar como herramienta las tics en una clase activa se pueden lograr los objetivos estratégicos para mejorar la calidad de la educación por medio de la diversificación de contenidos y métodos, promover la experimentación y la innovación, de forma que los contenidos sean visualizados de mejor manera y así ayude a que los estudiantes sean capaces de reconocer la mayoría de los elementos de la elipse no tan solo con la ayuda del profesor y sino que por sus propias capacidades, esto lleva a una mejor comprensión de los contenidos incorporando nuevos conocimientos de aprendizaje.

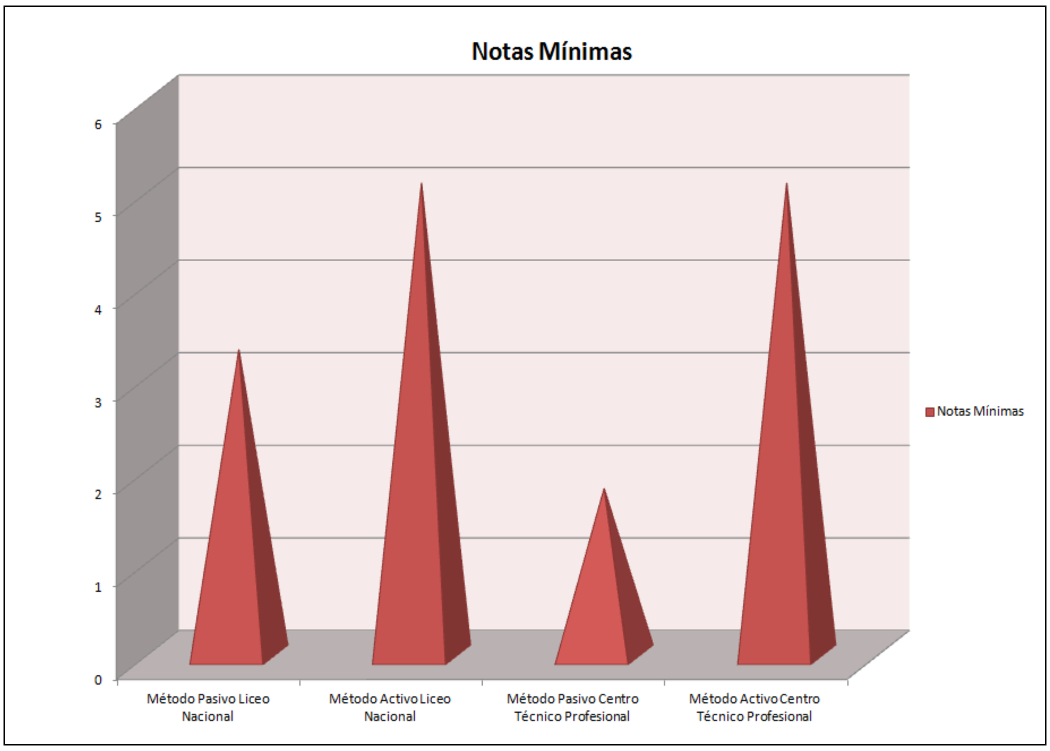


Gráfico Nº5

El siguiente gráfico muestra los distintos resultados obtenidos de los estudiantes en los dos establecimientos, se colocaron notas para el análisis estadísticos, este gráfico nos señala las notas mínimas de la evaluación de cada institución por enfoque, entre estos la nota mínima fue obtenida por el Centro técnico Profesional con la metodología pasiva, esto explica que los alumnos no poseen los conocimientos previos para el aprendizaje de un nuevo conocimiento.

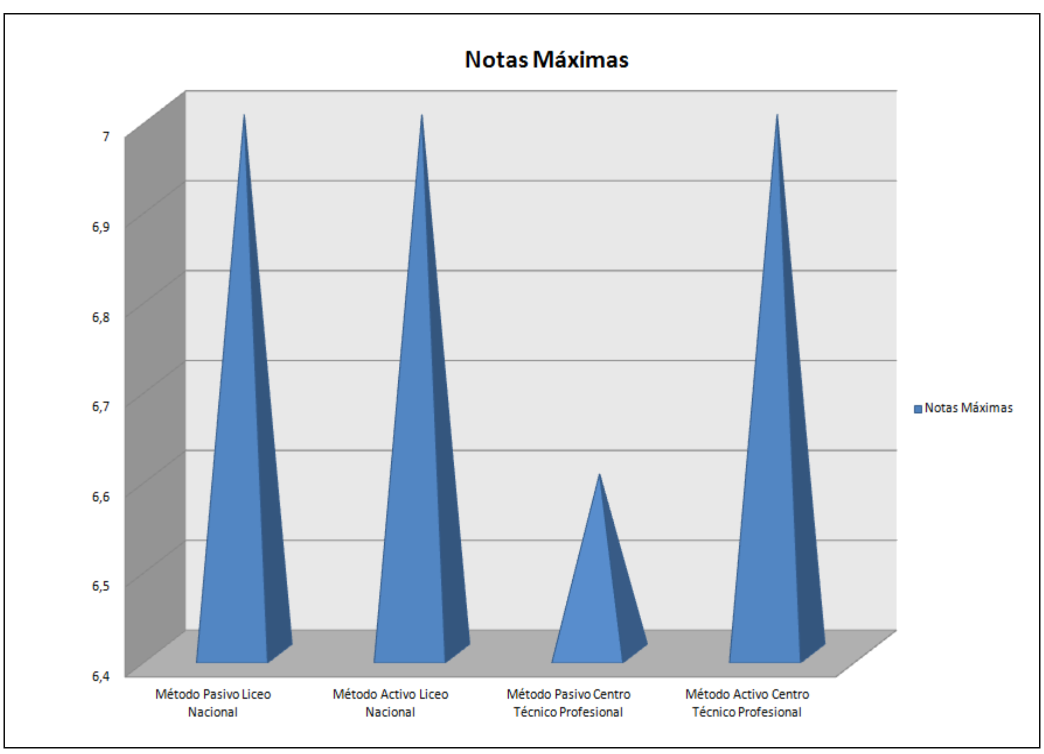


Gráfico Nº6

El gráfico presenta las notas máximas de los dos establecimientos con las dos metodologías aplicadas, los estudiantes de ambos colegios aprenden con el método activo, por ende se puede probar que esta metodología sirve para cualquier tipo de colegios y estudiantes que tengan o no los conocimientos necesarios.

El Liceo Nacional de Maipú es un colegio de excelencia académica, los estudiantes vienen preparados desde de séptimo básico por eso tienen una base sólida de conocimientos, lo que permite que cualquier tipo de metodología usada con ellos genere resultados positivos siempre, lo que no ocurre con el Centro Técnico Profesional, puesto que realizando una clase pasiva y una activa los alumnos no tiene el mismo aprendizaje debido a que la base de sus conocimiento no es sólida.

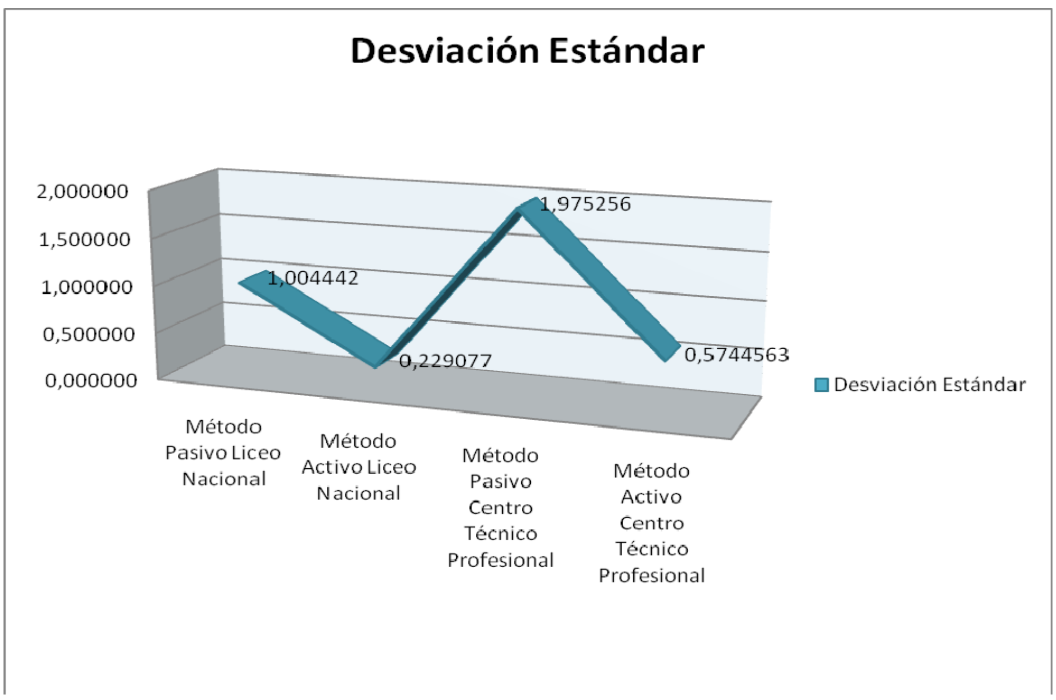


Gráfico Nº 7

En este gráfico se puede visualizar la representación de la desviación estándar, que representa las distintas metodologías en los dos establecimientos, nos muestra que en el Liceo nacional de Maipú en la clase pasiva la medida de dispersión es de 1,004442 y la activa tiene una dispersión de 0,229077 con respecto al valor promedio, en cambio en el Centro Técnico Profesional la dispersión es de 1,975256 en la clase pasiva y de 0,5744563 de dispersión en la metodología activa con respecto a el promedio. Se debe recordar que tenemos una muestra de 78 estudiantes y que la curtosis no es igual a 3 y que la simetría es distinta de cero por lo tanto no tenemos una distribución normal.

ANÁLISIS DE GRÁFICOS: NIVELES DE VAN HIELE

METODOLOGÍA PASIVA CENTRO TÉCNICO PROFESIONAL (CTP).

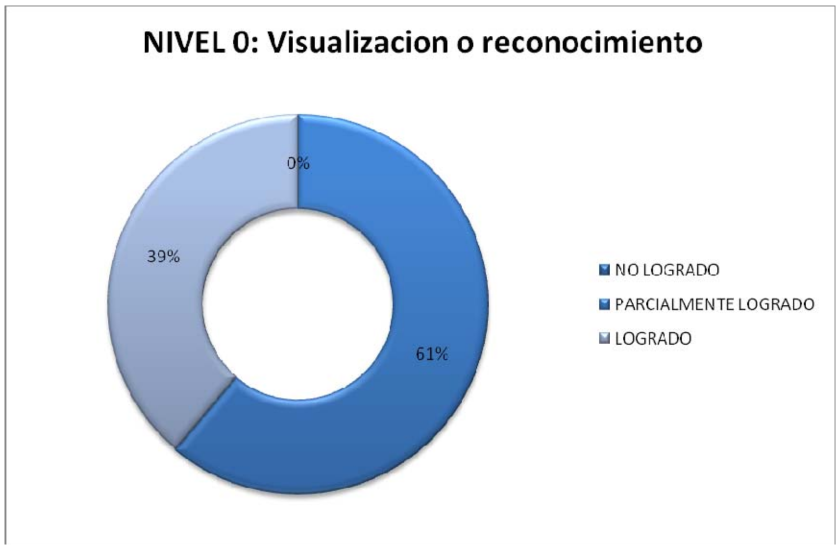


Gráfico Nº8

En el Centro Técnico Profesional la metodología pasiva aplicada, la visualización o reconocimiento es un proceso empleado en las matemáticas en que los estudiantes comienzan a representar y reflejan información visual. En el contenido de la elipse el cono es interceptado por un plano en forma oblicua, obteniéndose cuando se grafica con sus elementos la elipse. El gráfico nos muestra la siguiente información que el 39% logra una visualización y el 61% por lograr la visualización.

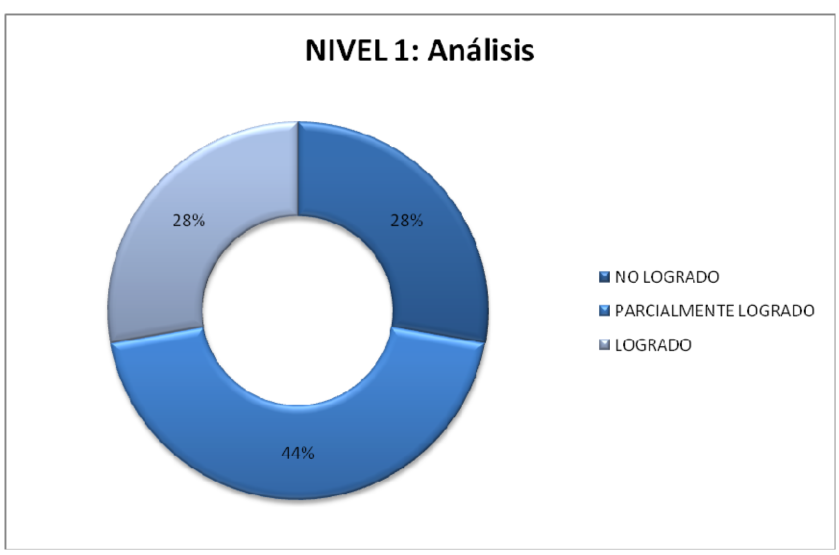


Gráfico Nº 9

El gráfico representa el análisis obtenido del método pasivo en el Centro Técnico Profesional donde los conceptos de la elipse se entienden y se manejan a través de sus elementos de la elipse, lo que muestra que el 28% de los estudiantes logran el análisis, el 44% por lograr y el 28 % no lo logra.

Gráfico Nº10

Con respecto a la ordenación o clasificación en la metodología pasiva el Centro Técnico Profesional, los estudiantes relacionan los elementos de la elipse y logran la comprensión de las definiciones. El gráfico muestra que el 6% está por lograr la clasificación, que el 44% lo logra y el 50% no logra la ordenación.

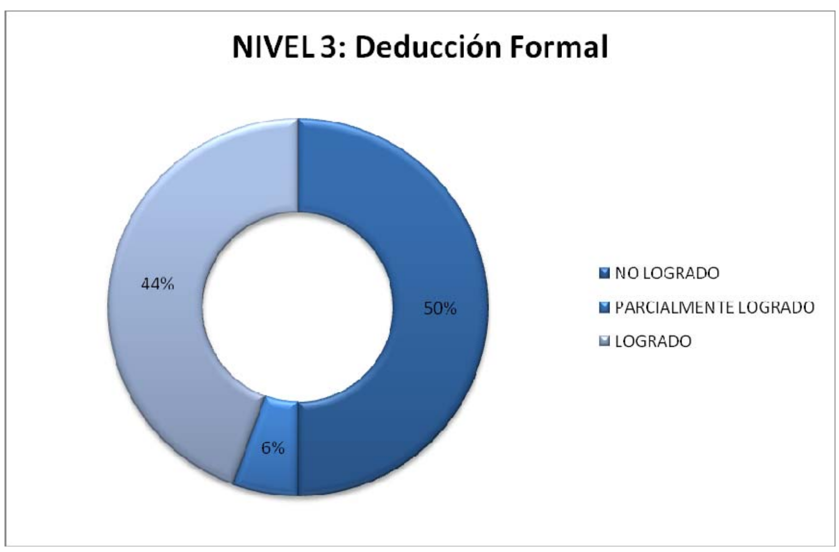


Gráfico Nº 11

Con respecto a la deducción formal, en el Centro Técnico profesional utilizando la metodología pasiva, los estudiantes entienden lo que se les enseña y no memorizan porque cuando algún concepto es comprendido no es fácil de olvidar y pueden ser transferidos a otras situaciones. El siguiente gráfico señala que el 50% no logra de deducción formal, el 44% lo logra y el 6% por lograr.

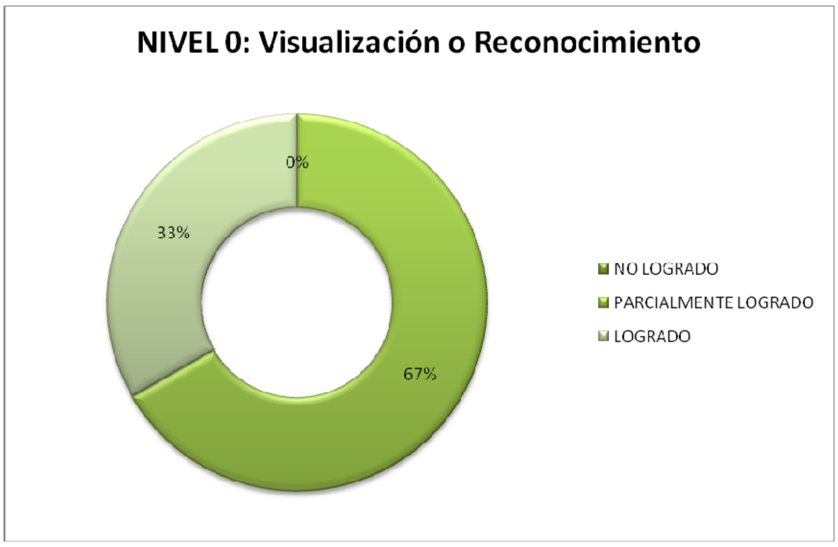


Gráfico Nº 12

El gráfico representa la visualización o reconocimiento de los estudiantes de la clase activa, donde se realiza una presentación en prezi con un video incorporado donde se explica las cónicas obtenidas por la intersección de un plano y después realizan la construcción de la elipse dirigida por el profesor lo que nos indica que el 33% está por lograr el reconocimiento y el 67% logra la visualización.

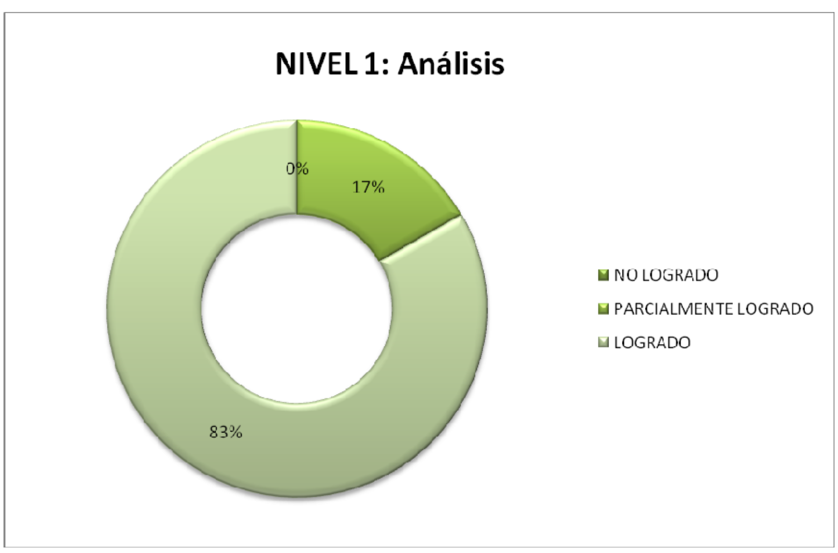


Gráfico Nº 13

El gráfico representa el análisis obtenido con la metodología activa en el Centro Técnico Profesional, donde los conceptos de la elipse son construidos por los alumnos y dirigidos por el profesor para poder ser discutidos con sus compañeros los elementos de la Elipse, lo que señala que el 83% de los estudiantes lo logra, el 17% está por lograr el análisis.

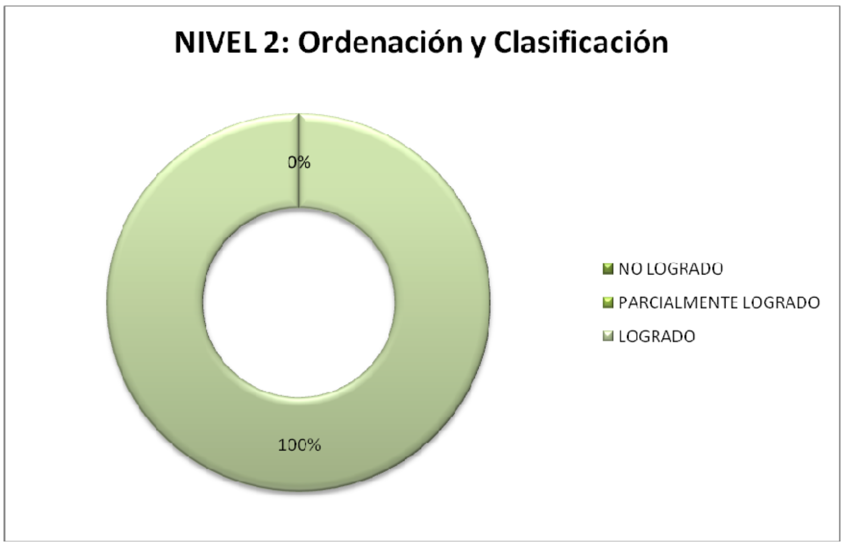


Gráfico Nº14

El gráfico representado con respecto a la ordenación o clasificación con la metodología activa muestra que en el Centro Técnico Profesional los estudiantes relacionan los elementos de la elipse y logran la comprensión de las definiciones. Lo que señala que el 100% de los estudiantes logra la clasificación de los elementos de la elipse.

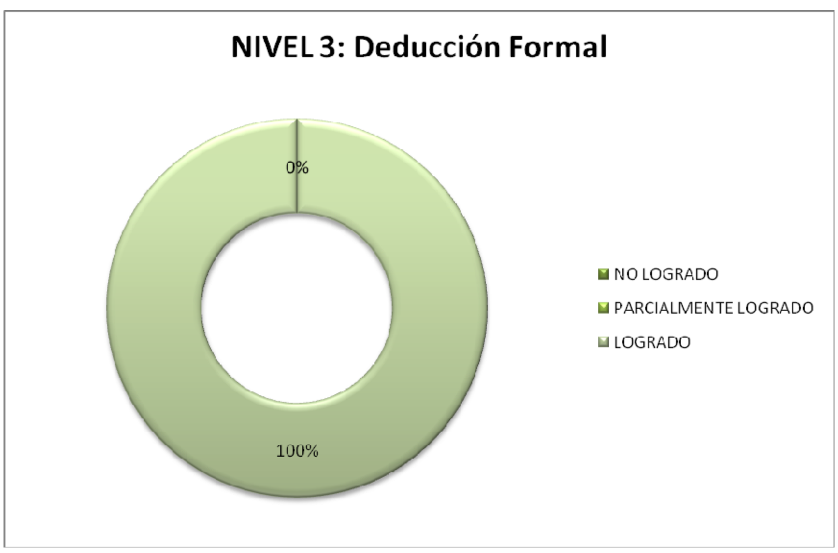


Gráfico Nº15

En el gráfico con respecto a la deducción formal en el Centro Técnico profesional la utilización de la metodología activa, muestra que los estudiantes entienden lo que se les enseña mediante la construcción y que no es fácil olvidarlo y puede ser transferido a otras situaciones. El siguiente gráfico lo que señala es que el 100% logra la deducción formal.

METODOLOGIA ACTIVA LICEO NACIONAL.

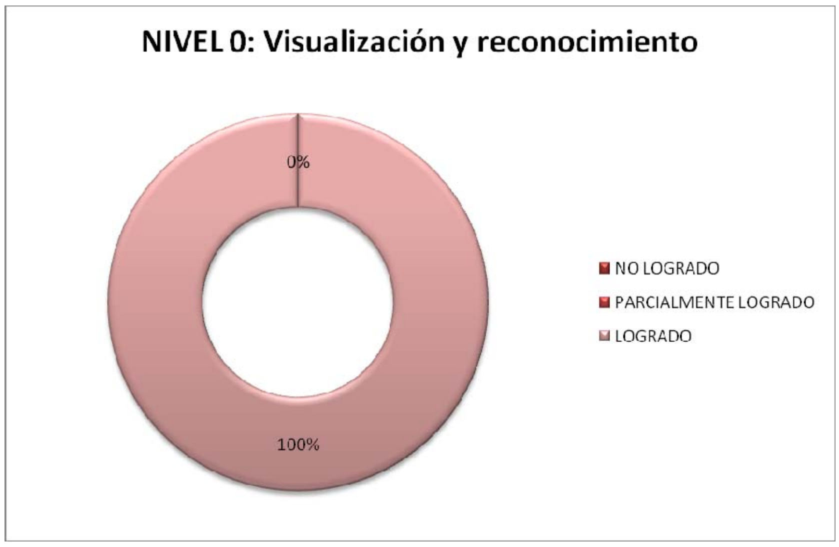


Gráfico Nº 16

El gráfico indica la visualización de los estudiantes de la clase activa, donde se realiza una presentación en prezi con un video incorporado donde se explica las cónicas obtenidas por la intersección de un plano y posterior realización de la construcción de la elipse dirigida por el profesor, señala que el 100% logra la visualización y el reconocimiento.

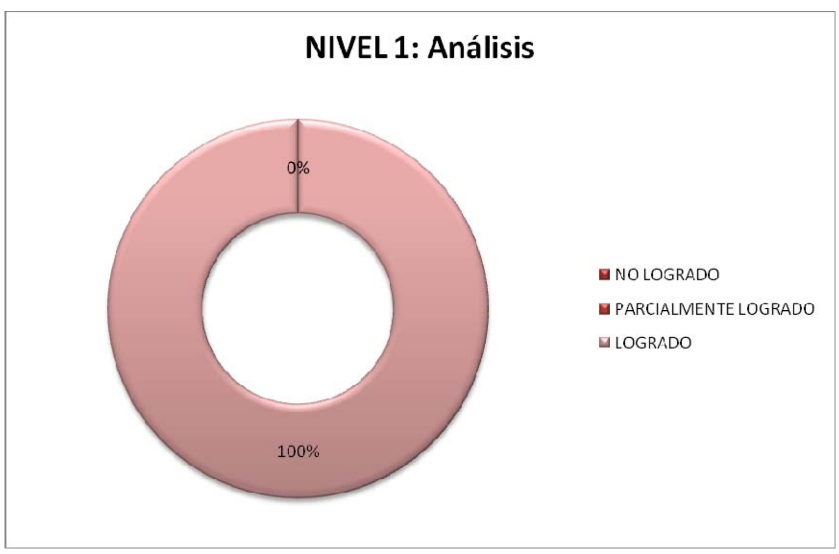


Gráfico Nº 17

El gráfico señala el análisis obtenido con la metodología activa en el Liceo Nacional de Maipú, los conceptos de la elipse son construidos por los estudiantes y dirigidos por el profesor para que puedan discutir los elementos de la elipse con sus compañeros, lo que se señala que el 100% logra el análisis de la elipse.

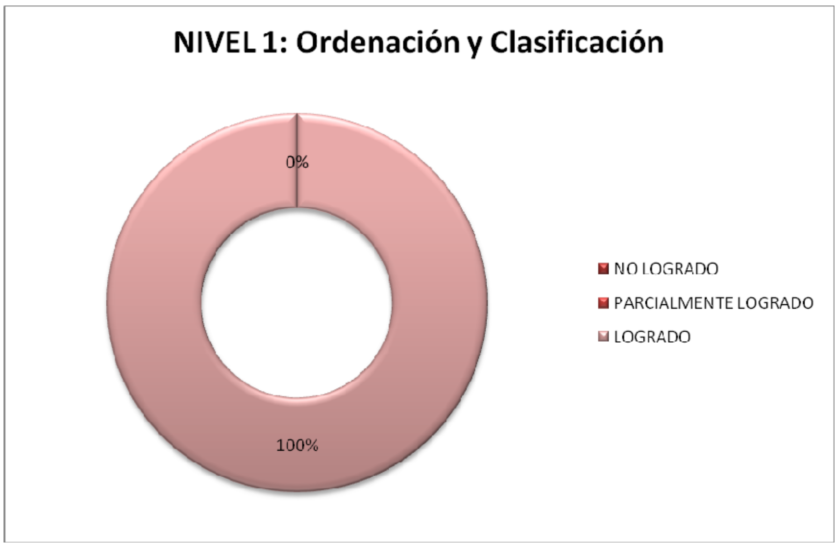


Gráfico Nº 18

Con respecto a la ordenación o clasificación en el enfoque activo en el Liceo Nacional, los estudiantes relacionan los elementos de la elipse y logran la comprensión de las definiciones. El gráfico muestra que el 100% de los estudiantes logra la clasificación de los elementos de la elipse.

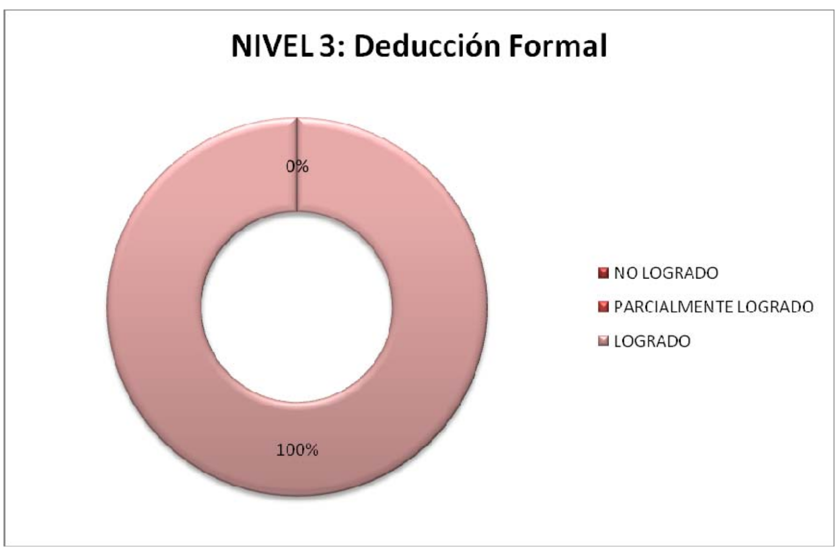


Gráfico Nº 19

Con respecto a la deducción formal en el Liceo Nacional al utilizar la metodología activa, los estudiantes entienden lo que se les enseña mediante la construcción y lo que no es fácil olvidar y pueden ser transferidos a otras situaciones. El gráfico señala que el 100% logra la deducción formal.

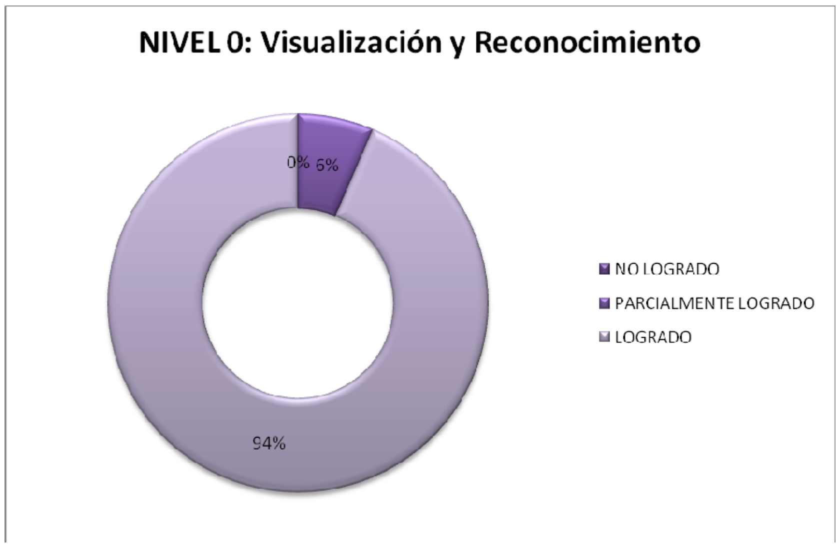


Gráfico Nº 20

En el Liceo Nacional de Maipú la metodología pasiva aplicada en la visualización o reconocimiento mediante un proceso empleado en las matemáticas en que los estudiantes comienzan a representar y reflejan información visual. En el contenido de la elipse el cono es interceptado por un plano en forma oblicua obteniéndose así la elipse, al graficar con sus elementos la elipse. El gráfico nos muestra que el 6% no logra el reconocimiento y que el 94% si logra la visualización.

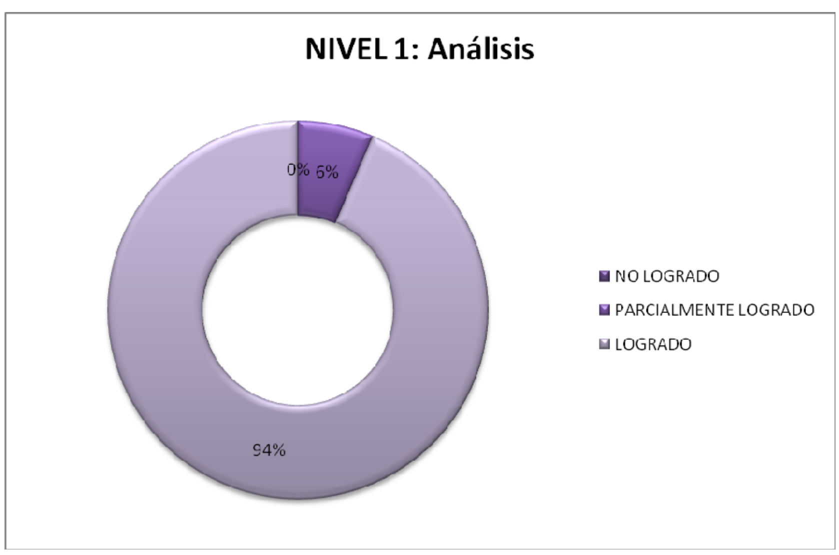


Gráfico Nº 21

El gráfico representa el análisis obtenido del método pasivo en el Liceo Nacional de Maipú donde los conceptos de la elipse se entienden y se manejan a través de sus elementos de la elipse, lo que muestra que el 6% de los estudiantes no logran el análisis, el 94% lo logra.

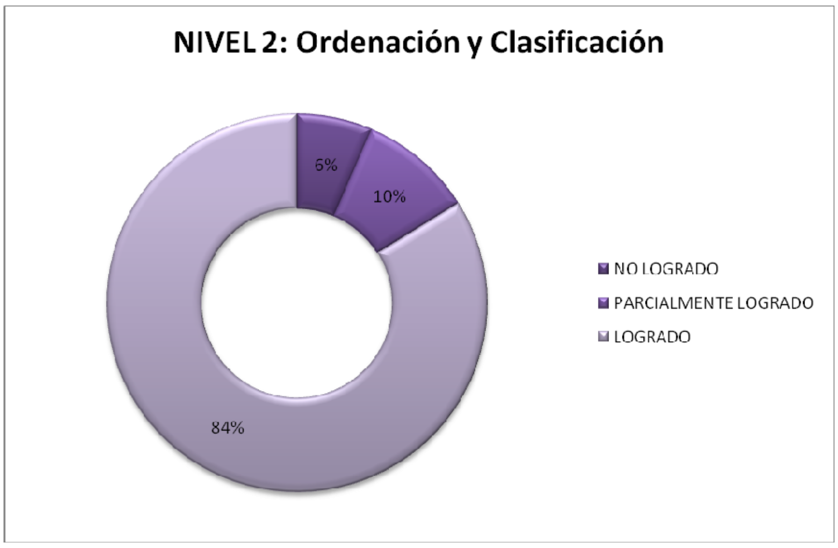


Gráfico Nº 22

Con respecto a la ordenación o clasificación con la metodología pasiva en el Liceo Nacional de Maipú, los estudiantes relacionan los elementos de la elipse y logran la comprensión de las definiciones. El gráfico muestra que el 6% no logra la clasificación, que el 10% por lo lograr y el 84% logra la clasificación del contenido entregado.

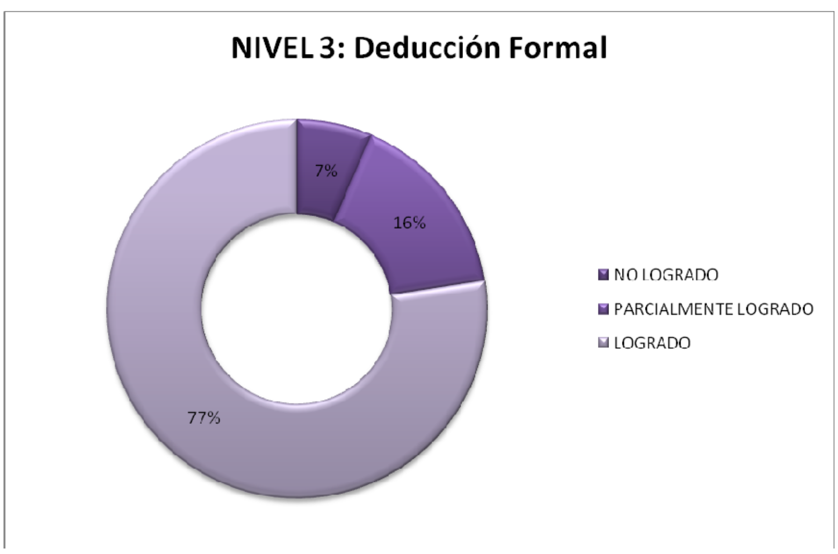


Gráfico Nº 23

Con respecto a la deducción formal en el Liceo Nacional de Maipú la metodología pasiva los estudiantes entienden lo que se les enseña, este tipo de alumnos están acostumbrados al análisis de los contenidos, además que el colegio es tradicional, posee una base sólida en conocimientos previos. El siguiente gráfico señala que el 77% logra la deducción formal, el 7% no lo logra y 16 % por lograr.

TABLA COMPARATIVA DE RESULTADOS DE GRÁFICOS: APRENDIZAJE LOGRADO SEGÚN NIVELES DE VAN HIELE Y UTILIZANDO MÉTODO ACTIVO Y MÉTODO PASIVO.

CATEGORÍAS:

N0: VISUALIZACIÓN O RECONOCIMIENTO

N1: ANÁLISIS

N2: ORDENACIÓN Y CLASIFICACIÓN

N3: DEDUCCIÓN FORMAL

LICEO NACIONAL V/S CENTRO TECNICO PROFESIONAL						
CLASE PASIVA						
	LICEO NACIONAL %			CENTRO TECNICO PROFESIONAL %		
CATEGORIA	NO LOGRADO	POR LOGRAR	LOGRADO	NO LOGRADO	POR LOGRAR	LOGRADO
N0	0%	6%	94%	0%	61%	39%
N1	0%	6%	94%	28%	44%	28%
N2	6%	10%	84%	50%	6%	44%
N3	7%	16%	77%	50%	6%	44%

Tabla Nº 1

En la tabla señala que el Liceo Nacional el nivel N0, se realizan las clases con la metodología pasiva indica que el 6% está por lograr la visualización y un 94% lo logra, en cambio en el Centro Técnico Profesional un 61% está por lograr y el 39% lo logra.

En el nivel N1 en el Liceo Nacional indica que el 6% por lograr el análisis y que el 94% lo logra, en el Centro Técnico Profesional el 28 % no lo logra, el 44% está por lograr y el 28% lo logra.

La tabla muestra que el nivel N2 en el Liceo Nacional el 6% no logra la clasificación en los estudiantes, un 10% por lograr y un 84% lo logra en relación al Centro Técnico Profesional el 50% no logra la clasificación, el 6% por lograr y un 44% logra la ordenación.

En el nivel N3 el Liceo Nacional el 7% no logra la deducción formal, el 16 % por lograr y el 77% lo logra en comparación al Centro Técnico Profesional el 50% no lo logra, el 6 % por lograr y un 44% logra la deducción formal.

LICEO NACIONAL V/S CENTRO TECNICO PROFESIONAL						
CLASE ACTIVA						
	LICEO NACIONAL%			CENTRO TECNICO PROFESIONAL %		
CATEGORIA	NO LOGRADO	POR LOGRAR	LOGRADO	NO LOGRADO	POR LOGRAR	LOGRADO
N0	0%	0%	100%	0%	67%	33%
N1	0%	0%	100%	0%	17%	83%
N2	0%	0%	100%	0%	0%	100%
N3	0%	0%	100%	0%	0%	100%

Tabla Nº 2

La tabla señala que la clase activa realizada muestra que en el nivel N0 del Liceo Nacional el 100% de los estudiantes logra la visualización y en cambio en el Centro Técnico Profesional el 67% por lograr y el 33% lo logra.

En el nivel N1 en el Liceo Nacional el 100% logra el análisis y el Centro Técnico Profesional, el 17% por lograr y el 83% lo logra.

En el nivel N2 en el Liceo Nacional el 100% lo logra y en el Centro Técnico Profesional el 100% logra la clasificación.

En el nivel N3 en el Liceo Nacional el 100% logra la deducción formal y en el Centro Técnico Profesional el 100% lo logra.

ANÁLISIS DE GRAFICOS: CUESTIONARIO APLICADO ALUMNOS DE AMBOS LICEOS, EL LICEO NACIONAL (LN) Y EL CENTRO TÉCNICO PROFESIONAL (CTP).

METODOLOGÍA ACTIVA LICEO NACIONAL

Gráfico Nº 24

El gráfico circular muestra las opiniones del interés de la unidad didáctica desarrollada, este indica que un 5% de los estudiantes que respondieron el cuestionario no considera interesante la unidad tratada. Un 60 % por ciento de los estudiantes opino que la unidad resulto medianamente interesante lo que significa más de la mitad de las respuestas de opinión. En cuanto a los estudiantes que estuvieron de acuerdo se muestra que un 35% está en desacuerdo con la unidad de estudio.

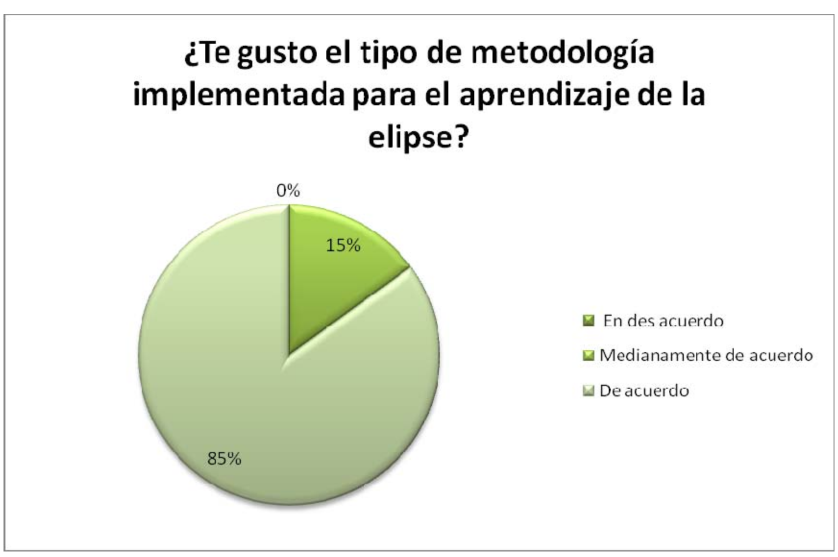


Gráfico Nº 25

El 0% de los estudiantes responde que está en desacuerdo con la metodología implementada, no existen respuestas negativas frente a la propuesta de enseñanza. El 15% de los estudiantes considera que esta medianamente de acuerdo y por último el 85% de los estudiantes esta en total acuerdo con la metodología entregada, por tanto los resultados son muy positivos.

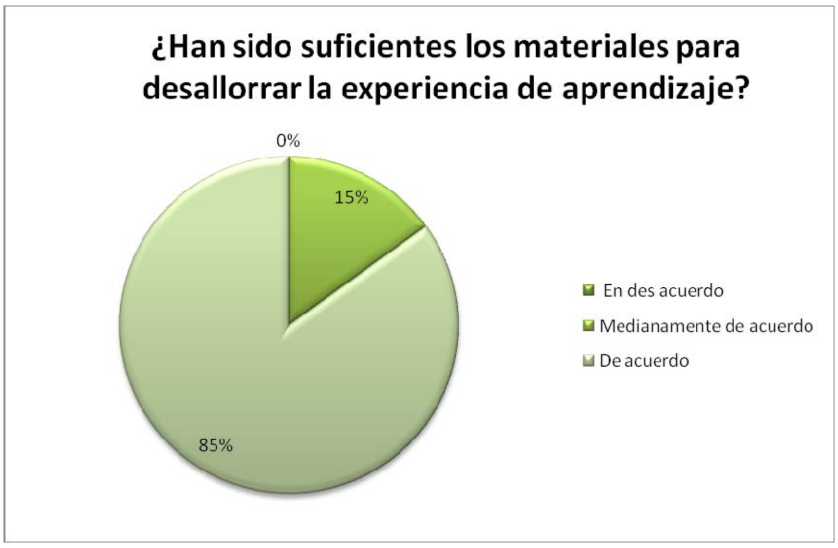


Gráfico Nº 26

Respecto de los materiales utilizados para el desarrollo de la experiencia de aprendizaje, el gráfico muestra que el 0% de los estudiantes está en desacuerdo, un 15% sostiene que esta medianamente de acuerdo y el 85% de estudiantes considera que está de acuerdo con los materiales utilizados en la clase, se deduce de esto gran aceptación en el desarrollo de las actividades de aprendizaje.

Gráfico Nº27

El gráfico muestra que el 0% de los estudiantes esta en desacuerdo con el tiempo dispuesto para la actividad desarrollada, El 15% de las respuestas señalan que los estudiantes estan medianamente de acuerdo con el tiempo para el desarrollo de la actividad.

Las respuestas obtenidas respecto al tiempo destinado para el desarrollo de la actividad en su mayoria son positivas, es decir, el 85% de los estudiantes esta de acuerdo con el métodologia activa.

METODOLOGÍA PASIVA LICEO NACIONAL

Gráfico Nº 28

Respecto del tipo de clase pasiva el grafico muestra los siguientes resultados, el 10% de los estudientes no considera interesante la unidad de aprendizaje, el 22% esta medianamente de acuerdo y el 68% de los estudiantes les ha resultado interesante la unidad de aprendizaje de la Elipse.

Gráfico Nº 29

La gráfica indica que un 10% de los estudiantes le gusto la metodología utilizada en la clase de la elipse, el 16% dice estar medianamente de acuerdo con la metodología y la gran mayoría de las respuestas representa estar de acuerdo con la metodología pasiva.

Gráfico Nº 30

Respecto de los materiales utilizados para el desarrollo de la experiencia de aprendizaje, el gráfico muestra que el 0% de los estudiantes está en desacuerdo, que el 19% sostiene está medianamente de acuerdo y el 81% de estudiantes considera que está de acuerdo con los materiales utilizados en la clase, se deduce de esto gran aceptación en el desarrollo de las actividades de aprendizaje.

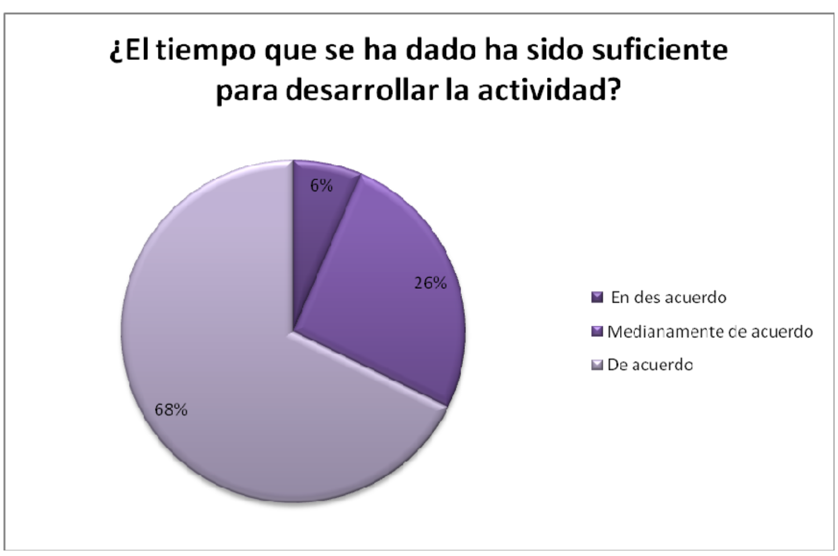


Gráfico Nº 31

Respecto de el tiempo que se destino para el desarrollo de la actividad un 6% considera que es poco por tanto esta en desacuerdo, el 26% de los estudientes estan medianamente de acuerdo y el 68% de los estudiantes sostienen que estan de acuerdo con el tiempo destinado para la actividad.

TABLA COMPARATIVA DE RESULTADOS DE GRÁFICOS: CUESTIONARIO APLICADO A ESTUDIANTES DE AMBOS LICEOS

CATEGORIAS:

C1: ¿Te ha resultado interesante la unidad didáctica de la elipse?

C2: ¿Te gustó el tipo de clase implementada para el aprendizaje de la elipse?

C3: ¿Han sido suficientes los materiales para desarrollar la experiencia de aprendizaje?

C4: ¿El tiempo que se ha dado te ha sido suficiente para desarrollar la actividad?

PORCENTAJES DE OPINIÓN CLASE PASIVA : LICEO NACIONAL V/S CENTRO TECNICO PROFESIONAL						
LICEO NACIONAL%				CENTRO TECNICO PROFESIONAL %		
CATEGORIA	DESACUERDO	MED. DE ACUERDO	DE ACUERDO	DESACUERDO	MED. DE ACUERDO	DE ACUERDO
C1	28%	43%	29%	10%	22%	68%
C2	29%	57%	14%	10%	16%	74%
C3	71%	29%	0%	0%	19%	81%
C4	71%	29%	0%	6%	16%	68%

Tabla Nº 3

En la tabla muestra la opinión de los estudiantes de la clase pasiva, en el liceo Nacional la categoría C1 el 28% está en desacuerdo, el 43% medianamente de acuerdo, el 29% de acuerdo, en cambio en el Centro Técnico Profesional el 10% está en desacuerdo, el 22% medianamente de acuerdo y el 68% de acuerdo con la unidad didáctica de la elipse.

En la categoría C2 señala que en el Liceo Nacional, el 29% está en descuerdo, el 57% medianamente de acuerdo, el 14% está de acuerdo con el tipo de metodología implementada para el aprendizaje de la elipse, en el Centro Técnico Profesional la tabla indica que el 10% está en desacuerdo, el 16% medianamente de acuerdo y el 74% está de acuerdo.

La tabla señala que la categoría C3 que en el Liceo Nacional, el 71% está en desacuerdo con los materiales entregados a los estudiantes para desarrollar el aprendizaje de la elipse, el 29% medianamente de acuerdo, en relación con el Centro Técnico Profesional el 19% esta medianamente de acuerdo y el 81% de acuerdo.

En la categoría C4 en el Liceo Nacional indica que el 71% está en desacuerdo, el 29% medianamente de acuerdo con el tiempo que se entrego para desarrollar la actividad, en relación con el Centro Técnico Profesional el 6% está en desacuerdo,, el 16% medianamente de acuerdo y el 68% de acuerdo.

PORCENTAJES DE OPINION DE CLASE ACTIVA :LICEO NACIONAL V/S CENTRO TECNICO PROFESIONAL						
LICEO NACIONAL %				CENTRO TECNICO PROFESIONAL %		
CATEGORIA	DESACUERDO	MED. DE ACUERDO	DE ACUERDO	DESACUERDO	MED. DE ACUERDO	DE ACUERDO
C1	5%	60%	35%	21%	53%	26%
C2	0%	15%	85%	21%	58%	21%
C3	0%	15%	85%	26%	53%	21%
C4	0%	15%	85%	53%	16%	31%

Tabla Nº4

En la tabla señala las opiniones de las clases activa en el Liceo Nacional, la categoría C1 el 5% está en desacuerdo, el 60% medianamente de acuerdo, el 35% está de acuerdo con la unidad didáctica de la elipse y en el Centro Técnico Profesional el 21% está en desacuerdo, el 53% medianamente de acuerdo y el 26% de acuerdo con la unidad didáctica.

En la categoría C2 en el Liceo Nacional señala que el 15% esta medianamente de acuerdo, el 35% de acuerdo con la metodología implementada para el aprendizaje en la clase activa, en cambio en el Centro Técnico Profesional el 21% está en desacuerdo, el 58% medianamente de acuerdo y el 21%de acuerdo.

La tabla muestra en el Liceo Nacional la categoría C3, el 15% está medianamente de acuerdo, el 85% está de acuerdo, en cambio el Centro Técnico Profesional el 26% desacuerdo, el 53% medianamente de acuerdo y el 21% está de acuerdo con los materiales para desarrollar con la experiencia de aprendizaje.

En la categoría C4 en el Liceo Nacional el 15% está medianamente de acuerdo y el 855 está de acuerdo y en el Centro Técnico Profesional el 53% está en desacuerdo, el 16% medianamente de acuerdo y el 31% de acuerdo con el tiempo para desarrollar la actividad.

CAPITULO VI: CONCLUSIONES

6.1 CONCLUSIÒN

- Respecto a fundamentar la importancia y la efectividad de la teoría de Van Hiele para la enseñanza de la Elipse, describiendo componentes esenciales podemos decir que el modelo utilizado para la enseñanza de la elipse está orientado específicamente para la enseñanza de la geometría, por tanto considera la observación espacial de las figuras geométricas. Los aprendizajes se desarrollan pasando por determinados niveles de pensamiento y conocimiento, además para alcanzar un nivel se debe pasar por el anterior. Es decir los conceptos tratados están ordenados desde los más simples a los más complejos generando en el estudiante una continuidad de los contenidos desarrollados.

- Las intervenciones de enseñanza que realizaron los investigadores fueron muy enriquecedoras en cuanto a la relación muy positiva que se dio con los estudiantes en cada uno de los cursos de tercer año medio considerados para la muestra. Los alumnos nos recibieron muy bien y se mostraron muy atentos con el tipo de metodología propuesta sobre todo en el Liceo Técnico Profesional (CTP), en donde sus estudiantes no se interesan mucho por el estudio. Nos sorprendimos con la recepción y atención que mostraron los alumnos del Liceo CTP, aunque nos dimos cuenta que la mayoría de estos no tiene conocimientos previos necesarios para comprender el contenido propuesto, sin embargo estuvieron dispuestos en todo momento para aprender y conocer este nuevo contenido para ellos.

- Respecto de la evaluación de los aprendizajes y la evaluación de la experiencia de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes en diferentes contextos educativos considerando la metodología activa y pasiva, podemos concluir que en el Liceo Nacional de Maipú los estudiantes presentan buenos resultados con la metodología pasiva, pero destacan más con el tipo de metodología activa, aunque el sistema se enseñanza de este liceo es de tipo pasiva, los estudiantes aprendieron de manera más significativa el contenido tratado. En cuanto al Liceo Técnico Profesional (CTP), los estudiantes también entregaron resultados satisfactorios con el tipo de metodología activa, algunas de las razones que podemos argumentar, es que generalmente los docentes que enseñan en este tipo de liceo con bajo rendimiento académico no crean expectativas positivas sobre el aprendizaje de los estudiantes e incluso manifiestan que no es posible enseñarles ni motivarlos por aprender, podemos decir que limitan al estudiante con su postura determinista sobre las capacidades que podrían rescatar de los alumnos. Podemos agregar que los estudiantes no habían tenido nunca una clase como la que les presentamos, ni tampoco habían oído hablar de “La elipse” y sus aplicaciones, por tanto se mostraron muy motivados e importantes dentro de la sala de clases.

- Analizar el resultado de la información recolectada y a partir de dicho análisis determinar los factores que facilitan el aprendizaje de los tratados, respecto de la tabla n °2 representa los datos con la metodología activa , el Liceo nacional de Maipú podemos concluir que los resultados obtenidos, muestran que en el nivel N0 que los estudiantes logran un 100% de los aprendizajes en cuanto a la visualización y respecto del Liceo CTP en este mismo nivel los estudiantes logran un 33% de los aprendizajes, entonces podemos concluir que los alumnos son capaces de reconocer la elipse como figura geométrica y reconocer sus elementos.

  Considerando el nivel N1 los estudiantes del Liceo Nacional de Maipú obtienen un porcentaje de un 100% y los estudiantes del Liceo CTP obtienen un 83%, podemos concluir que en este nivel de enseñanza los estudiantes identifican y generalizan las propiedades como también las características del contenido de la elipse.

  Luego en el nivel N2 los estudiantes del Liceo Nacional de Maipú obtienen un porcentaje de un 100% y los estudiantes del Liceo CTP obtienen un 100%, por tanto podemos decir que en este caso el resultado fue muy positivo, además los estudiantes entienden los significados de las definiciones, son capaces de seguir demostraciones con la ayuda del profesor.

  En el nivel N3 los estudiantes del Liceo Nacional de Maipú obtienen un porcentaje de un 100% y los estudiantes del Liceo CTP obtienen un 100%, podemos decir que los estudiantes también obtiene resultados muy satisfactorios por tanto logran la comprensión e incluso llegar al razonamiento formal.

- Analizar el resultado de la información recolectada y a partir de dicho análisis determinar los factores que facilitan el aprendizaje de los tratados, respecto de la tabla n °1 representa los datos con la metodología pasiva , el Liceo nacional de Maipú podemos concluir que los resultados obtenidos, muestran que en el nivel N0 que los estudiantes logran un 94% de los aprendizajes en cuanto a la visualización y respecto del Liceo CTP en este mismo nivel los estudiantes logran un 39% de los aprendizajes, entonces podemos concluir que los alumnos del Liceo Nacional son capaces de reconocer la elipse como figura geométrica y reconocer sus elementos, pero el liceo CTP no alcanza a lograr la mitad de los aprendizajes solicitados.

  Considerando el nivel N1 los estudiantes del Liceo Nacional de Maipú obtienen un porcentaje de un 94% y los estudiantes del Liceo CTP obtienen un 28%, entonces podemos concluir que en este nivel de enseñanza los estudiantes del Liceo Nacional identifican y generalizan las propiedades como también las características del contenido de la elipse, en cambio el Liceo CTP el porcentaje es inferior no logra el aprendizaje esperado pero tiene mayor porcentaje en la categoría por lograr con un 44% siendo este tampoco suficiente para el estudio.

Luego en el nivel N2 los estudiantes del Liceo Nacional de Maipú obtienen un porcentaje de un 84% y los estudiantes del Liceo CTP obtienen un 44%, por tanto podemos decir que en este caso el resultado fue positivo del Liceo Nacional, además los estudiantes entienden los significados de las definiciones, son capaces de seguir demostraciones con la ayuda del profesor, pero en el CTP el resultado fue inferior al 50%.

En el nivel N3 los estudiantes del Liceo Nacional de Maipú obtienen un porcentaje de un 77% y los estudiantes del Liceo CTP obtienen un 44%, podemos decir que los estudiantes no tienen un dominio total del conocimiento.

- En cuanto al diseño de las dos propuestas Metodológicas para la enseñanza de las cónicas, podemos concluir que la metodología activa funciona para ambos liceos, pero en el Liceo Técnico Profesional se incorporaran imágenes concretas para que los estudiantes tengan una mejor visualización y puedan relacionar con la vida diaria.

En el Centro Técnico Profesional los resultados obtenidos de la clase activa se pueden rescatar los siguientes niveles: el nivel 1 con un 83% de aprendizajes logrados los estudiantes reconocen los elementos de la elipse; en el nivel 2 con 100% logran una definición formal de la elipse con sus elementos; en el nivel 3 con un 100% de los resultados señala que los estudiantes entienden los ejemplos explicativos. Respecto de la clase pasiva se destaca el nivel 2 y 3 con un 44% cada una.

De los resultados obtenidos en ambas metodologías se rescata lo mejor de estas, formulando una nueva propuesta para este tipo de estudiantes. De acuerdo a los aprendizajes logrados y el análisis efectuado anteriormente señala que el método activo es más eficiente, pero se realizan algunas modificaciones en el nivel 0 que es la visualización donde se muestra un video de como se genera la elipse, también se incorporan algunas imágenes de la elipse que se relacionan en la vida diaria como por ejemplo las pistas atléticas, las órbitas de los planetas, las plazas, construcciones arquitectónicas, etc. Por tanto se mantiene el nivel 1, nivel 2 y nivel 3 para un mejor aprendizaje de la elipse en los estudiantes.

Los resultados obtenidos del Liceo Nacional nos señalan que en todos los niveles de aprendizaje propuestos por Van Hiele con la metodología activa fueron logrados en un 100% en esta muestra de estudiantes. La metodología pasiva al igual que la anterior logra un buen nivel con un 87,25%, pero no es tomada en cuenta en virtud de los resultados alcanzados en la primera propuesta metodológica

Los estudiantes de este liceo tienen un enfoque de enseñanza Conductista lo que no significo una problemática a la hora de aplicar una metodología activa, ya que los resultados prueban que fue exitosa. Las propuestas mencionadas están en el anexo de esta investigación.

6.2 ALCANCES Y LIMITACIONES

ALCANCES

- Investigar sobre la aplicación de las metodologías que resultaron del estudio, pero utilizando las otras secciones cónicas como la circunferencia, la parábola y la hipérbola.

- Investigar acerca del uso de las Tic para la enseñanza de las secciones cónicas, en donde los estudiantes pueden visualizar la geometría como una forma de comprender mejor los conceptos , también pueden experimentar, conjeturar y construir una forma dinámica de las figuras geométricas y sus propiedades.

- Realizar un estudio práctico, en donde los docentes puedan aplicar las metodologías obtenidas en este estudio considerando la estructura de la propuesta de los niveles de Van Hiele, pero tratando otros contenidos geométricos de la enseñanza media.

- Realizar una planificación para todas las secciones cónicas adaptada al tiempo real de enseñanza dentro del aula, considerando la estructura de la clase propuesta en el estudio y con las orientaciones de Van Hiele.

- Indagar acerca de la eficacia una planificación y actividades sustentadas en la teoría de Van Hiele.

LIMITACIONES

- El estudio se podría haber aplicado a una muestra más grande de estudiantes, para obtener resultados con un mayor nivel de confianza.

- El estudio fue un poco complicado porque en el país estaba pasando por una contingencia social sobre el cuestionamiento de la educación en general, por tanto resultó difícil acceder a los cursos que representarían la muestra , ya que los establecimientos seleccionados funcionaban en otro liceo.

- Respecto del tiempo en que se realizó la experiencia de enseñanza, fue complicado porque debido a los problemas de contingencia social, muchos liceos fueron tomados estudiantes en todo el país, por tanto los docentes que estaban a cargo de los cursos seleccionados, no permitían interrumpir el programa de enseñanza que debían cumplir.

- Respecto de lo anterior no pudimos tener una más amplia por los motivos mencionado en el párrafo anterior.

- Solo se aplicaron las metodologías respecto de la sección cónica “La elipse”, porque consideramos que es muy interesante que los estudiantes conozcan las aplicaciones en diferentes áreas como la ciencia, medicina, arquitectura, etc. Además es un contenido que no es enseñado en general e los liceos, solo en algunos casos en que se considera el programa diferenciado de matemáticas para tercer año medio.

- En el liceo técnico profesión ocurrieron acontecimientos delictivos dentro del establecimiento, por consiguiente fue cerrado y a la vez se postergo nuestra aplicación de nuestro estudio.

- Otro aspecto a considerar es que por el motivo de que los liceos funcionaban en otro establecimiento no tenían los recursos necesarios para el desarrollo de la clase, por tanto fue necesario llevar materiales para llevar a cabo esta experiencia.

BIBLIOGRAFÍAS

Libros

- Orientaciones didácticas, planes y programas 3°año medio, Ministerio de Educación Chile.
- El método Van Hiele aplicado a la enseñanza de las matemáticas. Juan López Sánchez.
- Modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría, Fernando Fouz, Berritzegune de Donosti.
- Nombre del libro:"matemática educación media , plan electivo III y IV “. Autor: Santiago Molleda, Rodrigo De la Heras, Gabriel Fuenzalida, José Rivero (son profesores) , Editorial Santillana , año 1995. Capítulo III: páginas 103 a la 134.
- Sampieri Hernández, Roberto, Fernández – Collado, Carlos y Lucio Baptista, Pilar (2006).Metodología de Investigación. México: McGraw –Hill.
- Fernández, P. & Díaz, P. (2002). Investigación cualitativa y cuantitativa.

Revista

- Revista de Psicodidáctica, N°. 14, Quevedo & Castaño: “Introducción a la metodología de investigación cualitativa.” 2002.
- Revista Electrónica Educare, Vol 14, No 2 (2010) “La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes” Ronny Gamboa Araya, Esteban Ballestero Alfaro.

Páginas web

- www.euclides.org/menu/articles/article104.htm
- http://wwwhatsnew.com/2010/05/29/buenastareas-com-ensayos-monografias-y-trabajos-de-investigacion/
- http://www.educarchile.cl/web_wizzard/visualisa.asp?id_proyecto=3&id_pagina=288&posx=3&posy=1,Módulo3
- http://www.google.cl/#pq=(bresson.+1987&hl=es&sugexp=ppwe&cp=50&gs_id=g&xhr=t&q=%EF%83%98%09fera.vtrbandaancha.net%2FALGEBRA%2Fintroaconicas.doc&pf=p&sclient=psyab&source=hp&pbx=1&oq=%EF%83%98%09fera.vtrbandaancha.net/ALGEBRA/introaconicas.doc&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.,cf.osb&fp=abdfb55fcdb12413&biw=1366&bih=674
- www.**liceonacionaldemaipu**.cl
- http://wikimapia.org/11674084/es/Centro-de-Educaci%C3%B3n-T%C3%A9cnico-Profesional-Municipalizado-CODEDUC
- http://158.251.72.52/sitio/moodle/mod/resource/view.php?id=38
- http://sermelec.net/index.php?option=com_content&view=article&id=78&Itemid=83
- www.angelfire.com/emo/tomaustin/met/metinacap,2002
- http://www.didactika.com/matematica/geometria/secciones_conicas.html

Artículos

- Acerca del Razonamiento en Geometría Rina Hershkowitz. Febrero. 2001
- Seminario de grado
- Diseño de actividades de aprendizaje para apoyar la enseñanza de las unidades geométricas a tratar en segundo año medio a en el contexto de Van Hiele.
- El estudio de clase como estrategia para mejorar la práctica docente: una experiencia de su explicación.
- Propuesta innovadora de situaciones de aprendizajes para apoyar la enseñanza de vectores en NM4.

GLOSARIO

Análisis: Observación de un objeto en sus características, separando sus componentes e identificando tanto su dinámica particular, como las relaciones de correspondencia que guardan entre sí.

Análisis de datos: Es el procedimiento práctico que permite confirmar las relaciones establecidas en la hipótesis, así como sus propias características.

Causa: Todo aquello que produce un efecto o cambio; condiciones que preceden un hecho.

Cuestionario: Instrumento formado por una serie de preguntas que se constatan por escrito a fin de obtener la información necesaria para la realización de una investigación.

Dato: Producto del registro de una respuesta.

Formulación del problema: Presentación oracional del problema. Reducción del problema a términos concretos, explícitos, claros y precisos.

Fuentes: Documentos o obras que sirven de apoyo para la elaboración de una obra.

Investigación: Forma sistemática y técnica de pensar que emplea instrumentos y procedimientos especiales con miras a la resolución de problemas o adquisición de nuevos conocimientos. Es el proceso formal, sistemático e intensivo de llevar a cabo el método científico del análisis, es decir, un procedimiento reflexivo, sistemático, controlado y critico que permite describir nuevos hechos o datos, relaciones o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano.

Marco Teórico: Teoría del problema, respaldo que se pone al problema.

Método: Conjunto de procedimientos sistémicos para lograr el desarrollo de una ciencia o parte de ella. Manera determinada de procedimientos para ordenar la actividad a fin de lograr un objetivo.

Metodología: Tratado del método, ciencia del método. Investigación sistemática y formulación de métodos que debe usarse en la investigación científica.

Método científico: Manera sistemática de adquirir conocimientos con exactitud. Procedimiento para describir las condiciones en que se presentan ciertos fenómenos de manera tentativa, verificable mediante la observación empírica.

Muestra: Suele ser definida como un subconjunto de la población. Los datos corresponden a las características de un grupo de individuos u objetos.

Objetivo: En investigación es el enunciado claro y preciso de lo que se persigue.

Objetivo General: Son los resultados globales que se pretenden alcanzar en una investigación.

Objetivos específicos; Son los que concretan respuestas a los propósitos precisos inherentes al problema formulado o a las dificultades identificadas para ser solucionadas. Indican lo que se pretende realizar en cada una de las etapas de la investigación.

Población: Totalidad del fenómeno a estudiar. Persona o elementos cuya situación se está investigando.

Pregunta: Formulación teórica de los datos cuya respuesta se espera obtener por medio de un instrumento de investigación.

Problema: Situación considerada como difícil de resolver, y que por lo tanto, necesita de la investigación para resolverse. Formulación o enunciado de una situación en que ciertos elementos, factores o condiciones son conocidos y otros desconocidos, tratándose de descubrir los desconocidos, tratándose de descubrir los desconocidos que integran la situación problemática.

Teoría: Compuesta por los principios o formulas de orden general que tienen como fin de explicar algún tipo de fenómenos. Explicación sistemática de determinados aspectos de la realidad.

Variable: Aspecto o dimensión de un fenómeno que tiene como característica la capacidad de asumir distintos valores. Símbolo al cual se le asignan valores o números.

Variable dependiente: La que se presenta como consecuencia de una variable antecedente, generalmente la independiente.

Variable independiente: La que se presenta como la causa y condición de la variable dependiente. Es la manipulada por el investigador. Recibe el nombre de variable experimental o causal.

ANEXOS

2.5.1 Las Cónicas

2.5.1.1 Origen de las Cónicas

El matemático griego Menecmo (vivió sobre el 350 A.C.) descubrió estas curvas y fue el matemático griego Apolonio (262-190 A.C.) de Perga (antigua ciudad del Asia Menor) el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas y encontrar la propiedad plana que las definía. Apolonio descubrió que las cónicas se podían clasificar en tres tipos a los que dio el nombre de: elipses, hipérbolas y parábolas.

- Las elipses son las curvas que se obtiene cortando una superficie cónica con un plano que no es paralelo a ninguna de sus generatrices.

- Las hipérbolas son las curvas que se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que es paralelo a dos de sus generatrices (Base y arista).

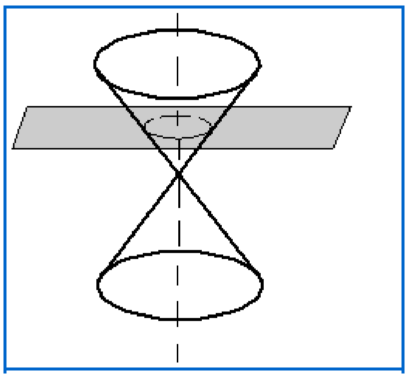
- Las parábolas son las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano paralelo a una sola generatriz (Arista).

Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definirlas.
Quizás las propiedades más interesantes y útiles que descubrió Apolonio de las cónicas son las llamadas propiedades de reflexión. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen los llamados espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

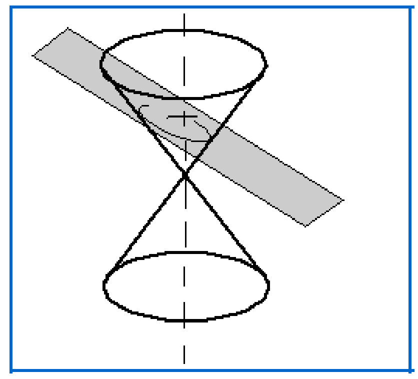
Apolonio demostró que si se coloca una fuente de luz en el foco de un espejo elíptico, entonces la luz reflejada en el espejo se concentra en el otro foco. Si se recibe luz de una fuente lejana con un espejo parabólico de manera que los rayos incidentes son paralelos al eje del espejo, entonces la luz reflejada por el espejo se concentra en el foco. Esta propiedad permite encender un papel si se coloca en el foco de un espejo parabólico y el eje del espejo se apunta hacia el sol. En la actualidad esta propiedad se utiliza para los radares, las antenas de televisión y espejos solares. La propiedad análoga, que nos dice que un rayo que parte del foco se refleja paralelamente al eje sirve para que los faros de los automóviles concentren el haz en la dirección de la carretera o para estufas. En el caso de los espejos hiperbólicos, la luz proveniente de uno de los focos se refleja como si viniera del otro foco, esta propiedad se utiliza en los grandes estadios para conseguir una superficie mayor iluminada.

En el siglo XVI el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada Geometría

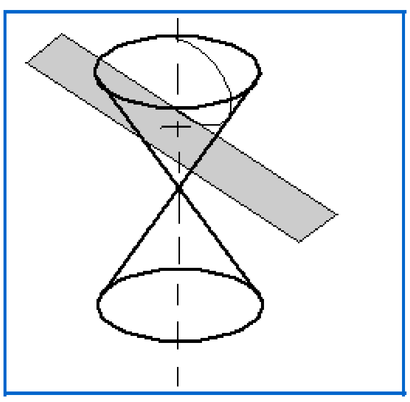
Analítica. En la Geometría Analítica las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y. El resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas se lo debemos a Jan de Witt (Ramirez)



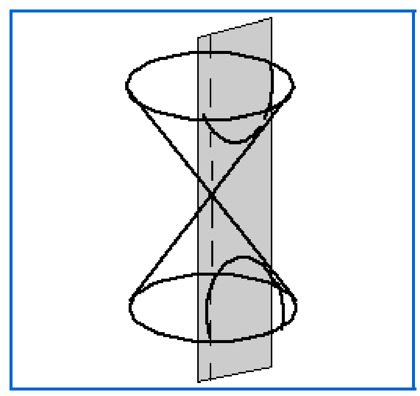
Circunferencia



Elipse



Parábola



Hipérbola

(http://www.didactika.com/matematica/geometria/secciones_conicas.html)

2.5.1.2 Definición de las cónicas

Las secciones cónicas son curvas que pueden obtenerse como la intersección de un cono circular con un plano que no contenga el vértice del cono. Las distintas cónicas se generan dependiendo de la inclinación del plano respecto del eje del cono. Si el plano es perpendicular a dicho eje se forma una circunferencia, si el plano es oblicuo a dicho eje se obtiene una elipse, cuando el plano es paralelo a la generatriz del cono se tiene una parábola y si el plano corta a ambas ramas del cono la curva es una hipérbola.

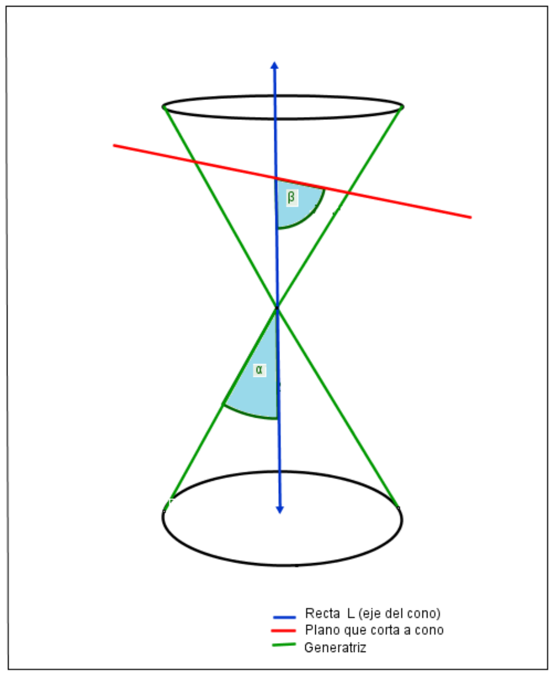
El esquema siguiente representa lo anterior:

Cortamos una superficie cónica por un plano que no pase por su vértice y llamamos α al ángulo que forma el eje del cono con la generatriz del mismo y, llamamos β al ángulo que forma el plano con el eje del cono.

Según la relación entre estos ángulos, ambas superficies se cortarán en:

- una circunferencia si $\beta = 90^\circ$
- una elipse si $\alpha < \beta < 90^\circ$

- una parábola si α = β
- las dos ramas de una hipérbola si α > β



2.5.1.3 Lugar geométrico (LG)

Se denomina lugar geométrico al conjunto de los puntos del plano o del espacio que satisfacen una determinada propiedad. Dicha propiedad se enuncia habitualmente en términos de distancias a puntos, rectas o circunferencias fijas en el plano y/o en términos del valor de un ángulo.

En muchas ocasiones, los lugares geométricos que satisfacen una propiedad dada son elementos sencillos (una recta, una circunferencia, una curva cónica), mientras que en otras ocasiones pueden corresponderse con trazados mucho más complejos.

Algunos ejemplos de lugares geométricos son la simetral de un segmento ya que debe cumplir la condición de que el conjunto de todos los puntos del plano (LG) que equidista de los extremos del segmento, la bisectriz de un ángulo cumple la condición que es el conjunto de todos los puntos del plano(LG) que equidistan de sus lados, también la circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano (LG) que se encuentran a una distancia determinada r de un punto dado O de dicho plano, etc.

También las curvas cónicas se pueden considerar como lugares geométricos. Así una elipse es el lugar geométrico de la suma de las distancias de un punto a dos dados (los focos) que es constante.

2.5.1.4 Cónicas en la vida real

Las diferentes aplicaciones que las secciones cónicas tienen en la vida real:

- Los cables de los puentes colgantes tienen forma parabólica (forman la envolvente de una parábola). Se creía hace tiempo que las cuerdas o cadenas que suspenden agarradas únicamente por sus extremos también formaban parábolas (hoy sabemos que la curva que describen es un coseno hiperbólico).

- Las trayectorias de los proyectiles tienen forma parabólica, los chorros de agua que salen de un surtidor tienen también forma parabólica. Si salen varios chorros de un mismo punto a la misma velocidad inicial pero diferentes inclinaciones, la envolvente de esta familia de parábolas es otra parábola (llamada en balística parábola de seguridad, pues por encima de ella no es posible que pase ningún punto de las parábolas de la familia). El mayor alcance que se puede obtener es aquel en que el ángulo de inclinación inicial es de 45 grados.

Arcos parabólicos en dos de las fuentes que pueden encontrarse en el Paseo del Prado de Madrid.

- La forma de los telescopios, detectores de radar y reflectores luminosos son parabólicas. En los faros de los coches se coloca la fuente de luz en el foco de la parábola, de modo que los rayos, al reflejarse en la lámpara, salen formando rayos paralelos. La nave espacial PLUTO de la NASA incorpora también un reflector parabólico. Recordar también el conocido efecto de quemar una hoja de papel concentrando los rayos solares mediante un espejo parabólico.
- Un telescopio de espejo líquido es un telescopio reflectante (es decir, que usa la propiedad reflectante de la parábola) cuyo espejo principal está hecho de mercurio líquido. Un famoso ejemplo lo constituye el telescopio HUBBLE situado en el espacio exterior.

- Las orbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas (el sol se encuentra en uno de los focos). La excentricidad de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente 0,0167. La de mayor excentricidad es la órbita de Plutón, 0,2481, que incluso es pequeña. Los cometas y los satélites también describen orbitas elípticas. En el extremo contrario esta el cometa HALLEY cuya excentricidad es de 0,9675, muy próxima a 1.

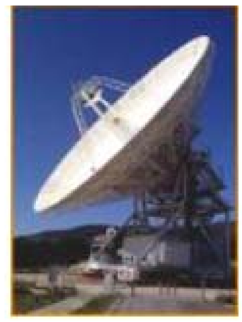
- En Óptica y propagación de ondas se utilizan lentes elípticas.
- En diseño artístico es común encuadrar retratos y fotografías en un marco con forma elíptica. La mayoría de los dispositivos usados para recortar figuras elípticas están basadas en las ecuaciones de la elipse como comentamos anteriormente.
- Una revolucionaria técnica médica introducida a mediados de la década pasada para el tratamiento de los cálculos renales utiliza propiedades reflexivas de las cónicas. La idea principal consiste en usar ondas sonoras intensas generadas fuera del cuerpo del paciente para pulverizar las piedras y convertirlas en arena que pueda ser fácilmente eliminada por el organismo. La clave está en enfocar las ondas para que no afecten al cuerpo, solo al cálculo. Para ello se usa una cámara semielipsoidal. En uno de sus focos se crea una poderosa chispa que evapora agua. La parte que golpea el reflector converge en el otro foco, donde se encuentra la piedra, con toda su intensidad, provocando su destrucción. Este tratamiento se aplica en la actualidad en más del 80% de piedras en el riñón y la uretra. Además el tiempo de recuperación es de 3 días en comparación con las dos semanas con la cirugía convencional, así como la tasa de mortalidad es del 0,01% frente al 2% del método tradicional (Alegria).

- También obtenemos formas parabólicas cuando un haz luminoso de forma cónica se proyecta sobre una pared blanca de manera que la pared sea paralela a la generatriz del cono. Es lo mismo que ocurre cuando cortamos un cono con un plano paralelo a cualquiera de las generatrices.

Las líneas parabólicas de la imagen se han obtenido proyectando un haz de luz sobre una pared blanca. Una generatriz del cono es paralela a la pared.

- Una de las propiedades más importantes de las formas parabólicas es que cualquier rayo que incida de forma paralela al eje de la parábola rebota en su superficie pasando por el foco. La parábola sirve para concentrar los rayos de luz en un punto, el foco, en el caso de la cocina solar, o las radiaciones electromagnéticas, en general, en las antenas parabólicas. Pero también sirve, como en el caso del faro de un coche, para conseguir que la luz que sale del foco se concentre en un haz más o menos cerrado.

Antena parabólica de televisión



Antena de seguimiento de satélites

- En muchas ciudades es fácil encontrar plazas de planta elíptica, normalmente conocidas por el nombre de "plaza elíptica". Por ejemplo, en Madrid y Bilbao existen plazas de este tipo. Sin embargo, la plaza de planta elíptica más famosa en el mundo probablemente sea la Plaza de San Pedro en el Vaticano.

Plaza de San Pedro del Vaticano

- También podemos encontrar edificaciones con planta elíptica. Un ejemplo es la iglesia del Monasterio de San Bernardo, más conocido por "Las Bernardas" en Alcalá de Henares. Un templo con una única nave y planta elíptica, con cúpula del mismo trazado. En sus muros se abren seis capillas, cuatro de ellas también de planta elíptica, con diferentes tamaños de sus portadas (Gomez).

Monasterio de San Bernardo, "Las Bernardas", en Alcalá de Henares (AACHE Ediciones)

- La forma de los telescopios, detectores de radar y reflectores luminosos son parabólicas. En los faros de los coches se coloca la fuente de luz en el foco de la parábola, de modo que los rayos, al reflejarse en la lámpara, salen formando rayos paralelos. La nave espacial PLUTO de la NASA incorpora también un reflector parabólico. Recordar también el conocido efecto de quemar una hoja de papel concentrando los rayos solares mediante un espejo parabólico.
- Un telescopio de espejo líquido es un telescopio reflectante (es decir, que usa la propiedad reflectante de la parábola) cuyo espejo principal está hecho de mercurio líquido. Un famoso ejemplo lo constituye el telescopio HUBBLE situado en el espacio exterior. El problema es cómo puede un líquido formar un espejo parabólico y por que se quiere así. La respuesta es que si se tiene un contenedor giratorio de líquido, la superficie del mismo formar a un paraboloide perfecto, incluso si la superficie interior del contenedor tiene imperfecciones.

  De este modo, no es necesario el pulido de los lentes y además los espejos pueden hacerse más grandes que los sólidos. Al utilizar mercurio líquido se consigue que los espejos sean más baratos que los tradicionales (solo hace falta una capa muy fina de mercurio pues este es muy pesado).
- Las orbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas (el sol se encuentra en uno de los focos). La excentricidad de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente 0,0167. La de mayor excentricidad es la órbita de Plutón, 0,2481, que incluso es pequeña. Los cometas y los satélites también describen orbitas elípticas. En el extremo contrario esta el cometa HALLEY cuya excentricidad es de 0,9675, muy próxima a 1.

- En Óptica y propagación de ondas se utilizan lentes elípticas.
- En diseño artístico es común encuadrar retratos y fotografías en un marco con forma elíptica. La mayoría de los dispositivos usados para recortar figuras elípticas están basadas en las ecuaciones de la elipse como comentamos anteriormente.
- Una revolucionaria técnica médica introducida a mediados de la década pasada para el tratamiento de los cálculos renales utiliza propiedades reflexivas de las cónicas. La idea principal consiste en usar ondas sonoras intensas generadas fuera del cuerpo del paciente para pulverizar las piedras y convertirlas en arena que pueda ser fácilmente eliminada por el organismo. La clave está en enfocar las ondas para que no afecten al cuerpo, solo al cálculo. Para ello se usa una cámara semielipsoidal. En uno de sus focos se crea una poderosa chispa que evapora agua. La parte que golpea el reflector converge en el otro foco, donde se encuentra la piedra, con toda su intensidad, provocando su destrucción. Este tratamiento se aplica en la actualidad en más del 80% de piedras en el riñón y la uretra. Además el tiempo de recuperación es de 3 días en comparación con las dos semanas con la cirugía convencional, así como la tasa de mortalidad es del 0,01% frente al 2% del método tradicional.

(Alegría)

2.5.2 La Circunferencia:

2.5.2.1 Definición de circunferencia

Una circunferencia es el lugar geométrico del conjunto de puntos de un plano tal que la distancia a cada uno de ellos desde un punto fijo del plano es una constante. El punto fijo se llama **centro** de la circunferencia y la distancia constante se llama radio.

Ecuación de una circunferencia con centro en el origen

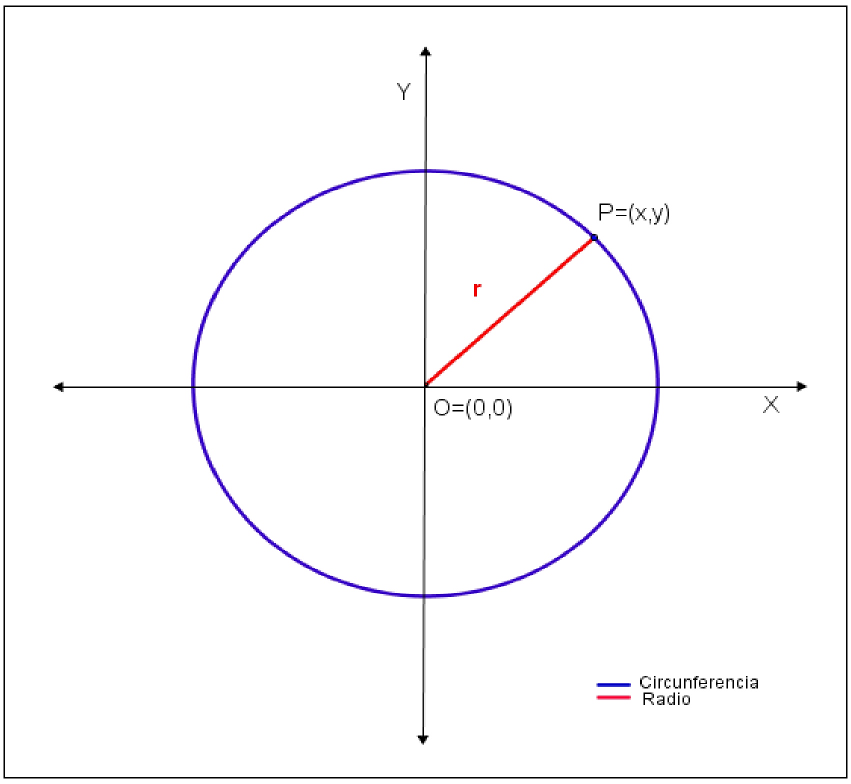


Figura n°1

2.5.2.2 Elementos de la circunferencia y con centro en el origen

En toda circunferencia se debe considerar:

Centro **(**O): es el punto fijo de la circunferencia: $O=(0,0)$

Punto (P): es un punto cualquiera de la circunferencia: $P=(x,y)$

Radio (r): es la distancia desde cualquier punto de la circunferencia a su centro O

Cuando coincide el centro de la circunferencia con el origen del plano cartesiano de coordenadas $O=(0,0)$, las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia $P=(x,y)$ determina un triangulo rectángulo que responde al Teorema de Pitágoras, puesto que la distancia entre el centro y un punto cualquiera de la circunferencia es constante e igual al radio r , entonces tenemos que

$$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$$

$$x^2+y^2=r^2$$

Se obtiene **la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.**

Demostración:

Sea $P=(x,y)$ un lugar geométrico, con centro $O=(0,0)$ y radio r, que debe cumplir la condición distancia entre el punto P y el centro O de la circunferencia es constante, es decir $\overline{OP}=r$

Para demostrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen utilizamos la formula de distancia entre dos puntos del plano, como sabemos $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Es la expresión que caracteriza la distancia entre los puntos $P=(x,y)$ y $O=(0,0)$. Luego la propiedad de distancia $\overline{OP}=r$ queda representada por

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y se obtiene

$$x^2+y^2=r^2$$

Por lo tanto queda demostrada la **ecuación canónica de la circunferencia.**

2.5.2.3 Ecuación principal de la circunferencia

La ecuación de una circunferencia con centro $O'=(h,k)$ y radio igual a r es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

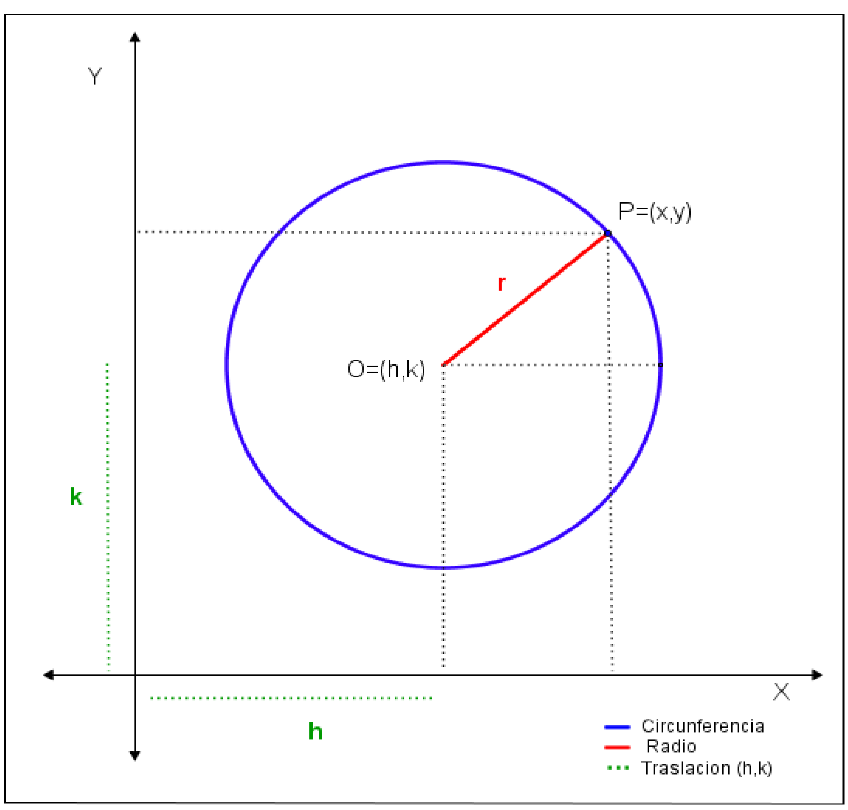


Figura n°2

Demostración:

Sea $P=(x,y)$ un lugar geométrico, con centro en $O'=(h,k)$ y radio r **,** que debe cumplir la propiedad geométrica: $\overline{O'P}=r$

Para demostrar la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen utilizamos la formula de distancia entre dos puntos del plano, como sabemos

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Es la expresión que caracteriza la distancia entre los puntos $P=(x,y)$ y $O'=(h,k)$**.**

Luego la propiedad de distancia $\overline{O'P}=r$ queda representada por

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación obtenemos

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Por lo tanto se obtiene la **Ecuación principal de la circunferencia** con centro $O'=(h,k)$ y radio r .

2.5.2.4 Ecuación general de la circunferencia

Para obtener la ecuación general de la circunferencia, se debe considerar la ecuación principal de la circunferencia con centro $O'=(h,k)$.

Demostración:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Desarrollando los cuadrados de los binomios

$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=r^2$

Igualando a cero la ecuación, tenemos

$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

Si denotamos:

$-2h=D$; $-2k=E$; $h^2+k^2-r^2=F$

Sustituyendo los coeficientes D, E y F en ecuación se tiene

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Por lo tanto se obtiene la **Ecuación general de la circunferencia.**

2.5.2.5 Ejemplos

1. Obtenga el centro de la circunferencia y radio de una circunferencia, dada su ecuación general $x^2+y^2-3x+4y-1=0$

Solución:

Agrupar variable

$$\left(x^2-3x\right)+\left(y^2+4y\right)-1=0$$

Agregar un cero conveniente para cada paréntesis

$$\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+\left(y+4y+4-4\right)-1=0$$

Asociando

$$\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+\left(y+4y+4\right)-4-1=0$$

Traspasando los términos constante hacia al lado derecho

$$\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\left(y+4y+4\right)=\frac{9}{4}+4+1$$

Se completa cuadrado

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+2\right)^2=\frac{29}{4}$$

Escribir en la forma canoníca de la circunferencia

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+2\right)^2=\left(\sqrt{\frac{29}{4}}\right)^2$$

$$\left(x-h\right)^2+\left(y-k\right)^2=r^2$$

$$P=\left(\frac{3}{2},-2\right);r=\sqrt{\frac{29}{4}}$$

2. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A=\left(1,3\right)$ y $B=\left(4,6\right)$ cuyo centro está sobre el eje X

Solución:

Sabemos qué $O'=\left(h,k\right)$ pero como esta sobre el eje X , entonces $O'=\left(h,0\right)$ además la distancia del centro a cualquiera de estos dos puntos será el radio $\overline{O'A}=\overline{O'B}=r$
Para determinar la distancia utilizaremos definición para los puntos

$P_1 = (x_1, y_1)$; $P_2 = (x_2, y_2)$

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Tenemos $\overline{O'A} = \overline{O'B}$ y como $O' = (h,0)$, $A = (1,3)$ y $B = (4,6)$, aplicando la expresión de distancia nos queda:

$\sqrt{(h-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(h-4)^2 + (0-6)^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación obtenemos

$(h-1)^2 + 9 = (h-4)^2 + 36$

Desarrollamos potencia y cuadrado de binomio ambas parte de la ecuación tenemos

$h^2 - 2h + 1 + 9 = h^2 - 8h + 16 + 36$

Reduciendo términos semejantes y resolviendo obtenemos, $h = 7$ Reemplazando en $O' = (h,k)$ nos queda $O' = (7,0)$

Ahora determinaremos el valor del radio, sabemos que $r = \overline{O'A}$

Utilizando la formula de distancia obtenemos

$r = \sqrt{(7-1)^2 + (0-3)^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros al cuadrado tenemos

$r = \sqrt{45}$

Tenemos $O' = (7,0)$, $r = \sqrt{45}$ reemplazando en la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-7)^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{45}\right)^2$

Resolviendo los cuadrados de binomios y potencia obtenemos es la ecuación de la forma general

$$x^2 + y^2 - 14x + 4 = 0$$

2.5.3 La Parábola

2.5.3.1 Definición de Parábola

La parábola es lugar geométrico de aquellos puntos del plano tal que la distancia a un punto fijo F llamado **Foco** es igual a la distancia hasta una recta fija D llamada **Directriz** situada en el mismo plano. Si $P=(x,y)$ entonces

$$d(P,F)=d(P,D)=\text{constante}$$

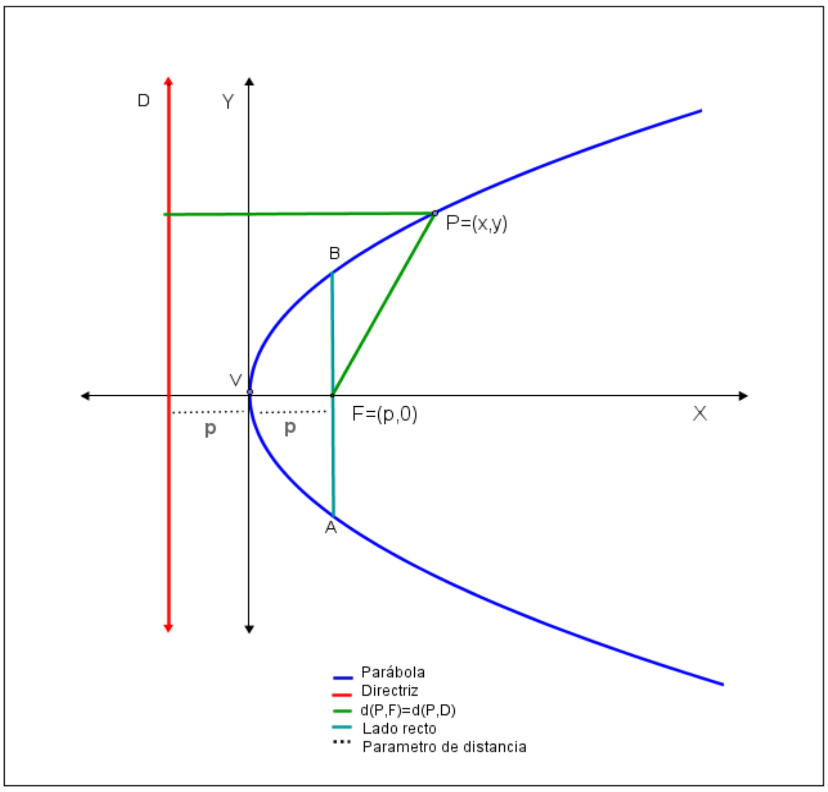


Figura n°3

2.5.3.2 Elementos de la Parábola

Vértice (V) : es el punto de intersección de la parábola con su eje de simetría

Foco (F): es el punto fijo F

Directriz (D) : es la recta fija D

Parámetro (p): p es la distancia del foco al vértice y $2p$ es la distancia del foco a la directriz D

Lado recto (LR): es la cuerda focal $\overline{AB}$ perpendicular al eje focal o eje de simetría de la parábola, cuya medida es $|4p|$; es decir la distancia entre los puntos A y B es $4p$.

2.5.3.3 Ecuación de la Parábola con vértice en el origen

Determinaremos la ecuación analítica de la parábola con eje focal en el eje x, supongamos que el vértice de la parábola se encuentra en el origen, como lo muestra la figura.

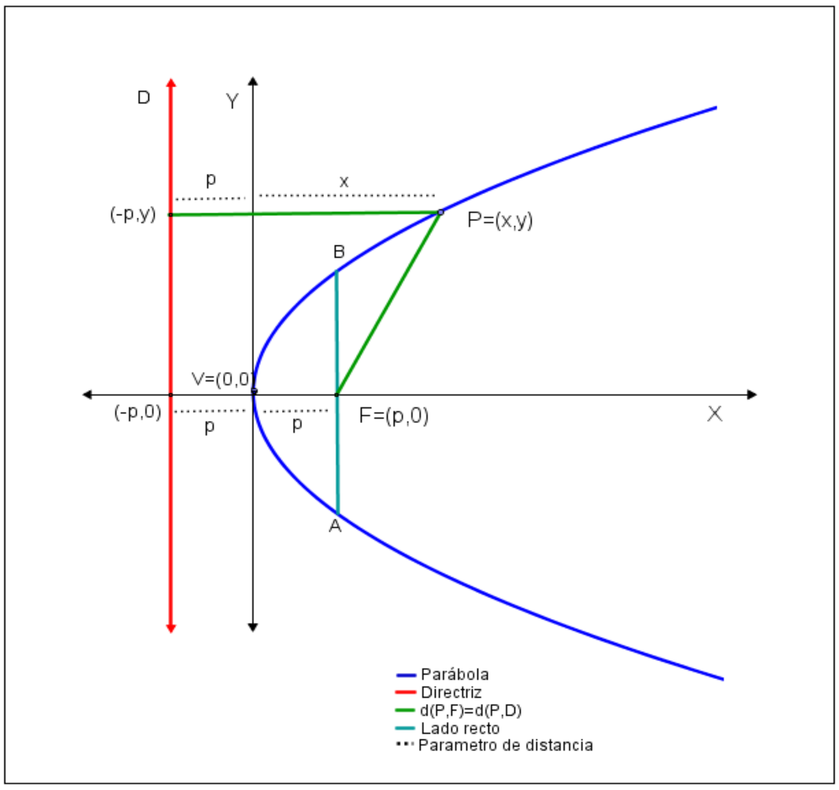


Figura n°4

Respecto a la figura anterior tenemos que las coordenadas del foco son: F=$(p,0)$ y la directriz tiene como ecuación $x=-p$. Entonces si $P=(x,y)$ es un punto de la parábola, por la definición anterior se cumple que $d(P,F)=d(P,D)=$ constante

Determinación de la parábola, con vértice en el origen y orientación horizontal

Demostración:

Como $\overline{PD}=\overline{PF}$, calculando la distancia entre los puntos F=$(p,0)$, $P=(x,y)$ y $D=(-p,y)$

Mediante la formula la distancia entre dos puntos, se tiene que

$$\overline{PD}=\sqrt{(x-(p))^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x+p)^2}$$

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$$

Sustituyendo en la expresión de distancias resulta

$$\sqrt{(x+p)^2}=\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado

$$(x+p)^2=(x-p)^2+y^2$$

Desarrollando cuadrado de binomio ambas partes de la ecuación tenemos

$$y^2=4xp$$

Por lo tanto queda demostrada la **Ecuación canoníca de la parábola.**

Observación:

- Si $p > 0$, el foco de la parábola está en la parte positiva del eje x, por lo tanto, su concavidad se orienta hacia la derecha.
- Si $p < 0$, el foco de la parábola está en la parte negativa del eje x, por lo tanto, su concavidad se orienta hacia la izquierda.

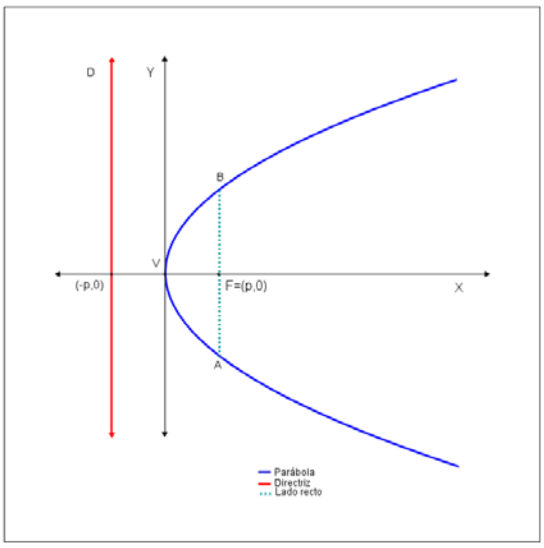


Figura n°5

$p > 0$; $F = (p,0)$; $D : x = -p$

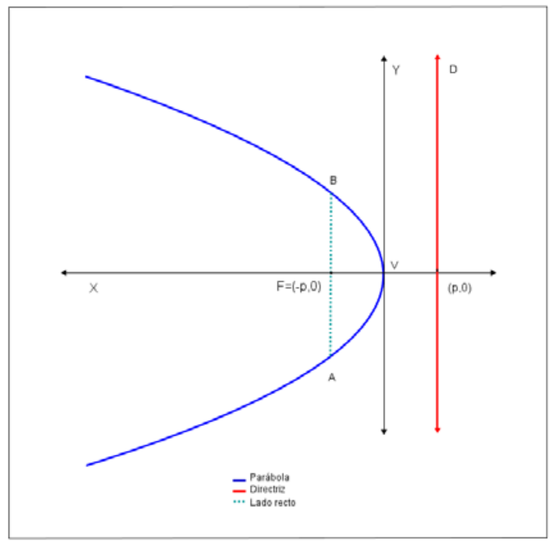


Figura n°6

$p < 0$; $F = (-p,0)$; $D : x = p$

En forma análoga:

Si el eje de simetría de la parábola coincide con el eje Y, la parábola tiene por eje focal al mismo eje Y.Las coordenadas del foco son: $F = (0,p)$ y la ecuación de la directriz es $y = -p$, por lo tanto la ecuación de la parábola con vértice en el origen y orientación vertical es $x^2 = 4yp$

Demostración:

Como $\overline{PD} = \overline{PF}$, calculando la distancia entre los puntos F=$(0,p)$, $P = (x,y)$ y $D = (x,-p)$

Mediante la formula la distancia entre dos puntos, se tiene que

$$\overline{PD} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

Sustituyendo en la expresión de distancias resulta

$$\sqrt{(y+p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado

$$\left(p+y\right)^2 = x^2 + \left(y-p\right)^2$$

Desarrollamos cuadrado de binomio ambas parte de la ecuación tenemos $x^2 = 4yp$

Por lo tanto queda demostrada la **Ecuación canoníca de la parábola**, la siguiente figura muestra este caso particular

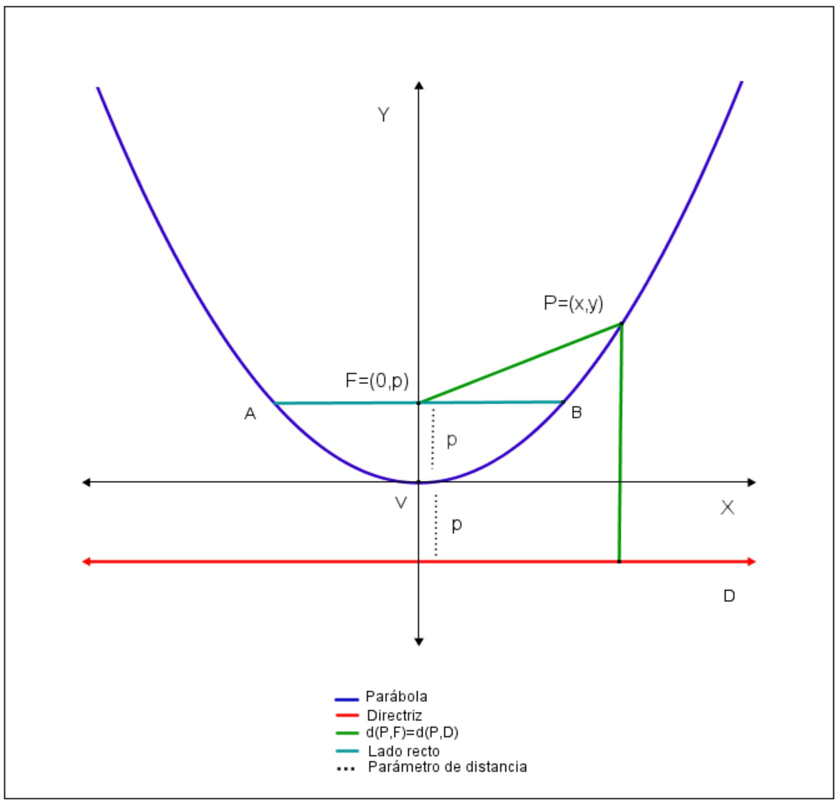


Figura n°7

Observación:

- Si $p > 0$, el foco de la parábola está en la parte positiva del eje Y, por lo que su concavidad se orienta hacia arriba.
- Si $p < 0$, el foco de la parábola se encuentra en la parte negativa del eje Y, su concavidad se orienta hacia abajo.

De acuerdo a lo anterior lo resumiremos en el siguiente esquema:

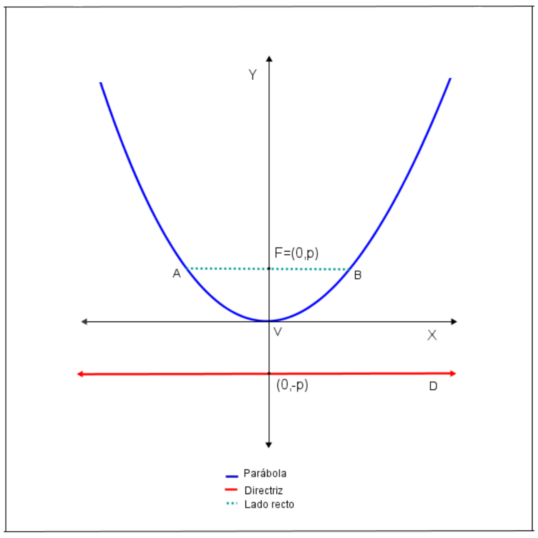


Figura n°8

$p > 0$; $F = (0, p)$; $\mathrm{D} : y = -p$

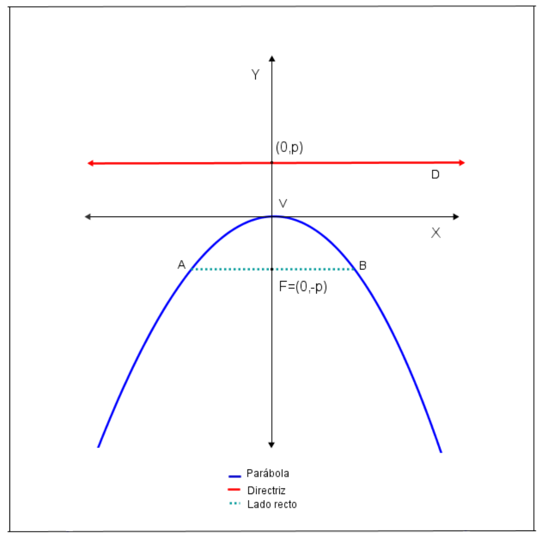


Figura n°9

$p < 0$; $F = (0, -p)$; $\mathrm{D} : y = p$

Como $A = (p, y)$ pertenece a esta curva, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación:

$$y^2 = 4p \cdot p$$

$$y^2 = 4p^2$$

Aplicando raíz cuadrada a ambas partes de la ecuación tenemos

$$y = 2p$$

Luego la medida del lado recto es:

$$LR = d(A, B) = \sqrt{(p - p)^2 + (y + y)^2} = \sqrt{4y^2} = 2y = |4p|$$

Luego tenemos que $LR = |4p|$

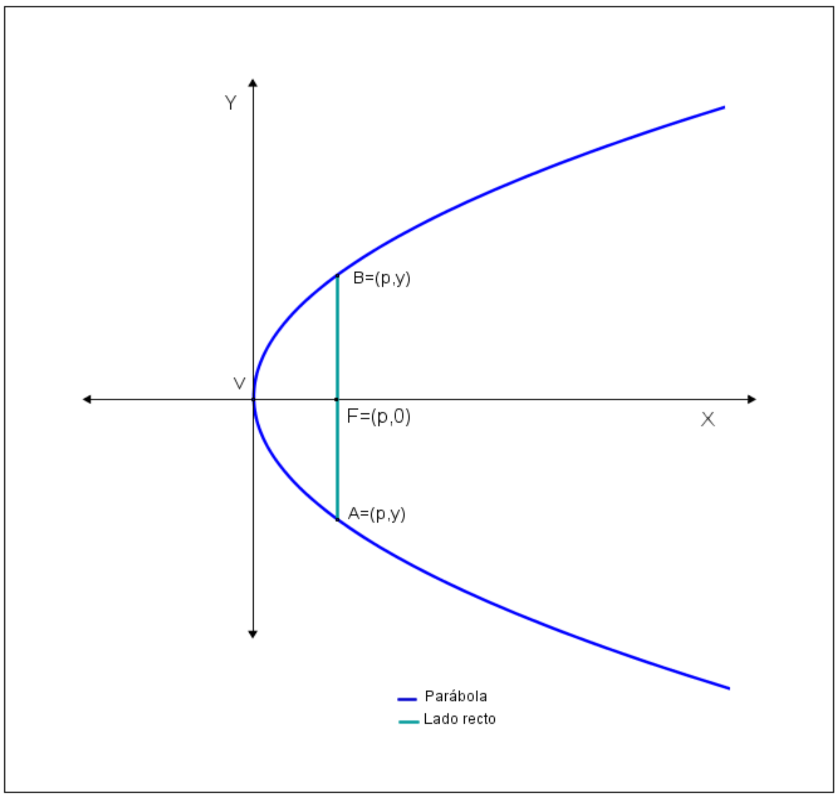


Figura n°10

2.5.3.4 Ecuación principal fuera del origen y general de la parábola

La ecuación de la parábola con vértice en el punto $V=(h,k)$ y orientación horizontal es

$$4p(x-h)=(y-k)^2$$

Demostración:

Considerando $\overline{PD}=\overline{PF}$, el foco es $F=(h+p,k)$, el punto $P=(x,y)$

Utilizando formula de distancia entres dos puntos $P=(x,y)$ y $F=(h+p,k)$

$\overline{PF'}=\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2}$, es la distancia desde el punto $P=(x,y)$ al foco F'

$\overline{PD'}=x-(h-p)$, es la distancia desde el punto $P=(x,y)$ a la directriz D'

Sustituyendo en la expresión de distancias resulta

$\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2}=x-(h-p)$

Elevando ambos miembros al cuadrado

$(x-(h+p))^2+(y-k)^2=(x-(h-p))^2$

Desarrollamos cuadrado de binomio ambas partes de la ecuación tenemos

$x^2-2x(h+p)+(h+p)^2+(y-k)^2=x^2-2x(h-p)+(h-p)^2$

Desarrollamos cuadrado de binomio y simplificando términos semejantes en ambas partes de la ecuación

$(y-k)^2=4px-4hp$

Factorizando obtenemos

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Por lo tanto queda demostrada la ecuación principal de la parábola con vértice fuera del origen $V=(h,k)$ y orientación horizontal.

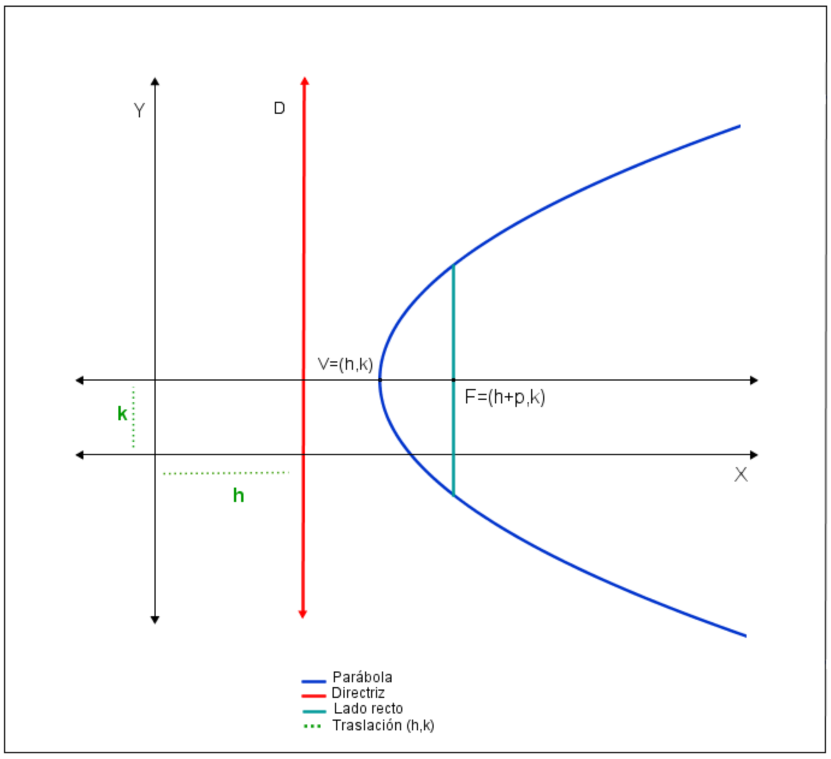


Figura n°11

La ecuación de la parábola con vértice en el punto $V=(h,k)$ y orientación vertical es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Demostración:

Considerando $\overline{PD} = \overline{PF}$, el foco es $F=(h,k+p)$, el punto $P=(x,y)$

Utilizando formula de distancia entres dos puntos $P=(x,y)$ y $F=(h,k+p)$

$\overline{PF'} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-(p+k))^2}$, es la distancia desde el punto $P=(x,y)$ al foco F'

$\overline{PD'} = y-(k-p)$, es la distancia desde el punto $P=(x,y)$ a la directriz D'

Sustituyendo en la expresión de distancias resulta:

$\sqrt{(y-(p+k))^2 + (x-h)^2} = y-(k-p)$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$(y-(p+k))^2 + (x-h)^2 = (y-(k-p))^2$

Desarrollamos cuadrado de binomio ambas partes de la ecuación tenemos:

$y^2 - 2y(p+k) + (p+k)^2 + (x-h)^2 = y^2 - 2y(k-p) + (k-p)^2$

Desarrollamos cuadrado de binomio y simplificando términos semejantes en ambas partes de la ecuación:

$$(x-h)^2 = 4py - 4pk$$

Factorizando obtenemos:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Por lo tanto queda demostrada la ecuación principal de la parábola con vértice fuera del origen V= (h,k) y orientación vertical. La siguiente figura representa la ecuación anterior.

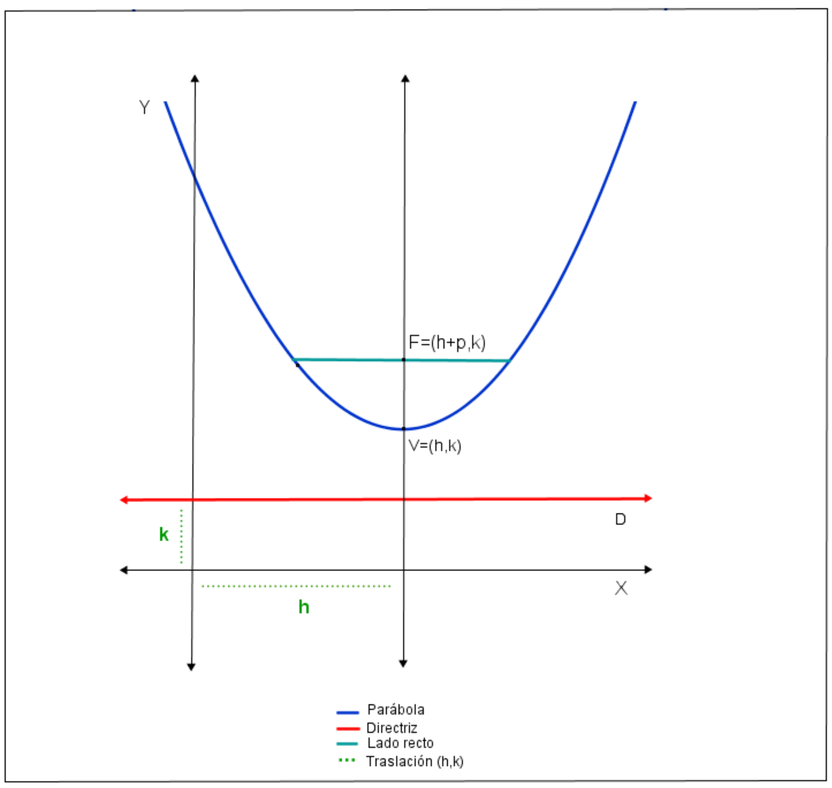


Figura n°12

Por efecto de traslación, el nuevo eje focal X' se mantiene paralelo al eje X. La ecuación principal permite conocer de in mediato las coordenadas de su vértice, el valor p y, la medida del lado recto.

Para obtener la ecuación general de la parábola se desarrolla algebraicamente la ecuación canónica de la parábola.

Demostración:

Considerando la ecuación principal de la parábola con vértice fuera del origen

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Desarrollando cuadrados de binomio

$$y^2 - 2yk + k^2 = 4px - 4ph$$

Igualando a cero

$$y^2 - 2yk + k^2 - 4px + 4ph = 0$$

Multiplicando por coeficiente A Factorizando se obtiene

$Ay^2 - 4Apx - 2Aky + A\left(k^2 + 4Aph\right) = 0$

Luego haciendo que los coeficientes de las variables sean:

$-4Ap = D$

$-2Ak = E$

$A\left(k^2 + 4Aph\right) = F$

Sustituyendo los coeficientes D, E y F en ecuación se obtiene:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Por lo tanto la ecuación general de la parábola con oriental horizontal. Análogamente se demuestra **la ecuación general de la parábola con orientación vertical,** entonces la ecuación es:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

2.5.3.5 Ejemplos

1. Determinar los elementos de la parábola de ecuación $x^2 = 8y$.

Solución:

Como la ecuación es de la forma $x^2 = 4py$, es decir una parábola con centro en el origen y orientación vertical.

Entonces, $4p = 8$

De donde se deduce que $p = 2$

Como $p > 0$ y el eje focal coincide con el eje Y , la curva tuene su concavidad hacia arriba.

Los elementos de la parábola son:

Foco: las coordenadas del foco son $(0, p)$ y en este caso son $F = (0, 2)$

La ecuación de la directriz: es $y = -p$, entonces va a ser $D: y = -2$

El lado recto: es $L.R. = |4p|$, entonces para nuestro ejemplo va a ser $L.R. = |4 \cdot 2| = 8$

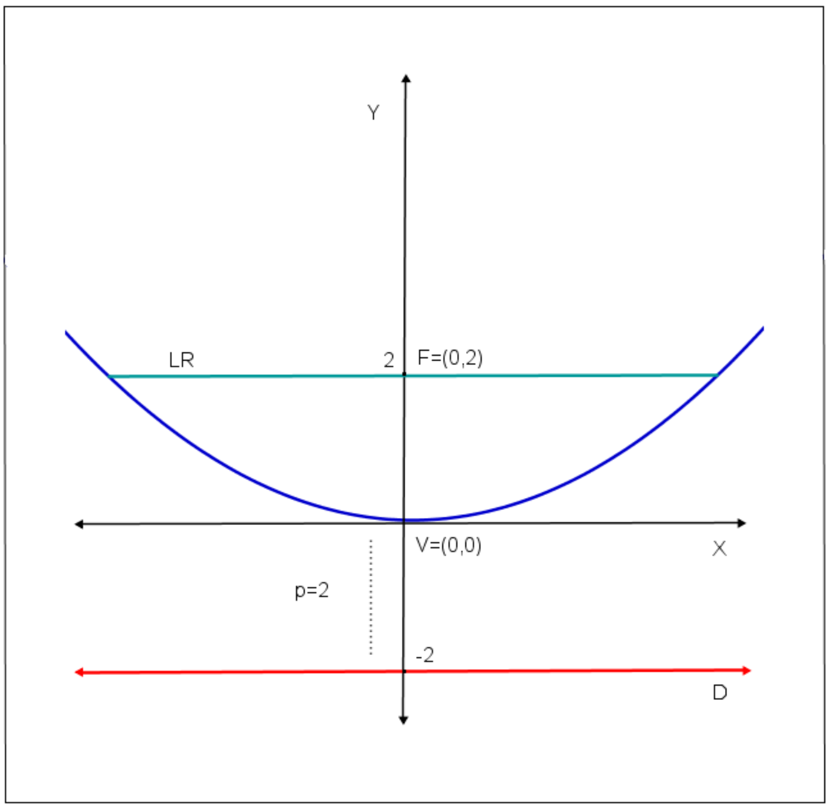


Figura n°13

2. Determinar la ecuación general de la parábola horizontal de foco $F=(1,3)$ y vértice $V=(-2,3)$.

Solución:

Para obtener la ecuación general de la parábola, primero se debe trabajar con la ecuación principal de la parábola con orientación horizontal que es de la forma $(y-k)^2=4p(x-h)$

Como la distancia desde el vértice al foco es p, entonces $d(V,F)=p=3$

Como el vértice es $V=(h,k)=(-2,3)$, se puede reemplazar en la ecuación

Reemplazando valores de vértice

$(y-3)^2=4\cdot 3(x-(-2))$

Multiplicando y cambiando signo

$(y-3)^2=12(x+2)$

Desarrollando cuadrado de binomio y multiplicando

$y^2-6y+9=12x+24$

Finalmente la ecuación general de la parábola con orientación horizontal es:

$$y^2-6y-12x-15=0$$

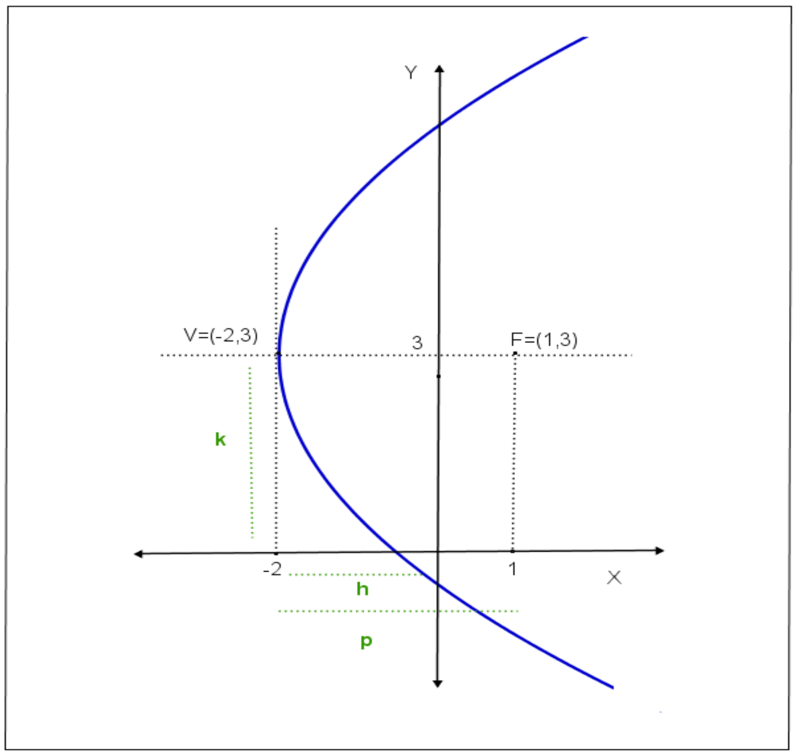


Figura n°14

2.5.4 La Elipse

2.5.4.1 Definición de elipse

Una elipse una curva cerrada y plana que corresponde al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos puntos fijos del plano, se llaman focos y se designan por F_1 y F_2 Entonces se cumple que la distancia desde el punto $P=(x,y)$ a los focos F_1 y F_2 satisface

$d(P,F_1)+d(P,F_2)=$ constante

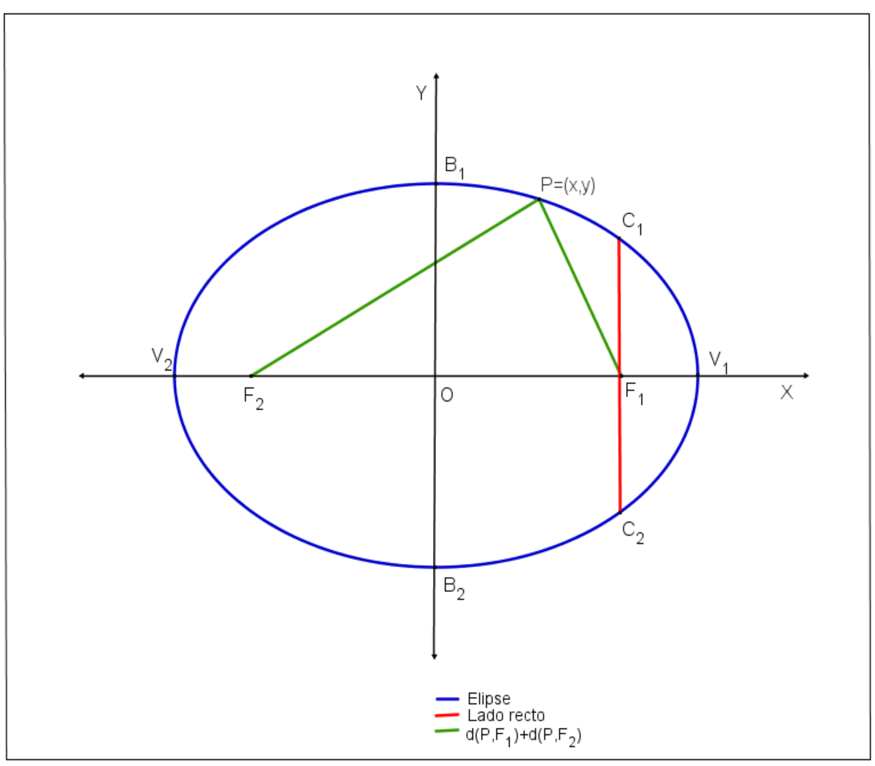


Figura n°15

2.5.4.2 Los elementos de la elipse

Focos (F) : son los puntos fijos F_1 y F_2: $F_1=(c,0), F_2=(-c,0)$

Recta focal: la recta $\overleftrightarrow{V_1V_2}$ a la que pertenecen los focos: $V_1=(a,0), V_2=(-a,0)$

Recta secundaria: la simetral $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ del segmento F_1 y F_2: $B_1=(0,b), B_2=(0,-b)$

Centro(O) : punto de intersección de las rectas focal y secundaria que equidista de los focos Vértices (V) : pun tos de intersección de la elipse con la recta focal se designan por V_1yV_2 Semieje mayor: segmento $\overline{V_1V_2}$ que tiene longitud $2a$; a es el valor del semieje mayor

Semieje menor: segmento de la recta secundaria interceptada por la elipse. Tiene longitud $2b$; b es el valor del semieje menor.

Distancia focal: longitud del segmento $\overline{F_1F_2}$ es $2c$

Lado recto: segmento $\overline{C_1C_2}$ perpendicular al semieje mayor, contiene a un foco (cualquiera de los dos) y sus extremos se localizan sobre la elipse. La longitud del lado recto se denomina Ancho focal. Las coordenadas del lado recto son: $C_1=(c,y)$ y $C_2=(c,-y)$ y su longitud es $\frac{2b^2}{a}$

Valor de la constante

Vamos a suponer que el eje focal de la elipse coincide con el eje X , además que el centro se encuentra en el origen.

Entonces de acuerdo a lo anterior, las coordenadas de los focos son $F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$

Luego si $P=(x,y)$ es un punto que pertenece a la elipse se tiene que: $d(P,F_1)+d(P,F_2)=\text{constante}$

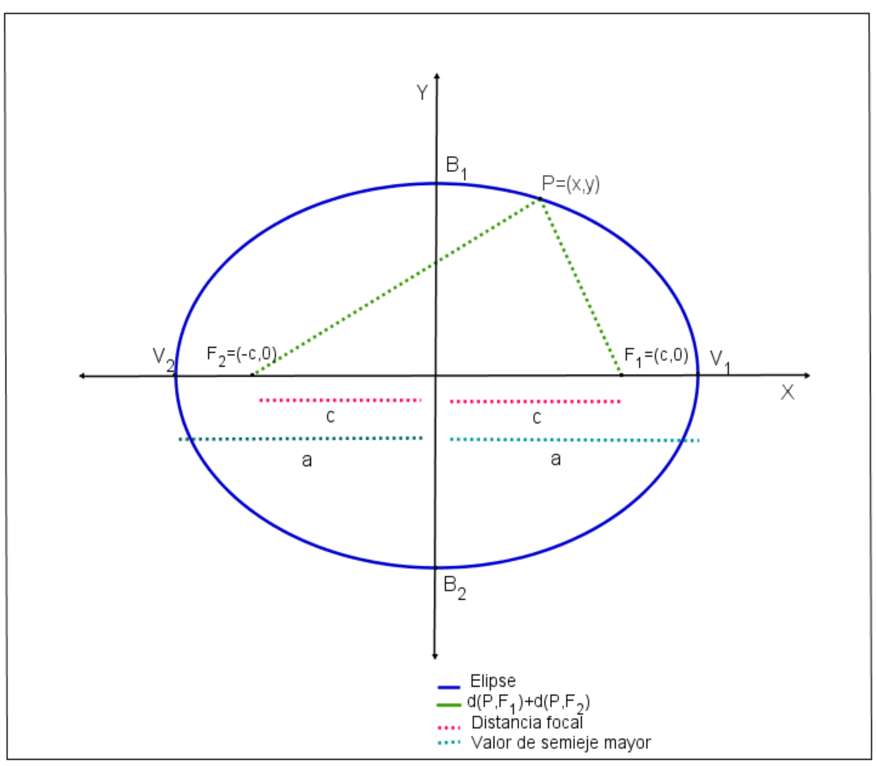


Figura n°16

De acuerdo a la definición y la figura anterior, determinemos el valor de esta constante. Entonces si consideramos al punto $P=(x,y)$ ubicado en el vértice V_1 la suma de sus distancias a los focos es constante $P=(a,0)=V_1$.

Demostración:

$$d(V_1,F_1)+d(V_1,F_2)=d(V_1,F_1)+\left[d(V_1,F_1)+d(F_1,F_2)\right]$$

Pero, $d(V_1,F_1)=d(V_2,F_2)$

$$d(V_1,F_1)+\ d(V_1,F_2)=d(V_2,F_2)+d(V_1,F_1)+d(F_1,F_2)$$

$$=d(V_2,F_2)+d(F_1,F_2)+d(V_1,F_1)$$

$$=2a$$

Como $V_1=P$, entonces se tiene que:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

Nota: por otro lado si el punto P está ubicado en el vértice B_1 del triángulo OF_1B_1, rectángulo en O, de la relación anterior resulta que $\overline{B_1F_2}=\overline{B_1F_1}=a$, $c<a$, $a^2=b^2+c^2$ como muestra la siguiente figura

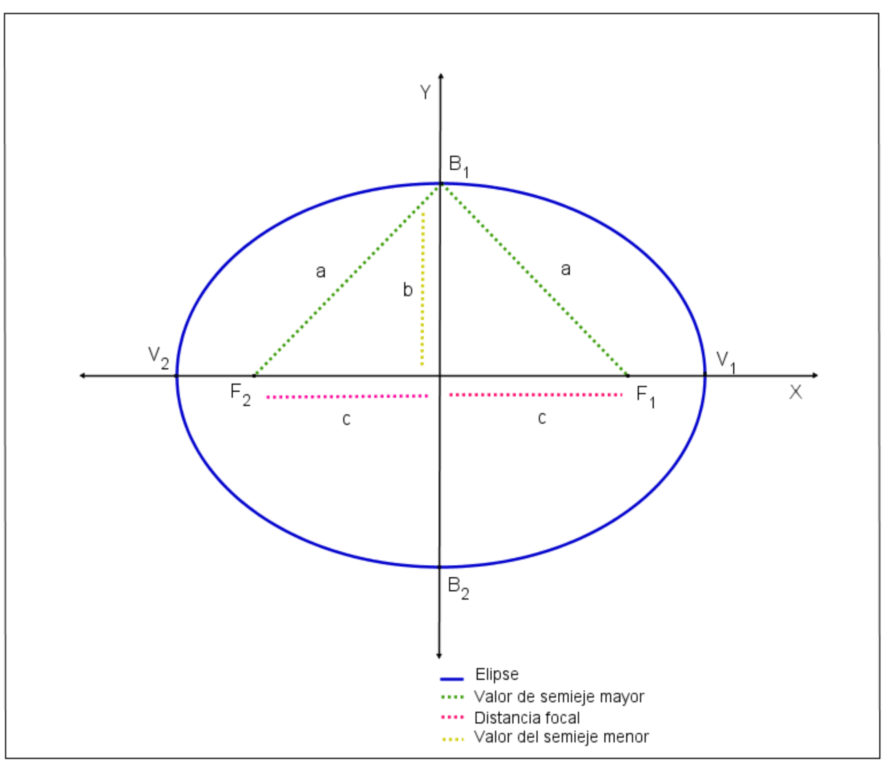


Figura n°17

2.5.4.3 Ecuación Principal de la elipse con centro fuera del origen

¿Cómo se encuentra la ecuación analítica de la elipse?

Para poder encontrar la ecuación analítica de la elipse, expresaremos las distancias entre $P=(x,y)$ y los focos $F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$ en función de sus coordenadas.

$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$

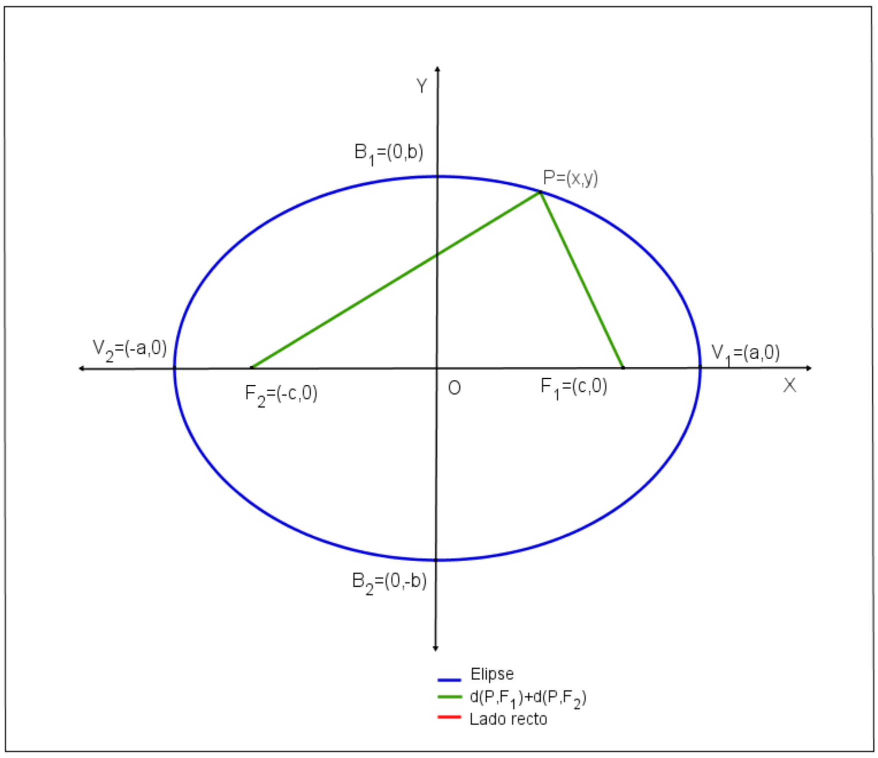


Figura n°18

Luego para demostrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen utilizaremos el concepto de distancia entre dos puntos del plano,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Luego tomando en cuenta los puntos $F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}=2a$$

Despejamos una la raíz de la izquierda

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}$$

Elevando al cuadrado toda la expresión

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes, nos queda

$$2xc=4a^2-4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}-2xc$$

Sumando términos semejantes

$$xc=a^2-a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

Luego elevando al cuadrado ambas expresiones

$$\left(xc-a^2\right)^2=\left(-a\sqrt{\left(c-x\right)^2+y^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes nos queda

$$x^2c^2+a^4=a^2c^2+a^2x^2+a^2y^2$$

Ahora reemplazamos c^2 por $a^2-b^2=c^2$

$$x^2\left(a^2-b^2\right)+a^4=a^2\left(a^2-b^2\right)+a^2x^2+a^2y^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes obtenemos

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividiendo toda la expresión por a^2b^2 y simplificando obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Por lo tanto, esta es la **ecuación canónica de la elipse con orientación horizontal.**

Observación: Dado que $a>b$, $a^2-b^2=c^2$ es un número positivo.

¿Cómo se encuentra la ecuación analítica de la elipse?

Para poder encontrar la ecuación analítica de la elipse, expresaremos las distancias entre $\mathrm{P}=\left(\mathrm{x,y}\right)$ y los focos $F_1=\left(0,c\right)$ y $F_2=\left(0,-c\right)$ en función de sus coordenadas.

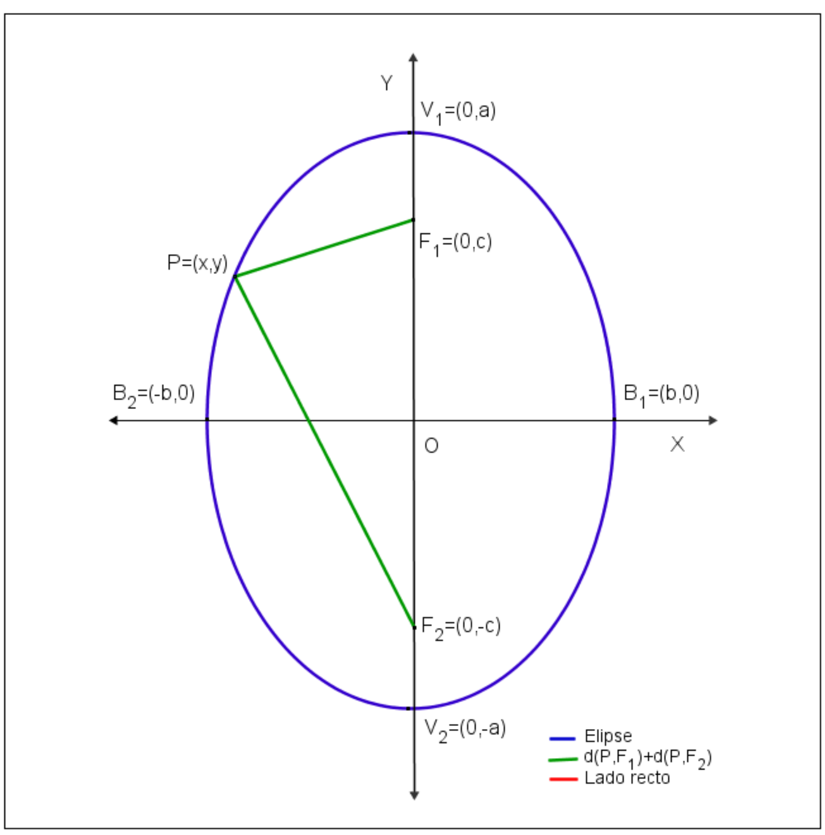


Figura n°19

Luego para demostrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen utilizaremos el concepto de distancia entre dos puntos del plano,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Luego tomando en cuenta los puntos $F_1 = (0,c)$ y $F_2 = (0,-c)$

Luego:

$$\sqrt{(x+0)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(0-x)^2 + (-c-y)^2} = 2a$$

Despejamos la raíz de la izquierda

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (-c-y)^2}$$

Elevando al cuadrado toda la expresión

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2 + (-c-y)^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes queda la expresión

$$yc = a^2 - a\sqrt{x^2 + (c-y)^2}$$

Ordenando y elevando al cuadrado en ambos miembros

$$\left(yc - a^2\right)^2 = \left(-a\sqrt{x^2 + (c-y)^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes obtenemos

$$y^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

Reemplazando $a^2 - b^2 = c^2$ resulta

$$y^2\left(a^2 - b^2\right) + a^4 = a^2x^2 + a^2\left(a^2 - b^2\right) + a^2y^2$$

De donde obtenemos

$$a^2x^2 + y^2b^2 = a^2b^2$$

Dividiendo por a^2b^2 y simplificando

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Finalmente obtenemos la ecuación de la elipse caso vertical con centro en el origen. Por lo tanto, esta es la **ecuación canónica de la elipse con orientación vertical.**

Observación: Dado que $a > b$, $a^2 - b^2 = c^2$ es un número positivo.

Lado Recto (L.R.)

El lado recto para la elipse horizontal con vértice en el origen es la cuerda que pasa por el foco y que es perpendicular al eje focal de la elipse. Como muestra la figura las coordenadas de los extremos del lado recto son $C_1 = (c,y)$ y $C_2 = (c,-y)$.

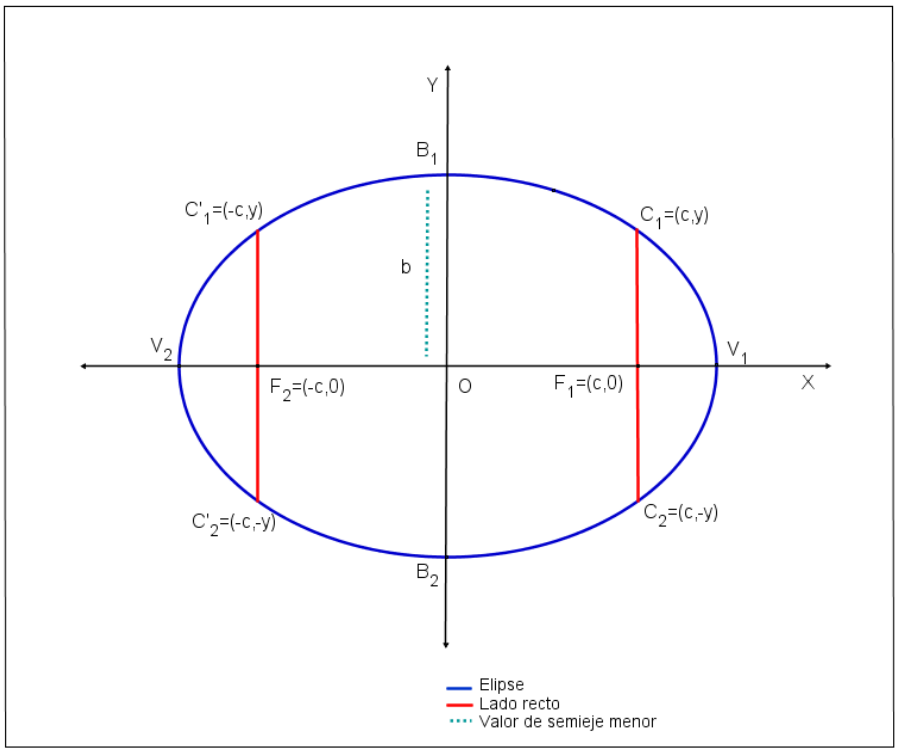


Figura N°20

Además como $C_1 = (c, y)$ pertenece a esta curva, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Luego reemplazando

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

Donde

$$y^2 = b^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) = b^2 \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a}$$

Entonces el lado recto va a tener una longitud igual a:

$$\mathrm{d}(C_1, C_2) = \sqrt{(c-c)^2 + (y+y)^2} = \sqrt{4y^2} = 2y = \frac{2b^2}{a}$$

2.5.4.4 Ecuación Principal y General de la elipse con traslación $T = (h, k)$

Tomando la ecuación de la elipse con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Considerando una traslación al centro $T = (h, k)$, donde el eje focal de la elipse se mantiene paralelo al eje X, la ecuación principal de la elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

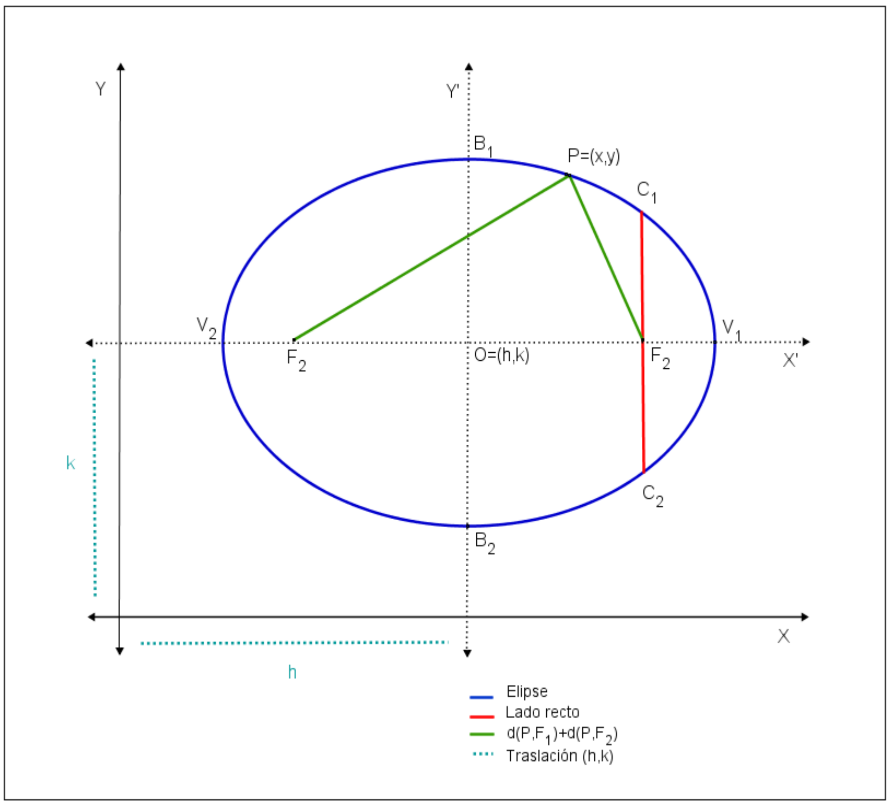


Figura n”21

Si el eje focal de la elipse es paralelo al eje Y , la ecuación principal de la elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

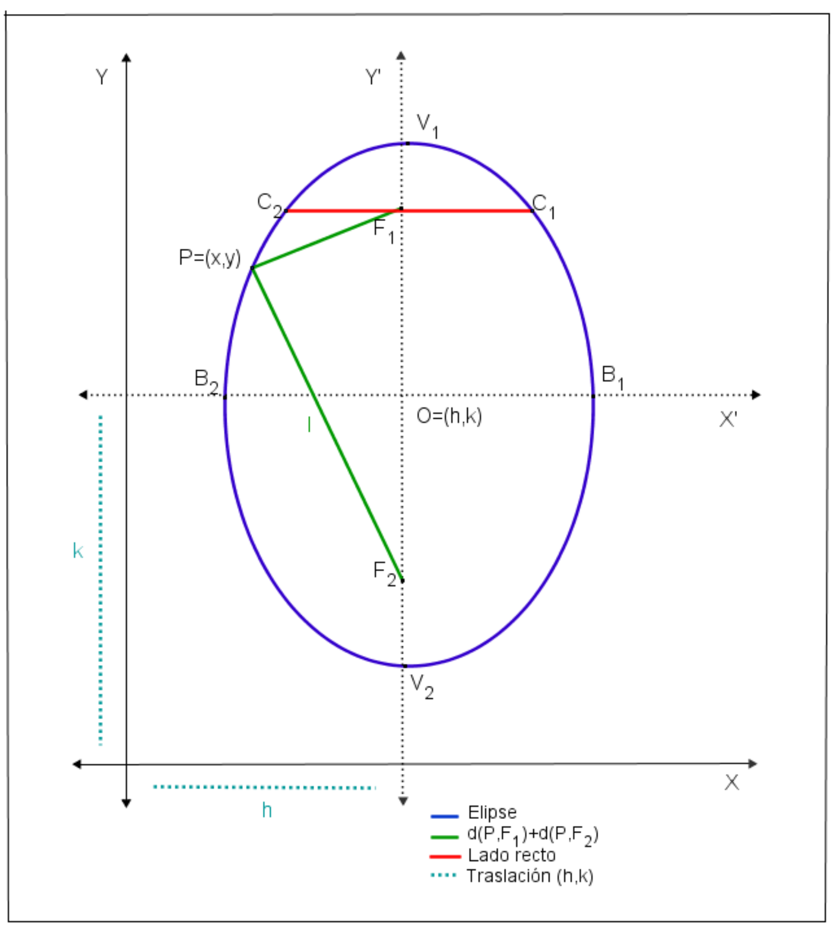


Figura n°22

Demostración:

Considerando la ecuación principal de la elipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Desarrollando cuadrados

$$\frac{x^2-2xh+h^2}{a^2}+\frac{y^2-2yk+k^2}{b^2}=1$$

Sumando

$$\frac{b^2\left(x^2-2xh+h^2\right)+a^2\left(y^2-2yk+k^2\right)}{a^2b^2}=1$$

Multiplicando por a^2b^2 toda la expresión

$$b^2\left(x^2-2xh+h^2\right)+a^2\left(y^2-2yk+k^2\right)=a^2b^2$$

Desarrollando expresiones algebraicas

$$b^2x^2-2b^2xh+b^2h^2+a^2y^2-2a^2yk^2+a^2k^2=a^2b^2$$

Igualando a cero toda la expresión

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2k^2y+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$$

Haciendo que:

$b^2=A$

$a^2=B$

$-2hb^2=C$

$-2ka^2=D$

$b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=F$

Por lo tanto se obtiene **la ecuación general de la elipse**

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0$, con $A<B$

Análogamente de se demuestra de la misma manera la ecuación general de la elipse con eje focal paralelo al eje Y, es decir con orientación vertical

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0$, con $A>B$

2.5.4.5 Ejemplos

1. Encontrar los elementos de la Elipse para la ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Solución:

Como la ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $(a>b)$

Tenemos que $a^2=25\Rightarrow a=5yb^2=9\Rightarrow b=3$

Además $b^2+c^2=a^2$

De donde $c^2=16\Rightarrow c=4$

Por lo tanto, los elementos de la elipse son:

Focos: $F_1 = (4,0)$ y $F_2 = (-4,0)$

Eje mayor: $2a = 2 \cdot 5 = 10$

Eje menor: $2b = 2 \cdot 3 = 6$

Lado recto: $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2 \cdot 9}{5} = \dfrac{18}{5}$

Vértices: $(5,0)$ y $(-5,0)$

Figura de ejemplo 1

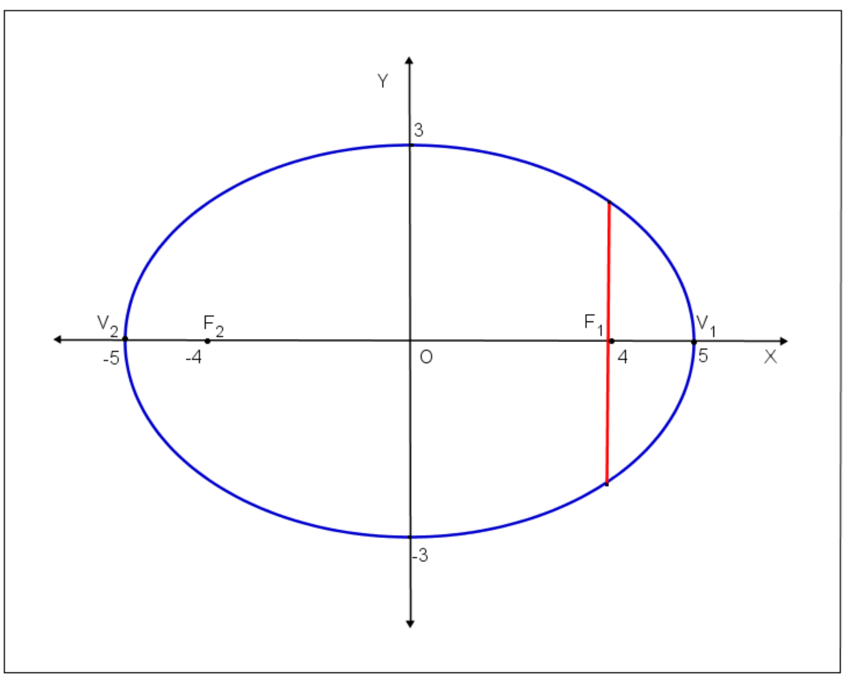


Figura n°23

2. Determinar la ecuación de la elipse con centro en $(3,1)$ uno de sus vértices en $(3,-2)$

Solución:

Para determinar la ecuación, ubicamos en un sistema de ejes cartesianos el punto centro y el vértice como se ve en la figura. Como el eje focal es paralelo al eje, la ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \quad h = 3;\ k = 1$$

De la figura, tenemos $a = 3 \Rightarrow c = 1$

Por propiedad: $b^2 + c^2 = a^2$ obtenemos $\quad b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$

2.5.5 La hipérbola

2.5.5.1 Definición de hipérbola

La hipérbola es una curva plana y abierta corresponde al lugar geométrico de los puntos en un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos del mismo plano es una cantidad constante.

Los puntos fijos se llaman focos y se designan por F_1 y F_2

$d(P,F_2) - d(P,F_1) = \text{Constante}$

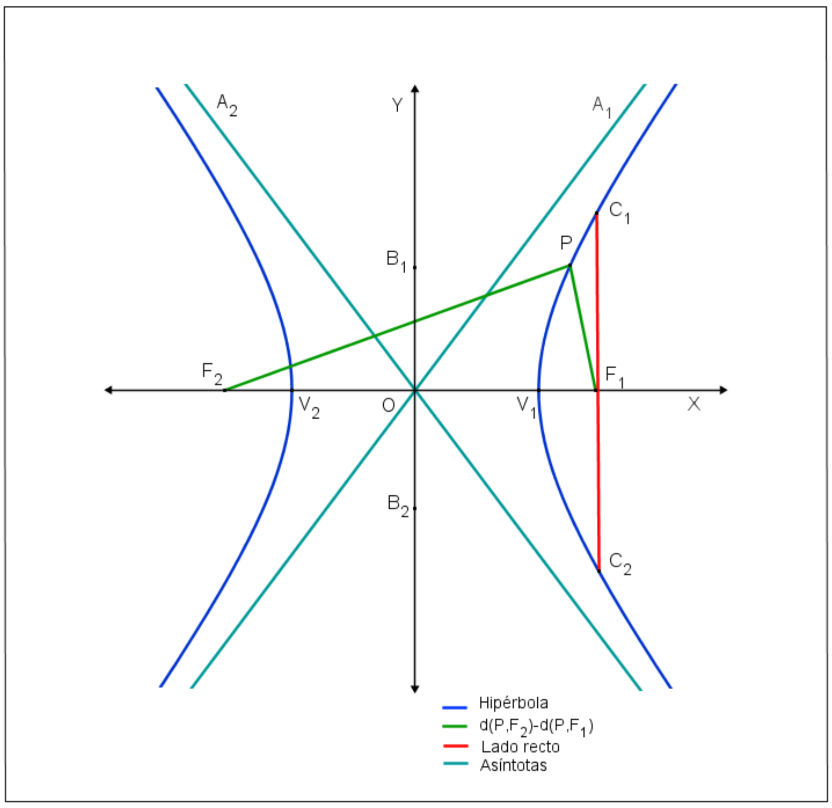


Figura n°24

2.5.5.2 Elementos de hipérbola

Focos (F) : son los puntos fijos F_1 y F_2: $F_1 = (c,0)$, $F = (-c,0)$

Recta focal: la recta $\overline{V_1V_2}$: $V_1 = (a,0)$, $V_2 = (-a,0)$

Recta secundaria o imaginaria: es la simetral (línea perpendicular) al segmento $\overline{F_1F_2}$

Centro (O) : es el punto de intersección de las rectas focal y secundaria que además equidista de los focos

Vértices (V): son los puntos de intersección de la hipérbola con la recta focal y se designan por V_1 y V_2

Semieje real: es el segmento $\overline{V_1V_2}$ que tiene longitud $2a$; a es el valor del semieje real

Semieje imaginario: es el segmento $\overline{B_1B_2}$ que se considera de longitud $2b$; b es el valor del semieje imaginario: $B_1 = (b,0), B_2 = (-b,0)$

Distancia focal: es la medida del segmento $\overline{F_1F_2}$ que se considera de longitud $2c$

Lado recto: segmento $\overline{C_1C_2}$ perpendicular a la recta focal $\overleftrightarrow{V_1V_2}$, contiene a uno de los focos (cualquiera de los dos) y sus extremos se localizan sobre la rama de la hipérbola.

Las coordenadas del lado recto son: $C_1 = (c, y)$ y $C_2 = (c, -y)$ y su longitud es $\dfrac{2b^2}{a}$

Asíntotas(A): son las rectas A_1 y A_2 que limitan a la curva, se acercan a la curva sin llegar a interceptarla.

Valor de la constante

Supongamos que el eje de focal de la hipérbola coincide con el eje X y el centro se encuentra en el origen del sistema o hipérbola.

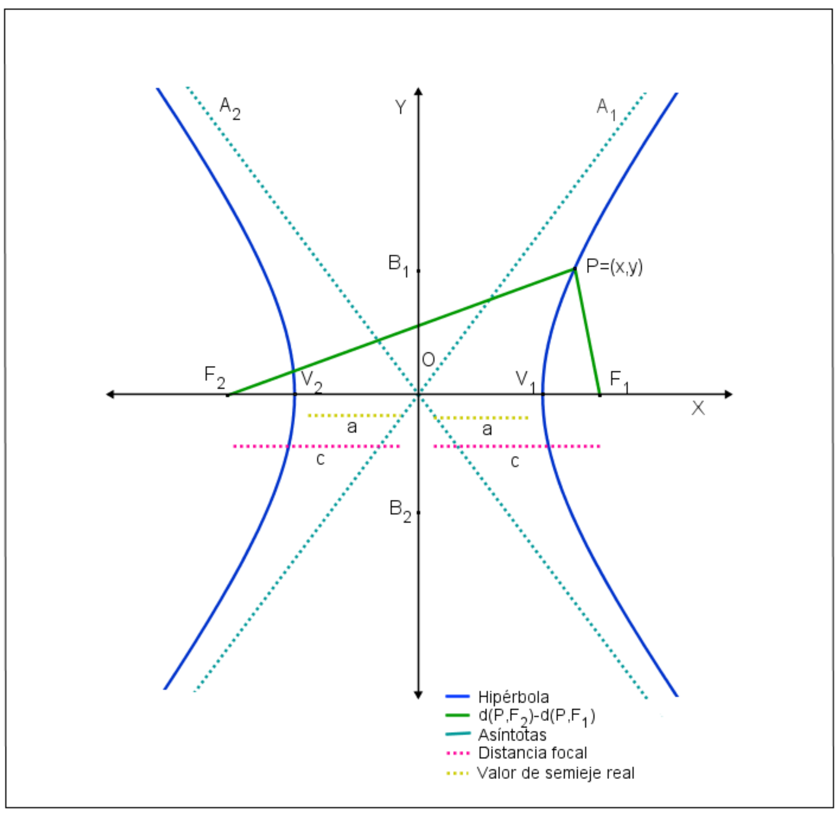


Figura n°25

Respecto de lo anterior las coordenadas de los focos son $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$. Luego si $P = (x, y)$ es un punto de la hipérbola se cumple lo siguiente:

$$d(P, F_2) - d(P, F_1) = \text{Constante}$$

Entonces para poder determinar el valor de la constante, consideramos al punto $P = (x, y)$ ubicado en el vértice V_1, entonces:

$$\begin{aligned} V_1F_2 - V_1F_1 &= V_1V_2 + V_2F_2 - V_1F_1 \\ &= V_1V_2 \\ &= 2a \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\quad d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$

Respecto de la relación anterior de los segmentos se obtiene según la figura del triángulo anterior PF_1F_2 $\triangle$en donde:

$$2c > PF_2 - PF_1 = 2a \Rightarrow c > a$$

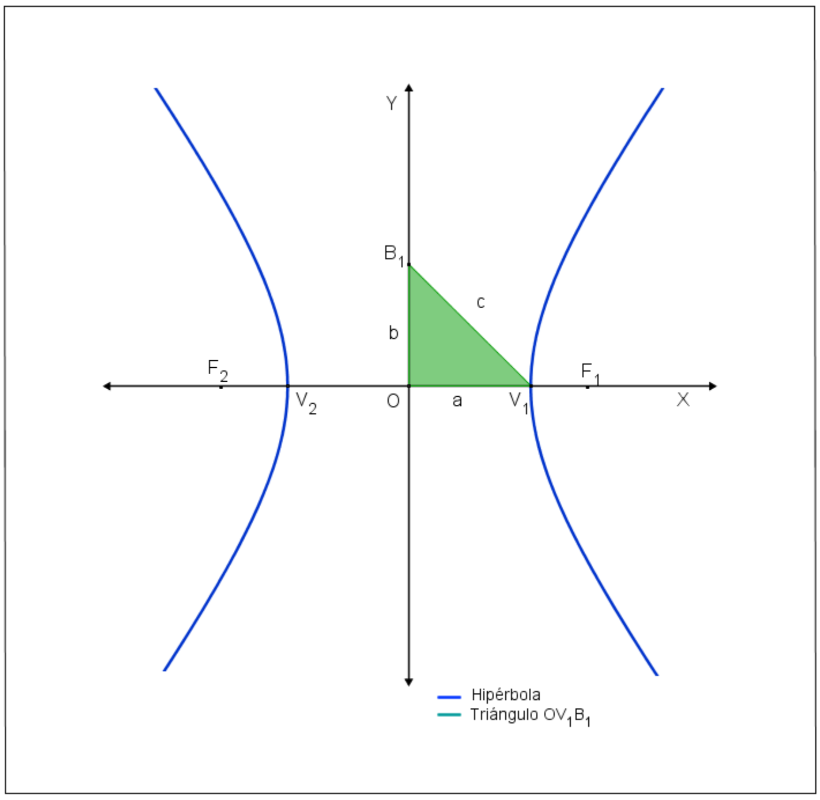


Figura n°26

Nota: en el $\triangle$ OV_1B_1 rectángulo en O se cumple la relación:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2.5.5.3 Ecuación Canónica de la Hipérbola con centro en el origen, con orientación horizontal y vertical.

¿Cómo se encuentra esta ecuación analítica de la Hipérbola horizontal?

Para encontrar la ecuación analítica de la hipérbola, expresamos las distancias entre $P = (x, y)$ y los focos $F_1 = (c, 0)$ y $F = (-c, 0)$ en función de sus coordenadas

$d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$

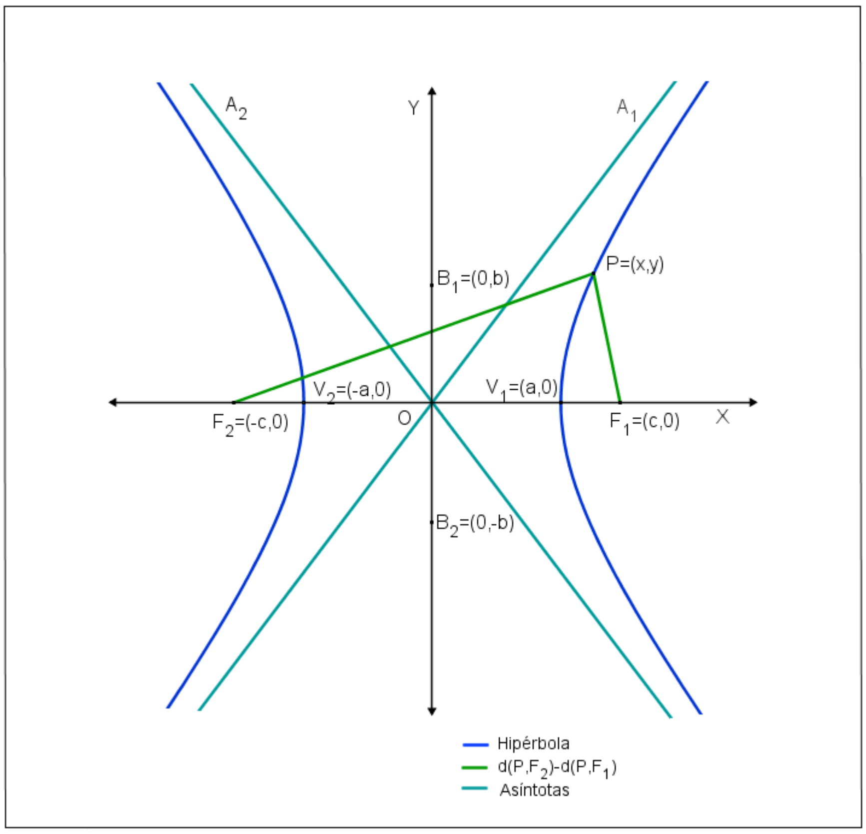


Figura n°27

Luego para demostrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen utilizaremos el concepto de distancia entre dos puntos del plano,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Entonces para encontrar nuestra ecuación tomaremos los puntos

$P=(x,y)$, $F_1=(c,0)$ y $F=(-c,0)$

Entonces:

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Que es equivalente a

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado toda la expresión

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes, nos queda

$$2xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2xc$$

Sumando términos semejantes

$$xc=a^2-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Luego elevando al cuadrado ambas expresiones

$$\left(xc-a^2\right)^2=\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes nos queda

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

Ahora reemplazamos c^2 por $a^2 - b^2$, entonces

$$x^2\left(a^2 - b^2\right) + a^4 = a^2x^2 + a^2\left(a^2 - b^2\right) + a^2y^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes obtenemos

$$y^2b^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

Dividiendo toda la expresión por a^2b^2 y simplificando obtenemos

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Finalmente, esta es la **ecuación canónica de la Hipérbola con orientación horizontal**

Observación: Dado que $a > b$, $a^2 - b^2 = c^2$ es un número positivo.

¿Cómo se encuentra la ecuación de la Hipérbola vertical?

Para encontrar la ecuación analítica de la hipérbola, expresamos las distancias entre $P = (x, y)$ y los focos $F_1 = (0, c)$ y $F_2 = (0, -c)$ en función de sus coordenadas.

$$d\left(P, F_2\right) - d\left(P, F_1\right) = 2a$$

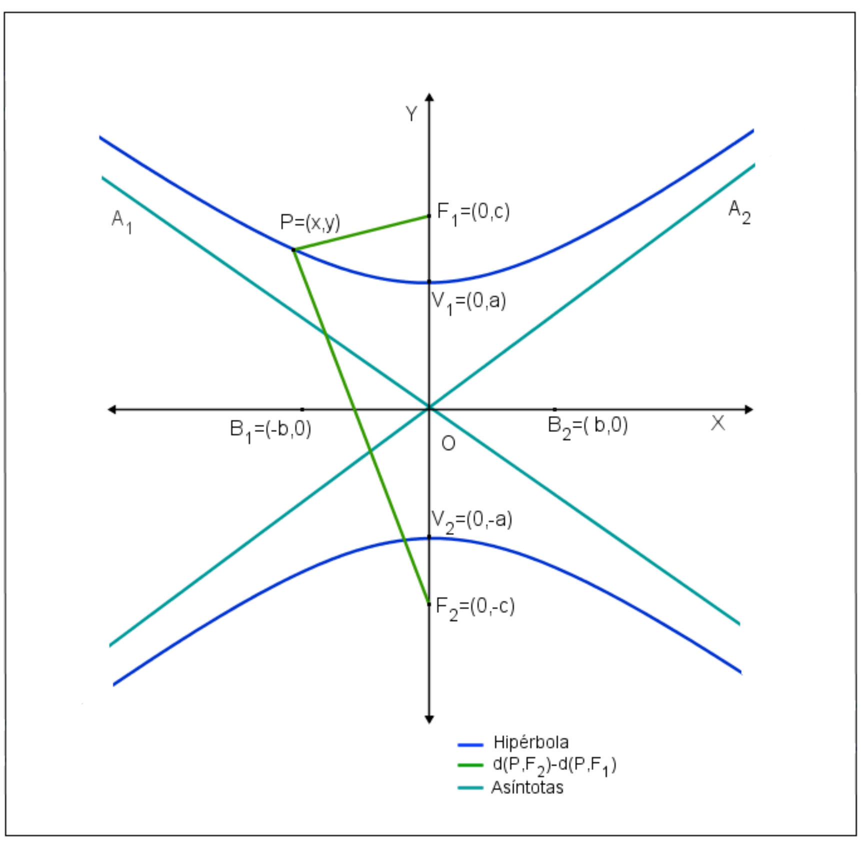


Figura n°28

Luego para determinar la ecuación necesitamos el concepto de distancia entre dos puntos

$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Entonces para encontrar nuestra ecuación tomaremos los puntos $P = (x, y)$ y $F_1 = (0, c)$ y $F_2 = (0, -c)$

Luego:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-(-c))^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$

Despejamos la raíz izquierda

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Elevando al cuadrado toda la expresión

$$\left(\sqrt{x^2 + (y+c)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes, nos queda

$$yc = a^2 + a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Luego elevando al cuadrado ambas expresiones

$$\left(yc - a^2\right)^2 = \left(a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes nos queda

$$y^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2$$

Ahora reemplazamos c^2 por $a^2 - b^2$

$$y^2\left(a^2 - b^2\right) + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2\left(a^2 - b^2\right)$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes obtenemos

$$y^2b^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

Dividiendo toda la expresión por a^2b^2 y simplificando obtenemos

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Finalmente, esta es la **ecuación canónica de la Hipérbola con orientación vertical**

Observación: Dado que $a > b$, también $a^2 - b^2 = c^2$

.

2.5.5.4 Ecuación Principal y general de la hipérbola con centro fuera del origen

Tomando la ecuación de la hipérbola con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Considerando una traslación $T = (h, k)$, donde el eje focal se mantiene paralelo al eje X por tanto la ecuación principal de la hipérbola es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

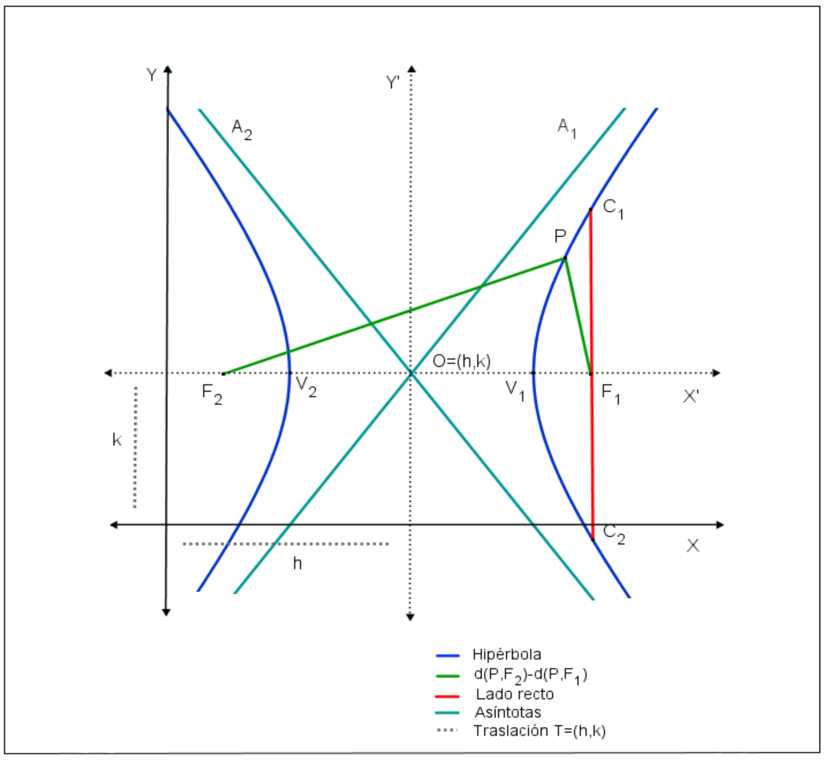


Figura n°29

Si el eje focal de la hipérbola es paralelo al eje Y , la ecuación principal de la hipérbola es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

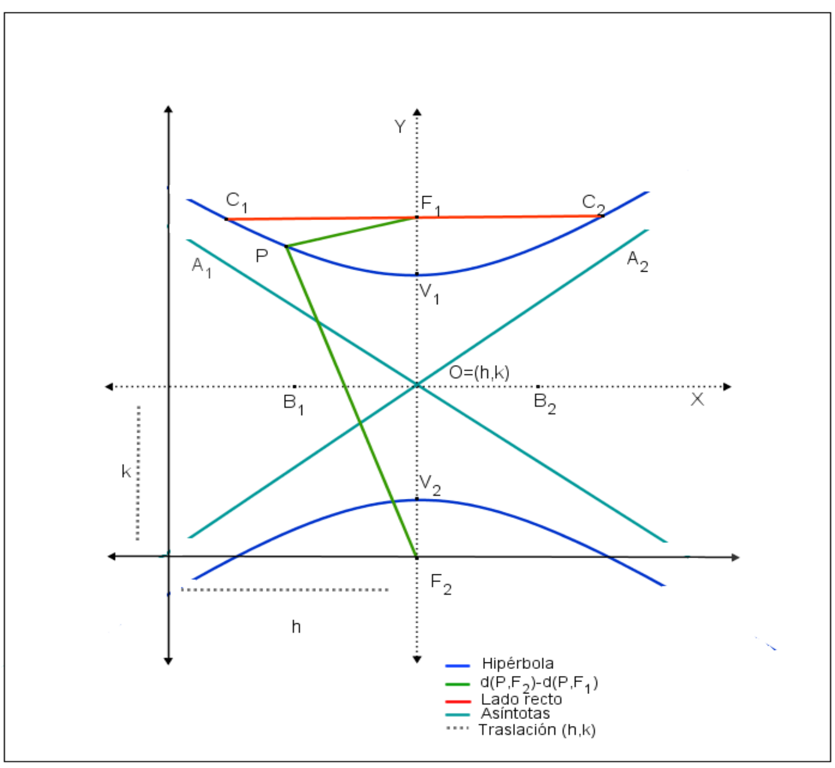


Figura n°30

Demostración:

Considerando la ecuación principal de la hipérbola

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Desarrollando cuadrados

$$\frac{x^2-2xh+h^2}{a^2}-\frac{\left(y^2-2yk+k^2\right)}{b^2}=1$$

Sumando

$$\frac{b^2\left(x^2-2xh+h^2\right)-a^2\left(y^2-2yk+k^2\right)}{a^2b^2}=1$$

Multiplicando por a^2b^2 toda la expresión

$$b^2\left(x^2-2xh+h^2\right)-a^2\left(y^2-2yk+k^2\right)=a^2b^2$$

Desarrollando la expresión algebraica

$$b^2x^2-2b^2xh+b^2h^2-a^2y^2+2a^2yk-a^2k^2=a^2b^2$$

Igualando a cero toda la expresión

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2hx+2a^2ky+b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2=0$$

Haciendo que:

$b^2=A$

$a^2=B$

$-2b^2h=C$

$2a^2k=D$

$b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2=F$

Por lo tanto se obtiene la **ecuación general de la hipérbola**

$$Ax^2-By^2+Cx+Dy+F=0$$

Análogamente se demuestra de la misma manera la ecuación general de la hipérbola con el eje focal paralelo al eje Y , es decir con orientación vertical.

$$Ay^2-Bx^2+Cx+Dy+F=0$$

Ejemplos:

1. Determinar los elementos de la hipérbola con ecuación $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

Solución:

Como la ecuación es de la forma $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Tenemos que $a^2=9\Rightarrow a=3$, $b^2=16\Rightarrow b=4$

Además $c^2=a^2+b^2$, de donde $c^2=25$y $c=5$

De modo que por ser eje focal coincidente con el eje X, las coordenadas de los focos son:

$F_1 = (5,0)$ y $F_2 = (-5,0)$

Los elementos de la hipérbola serán entonces:

Eje real: $2a = 2 \cdot 3 = 6$

Eje imaginario: $2b = 2 \cdot 4 = 8$

Lado recto: $\dfrac{2b^2}{a^2} = \dfrac{2 \cdot 16}{3} = \dfrac{32}{3}$

Vértices: $(3,0)$ y $(-3,0)$

Figura de ejemplo 1

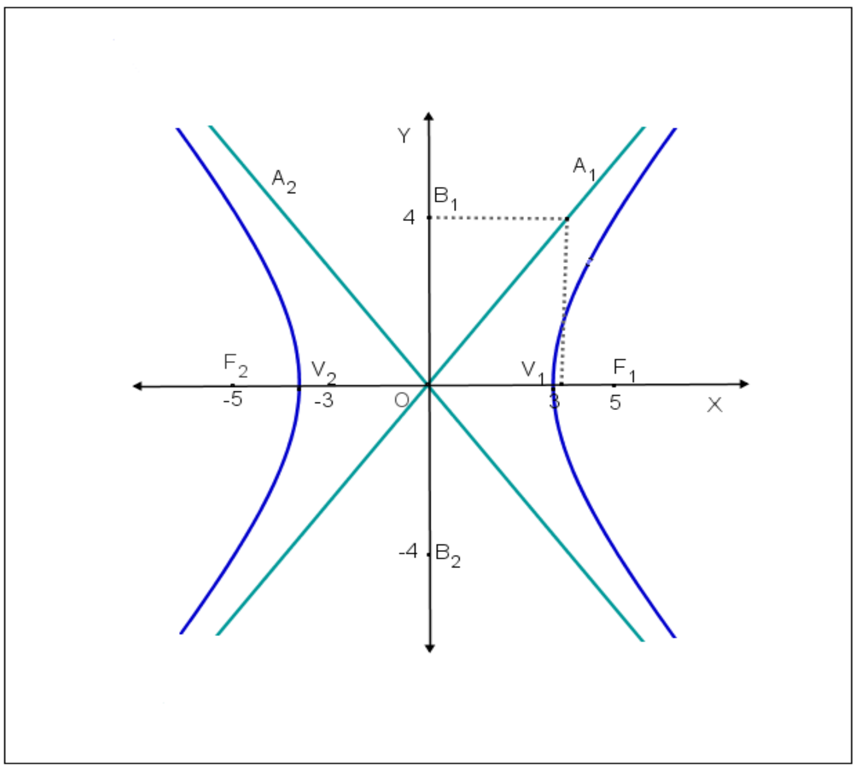


Figura n°31

2. Determinar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos (x, y) del plano, para los cuales la diferencia de sus distancias a los puntos fijos $(-6,4)$ y $(2,-4)$ es 6.

Solución:

Sabemos por definición, que el lugar geométrico será una hipérbola con focos en los puntos dados y que $2a = 6$

Luego como consecuencia tenemos que $F_1 = (2,4)$, $F_2 = (-6,-4)$, $a = 3$

Entonces como el centro es el punto medio del segmento que une los focos, por tanto el centro es: $C = (-2,4)$

Además: $d\left(F_2,C\right)=d\left(F_1,C\right)\Rightarrow c=4$ y $b^2=c^2-a^2=7$

También el eje focal es paralelo al eje X , entonces la ecuación pedida es:

$$\frac{\left(x+2\right)^2}{9}-\frac{\left(y+4\right)^2}{7}=1$$

Asíntotas de la hipérbola

Uno de los elementos importantes de la hipérbola son las rectas llamadas asíntotas que las denotaremos por A_1 y A_2 , estas rectas pasan por el origen $\left(0,0\right)$, además por los puntos $\left(a,b\right)$ y $\left(-a,b\right)$.

Entonces como las asíntotas son rectas que pasan por:

$O=\left(0,0\right)$, $P_1=\left(a,b\right)$; $O=\left(0,0\right)$, $P_2=\left(-a,b\right)$

Una de ellas es:

$y=mx+n, O=n\Rightarrow y=mx$

$b=ma\Rightarrow m=\dfrac{b}{a}$

$\therefore y=\dfrac{b}{a}x$

Análogamente se obtiene: $y=-\dfrac{b}{a}x$

Nota: La Hipérbola equilátera o rectangular es el caso especial de la hipérbola, cuando $a=b$

Y la expresión de este caso particular queda igual a $x^2-y^2=a^2$

Donde $c=a\sqrt{2}$ y las ecuaciones de las asíntotas para una hipérbola equilátera son

$$y=x \qquad\qquad y=-x$$

Propuestas Metodológicas para la Enseñanza de la Elipse

Metodología para Liceo Nacional de Maipú

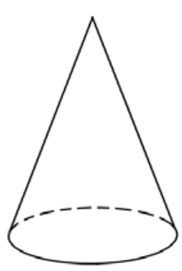
Se presenta el objetivo de la clase que es:

Identificar la elipse como lugar geométrico, reconocer e identificar la elipse con sus elementos y poder aplicar la ecuación canónica de la elipse con orientación horizontal.

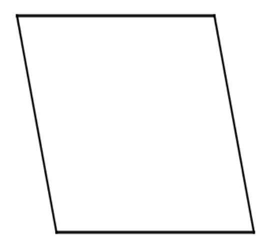
Se muestra el contenido de la cónicas en un software llamado prezi, aquí se muestra un video de como se generan las cónicas a partir de un cono de base circular, en el aparece el cono y las curvas que se van generando formando de esa manera las secciones cónicas.

Luego se explica que:

<u>Las Cónicas son</u>: la sección de un cono



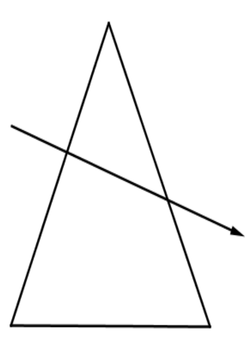
+



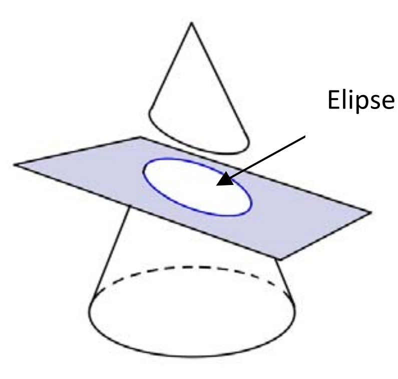
Cono de base Circular

Plano

Una cónica es una figura que se obtiene al cortar un cono de base circular con un plano. El plano puede tener varias inclinaciones las que al cortar el cono originan varias figuras como la Circunferencia, Elipse, Parábola, Hipérbola.
En este caso estudiaremos solo la Elipse.
La Elipse se genera cuando el plano corta en forma oblicua a la base



Vista lateral del cono



Cono interceptado con plano

Ahora construiremos la curva que se genero donde utilizaremos los siguientes materiales:

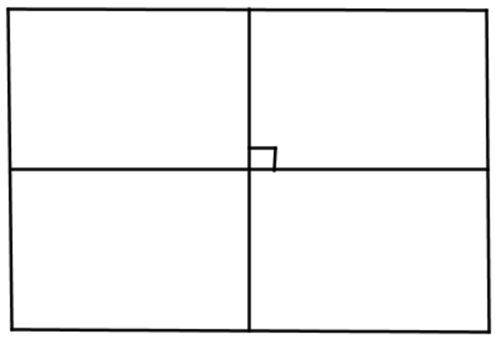
-1 hoja de block

-2 chinches con punta

-Cáñamo

Construcción de la Elipse

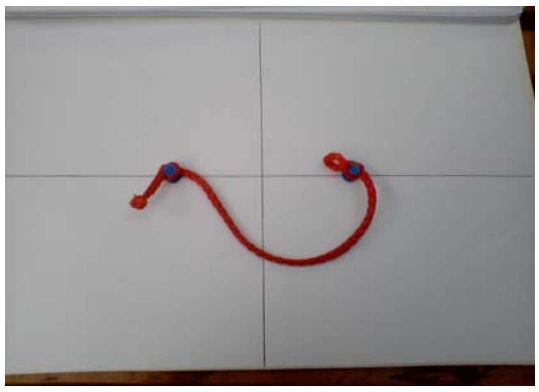
Realizaremos el trazado de una elipse, para ello tomamos una hoja de papel y la dividimos en dos partes iguales tanto vertical como horizontal que se cortan en el punto donde se forman ángulos rectos.



Marcamos dos puntos que estén en la misma distancia del punto que llamaremos centro.

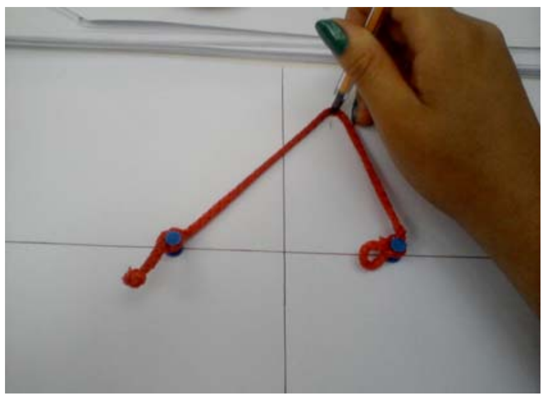
Marcamos dos puntos en la recta horizontal y que estén en la misma distancia del punto que llamaremos centro en donde se interceptan las dos rectas que se dibujaron.

Luego se deben insertar los chinches en los puntos marcados anteriormente. Tomamos una cuerda que vamos a sujetar a dos chinches en sus extremos y los vamos a clavar en los puntos que marcamos, estos deben quedar bien fijos.

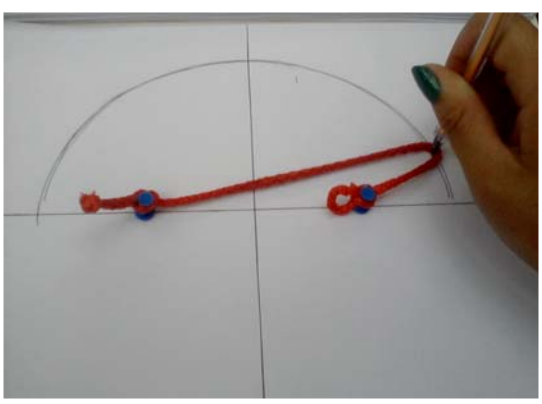


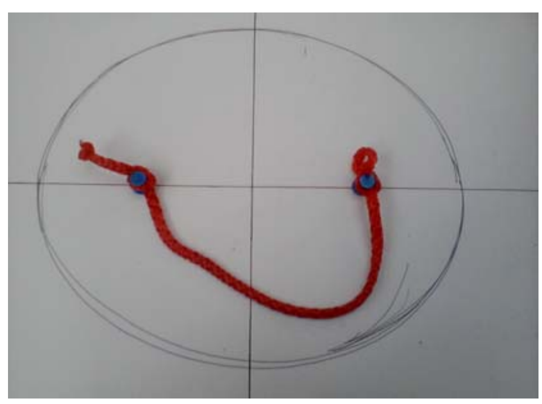
.

todo el tiempo sin soltar el lápiz, tal como se muestra en la figura.



Deslizamos el lápiz hacia arriba procurando que la cuerda este siempre tensada y luego realizamos lo mismo hacia abajo obteniendo como resultado la elipse.

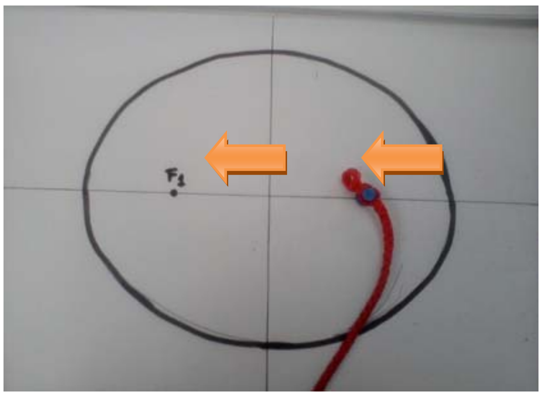




Luego remarcamos la elipse y anotamos los elementos principales de la elipse

El punto se va llamar centro de elipse y la vamos denominar con la letra O.

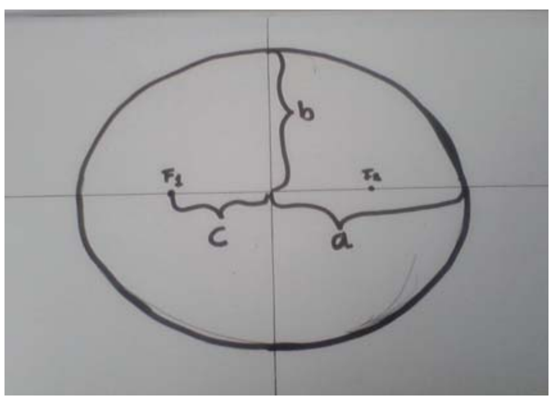
-Los dos puntos que se ha sujeto la cuerda van representar los focos F_1 y F_2.



Los puntos más lejanos de la elipse se van llamar vértice

Si ponemos la cuerda recta y tensa desde el vértice 1 al vértice 2 esa distancia representa el eje mayor denotado como $2a$. Entonces desde V_1 al centro se llama a y desde V_2 al centro también

La suma de las distancia a dos puntos fijos llamados focos es siempre la misma Constante igual $2a$.



Si tomamos un punto cualquiera de la elipse, la suma de la distancia que existe desde el punto $P=(x,y)$ cualquiera a los focos F_1 y F_2 es la misma distancia que hay entre el vértice 1 y el vértice 2.

-La distancia que existe desde B_2 a B_1 se llama $2b$ y se conoce con el nombre **Eje menor**. Entonces desde B_2 al centro se llama b y desde B_1 al centro se llama igual.

La distancia F_1 y F_2 va ser $2c$ y se conoce como distancia focal. Entonces desde F_1 al centro se llama c y desde F_2 al centro se llama igual.

<u>En resumen Elementos de la Elipse</u>

Centro de la elipse: O= (0,0)

Focos: $F_1=(c,0)$; $F_2=(-c,0)$

Vértices: $V_1=(a,0)$; $V_2=(-a,0)$, $B_1=(0,b)$; $B_2=(0,-b)$

-La distancia que hay del V_1 a V_2 se conoce con el nombre de **Eje mayor** y es igual a $2a$

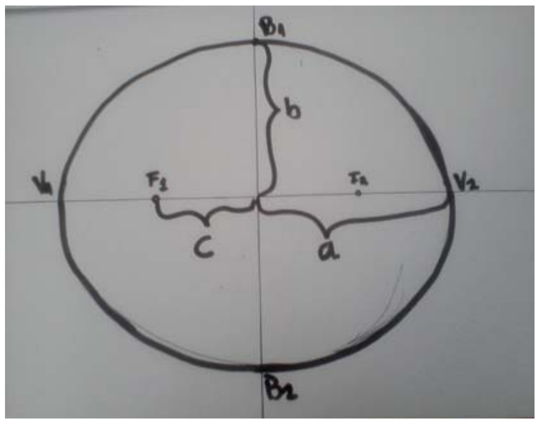
-La distancia que hay desde B_1 a B_2 se conoce con el nombre **Eje menor** y es igual a $2b$

-La distancia F_1 y F_2 va ser $2c$ y se conoce con el nombre de **Distancia focal**

-Lado recto: Segmento de recta perpendicular al eje mayor, contiene a un foco (Cualquiera de los dos) y sus extremos se localizan sobre la elipse. La longitud del lado recto se denomina **Ancho focal**

Las coordenadas del lado recto son: $C_1=(c,y)$ y $C_2=(c,-y)$ y su medida es $\frac{2b^2}{a}$

La construcción final que obtenemos de la elipse es la siguiente:



Ahora construiremos la definición de elipse.

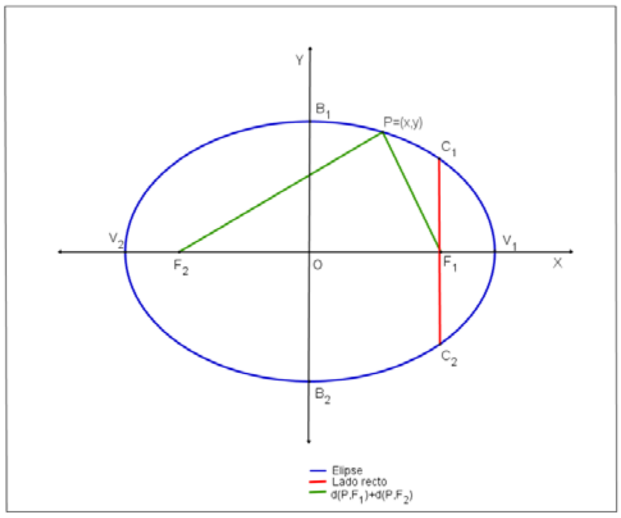
La elipse es una curva cerrada y plana que corresponde al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos puntos fijos del plano, se llaman focos y se designan por F_1 y F_2 .

Entonces se cumple que la distancia desde el punto $P=(x,y)$ a los focos F_1 y F_2 es igual a $2a$.

$$d\left(P,F_1\right)+d\left(P,F_2\right)=2a$$

La construcción anterior la podemos ubicar en el plano cartesiano, en que nos podemos dar cuenta con más detalle de las coordenadas de vértices y focos.

Ahora que conocemos las coordenadas de los focos, demostraremos la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen. A continuación tenemos la grafica de la elipse con todos sus elementos con sus coordenadas respectivas.



Luego para demostrar la ecuación de la elipse con centro en el origen utilizaremos la siguiente expresión de distancia entre dos puntos del plano. Para esto necesitaremos las coordenadas de los focos y del punto P.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Coordenadas de focos: $F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$ y coordenadas de punto $\mathrm{P}=(\mathrm{x,y})$

Por demostrar: $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$

Tomaremos los puntos $F_1=(c,0)$; $P=(x,y)$ y $F_2=(-c,0)$; $P=(x,y)$

Reemplazamos los puntos en expresión de distancia

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}=2a$$

Despejamos una la raíz de lado izquierdo

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}$$

Elevando al cuadrado toda la expresión

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}\right)^2$$

Recordando que el cuadrado de binomio es $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes, nos queda

$$2xc=4a^2-4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}-2xc$$

Sumando términos semejantes

$$xc=a^2-a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

Luego elevando al cuadrado ambas expresiones

$$\left(xc-a^2\right)^2=\left(-a\sqrt{(c-x)^2+y^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes nos queda

$$x^2c^2 + a^4 = a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2$$

Ahora reemplazamos c por $a^2 - b^2 = c^2$

Nota:

$$x^2\left(a^2 - b^2\right) + a^4 = a^2\left(a^2 - b^2\right) + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo toda la expresión por a^2b^2 y simplificando obtenemos la Ecuación canónica de la elipse con centro en el origen y orientación horizontal.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por lo tanto, esta es la **ecuación canónica de la elipse con orientación horizontal.**

Observaciòn1: para saber si la orientación de la elipse es horizontal o vertical debemos fijarnos en la ecuación de la elipse:

- Si el denominador mayor esta debajo de x^2 la elipse es horizontal
- Si el denominador mayor esta debajo de y^2 la elipse es vertical

Observación 2: Dado que $a > b$, también $a^2 - b^2 = c^2$, entonces $a^2 - b^2 = c^2$ es un número positivo.

Ejemplos

Ejemplos

1. Encontrar los elementos de la Elipse para la ecuación $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$

Solución:

Como la ecuación de la elipse es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Tomamos los denominadores de ecuación para encontrar el valor de a y b:

$$a^2 = 49 / \sqrt{\ } \qquad\qquad b^2 = 4 / \sqrt{\ }$$
$$a = \pm 7 \qquad\qquad b = \pm 2$$

Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de a y b, porque representan el valor de las distancias de los semiejes de la elipse.

Entonces los valores de semiejes de la elipse son:

Semieje mayor $2a = 2 \cdot 7 = 14$

Semieje menor: $2b = 2 \cdot 2 = 4$

Ahora calcularemos el valor de c que representa la distancia del foco. Recordemos que la distancia de un punto $P = (x, y)$ a los focos es igual al valor de todo el eje mayor $2a = 14$

Utilizaremos el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de c.

Reemplazamos los valores de a y b:

$b^2 + c^2 = a^2$

$4 + c^2 = 49$

$c^2 = 49 - 4$

$c^2 = 45 / \sqrt{}$

$c = \pm 3\sqrt{5}$

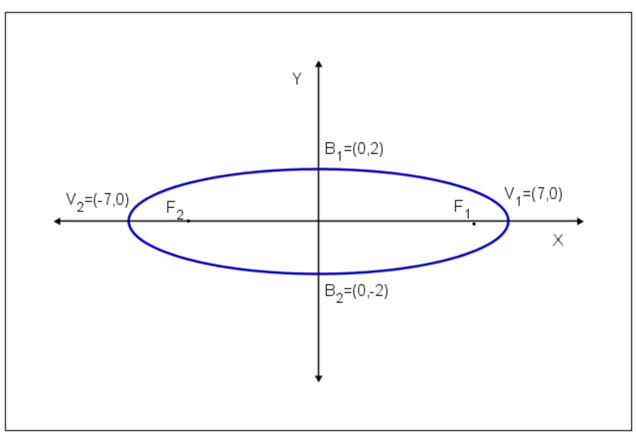
Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de c, porque representa el valor de la distancia focal de la elipse.

Entonces ahora podemos obtener las coordenadas de los focos con el valor de c

Focos: $F_1 = \left(3\sqrt{5}, 0\right)$ y $F_2 = \left(-3\sqrt{5}, 0\right)$

Vértices: $V_1 = (7,0)$ y $V_2 = (-7,0)$

Gráfica de elipse:



2. Obtén el valor de los ejes, vértices y gráfica de la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solución:

Debemos obtener la forma de la ecuación canónica de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

Entonces, $4x^2 + 9y^2 = 36$

Dividiendo por 36, $$4x^2+9y^2=36 / \cdot \frac{1}{36}$$

Queda la siguiente expresión $$\frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=\frac{36}{36}$$

Simplificando, obtenemos la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Luego para saber si la orientación de la elipse es horizontal o vertical debemos fijarnos en la ecuación de la elipse:

- Si el denominador mayor esta debajo de x^2 la elipse es horizontal
- Si el denominador mayor esta debajo de y^2 la elipse es vertical

Recordemos que denotamos el Semieje mayor con la letra a y Semieje menor con letra b. Ahora calcularemos el valor de las distancias de los semiejes:

$$a^2=9 / \sqrt{\ } \qquad\qquad b^2=4 / \sqrt{\ }$$

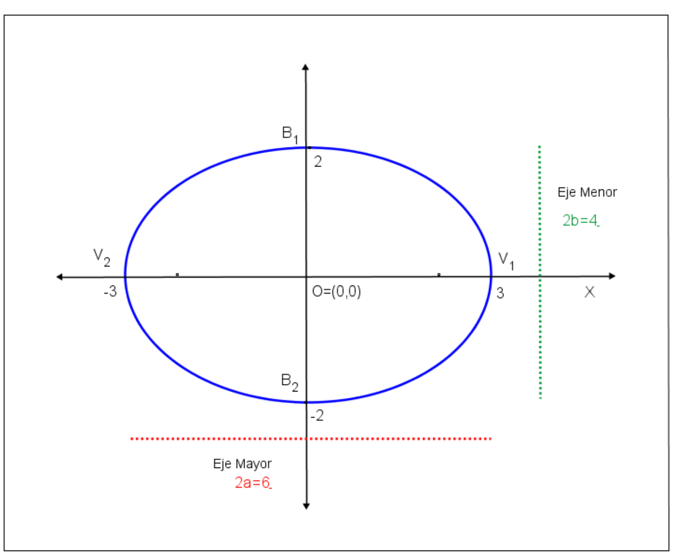
$$\sqrt{a^2}=\sqrt{9} \qquad\qquad \sqrt{b^2}=\sqrt{4}$$

$$a=\pm 3 \qquad\qquad b=\pm 2$$

Entonces tenemos que:

- El Centro de la Elipse es $C=(0,0)$ porque la ecuación canónica está centrada en origen.
- Semieje mayor: $2a=2\cdot 3=6$
- Semieje menor: $2b=2\cdot 2=4$

Luego para obtener los datos pedidos debemos graficar la elipse



Por tanto podemos calcular las coordenadas de los vértices:

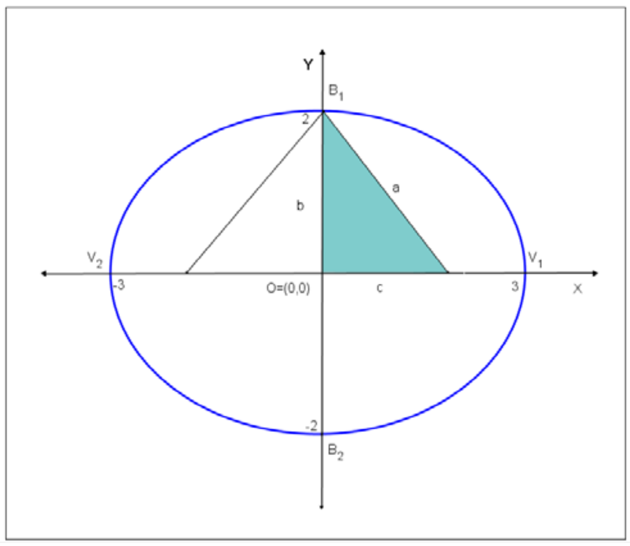
$$V_1 = (3,0)\,;\; V_2 = (-3,0)$$

$$B_1 = (0,2)\,;\; B_2 = (0,-2)$$

Ahora calcularemos el valor de c que representa la distancia del foco. Recordemos que la distancia de un punto $P = (x, y)$ a los focos es igual al valor de todo el eje mayor

$2a = 2 \cdot 3 = 6$

Entonces en la gráfica al hacer coincidir el punto $P = (x, y)$ con el eje menor se forman dos triángulos rectángulos congruentes, tomaremos solo uno para encontrar el valor de c utilizando el teorema de Pitágoras.



Aplicando el Teorema de Pitágoras

$b^2 + c^2 = a^2$

Reemplazamos los valores del triangulo rectángulo

$2^2 + c^2 = 3^2$

$4 + c^2 = 9$

$c^2 = 9 - 4$

$c^2 = 5 \,/\, \sqrt{}$

$c = \pm\sqrt{5}$

Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de c , porque representa el valor de la distancia focal de la elipse.

Finalmente las coordenadas de los focos son: $F_1 = \left(\sqrt{5}, 0\right)$; $F_2 = \left(-\sqrt{5}, 0\right)$

Metodología para Liceo Técnico Profesional (CTP).

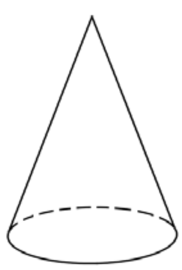
Luego se presenta el objetivo de la clase que es:

Identificar la elipse como lugar geométrico, reconocer e identificar la elipse con sus elementos y poder aplicar la ecuación canónica de la elipse con orientación horizontal.

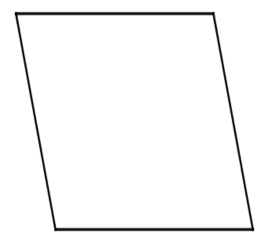
Se muestra el contenido de la cónicas en un software llamado pezi, aquí se muestra un video de como se generan las cónicas a partir de un cono de base circular, en el aparece el cono y las curvas que se van generando formando de esa manera las secciones cónicas.

Luego se explica que:

<u>Las Cónicas son:</u> la sección de un cono



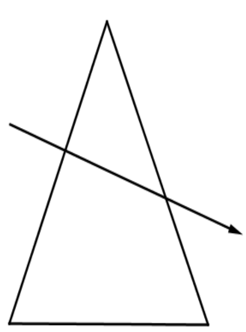
+



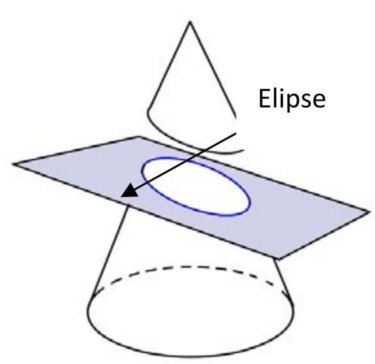
Cono de base Circular

Plano

Una cónica es una figura que se obtiene al cortar un cono de base circular con un plano. El plano puede tener varias inclinaciones las que al cortar el cono originan varias figuras como la Circunferencia, Elipse, Parábola, Hipérbola.
En este caso estudiaremos solo la Elipse.
La Elipse se genera cuando el plano corta en forma oblicua a la base



Vista lateral del cono



Cono interceptado con plano

Se presentan imágenes a los estudiantes de Las Cónicas en la vida real.

Estadios están construidos con formas elípticas.

Las piletas también forman la mitad de esta figura.

El espacio, también forma esta figura.

Grandes construcciones también fueron creadas de esta forma, como este teatro.

Y por ultimo muchas plazas fueron creadas por de esta forma como la plaza de San Pedro.

A continuación construiremos la curva que se genero donde utilizaremos los siguientes materiales:

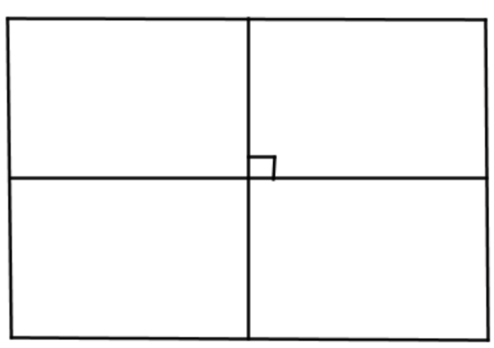
-1 hoja de block

-2 chinches con punta

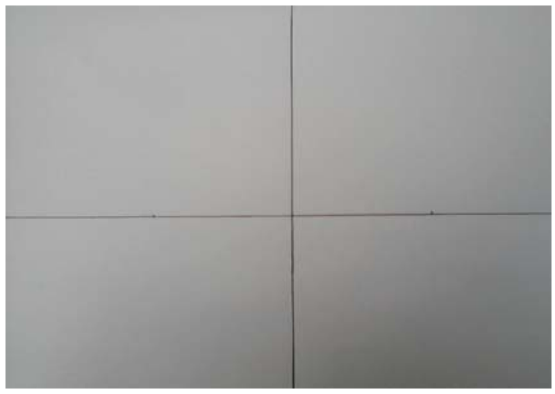
-Cáñamo

<u>Construcción de la Elipse</u>

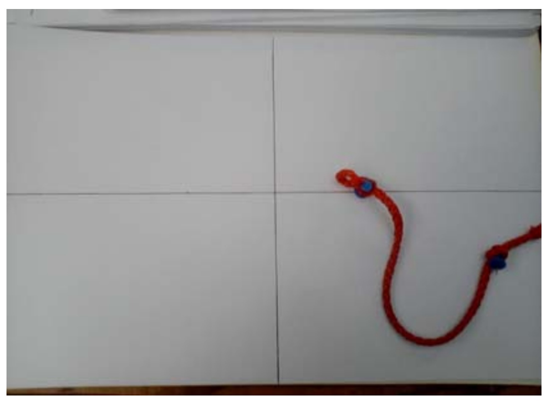
Realizaremos el trazado de una elipse, para ello tomamos una hoja de papel y la dividimos en dos partes iguales tanto vertical como horizontal que se cortan en el punto donde se forman ángulos rectos.



Marcamos dos puntos que estén en la misma distancia del punto que llamaremos centro.

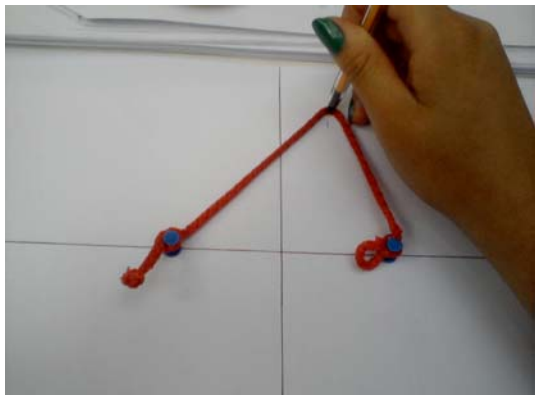


Marcamos dos puntos en la recta horizontal y que estén en la misma distancia del punto que llamaremos centro en donde se interceptan las dos rectas que se dibujaron.

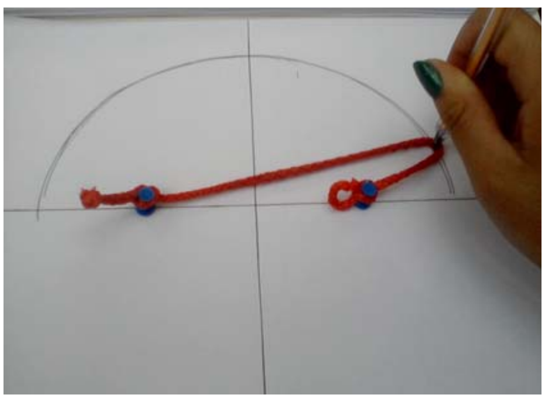


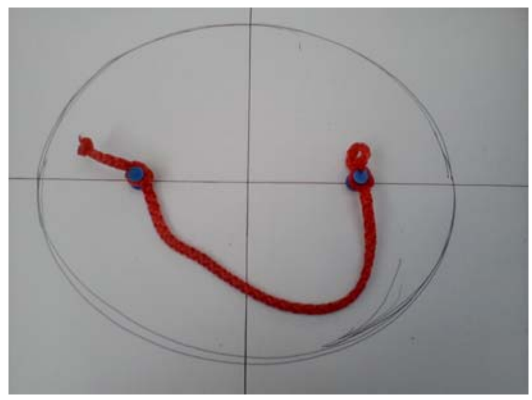
Luego se deben insertar los chinches en los puntos marcados anteriormente. Tomamos una cuerda que vamos a sujetar a dos chinches en sus extremos y los vamos a clavar en los puntos que marcamos, estos deben quedar bien fijos.

Después tomamos un lápiz y con él realizamos el dibujo que resulta al tensar la cuerda todo el tiempo sin soltar el lápiz, tal como se muestra en la figura.



Deslizamos el lápiz hacia arriba procurando que la cuerda este siempre tensada y luego realizamos lo mismo hacia abajo obteniendo como resultado la elipse.

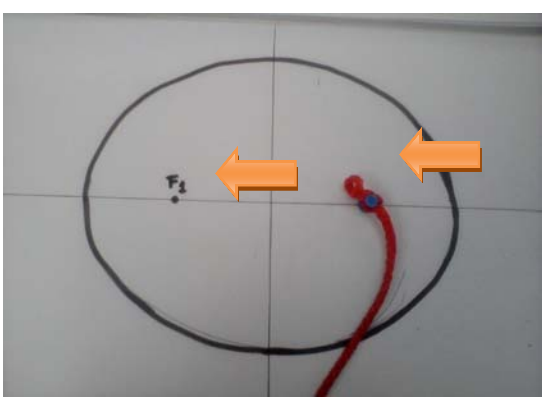




Luego remarcamos la elipse y anotamos los elementos principales de la elipse

El punto se va llamar centro de elipse y la vamos denominar con la letra O.

-Los dos puntos que se ha sujeto la cuerda van representar los focos F_1 y F_2 .

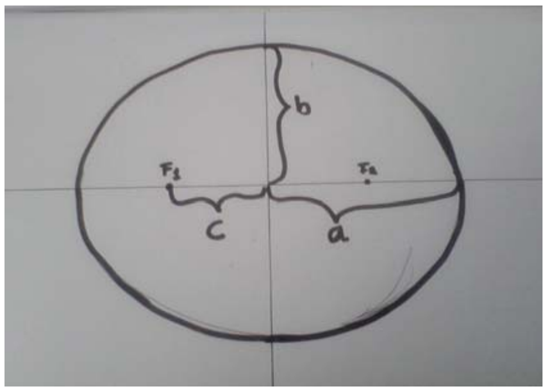


Los puntos más lejanos de la elipse se van llamar vértice

Si ponemos la cuerda recta y tensa desde el vértice 1 al vértice 2 esa distancia representa el eje mayor denotado como $2a$. Entonces desde V_1 al centro se llama a y desde V_2 al centro también

La suma de las distancia a dos puntos fijos llamados focos es siempre la misma

constante igual $2a$.



Si tomamos un punto cualquiera de la elipse, la suma de la distancia que existe desde el punto $P=(x,y)$ cualquiera a los focos F_1 y F_2 es la misma distancia que hay entre el vértice 1 y el vértice 2.

-La distancia que existe desde B_2 a B_1 se llama $2b$ y se conoce con el nombre **Eje menor**. Entonces desde B_2 al centro se llama b y desde B_1 al centro se llama igual.

La distancia F_1 y F_2 va ser $2c$ y se conoce como distancia focal. Entonces desde F_1 al centro se llama c y desde F_2 al centro se llama igual.

En resumen Elementos de la Elipse

Centro de la elipse: O= (0,0)

Focos: $F_1=(c,0)$; $F_2=(-c,0)$

Vértices: $V_1=(a,0)$; $V_2=(-a,0)$, $B_1=(0,b)$; $B_2=(0,-b)$

-La distancia que hay del V_1 a V_2 se conoce con el nombre de **Eje mayor** y es igual a $2a$

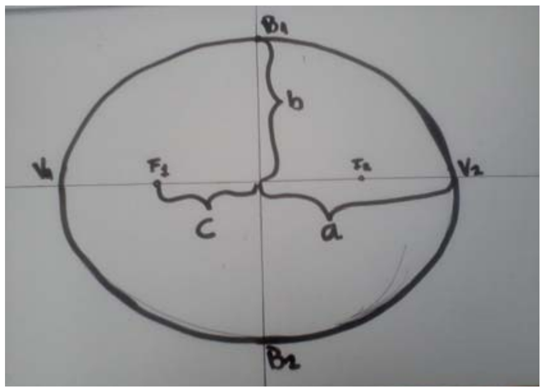
-La distancia que hay desde B_1 a B_2 se conoce con el nombre **Eje menor** y es igual a $2b$

-La distancia F_1 *y* F_2 va ser $2c$ y se conoce con el nombre de **Distancia focal**

-Lado recto: Segmento de recta perpendicular al eje mayor, contiene a un foco (Cualquiera de los dos) y sus extremos se localizan sobre la elipse. La longitud del lado recto se denomina **Ancho focal**

Las coordenadas del lado recto son: $C_1=(c,y)$ y $C_2=(c,-y)$ y su medida es $\frac{2b^2}{a}$

La construcción final que obtenemos de la elipse es la siguiente:



Ahora construiremos la definición de elipse.

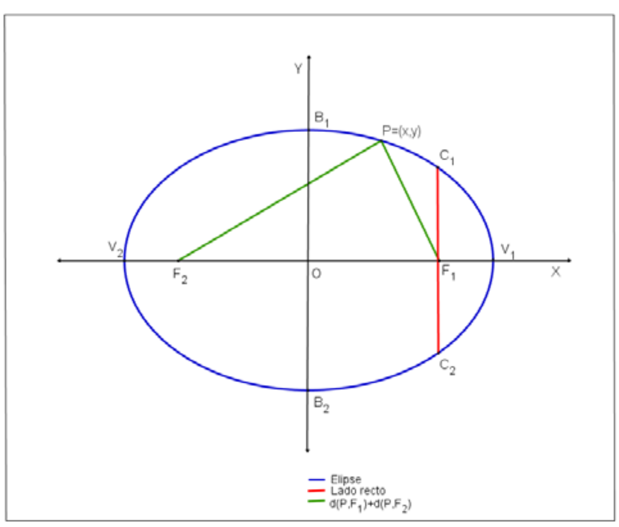
La elipse es una curva cerrada y plana que corresponde al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos puntos fijos del plano, se llaman focos y se designan por F_1 y F_2 .

Entonces se cumple que la distancia desde el punto $P = (x, y)$ a los focos F_1 y F_2 es igual a $2a$.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

La construcción anterior la podemos ubicar en el plano cartesiano, en que nos podemos dar cuenta con más detalle de las coordenadas de vértices y focos.

Ahora que conocemos las coordenadas de los focos, demostraremos la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen. A continuación tenemos la grafica de la elipse con todos sus elementos con sus coordenadas respectivas.



Luego para demostrar la ecuación de la elipse con centro en el origen utilizaremos la siguiente expresión de distancia entre dos puntos del plano. Para esto necesitaremos las coordenadas de los focos y del punto P.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Coordenadas de focos: $F_1 = (c,0)$ y $F_2 = (-c,0)$ y coordenadas de punto $\mathrm{P} = (\mathrm{x,y})$

Por demostrar: $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$

Tomaremos los puntos $F_1 = (c,0)$; $P = (x,y)$ y $F_2 = (-c,0)$; $P = (x,y)$

Reemplazamos los puntos en expresión de distancia

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} = 2a$$

Despejamos una la raíz de lado izquierdo

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2}$$

Elevando al cuadrado toda la expresión

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2}\right)^2$$

Recordando que el cuadrado de binomio es $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes, nos queda

$$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - 2xc$$

Sumando términos semejantes

$$xc = a^2 - a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

Luego elevando al cuadrado ambas expresiones

$$\left(xc - a^2\right)^2 = \left(-a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}\right)^2$$

Desarrollando cuadrados de binomio y simplificando términos semejantes nos queda

$$x^2c^2 + a^4 = a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2$$

Ahora reemplazamos c por $a^2 - b^2 = c^2$

Nota:

$$x^2\left(a^2 - b^2\right) + a^4 = a^2\left(a^2 - b^2\right) + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo toda la expresión por a^2b^2 y simplificando obtenemos la Ecuación canónica de la elipse con centro en el origen y orientación horizontal.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por lo tanto, esta es la **ecuación canónica de la elipse con orientación horizontal.**

Observaciòn1: para saber si la orientación de la elipse es horizontal o vertical debemos fijarnos en la ecuación de la elipse:

- Si el denominador mayor esta debajo de x^2 la elipse es horizontal

- Si el denominador mayor esta debajo de y^2 la elipse es vertical

Observación 2: Dado que $a > b$, también $a^2 - b^2 = c^2$, entonces $a^2 - b^2 = c^2$ es un número positivo.

Ejemplos

Ejemplos

1. Encontrar los elementos de la Elipse para la ecuación $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$

Solución:

Como la ecuación de la elipse es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Tomamos los denominadores de ecuación para encontrar el valor de a y b :

$$a^2 = 49 / \sqrt{\ } \qquad b^2 = 4 / \sqrt{\ }$$
$$a = \pm 7 \qquad b = \pm 2$$

Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de a y b , porque representan el valor de las distancias de los semiejes de la elipse.

Entonces los valores de semiejes de la elipse son:

Semieje mayor $2a = 2 \cdot 7 = 14$

Semieje menor: $2b = 2 \cdot 2 = 4$

Ahora calcularemos el valor de c que representa la distancia del foco. Recordemos que la distancia de un punto $P = (x, y)$ a los focos es igual al valor de todo el eje mayor $2a = 14$ Utilizaremos el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de c .

Reemplazamos los valores de a y b :

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$4 + c^2 = 49$$

$$c^2 = 49 - 4$$

$$c^2 = 45 / \sqrt{\ }$$

$$c = \pm 3\sqrt{5}$$

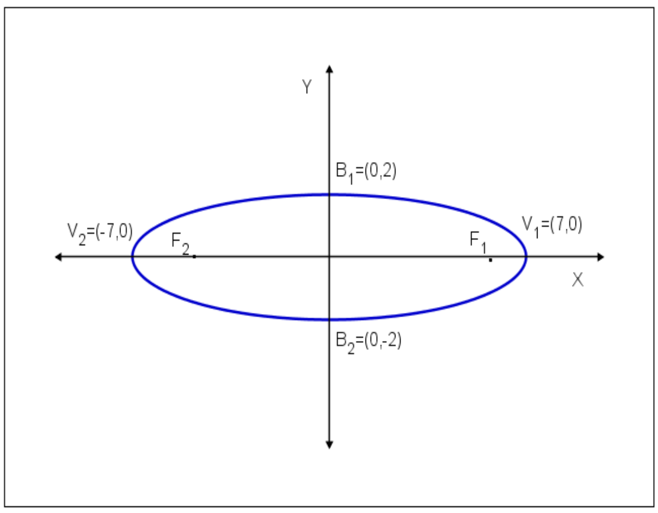
Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de c , porque representa el valor de la distancia focal de la elipse.

Entonces ahora podemos obtener las coordenadas de los focos con el valor de c

Focos: $F_1 = \left(3\sqrt{5},0\right)$ y $F_2 = \left(-3\sqrt{5},0\right)$

Vértices: $V_1 = (7,0)$ y $V_2 = (-7,0)$

Gráfica de elipse:



2. Obtén el valor de los ejes, vértices y gráfica de la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solución:

Debemos obtener la forma de la ecuación canónica de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Entonces, $4x^2 + 9y^2 = 36$

Dividiendo por 36, $4x^2 + 9y^2 = 36 / \cdot \frac{1}{36}$

Queda la siguiente expresión $\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$

Simplificando, obtenemos la ecuación de la elipse

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Luego para saber si la orientación de la elipse es horizontal o vertical debemos fijarnos en la ecuación de la elipse:

- Si el denominador mayor esta debajo de x^2 la elipse es horizontal

- Si el denominador mayor esta debajo de y^2 la elipse es vertical

Recordemos que denotamos el Semieje mayor con la letra a y Semieje menor con letra b. Ahora calcularemos el valor de las distancias de los semiejes:

$$a^2 = 9 / \sqrt{} \qquad\qquad b^2 = 4 / \sqrt{}$$

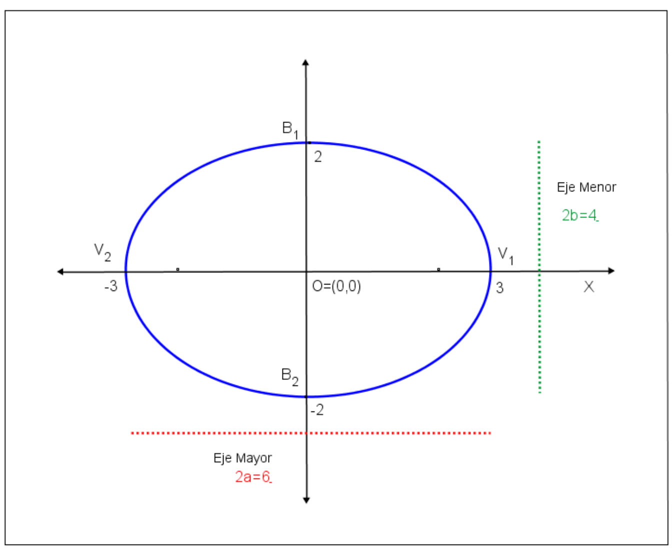
$$\sqrt{a^2} = \sqrt{9} \qquad\qquad \sqrt{b^2} = \sqrt{4}$$

$$a = \pm 3 \qquad\qquad b = \pm 2$$

Entonces tenemos que:

- El Centro de la Elipse es $C = (0,0)$ porque la ecuación canónica está centrada en origen.
- Semieje mayor: $2a = 2 \cdot 3 = 6$
- Semieje menor: $2b = 2 \cdot 2 = 4$

Luego para obtener los datos pedidos debemos graficar la elipse



Por tanto podemos calcular las coordenadas de los vértices:

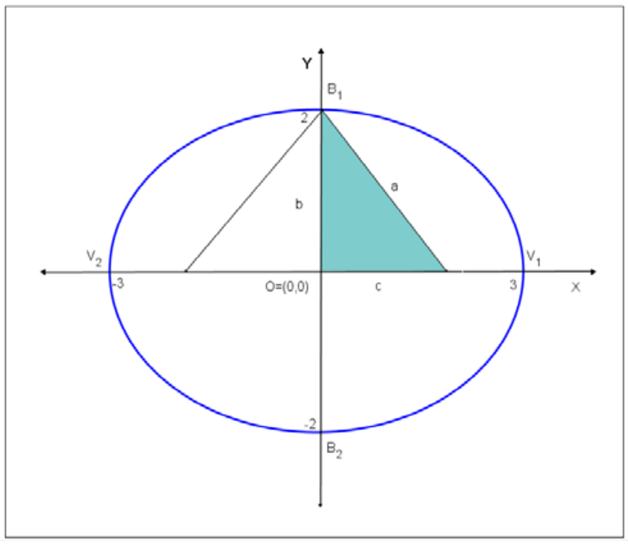
$V_1 = (3,0)$; $V_2 = (-3,0)$

$B_1 = (0,2)$; $B_2 = (0,-2)$

Ahora calcularemos el valor de c que representa la distancia del foco. Recordemos que la distancia de un punto $P = (x,y)$ a los focos es igual al valor de todo el eje mayor

$2a = 2 \cdot 3 = 6$

Entonces en la gráfica al hacer coincidir el punto $P = (x,y)$ con el eje menor se forman dos triángulos rectángulos congruentes, tomaremos solo uno para encontrar el valor de c utilizando el teorema de Pitágoras.



Aplicando el Teorema de Pitágoras

$b^2 + c^2 = a^2$

Reemplazamos los valores del triangulo rectángulo

$2^2 + c^2 = 3^2$

$4 + c^2 = 9$

$c^2 = 9 - 4$

$c^2 = 5 / \sqrt{\ }$

$c = \pm\sqrt{5}$

Observación: en este caso solo se tomará en cuenta el valor positivo de c , porque representa el valor de la distancia focal de la elipse.

Finalmente las coordenadas de los focos son: $F_1 = \left(\sqrt{5}, 0\right)$; $F_2 = \left(-\sqrt{5}, 0\right)$

Estas son las dos nuevas metodologías que proponemos a partir del estudio ya realizado.