UNIVERSIDAD CATOLICA SILVA HENRIQUEZ

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS: UNA APLICACIÓN A LA MEDIANA

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE
LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL
TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA
EN MATEMÁTICAS
E INFORMÁTICA EDUCATIVA

INTEGRANTES:
PALMA CISTERNAS, KARLA VERONICA
SANDOVAL GALLARDO, CAMILA ANDREA

PROFESOR GUÍA:
TORRES BALCHEN, SERGIO LEIF

SANTIAGO, CHILE
2009

AGRADECIMIENTOS

Al final del camino, me siento y miro hacia atrás, veo como pasan los recuerdos durante todos los años en la universidad en los cuales muchas personas fueron un pilar fundamental tanto en mi carrera como en mi vida.

Le doy las gracias a mi familia por haberme acompañado durante este camino el cual está terminando, gracias por toda la ayuda que me otorgaron al creer en mí y darme todo el apoyo que me otorgaron.

Gracias infinitas a todos los seres mágicos que me acompañaron en mi camino y ayudaron a levantarme y a continuar con en el proceso hasta terminarlo y que confían ciegamente en lo que soy.

Gracias infinitas a Camila por todo el apoyo y comprensión que me otorgó durante este periodo, sin mencionar toda la paciencia que tuviste durante este proceso de seminario. Por fin se terminó….

Karla Palma

En esta etapa que estoy finalizando, debo dar gracias a mi madre, Carmen. A aquella incansable mujer que desde niña me ha guiado y acompañado en los momentos en que más la he necesitado. A mi padre, Luis, quien siempre ha estado a mi lado y a jugado un rol muy importante en mi vida. Gracias a ambos por su lucha, apoyo, incondicionalidad, confianza y gran amor, que no esperaban nada a cambio.

Mis hermanos, que los adoro, gracias por el apoyo, ayuda e inmenso amor que siento de su parte. Gracias infinitas por siempre estar presentes. Gracias por ser mi apoyo, mis mejores amigos.

No puedo dejar de nombrar al hombre que ha sido mi pilar en esta última etapa. Gracias Juan Pablo por ser mi compañero, mi amigo, mi confidente, mi marido. Gracias por aguantar las noches de desvelo y trabajo, en donde siempre me acompañaste, aguantaste mi estrés y peleaste codo a codo conmigo. Gracias por el apoyo constante y los consejos que siempre tuviste en los momentos difíciles.

Deseo agradecer a todos mis profesores que con gran capacidad y dedicación me guiaron en el proceso de mi formación académica y quisiera hacer un especial reconocimiento a mi profesor guía, Sergio Torres Balchen, quién confió en mí y brindo un gran apoyo, ayuda y dedicó muchas horas para dirigir el proceso de aprendizaje que tuvo como fruto este trabajo.

Quisiera agradecer a aquellas personas que no han bajado la guardia y siempre me han apoyado y creído en mí, tanto a lo largo del desarrollo de esta Tesis como a lo largo de mi vida.

Con mucho amor.

Camila S.

INDICE

INTRODUCCIÓN

La educación entendida como un proceso social y cultural en constante evolución, permite al ser humano desarrollarse de manera integral, en beneficio propio y del ambiente social que lo rodea. En estas últimas décadas, la educación matemática se ha ido desarrollando de manera vertiginosa con el surgimiento de potentes teorías referidas a la didáctica de esta ciencia.

La Didáctica de las Matemáticas estudia los fenómenos que se producen en un proceso en el cual por un lado están aquellos que aprenden y otros que enseñan la disciplina. Sus métodos habituales son: la observación de sujetos en una situación didáctica, entrevistas, registro de intercambios entre alumno y maestro, cuestionarios, encuestas, etc. Se interesa en los diseños de aprendizaje, su eventual buen éxito y los diferentes obstáculos que enfrentan (origen, causas, efectos, naturaleza), de modo de intervenir en el sistema educativo con fundamento.

La didáctica se ocupa del proceso de transposición de la Matemática como dominio de saber científico a la matemática escolar y de distintos enfoques de tratamiento, métodos y condiciones para el funcionamiento de sistemas didácticos que garanticen la construcción de un saber vivo por parte de los aprendices.

Pensando en esto y en los diversos dilemas y problemas a los que se enfrentan los docentes en el momento de realizar sus quehaceres diarios, es que el presente trabajo se enfoca en la Teoría unificada de Juan D. Godino, la cual puede llevar a una posible solución a todos o a gran parte de los problemas didácticos existentes en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Educación Matemática, que como es sabido es una de las actividades más complejas y con más rechazo por parte de los alumnos.

En el Capítulo I, “Planteamiento del Problema”, se deja de manifiesto la importancia que tiene la “Teoría de las Funciones Semióticas” en la educación actual y el por qué es importante que la comunidad académica de la Universidad y la comunidad del Departamento de Educación Matemática la conozca y estudie.

En el Capítulo II, “Marco teórico”, se desarrollan todas aquellas teorías y conceptos que en su totalidad son vitales para el buen entendimiento del estudio, así como para su justificación.

En el Capítulo III, “Proceso metodológico”, se describen y analizan las características del estudio, para categorizarlo finalmente como un estudio exploratorio descriptivo, destacando cada uno de los aspectos subjetivos de la investigación.

En el capítulo IV, “Conceptos Fundamentales de la Teoría de las Funciones Semióticas”, se presenta un resumen de la teoría de J. D. Godino, explicando de qué se trata, los tipos de Funciones Semióticas, algunas consecuencias y corolarios de esta, etc.

En el capítulo V, “Aplicación de los Conceptos Fundamentales De la Teoría de las Funciones Semióticas en la Enseñanza de la Mediana”, se muestra la aplicación de la teoría de Juan D. Godino en la mediana, medida de tendencia central en estadística, para así ejemplificar de qué se trata esta nueva propuesta.

En el capítulo VI, “Conclusiones”, se presentan las principales conclusiones e ideas principales obtenidas en la elaboración de esta tesis.

Definida la estructura de la investigación, se invita al lector a explorar este interesante tema.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Problema de Investigación

La investigación en Didáctica de las Matemáticas se realiza a través del uso de herramientas teóricas procedentes de diversas disciplinas. Inicialmente la pedagogía ha sido la que se ha ocupado del mejoramiento de la educación de los diversos contenidos curriculares, pero desde hace más de veinte años la psicología de la educación matemática ha asumido una parte importante de estos estudios. Esto ha llevado a que el centro de atención haya sido el sujeto que aprende, considerando el contenido matemático en cierto modo como trasparente.

También han surgido líneas de investigación que han tomado el estudio crítico del propio saber matemático como punto de entrada obligado de los estudios didácticos. Se trata de lo que Gascón (1998) llama "El programa epistemológico". Otros enfoques se han centrado en el análisis de los patrones de interacción didáctica en el seno de la clase de matemática, la negociación de significados (Cobb y Bauersfeld, 1995); El discurso, la comunicación y participación (Kieran, Forman y Sfard, 2001); El estudio del currículo de matemáticas (Rico, 1997); El pensamiento del profesor (Lin y Cooney, 2001; Llinares (2000), etc.

Esta variedad de líneas y enfoques de investigación ha ocasionado una diversidad de herramientas teóricas que tratan de describir y explicar los fenómenos cognitivos y didácticos: representaciones internas y externas concepciones, esquemas, situación didáctica, etc. El progreso en este campo exige contrastar estas herramientas y posiblemente elaborar otras nuevas que permitan realizar de manera más eficaz el trabajo requerido. Además, es necesario tratar de articular de manera coherente las diversas facetas implicadas, como son la faceta ontológica (tipos de objetos y su naturaleza), epistemológica (acceso al conocimiento), sociocultural e instruccional (enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de los sistemas didácticos).

Juan D. Godino en su Monografía "Teoría de las Funciones Semióticas", construye un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que permite superar los dilemas que se plantean entre los diversos paradigmas en competición: realismo - pragmatismo, cognición individual - institucional, constructivismo - conductismo, etc., indicando:

> "La superación de los dilemas puede ser posible si se tienen en cuenta algunas herramientas conceptuales y metodológicas de disciplinas de tipo holístico como la semiótica, la antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con disciplinas como la psicología y pedagogía que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la Didáctica de las Matemáticas, y que tenemos en cuenta en la construcción de un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática" [1]

Este enfoque teórico unificado de la cognición e instrucción matemática, a partir de una ontología matemática y una semiótica propia, adaptada a las necesidades de investigación en Didáctica de las Matemáticas, debería ser estudiado y aplicado por una gran cantidad de académicos y estudiantes interesados en los procesos involucrados en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Por los tiempos utilizados para la realización de este seminario de título (un semestre académico), es imposible investigar a cabalidad la Teoría de las Funciones Semióticas de Juan D. Godino.

1 Teoría de la Funciones Semióticas pág. 19

Por las razones anteriormente expuestas, un interesante problema a investigar es: **estudiar y comprender los elementos fundamentales de la Teoría de las Funciones Semióticas y aplicarlos al concepto de Mediana.**

Este modelo teórico considera los siguientes supuestos básicos:

- Las matemáticas constituyen un quehacer humano, que tiene la finalidad de dar respuesta a cierta clase de situaciones problemáticas internas o externas a la propia disciplina. Los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc.), surgen de esta actividad y evolucionan progresivamente.

- Las matemáticas se pueden ver como un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problemas y sus soluciones. Los sistemas de símbolos dados por la cultura no sólo tienen una función comunicativa, sino un papel instrumental que modifican al propio sujeto que los utiliza como mediadores.

- La matemática es también un sistema conceptual lógicamente organizado. La organización lógica de los conceptos, los teoremas y las propiedades también explica el gran número de problemas implicados en el aprendizaje de las matemáticas. Un sistema no se reduce a la suma de componentes aislados, porque lo que constituye un sistema son precisamente las interrelaciones entre sus componentes.

1.2 Objetivos

1. **Determinar los elementos fundamentales de la Teoría de las Funciones Semióticas de Juan D. Godino.**

2. **Aplicar los conceptos fundamentales de la Teoría de las Funciones Semióticas, en la enseñanza de la medida de tendencia central, llamada mediana.**

1.3 Elección del Objeto de Estudio

La elección del objeto de estudio (Teoría de las Funciones Semióticas), se debió a que es imprescindible que la comunidad académica de la universidad, en general, y la comunidad académica del Departamento de Educación Matemática, en particular, conozcan y estudien en profundidad la teoría unificada de la Didáctica de las Matemáticas propuesta por Juan D. Godino en su Monografía. Tal como lo expresa en la introducción a ella.

> "En esta Monografía tratamos de sintetizar una serie de investigaciones en Didáctica de las Matemáticas que nos ha llevado a estudiar con profundidad la variedad de enfoque y marcos teóricos que se están utilizando actualmente en esta disciplina científica, y nos ha convencido de la necesidad de realizar esfuerzos por clarificar y confrontar las distintas herramientas conceptuales y metodológicas. Este esfuerzo se ha plasmado en diversos trabajos realizados en colaboración con otros miembros del Grupo de Investigación sobre Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada."[2]

2 Teoría de la Funciones Semióticas pág. 9

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

Una de las ideas impulsoras de esta tesis es presentar la teoría de Juan D. Godino debido al convencimiento de que su teoría puede desempeñar un papel esencial en la fundamentación y orientación de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, a pesar de su complejidad.

Debido a esta complejidad, la finalidad de este capítulo, es introducir y familiarizar al lector con los diversos conceptos y teorías que fundamentan los aspectos esenciales de la *Teoría de Funciones Semióticas* de Juan D Godino.

2.1 Cognición Matemática Individual e Institucional

El término "cognitivo" con frecuencia es utilizado para designar los conocimientos subjetivos y los procesos mentales que ponen en juego los individuos cuando se enfrentan a algún problema. Estos procesos mentales, desde un punto de vista psicológico de tipo radical, son los únicos constituyentes del conocimiento, sin embargo esta modelización no toma en cuenta que los individuos dialogan, llegan a un consenso y regulan el cómo expresarse y actuar frente a una clase de problema. Tampoco toma en cuenta que de estos sistemas de práctica compartida emergen objetos institucionales, los que condicionan la forma de pensar y actuar de los integrantes de estas instituciones.

Concluyendo, en la cognición matemática (y en la cognición en general) se debe distinguir la dualidad de "cognición individual" que es el resultado del pensamiento y acción individual del sujeto ante cierto problema y "cognición institucional" que resultado del diálogo, convenio y regulación de un grupo de individuos frente a cierta clase de problema.

2.2 Perspectiva Sistémica

La Didáctica de las Matemáticas es extremadamente compleja, según Steiner (1984), esta disciplina comprende:

> "El complejo fenómeno de la matemática en su desarrollo histórico y actual y su interrelación con otras ciencias, áreas prácticas, tecnología y cultura; la estructura compleja de la enseñanza y la escolaridad dentro de nuestra sociedad; las condiciones y factores altamente diferenciados en el desarrollo cognitivo y social del alumno". [3]

Esta complejidad ha llevado a distintos autores al uso de la Teoría de Sistemas para su estudio teórico. La noción interdisciplinar de sistema, adoptada por todas las ciencias sociales, se revela necesaria siempre que se tengan razones para suponer que el funcionamiento global de un conjunto de elementos no puede ser explicado por el simple agregado de los mismos, y que incluso el comportamiento de estos queda modificado por su inclusión en el sistema.

En la Didáctica de las Matemáticas el enfoque sistémico es necesario, pues, además del sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto, y de los propios sistemas conceptuales, hay que considerar los sistemas didácticos materializados en una clase, cuyos componentes principales son: el profesor, los alumnos y el saber enseñado. Además, el sistema didáctico está inmerso en un entorno social, cultural, tecnológico y científico que influye y condiciona su funcionamiento.

Una aproximación sistémica para los problemas didácticos es importante ya que muestra que la Didáctica de las Matemáticas se encuentra en el corazón de interacciones múltiples y debe, como consecuencia, desarrollar sus propias problemáticas y metodologías, aunque sin despreciar los aportes de las disciplinas conexas, en particular la psicología, pedagogía, epistemología, antropología, lingüística, etc.

3 Citado por J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 17

2.3 Naturaleza de los Objetos Matemáticos

El identificar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como explicar la construcción de éstos como consecuencia de la instrucción es el principal interés de la Didáctica de las Matemáticas.

El papel relevante que la idea de significado tiene para la didáctica, se pone en relieve por el uso que hacen de ella algunos autores.

Balacheff (1990) propone:

> “Un problema pertenece a una problemática de investigación sobre la enseñanza de la matemática si está específicamente relacionado con el significado matemático de las conductas de los alumnos en la clase de matemáticas".[4]

Juan D. Godino, propone como cuestiones centrales para la Didáctica de las Matemáticas las siguientes:

- ¿Qué significado matemático de las concepciones de los alumnos podemos inferir a partir de una observación de su conducta?
- ¿Qué clase de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuál es la relación entre el significado del contenido a enseñar y el del conocimiento matemático elegido como referencia?
- ¿Cómo podemos caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?

4 Citado por J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 29

Para Sierpinska (1990): "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión".[5]

Dummett (1991): "una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de lo que una teoría del significado tiene que dar cuenta es lo que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, esto es, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje".[6]

2.4 Sistemas de Representaciones

El término 'representación' y la expresión 'sistema de representación', en conexión con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tienen las siguientes interpretaciones (Goldin y Janvier, 1998, p. 1):

1. Una situación física, externa y estructurada, o un conjunto de situaciones de un entorno físico, que se puede describir matemáticamente o se puede ver como concretización de ideas matemáticas.

2. Un constructo matemático formal, o un sistema de constructos, que puede representar situaciones mediante símbolos o mediante un sistema de símbolos, usualmente cumpliendo ciertos axiomas o conforme a definiciones precisas -incluyendo constructos matemáticos que pueden representar aspectos de otros constructos matemáticos.

3. Una configuración cognitiva interna, individual, o un sistema complejo de tales configuraciones, inferida a partir de la conducta o la introspección, que

5Citado por J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 29- 30
6 Citado por J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 30

describe algunos aspectos de los procesos del pensamiento matemático y la resolución de problemas.

Goldin y Stheingold (2001) postularon que:

> "Los sistemas representacionales importantes para las matemáticas y su aprendizaje tienen *estructura*, de manera que las diferentes representaciones dentro de un sistema están relacionadas de manera rica unas a otras".[7]

Basándose en esto se puede concluir que las representaciones matemáticas no se pueden entender de manera aislada.

Representaciones Externas

Los sistemas de representaciones externas comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas. También se incluyen entornos de aprendizaje, como los que utilizan materiales manipulativos concretos, o micromundos basados en el uso de ordenadores.

Algunos sistemas de representación externos son principalmente notacionales y formales. Otros sistemas externos muestran relaciones de manera visual o gráfica; las palabras y expresiones del lenguaje ordinario son también representaciones externas. Pueden denotar y describir objetos materiales, propiedades físicas, acciones y relaciones, u objetos que son mucho más abstractos. Además el objeto representado puede variar según el contexto o el uso de la representación.

Representaciones Internas

Las representaciones internas son los constructos de simbolización personal de los estudiantes. El lenguaje natural del estudiante, su imaginación visual y representación espacial, sus estrategias y heurísticas de resolución de

10 Citado por J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 52

problemas y sus afectos en relación a las matemáticas, también constituyen representaciones internas según Goldin.

Las configuraciones cognitivas internas pueden tener, o no tener, semejanza estructural con los sistemas externos; la relación simbólica se puede establecer con sistemas externos o entre sistemas internos.

Las representaciones cognitivas internas (o mentales) se introducen como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que pueden construir los estudiantes sobre las representaciones externas.

Como tipos de representaciones cognitivas se pueden describir los siguientes:

- Verbales o sintácticas: capacidades relativas al uso del lenguaje natural por los individuos, vocabulario matemático y no matemático, incluyendo el uso de la gramática y la sintaxis.
- Sistemas figurales (imagistic) y gestuales, incluyendo configuraciones cognitivas espaciales y visuales, o "imágenes mentales"; esquemas gestuales y corporales.
- Manipulación mental de notaciones formales (numerales, operaciones aritméticas, visualización de pasos simbólicos para resolver una ecuación).
- Procesos estratégicos y heurísticos: "ensayo y error", “descomposición en fases", etc.
- Sistemas de representación afectivos, emociones, actitudes, creencias y valores sobre las matemáticas, o sobre sí mismos en relación a las matemáticas.

Interacción entre Representaciones Externas e Internas

Se considera que la interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje. El interés primario del proceso de instrucción se centra sobre la naturaleza de las representaciones internas en proceso de desarrollo por los estudiantes. Las conexiones entre representaciones se pueden basar en el uso de analogías, imágenes y metáforas, así como semejanzas estructurales y diferencias entre sistemas de representación.

Las representaciones internas son siempre inferidas a partir de sus interacciones con, o su discurso sobre, o la producción de representaciones externas. Se considera útil pensar que lo externo representa lo interno y viceversa. Un concepto matemático se ha aprendido y se puede aplicar en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas.

2.5 Lenguaje Matemático: Significado y Representación

El término “significado” se usa de una manera persistente en la investigación y en la práctica de la educación matemática, ligado al de “comprensión”. Se considera esencial que los estudiantes conozcan el significado de los términos, expresiones, representaciones, o sea, a qué hace referencia el lenguaje matemático en sus diferentes registros.

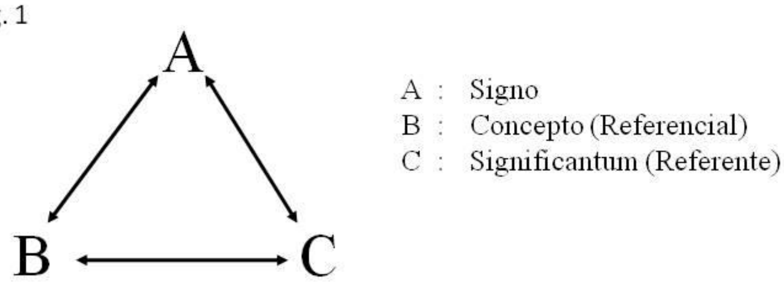
La complejidad del problema semántico del lenguaje matemático se incrementa por la variedad de registros semióticos utilizados en la actividad matemática (uso del lenguaje ordinario, oral y escrito, símbolos específicos, representaciones gráficas, objetos materiales, etc.). Además, no sólo interesa analizar el "significado" de los objetos lingüísticos matemáticos, sino también los diversos "objetos matemáticos" (situaciones-problemas, técnicas, conceptos, proposiciones, argumentaciones, teorías, etc.).

Hay dos escuelas de pensamiento en la lingüística que trabajan el término significado desde dos puntos de vista, una es la tendencia *“analítica”* o *“referencial”* y la tendencia *“operacional”*. La primera trata de capturar la esencia del significado resolviendo en sus componentes principales y el segundo estudia las palabras en acción y se interesa menos por qué es el significado por cómo opera.

Teorías Referenciales o Analíticas del Significado

El problema de las representaciones externas e internas de los objetos matemáticos está estrechamente relacionado con el análisis del significado de los mismos. La relación del significado se describe como una relación ternaria, donde se puede analizar en tres relaciones binarias, una indirecta y dos directas, como es propuesto en el "Triángulo Básico" de Ogden y Richards (1923) (Fig.1)

Fig. 1



En el esquema se indica que la relación entre A (signo) y C (su referente) es indirecta, o sea es mediatizada por B (concepto). En este caso, A representaría un término o expresión matemática, B el correspondiente objeto matemático y C el significatum o referente de dicho objeto. Por ejemplo, A es la palabra "ventana", C es una ventana particular a la cual me refiero y B es el concepto de ventana, algo existente en mi mente. La relación entre A y C es indirecta por medio del concepto de ventana, ya que dos personas tienen distinto significatum de la misma palabra.

Considerando que existe un concepto matemático, C sería el referente, A el significante matemático (palabra o símbolo) y B el concepto matemático individual del sujeto. Por ejemplo, si se está pensando en el objeto matemático "parábola": A es la palabra parábola, B es el concepto de parábola: "lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija llamada directriz" y C es a la parábola particular a la cual yo me refiero, o sea, a la parábola con las propiedades que yo le designo (si es cóncava hacia arriba o hacia abajo, si está situada sobre el eje X o bajo este, si el vértice se encuentra situado en los valores positivos, negativos o en el cero del eje X, etc.)

Teorías Operacionales o Pragmáticas del Significado

Este enfoque define el significado en términos contextuales, es decir, esencialmente empíricos, sin necesidad de recurrir a estados mentales vagos, intangibles y subjetivos.

Las Teorías Operacionales o Pragmáticas del Significado tienen dos ideas básicas. La primera es que el significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en el que se usan, y la segunda es que niegan la posibilidad de observación científica, empírica e intersubjetiva desde las entidades abstractas, que es admitida implícitamente en las teorías realistas. Lo único accesible a la observación en estos casos, y por tanto, el punto de donde hay que partir en una investigación científica del lenguaje, es el uso lingüístico. A partir de tal uso es como se debe inferir el significado de los objetos abstractos.

2.6 Teoría del Lenguaje de Hjelmslev

Esta teoría intenta mostrar el camino que lleva a una descripción autoconsecuente y exhaustiva del mismo por medio del análisis.

Según Hjelmslev (1943), el principio básico del análisis es que:

> "tanto el objeto sometido a examen como sus partes tienen existencia sólo en virtud de las dependencias mutuas; la totalidad del objeto sometido a examen sólo puede definirse por la suma total de dichas dependencias. Así mismo, cada una de las partes puede sólo definirse por las dependencias que le unen a otras coordinadas, al conjunto, y a sus partes del grado próximo, y por la suma de las dependencias que estas partes del grado próximo contraen entre sí" [8]

Según lo citado de Hjelmslev se podría decir que una noción clave en la teoría del lenguaje de Hjelmslev es la de *función*, que se concibe como la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se dice que hay función entre una clase y sus componentes y entre los componentes entre sí.

---

7 Citado por J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 39

A los terminales de una función los llama funtivos, esto es, cualquier objeto que tiene función con otros. Esta noción de función está a medio camino entre el lógico-matemático y el etimológico, más próximo en lo formal al primero, pero no idéntico a él.

2.7 Función de Signo

La noción de signo que propone Hjelmslev está ligada a su consideración de la lengua como un *sistema de signos*. El concepto vago de signo, legado por la tradición, es que “signo” (o expresión de signo) se caracteriza primero y principalmente por ser signo de alguna otra cosa, lo que parece indicar que “signo” se define por una función. Un signo funciona, designa, denota; un signo, en contraposición a un no-signo, es el portador de una significación.

Entre los posibles tipos de dependencias que se pueden identificar entre partes de un texto destacan aquellas en que una parte designa o denota alguna otra; la primera (plano de expresión) funciona o se pone en representación de la segunda (plano del contenido), esto es, señala hacia un contenido que hay fuera de la expresión. Esta función es la que designa Hjemslev como *función de signo*.

> “En esta teoría, y en consonancia con las propuestas de Saussure, la palabra 'signo' no se aplica a la expresión sino a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido.” [9]

La distinción entre expresión y contenido y su interacción en la función de signo es algo básico en la estructura de cualquier lengua.

Cualquier signo, cualquier sistema de signos, cualquier lengua contiene en sí una forma de la expresión y una forma del contenido. La primera etapa del análisis de un texto debe consistir, por tanto, en un análisis que diferencie estas dos entidades.

---

8 J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 40

Se sugiere tener en cuenta que, además de estas dependencias representacionales existen otras dependencias de naturaleza operatoria o *actuativa* entre distintas partes de un texto. Así mismo, dos o más partes de un texto pueden estar relacionadas de tal modo que conjuntamente *cooperan* para producir una unidad significativa más global.

2.8 Semiótica Cognitiva de Eco

Eco introduce nociones de *Tipo Cognitivo* (TC), que es el procedimiento que permite a un sujeto construir las condiciones de reconocibilidad e identificación de un objeto; *Contenido Nuclear* (CN) que es el conjunto de interpretaciones que da lugar un TC, el autor agrega: “Tales contenidos nucleares se expresan a veces con palabras, a veces con gestos, a veces mediante imágenes o diagramas”; y finalmente se encuentra el *Contenido Molar* (CM) que será la serie controlable de lo que se puede decir de manera específica y que es compartida socialmente.

La relación entre TC y CN la establece Eco del siguiente modo:

> "Un TC es siempre un hecho privado, pero se vuelve público cuando se interpreta como CN, mientras que un contenido nuclear público puede dar instrucciones para la formación de los tipos cognitivos. Por tanto, en cierto sentido, aunque los tipos cognitivos sean privados, están sometidos continuamente al control público, y la comunidad nos educa paso a paso a adecuar los nuestros a los ajenos"[10]

El constructo "contenido molar" tiene una gran similitud con el constructo "sistemas de prácticas institucionales", que se considera como "el significado del objeto institucional" correspondiente. Parece que en la semiótica cognitiva de Eco faltaría la noción que podría ser como el equivalente institucional al "tipo cognitivo". Sin embargo en la teoría de J.D. Godino se introduce el objeto institucional como "emergente del sistema de prácticas institucionales", que podría interpretarse, en términos de Eco, como "aquello que permite el reconocimiento público de un objeto", esto es, la definición matemática de un objeto.

---

9 Citado por J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 42

2.9 Objetivo Instruccional

Se considera que entre los fines fundamentales de la educación matemática están los objetivos representacionales: el desarrollo de sistemas internos eficientes de representación en los estudiantes que correspondan de manera coherente, e interactúen bien, con los sistemas externos convencionalmente establecidos de las matemáticas.

2.10 Conceptos y Concepciones en Educación Matemática

Sfard (1991) usa la palabra 'concepto' para referirse a "una idea matemática en su forma 'oficial' - como un constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento ideal". Por el contrario, el término "concepción" designa "al aglomerado completo de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto – la contrapartida del concepto en el universo interno o subjetivo del conocimiento humano".

2.11 Los constructivismos Radical y Social

Lo que las diversas formas de constructivismo comparten es la metáfora de la construcción. Describe la comprensión del sujeto como la construcción de estructuras mentales, y el término “reestructuración”. Lo que la metáfora de la construcción no sugiere es que la comprensión se realice a partir de piezas de conocimiento recibidas.

El proceso es recursivo y por ello los “bloques constructivos” de la compresión son ellos mismos producto de actos previos de construcción.

Constructivismo Radical

El constructivismo radical se define mediante el primero y el segundo de los principios de Von Glasersfeld. El primer principio dice que “el conocimiento no es recibido pasivamente por el sujeto cognitivo sino activamente construido” (Von

Glasersfeld, 1989). El segundo principio afecta profundamente a la metáfora del mundo, así como a la de la mente: “la función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica.” (Von Glasersfeld, 1989). [11]

El constructivismo radical es neutral en su ontología, no haciendo ninguna suposición sobre la existencia del mundo tras el dominio subjetivo de experiencia.

Constructivismo Social

El constructivismo social considera al sujeto individual y el dominio de lo social como indisolublemente interconectados. Las personas están formadas mediante sus interacciones con los demás. Por tanto no hay ninguna metáfora subyacente para la mente individual completamente aislada.

El paradigma de investigación de este concepto adopta una ontología relativista modificada. Se basa en una epistemología falibilista que considera el ‘conocimiento convencional’ como aquel que es ‘vivido’ y aceptado socialmente.

2.12 La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)

El acto de conocer se considera situado en un sistema de restricciones, las cuales, mediante el feedback sobre las acciones del sujeto, le señalan el coste de los ensayos y errores.

Para Brousseau, el conocimiento construido o usado en una situación es definido por las restricciones de esta situación, y por tanto, si el profesor crea ciertas restricciones artificiales es capaz de provocar en los estudiantes la construcción de un cierto tipo de conocimiento.

11 Citado por J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 65

Brousseau, propone varios tipos de situaciones didácticas, cuya secuencia puede provocar la *génesis artificial* de un concepto matemático. Dichos tipos de situaciones son las siguientes:

- Situaciones centradas sobre 'la acción', donde los estudiantes hacen sus primeros intentos por resolver un problema propuesto por el profesor;
- Situaciones centradas sobre la 'comunicación', donde los estudiantes comunican los resultados de su trabajo a otros estudiantes y al profesor;
- Situaciones centradas sobre la 'validación', donde se deben usar argumentaciones teóricas más bien que empíricas; y
- Situaciones de institucionalización, donde los resultados de las negociaciones y convenciones de las fases previas son resumidas, y la atención se centra sobre los hechos 'importantes', los procedimientos, las ideas, y la terminología 'oficial'.

Dentro de cada una de estas situaciones, hay un componente 'adidáctico', esto es cuando el alumno y el maestro logran que el primero asuma el problema planteado como propio, y comience un proceso de búsqueda independiente, sin ser guiado ni trabajado por lo que pudiera suponer que es lo que el profesor espera de este. Se considera que ésta es la parte más importante, ya que el fin último de la enseñanza es conseguir despertar el interés del alumno por apropiarse del problema e intentar resolverlo, es lo que Brousseau llama la *devolución del problema.*

2.13 Prácticas

Se llama práctica a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Esta noción permite tener en cuenta el principio Piagetiano de la construcción del conocimiento a través de la acción.

Es importante resaltar que en las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos (que se evocan al hacer matemáticas) los cuales son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual.

Llamaremos *prácticas prototípicas* a los invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas y para cada tipo de problemas podemos asociar un *sistema de prácticas prototípicas* o características.

Prácticas significativas

La noción de práctica significativa debe tener en cuenta el proceso de aprendizaje y diferenciar los intentos que llevan al éxito y persisten – o incluso que persisten siendo erróneos, porque la persona cree que llevan al éxito - de aquellos que son descartados y olvidados.

Una práctica personal prototípica es significativa si, para la persona, esta experiencia desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

2.14 La Noción de Institución

Una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Una institución particularmente importante en este modelo es la institución matemática (M), formada por las personas comprometidas en la resolución de nuevos problemas matemáticos. Son los productores del "saber matemático" y en particular podemos incluir en ella a todos aquellos que están realizando investigaciones dirigidas a la producción de nuevo conocimiento matemático.

Otras instituciones interesadas por "situaciones matemáticas" son los "utilizadores" del saber matemático (matemáticos aplicados; instituciones científicas, profesionales o comerciales que precisan del uso de las matemáticas).

2.15 Objeto institucional

El objeto matemático es un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos.

Se propone considerar el *Objeto Institucional* OI: como emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de PI(C). Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de OI.

2.16 Objeto personal

Un objeto personal (Op) es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas.

2.17 Interpretación del Triángulo Epistemológico

Basados en el triángulo epistemológico y teoría de los campos conceptuales la primera clasificación incluyó los siguientes tipos de elementos en el significado sistémico de un objeto matemático:

- Situaciones-problemas, aplicaciones, tareas, que inducen actividades matemáticas.
- Lenguaje, incluyendo en el mismo todo tipo de representaciones materiales ostensivas usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, gráficos, tablas, diagramas).
- Generalizaciones, ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías).

Se conciben las generalizaciones matemáticas y las situaciones-problemas en términos similares a como describe Freudenthal (1982) los *noumena* y *phainomena*. Para este autor los objetos matemáticos son noumena. Los conceptos matemáticos, en general las estructuras matemáticas sirven para organizar los fenómenos tanto del mundo concreto como del matemático.

Las ideas de Dörfler (1991) sirven de punto de partida para interpretar las generalizaciones matemáticas (noumena) como los productos resultantes de los procesos de generalización de las acciones de los sujetos ante cierta clase de situaciones-problemas.

Además de los tres tipos de elementos citados, es necesario tener en cuenta explícitamente las acciones de los sujetos en la resolución de problemas y los argumentos empleados para justificar, tanto las acciones, como las propiedades de los objetos y la solución de los problemas.

2.18 Situaciones-Problemas

En el desarrollo de las primitivas ideas del significado de un objeto como conjunto de prácticas, se han incluido los problemas y campos de problemas de donde emerge un objeto como parte de su significado y cada uno de dichos problemas y situaciones como un elemento de significado. Ello concuerda con la visión del significado de un objeto como conjunto de prácticas significativas asociadas al mismo, puesto que el planteamiento de problemas es una práctica común en la actividad matemática.

2.19 El Lenguaje Matemático

Para resolver los problemas matemáticos, para generalizar su solución o para describirlos a otra persona se necesita usar elementos del lenguaje, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.

Asimismo, la notación simbólica, permite representar tanto objetos abstractos como situaciones concretas.

Otros útiles de carácter lingüístico son las disposiciones tabulares, gráficos, grafos, esquemas, ilustraciones, etc. que formarían parte del lenguaje gráfico.

Las expresiones y símbolos desempeñan frecuentemente el papel de "sistemas de representación" de estar en lugar del objeto matemático, de los datos del problema o de la situación real a que se refiere dicho problema. Por otro lado, el lenguaje no sólo tiene una valencia representacional sino que también es instrumento de la actividad matemática.

El análisis semiótico de la actividad matemática realizado por Rotman (1988) apoya también la íntima interdependencia entre el pensamiento y el lenguaje matemático:

> "Los números son objetos que resultan de una amalgama de dos actividades, pensar (imaginar acciones) y simbolizar (hacer marcas), las cuales son inseparables: los matemáticos piensan sobre marcas que ellos mismos han imaginado en una existencia potencial" (Rotman, 1988) [12]

2.20 Comprensión Instrumental y Relacional

El conocimiento instrumental implica la aplicación de múltiples reglas en lugar de unos pocos principios de aplicación general, por tanto puede fallar en cuanto la tarea pedida no se ajuste exactamente al patrón estándar. Pero la existencia de una cantidad importante de profesores y textos que ponen en juego más bien la comprensión instrumental fuerza a pensar y a analizar más finamente la situación.

Skemp menciona las siguientes ventajas de la comprensión instrumental:

---

11 Citado por J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 111

- Dentro de su propio contexto, las matemáticas instrumentales son usualmente más fáciles de aprender.
- Las recompensas son más inmediatas y más aparentes.
- Debido a que se requieren menos conocimientos, se puede proporcionar la respuesta correcta de manera más rápida y fiable mediante un pensamiento instrumental que relacional.

Para las matemáticas relacionales Skemp cita las tres ventajas siguientes:

- Son más adaptables a nuevas tareas. La comprensión relacional, el saber no sólo qué método funciona sino también por qué, permite adaptar los métodos a los nuevos problemas. La comprensión instrumental necesita controlar qué método se aplica a cada problema y cuál no, y aprender un método diferente para cada nueva clase de problemas.
- Las matemáticas relacionales son más fáciles de recordar. Aquí hay una paradoja aparente, ya que son más difíciles de aprender. Hay más cosas que aprender –las conexiones y las reglas separadas- pero el resultado, una vez aprendido, es más duradero.
- Los esquemas relacionales tienen la cualidad de ser orgánicos, lo que quiere decir que parecen actuar como agentes de su propio crecimiento.

Actos y procesos de comprensión

Sierpinska (1994) da un paso importante, al discernir entre acto y proceso de comprensión, y ligar la "buena" comprensión de una situación matemática dada (concepto, teoría, problema) a la secuencia de actos de superar obstáculos específicos de esta situación. La comprensión sería así no un estado dicotómico (se comprende/ no se comprende), sino un proceso creciente y continuo que se desarrolla mediante actos de comprensión.

Un modelo de comprensión tendrá dos ejes principales: uno descriptivo, que indicará los aspectos o componentes de los objetos a comprender, y otro procesual que indicará las fases, niveles, o medios necesarios en el logro de la 'buena' comprensión.

Relación entre Comprensión y Competencia

La competencia es entendida como "saber hacer", y comprensión que implica saber qué hacer y por qué. La noción de competencia viene a ser asimilable a la "comprensión instrumental" según la describe Skemp, mientras que comprensión viene a ser equivalente a "comprensión relacional".

Aunque la competencia es un rasgo cognitivo y disposicional del sujeto, sus características serán distintas según el campo profesional, el objeto de saber o la destreza.

La competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico o relacional del conocimiento.

En síntesis, podemos distinguir en un primer análisis tres facetas básicas en el conocimiento matemático:

- El componente práctico (praxis) ligado con la idea de competencia, que en modelo teórico que se propone se descompone todavía en dos subcomponentes: las situaciones-problemas y las técnicas de solución.
- El componente discursivo/relacional, ligado tradicionalmente a la idea de comprensión y formado por el sistema de reglas y justificaciones, que en este modelo se descompone en argumentaciones, definiciones de conceptos y propiedades en las que se apoya.
- Ambos componentes se apoyan en el uso de recursos lingüísticos, por lo que el lenguaje matemático (en sus diversos registros) constituye un tercer componente sin el cual los anteriores no pueden desarrollarse.

2.21 Facetas Duales del Conocimiento Matemático

Facetas Institucional y Personal

Si el interés se centra en el sujeto individual, en su aprendizaje, en sus respuestas a una prueba de evaluación, hablamos de objetos personales. Por el contrario si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, consideramos que se ponen en juego objetos institucionales.

Se asume entonces, que la distinción entre persona e institución es esencial en el análisis de la actividad matemática y los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta distinción de "posiciones" en el sistema didáctico interesa que se refleje también en los propios objetos de enseñanza y de aprendizaje. Esto permite caracterizar el aprendizaje como "acoplamiento progresivo" entre significados personales e institucionales y explicar las dificultades y obstáculos en términos de conflictos semióticos y de la complejidad de los objetos matemáticos.

En el análisis de los significados institucionales de un objeto matemático interesa distinguir cuatro tipos:

- Significado de referencia: sistema de prácticas que el profesor utiliza para planificar el proceso de enseñanza de un objeto matemático, en el cual debe delimitar “lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas", por lo tanto acude a textos, orientaciones curriculares, a lo que las “autoridades” consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional y finalmente a sus conocimientos previamente adquiridos.
- Significado pretendido: sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional.
- Significado implementado: sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes.
- Significado evaluado: sistema de prácticas en el cual se pone en juego el proceso de evaluación, donde el profesor debe seleccionar tareas que se incluirán en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes adquiridos por los alumnos, esperando que estas sea una muestra representativa del significado implementado.

En cuanto al análisis de los significados personales de un objeto matemático es importante distinguir tres tipos de significados:

- Significado global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno, relativas a un objeto matemático.

- Significado declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

- Significado logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

Se hablará de *significados a priori* cuando los sistemas de prácticas se caracterizan antes de iniciar el proceso instruccional propiamente dicho y *significado a posteriori* cuando se hace después. Los tres tipos de significados personales descritos (global, declarado y logrado) pueden tener este carácter a priori o a posteriori. Los significados institucionales de referencia y pretendido tendrán el carácter de a priori, mientras que el implementado y el evaluado serán a posteriori.

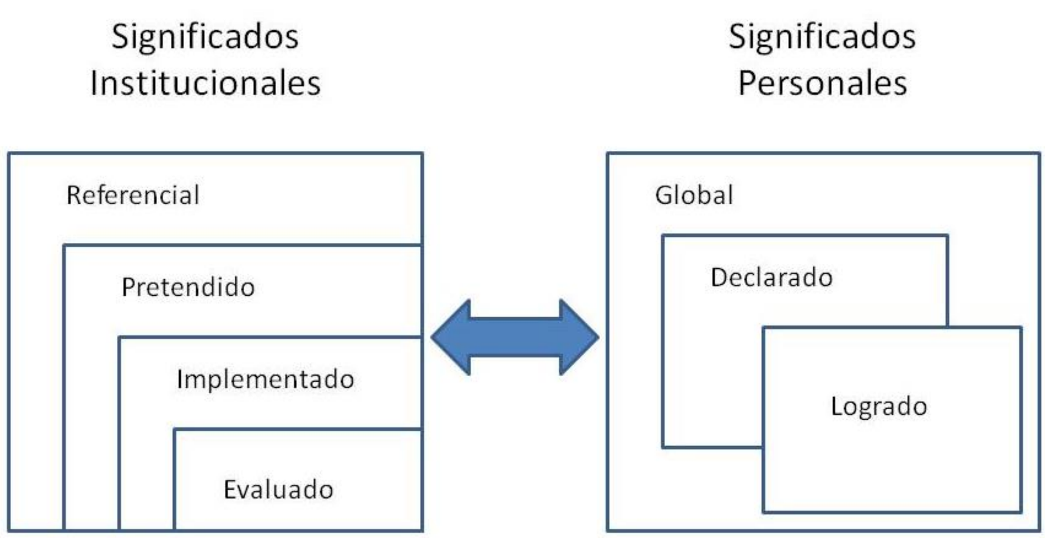


Fig. 2: Tipos de Significados

Facetas Elemental y Sistémica

Los conceptos estadísticos de media y mediana son considerando como entidades compuestas, con una cierta organización o estructura. Por tanto pueden ser interpretados como conceptos-sistema. Las medidas de tendencia central están compuestas por la media y la mediana, y entre estos dos objetos hay una determinada relación. La media es algo que se calcula y en dicho cálculo se hace intervenir todos los datos.

La mediana se va configurando como un sistema complejo que incluye ciertos tipos de tareas específicas, técnicas de cálculo y la propiedad de ser mejor representante que la media en ciertos tipos de situaciones.

Sin embargo, en momentos dados nos referimos a un objeto como una unidad elemental indescomponible. Tal es el caso de la referencia a la mediana en las expresiones: "*la mediana de la edad de los 25 alumnos de la clase",* donde nos referimos a la medida de posición central para un conjunto particular de datos; o "*Mediana = 14"*, en que nos referimos a un número entero que es el valor particular que toma dicha mediana. En estos casos no nos referimos a todo el posible conjunto de prácticas relacionado con la mediana, sino que las expresiones toman un significado preciso e indescomponible.

> "Con la faceta dual del conocimiento elemental y sistémica tratamos de tener en cuenta el carácter recursivo y complejo del conocimiento matemático. Cuando nos interrogamos por cualquier objeto (problema, lenguaje, acción, concepto, propiedad, argumento) aparece un sistema en el que de nuevo se ponen en juego los restantes tipos de objetos y la trama de relaciones que los relacionan." (Godino, 2003) [13]

Facetas Ostensiva y No Ostensiva

Todo objeto matemático tiene una faceta ostensiva, esto es, perceptible, en cuanto que es reconocido como tal objeto por una institución, lo que implica que se habla de dicho objeto, se le nombra y se comunica sus características a otras personas, por medio del lenguaje oral, escrito, gráfico o simbólico.

Por otro lado, cualquiera de estos objetos tiene otra faceta no ostensiva, en cuanto un sujeto es capaz de pensar e imaginar uno de estos objetos sin necesidad de mostrarlo externamente.

12 J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 141

Bosch y Chevallard (1999) usan los términos ostensivo y no ostensivo para clasificar el mundo de los objetos en dos clases disjuntas: Los ostensivos, que tienen una cierta materialidad, y los no ostensivos, que no la tienen (conceptos, nociones, intuiciones, etc.). Estudian con detalle los diversos registros de los cuales están hechos los ostensivos, y sobre todo su papel esencial en el trabajo matemático.

Ahora J. D. Godino (2003) indica en su libro lo siguiente:

> "En nuestro modelo consideramos la distinción ostensivo no-ostensivo como una faceta o dimensión dual aplicable a los distintos objetos primarios (y secundarios). El motivo es que un objeto ostensivo (una palabra escrita, un gráfico, etc.) puede ser también pensado, imaginado, por una persona, o puede estar implícito en un discurso matemático institucional (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica). Análogamente, un cálculo puede ser realizado por una persona de manera ostensiva, o mentalmente; un ordenador calcula "internamente" de manera no ostensiva. Es como si los objetos ostensivos también pudieran funcionar como no ostensivos." [14]

Facetas Ejemplar y Tipo

La distinción ejemplar - tipo se usa para proponer una interpretación lingüística de la distinción concreto-abstracto. Se corresponde con lo que en otros trabajos se ha presentado como *objetos extensivos* (ejemplar) e *intensivos* (tipos o abstracciones). Se considera que puede ser una noción útil para describir la disposición matemática hacia la generalización y explicar algunos conflictos en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático derivados de la confusión entre ejemplar y tipo.

Uno de los intereses en el estudio de las matemáticas es generalizar los problemas, las soluciones que encontramos y el discurso con el que se describen y organizan. Rara vez se confronta un problema aislado sino que se desea resolver tipos de problemas y desarrollar técnicas cada vez más generales. Además, tales soluciones son organizadas y justificadas en estructuras cada vez

14 J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 142

más globales. En el análisis de la actividad matemática, o de un proceso de estudio matemático particular, se debe precisar en cada circunstancia si se refiere a un objeto concreto (algo que se pone en juego por sí mismo), o a dicho objeto como representante de una clase de objetos, como ejemplar de un cierto tipo, o componente de un sistema.

La consideración de un objeto como concreto o abstracto depende en cada momento del juego de lenguaje en que se usa.

Facetas Expresión y Contenido

La actividad matemática, los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos descritos, con los diversos “apellidos” que se les asigna según su naturaleza y función, no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unas con otras.

La distinción entre expresión y contenido permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática.

Una vez descritas y tratadas las principales teorías y conceptos, que se utilizan en el texto de Juan D. Godino, se definirán ciertos conceptos que también tienen relevancia y vale la pena destacar, para así poder tener una mejor comprensión y manejo del tema.

- Semiótica: Se define como el estudio de los signos, su estructura y la relación entre el significante y el concepto de significado.

- Ontología: el estudio del origen.

- Epistémica: El origen de algo.

- Holística: El punto de vista que se interesa más por el todo que por las partes.

- Diacrónicas: Es el desarrollo o sucesión de hechos a través del tiempo.

- Sistémico: trata de comprender el funcionamiento de la sociedad desde una perspectiva holística e integradora, en donde lo importante son las relaciones entre los componentes.

- Pragmática: Disciplina que estudia el lenguaje en su relación con los usuarios y las circunstancias de la comunicación.

- Falibilismo es la doctrina lógica que sostiene la posibilidad de que una proposición dada puede ser negada, cambiando su valor de verdad y a partir de ella obtener una nueva discriminación certera acerca de lo conocido.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO.

3.1 Tipo de Tesis

El objetivo principal de esta tesis es presentar un detalle de la labor realizada por Juan D. Godino en su trabajo de investigación titulado: "*Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática",* trabajo que fue presentado en la Universidad de Granada en Noviembre del 2003.

Para lograr el objetivo señalado anteriormente se utilizó una metodología de investigación de tipo documental, que se ajusta a las necesidades y características que surgieron durante la elaboración de la presente tesis, ya que en la literatura revisada sobre esta técnica se destacan las siguientes definiciones:

- "*La investigación documental es una técnica que consiste en la selección y recopilación de información por medio de la lectura, crítica o conclusión de documentos y materiales bibliográficos, de bibliotecas, hemerotecas, centros de documentación e información",* Baena (1985)

- Para Garza (1988) este tipo de investigación: *"…se caracteriza por el empleo predominante de registros gráficos y sonoros como fuentes de información..., registros en forma de manuscritos e impresos*"*.*

Como ha sido señalado en las definiciones, para llevar a cabo una investigación de tipo documental, el investigador se debe apoyar principalmente en trabajos previos, información y/o datos divulgados por medios impresos, audiovisuales o electrónicos, que son materiales que se pueden estar revisando permanentemente y en cualquier momento de la investigación, sin alterar la información que se desprende de ellos. Una vez hecha esta recolección, la información obtenida se debe someter a una síntesis y un análisis, para que así posteriormente se puedan obtener los datos que van a constituir y dar forma al marco teórico.

La metodología apropiada para realizar esta tesis teórica es cualitativa, ya que ésta metodología sigue gran parte de las características de este tipo de investigación. “De acuerdo con Kirk y Miller (1986), se cree que el término cualitativo implica un compromiso con el trabajo de campo y no un compromiso con lo anumérico. La investigación cualitativa incluye técnicas diversas, como la inducción analítica, el análisis de contenido, la semiótica, los estudios documentales y los tratamientos informáticos y estadísticos”, algunas de estas herramientas son usadas este estudio.

Este enfoque cualitativo o fenomenológico, pretende comprender, lo más profundamente posible un fenómeno determinado, es decir, se pretende presentar esta teoría unificada de la Didáctica de las Matemáticas.

3.2 Etapas Metodológicas

Este tipo de investigación se debe realizar de una forma ordenada y con objetivos precisos, para así tener la base para construir los conocimientos que se desean. Por lo tanto, como en toda investigación documental, el proceso ha seguido distintas etapas en su elaboración, entre las etapas las cuales podemos mencionar:

- Recopilación de información: Sabiendo que nos basaríamos principalmente en el trabajo de J.D. Godino, se buscó más material sobre este tema, para complementar el texto que ya teníamos y así poder hacer un análisis más profundo y exhaustivo. Se busco en bibliotecas e internet, sin embargo la información encontrada no se ajustaba a las necesidades de esta tesis, ni orientada a la investigación que se está realizando y la mayor cantidad de información encontrada era del mismo autor por lo cual no se tenía una segunda opinión para contrastar ni críticas sobre las ideas planteadas en el libro, por lo que se optó trabajar principalmente con el libro de Godino, con diccionarios y enciclopedias.

- Lectura rápida del material: una vez hecha la recolección de material se realizó una lectura rápida del texto de Godino, con el fin de ubicar las ideas principales y conocer el material.

- Lectura minuciosa de la bibliografía: tras seguir una serie de pasos previos se prosiguió a realizar una nueva lectura con el fin de hacer un análisis más exhaustivo y a fondo del texto, extrayendo las principales ideas y definiciones, para así poder reflexionar e interpretar lo que el autor quería transmitir en su libro.

- Redacción del trabajo: en esta etapa se presenta el resumen del libro, las conclusiones y los resultados de la investigación, mediante un escrito para una primera revisión.

- Redacción del trabajo final: el objetivo es comunicar con claridad y coherencia las conclusiones, resultados, reflexiones o descubrimientos que se obtuvieron a lo largo de toda la investigación y para esto, una vez realizada la revisión previamente mencionada, se procede a realizar las correcciones y la posterior redacción final.

CAPÍTULO IV

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

4.1 Introducción

Una de las ideas impulsoras de esta tesis es resumir la teoría de Juan D. Godino debido al convencimiento de que la noción de significado, a pesar de su extraordinaria complejidad, puede desempeñar un papel esencial en la fundamentación y orientación de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas.

Debido a que la semiótica tiene el potencial de ofrecer la base para una teoría unificada de la educación matemática (y las matemáticas) podríamos decir que la condición de adoptar (o incluso elaborar) una semiótica apropiada y de complementarla con otras herramientas teóricas, en particular una ontología (estudio del origen) que tenga en cuenta la variedad de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática. Se hará mención a la utilidad de incorporar herramientas conceptuales aportadas por la antropología cognitiva y la ecología conceptual.

Se mencionarán también algunas direcciones en las que es necesario progresar, como es la incorporación de las dimensiones afectivas, axiológicas, políticas, curriculares, etc. y sus interacciones con las dimensiones epistémica, cognitiva e instruccional. Todas ellas configuran los componentes de lo que para nosotros constituye el análisis didáctico- matemático, el cual deberá proporcionar la necesaria fundamentación para la tecnología didáctica y la práctica de la enseñanza de las matemáticas.

Las nociones teóricas correspondientes a las dimensiones epistémica y cognitiva del análisis didáctico - matemático, introducidas hasta este momento, son las siguientes:

- Sistema de prácticas operativas y discursivas ligadas a un campo de problemas, presentado como el significado sistémico de los objetos matemáticos.

- Entidades elementales componentes de los significados sistémicos.

- Facetas duales de los objetos matemáticos.

- Función semiótica.

Resumimos a continuación las principales características de estas nociones y algunas de sus consecuencias. Partimos de un postulado básico: La centralidad de los problemas y los instrumentos semióticos en el trabajo matemático.

La actividad matemática se centra en la solución de una cierta clase de situaciones problemáticas. Dicha actividad requiere el uso y la producción de una variedad de instrumentos semióticos y da lugar a técnicas, conceptos y teorías que se organizan según los principios de la lógica.

El modelo cognitivo que se propone para describir la cognición matemática adopta la noción de situación-problema como idea primitiva. La variación sistemática de las variables que intervienen en las situaciones-problema da lugar a diferentes campos de problemas. Se postula que la génesis del conocimiento personal se produce como consecuencia de la interacción del sujeto con campos de problemas, mediatizada por las herramientas semióticas y es dependiente de los contextos institucionales.

Como consecuencia tenemos dos unidades primarias de análisis para estudiar los procesos cognitivos: la práctica significativa y el significado sistémico de un objeto.

Así pues, la práctica significativa, considerada como una forma expresiva situada, implica una situación-problema, un contexto institucional, una persona y los instrumentos semióticos que mediatizan la acción. Esta noción se utiliza para conceptualizar los objetos matemáticos como emergentes de sistemas de prácticas.

La noción de significado sistémico de un objeto nos permite derivar una noción de comprensión que tiene en cuenta los procesos institucionales y contextuales implicados. De este modo, la comprensión no se reduce a un acto puramente mental.

El constructo "significado sistémico" que se postula es la complejidad del conocimiento matemático reconociendo sus características diacrónicas y evolutivas. Además permite tomar conciencia de la importancia del campo de problemas asociado a cada conocimiento, de las variables que lo estructuran y de los sistemas ostensivos utilizables, dado que el conocimiento sobreviene de las actuaciones de las personas ante las situaciones problemáticas, mediatizadas por las herramientas lingüísticas disponibles. El sistema de prácticas operativas y discursivas puede servir de ayuda en las tareas de diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje, para orientar la búsqueda y selección de muestras representativas de las prácticas que caracterizan la competencia y comprensión matemática en cada contexto institucional.

Las nociones de semiometría (determinación de significados) y ecología de significados (relaciones y dinámica de significados) pueden ayudar a definir una problemática de investigación para la Didáctica de las Matemáticas.

Por otro lado, en el análisis de las actuaciones de los alumnos y profesores en el aula nos interesa con frecuencia fijar la atención en procesos interpretativos específicos y en las dificultades inherentes a los mismos. Para este análisis la tipología de objetos y facetas desde las cuales se pueden considerar se revela como un instrumento necesario. Las restantes facetas del conocimiento matemático identificadas, ostensiva - no ostensiva, elemental - sistémica, ejemplar

- tipo, proporcionan nuevos elementos de análisis de los procesos de cognición matemática.

4.2 Las Funciones Semióticas y sus Tipos

Se trata de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión o significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos (funtivos) que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Un postulado que se adopta es que cualquier objeto matemático (ostensivo o no ostensivo) puede ser expresión o contenido, como ocurre en la semiótica que propone Peirce (las ideas también funcionan como signos, Eco, 1991). Además, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro), o instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento).

La comprensión (o lo que es equivalente, el conocimiento) de un objeto "O" (sea ostensivo o no ostensivo) por parte de un sujeto (persona o institución) se describe en términos de las funciones semióticas que el sujeto puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que O se pone en juego como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento, un acto de comprensión. Hablar de conocimiento y de comprensión equivale a hablar de significado, esto es, de función semiótica, resultando una variedad de tipos y grados de conocimientos (y de comprensiones) en consonancia con la diversidad de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática.

El modelo semiótico que se propone para describir la cognición matemática incorpora aspectos propios tanto de las teorías pragmáticas (u operacionales) del significado como de las realistas (o referenciales). El significado de los términos y expresiones se debe buscar en el uso que se hace de ellas en los contextos institucionales y en los juegos de lenguaje específicos de los que forman parte. Pero esto no implica que tengamos que renunciar a la posibilidad de encontrar usos prototípicos que indicamos con nuevos términos y expresiones. La metáfora del objeto matemático resulta útil para comprender el funcionamiento del pensamiento y no tenemos necesidad de rechazarla si logramos controlar su empleo. Esta compatibilidad entre las teorías operacionales y referenciales del significado está apoyada en posiciones como las de Ullmann (1962).

4.3 Algunas Consecuencias o Corolarios

Pensamos que las nociones teóricas introducidas aportan elementos nuevos para definir una semiótica cognitiva especialmente adaptada a la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Indicamos a continuación algunas consecuencias que se derivan de este enfoque de la cognición matemática.

1. Puesto que los estudiantes son sujetos de distintas instituciones, su conocimiento está mediatizado por éstas. En consecuencia, la caracterización del conocimiento institucional debe constituir una etapa previa a la evaluación del conocimiento de los estudiantes y la planificación de la enseñanza.

2. Dada la complejidad del significado sistémico de los conceptos matemáticos el estudio de los mismos y los significados personales logrados por los alumnos, dependen de manera determinante de la selección que se haga de los distintos componentes de los sistemas de prácticas pretendidas.

3. Parcialidad de la comprensión y competencia matemática. Los significados construidos por los participantes en un proceso instruccional sobre un objeto matemático -o lo que viene a ser equivalente, su conocimiento, comprensión o relación personal a dicho objeto- será siempre parcial y relativa al contexto institucional, material y temporal en que tiene lugar el proceso. Sólo nos queda la pretensión de que éste conocimiento sea lo más completo posible en cada circunstancia y que se facilite su evolución futura, contando además con estimular su interés personal.

4. Los significados sistémicos y la tipología de prácticas (y objetos emergentes) identificadas aportan nuevos elementos a tener en cuenta en el diseño y evaluación de los procesos de estudio de las matemáticas. Así mismo, la generalización del modelo aportado por la teoría de las funciones semióticas proporciona nuevos instrumentos de análisis de procesos cognitivos y microinstruccionales, al revelar el sistema de objetos e interpretaciones que se ponen en juego.

5. Relatividad socio-epistémica del conocimiento matemático en los contextos de la enseñanza.

El diseño e implementación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un objeto formal matemático (procedimiento, concepto, teoría) para cada nivel educativo y circunstancias institucionales dadas exigen una selección de situaciones-problemas, instrumentos semióticos y propiedades características del objeto. Estos sistemas de prácticas locales específicas dan lugar a una multiplicidad de objetos matemáticos (informales), tanto a nivel personal como institucional. En consecuencia, cada objeto formal matemático, por ejemplo, número, función, etc. Tiene que ser progresivamente abstraído o generalizado de dicha variedad de objetos informales.

Para la dimensión instruccional del análisis didáctico asumimos los supuestos de un "aprendizaje interaccionista", que atribuye un papel clave a la interacción social, la cooperación, el discurso, la comunicación, además de la interacción del sujeto con las situaciones problemas: el sujeto aprende mediante su interacción con un medio instruccional. Además de adoptar estos supuestos interaccionistas del aprendizaje, proponemos modelizar la instrucción matemática como proceso estocástico multidimensional en el que distinguimos seis trayectorias:

- Epistémica (relativa a los significados institucionales y cuyos estados posibles son los seis tipos de entidades primarias).

- Docente (relativa a las funciones o tareas docentes).

- Discente (relativa a las funciones o tareas de los estudiantes).

- Mediacional (que describe los diversos recursos instruccionales).

- Cognitiva (cronogénesis de significados personales)

- Emocional (que tiene en cuenta los afectos, valores, sentimientos)

La noción de configuración didáctica, trayectoria didáctica y los patrones de interacción completan el sistema de nociones propuesto como herramientas para el análisis de los procesos de instrucción matemática.

La aplicación de este modelo cognitivo ha permitido proponer un conjunto de estados posibles de las trayectorias epistémicas (estados situacional, notacional, actuativo, conceptual, proposicional y argumentativo). Así mismo, la inclusión explícita como elementos de los significados sistémicos de los conceptos y proposiciones, entendidos como reglas en el sentido propuesto por Wittgenstein, nos lleva a identificar como un estado importante de las trayectorias docente y discente el correspondiente al "recuerdo e interpretación de reglas", así como la negociación de los significados de los elementos lingüísticos.

Por otra parte, el significado de los objetos matemáticos es complejo y sistémico poniendo en juego prácticas operativas y discursivas diversas. Como consecuencia, el estudio de los campos de problemas, y de las estructuras conceptuales que los organizan, requiere diseñar e implementar trayectorias didácticas que involucren muestras representativas de los distintos componentes del significado, así como crear las condiciones para resolver los conflictos semióticos.

4.4 Una Nueva Técnica: El análisis ontológico-semiótico

Se ha mostrado la utilidad de la metodología de análisis ontológico-semiótico, que ha sido desarrollado y aplicado en diversos trabajos, para la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Por una parte, y a un nivel que podemos calificar de "microscópico", permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual como es el uso de términos y expresiones en la realización de una tarea o en un acto de comunicación matemática. A un nivel más general permite describir la estructura de una organización matemática compleja implementada en un proceso de estudio particular. En ambos niveles, el análisis semiótico sirve para identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (sean personas o instituciones) en interacción didáctica. Estos conflictos semióticos pueden explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, así como identificar las limitaciones de las competencias y comprensiones matemáticas efectivamente puestas en juego. La información obtenida con este análisis es útil si se desea abordar con criterios rigurosos el diseño, implementación y evaluación de los procesos de estudio de las matemáticas.

Enfoque Metodológico

Se considera que los métodos de investigación son subsidiarios de los problemas planteados y éstos a su vez dependen de los instrumentos teóricos con los cuales se analiza la actividad humana objeto de estudio. En este caso el marco teórico trata de tener en cuenta las facetas que se ponen en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, introduciendo elementos ontológicos y semióticos adaptados a los objetivos de la investigación didáctica. Además se aboga por tener en cuenta tanto las regularidades observables como la variabilidad propia de los fenómenos psico-sociales. Por este motivo, se necesita usar tanto métodos cualitativos como cuantitativos, y las diversas técnicas (análisis de documentos, observación, encuesta y medida) en una racional combinación metodológica para tratar de lograr el grado óptimo en la validez y fiabilidad de los resultados.

El relativismo epistemológico postulado por el Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática obliga a pensar en el conocimiento, el significado y la comprensión como nociones relativas y siempre determinables de manera parcial. Esto lleva a considerar el problema de la validez de las investigaciones desde la misma perspectiva relativista, multicomponente y parcialmente determinable. Este modelo aporta elementos para controlar y en su caso optimizar la correlación epistémica (Dane, 1990, p. 260), esto es, la relación teórica entre el componente verdadero de una medida y el concepto que representa.

El modelo teórico que se está desarrollando para la Didáctica de las Matemáticas, que se ha designado brevemente como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), pretende dotar a nuestra disciplina de una epistemología y una semiótica cognitiva adaptada a las características de los procesos de estudio de las matemáticas. Pretende buscar explicaciones.

De las dificultades del aprendizaje matemático, en primer lugar, en los elementos estructurales del conocimiento puestos en juego, los factores institucionales y procesales sobre los cuales tenemos posibilidad de actuar. Una atención particular deberá recibir la interacción comunicativa y los procesos interpretativos que tienen lugar en las clases de matemáticas. En segundo lugar se deben buscar las causas de las dificultades y conflictos en las carencias cognitivas intrínsecas de los sujetos.

Los elementos teóricos desarrollados hasta este momento se han centrado en las dimensiones cognitiva e instruccional. Sin embargo, somos conscientes que será necesario ampliar el modelo teórico con la inclusión de otras dimensiones que condicionan globalmente la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se trata de las dimensiones afectivas (creencias, actitudes y emociones), axiológica (valores y fines de la educación matemática), política, curricular, etc. Estas dimensiones deberán ser objeto de atención en un enfoque unificado del análisis didáctico matemático.

En los siguientes apartados se presentarán algunos ejemplos de esta metodología, aplicados al análisis de los significados implementados en un proceso de estudio de la mediana propuesto en un libro de secundaria. La experiencia se realizó en un curso de 1º de magisterio con estudiantes que no habían estudiado antes estadística.

Se aplica la técnica al análisis de una parte de un texto considerada, en donde se analizaran todas las posibles interpretaciones que los diversos agentes pueden realizar de todas las unidades de análisis en que se puede descomponer la crónica.

El título de la lección "La mediana" es la primera unidad de análisis del texto y servirá para ejemplificar la faceta elemental-sistémica de los objetos matemáticos. Aquí el término 'mediana' no se refiere al concepto-definición correspondiente, sino a todo el sistema de prácticas operativas y discursivas. Este sistema de prácticas es lo que significa aquí, localmente, el término ‘mediana’ y puede diferir del sistema de prácticas desarrollado por otro libro de texto del mismo nivel educativo. También será diferente del significado que se le atribuye en el contexto institucional de los estadísticos profesionales.

4.5 Observaciones Finales

1. En el trabajo de elaboración teórica de cualquier disciplina es importante respetar el llamado "principio de parsimonia": incluir en la "caja de herramientas" aquellas que realmente sean necesarias. Pero esto no debe llevarnos a caer en la ilusión de poder estudiar, por ejemplo, la estructura celular con una simple lupa. Ciertamente el microscopio electrónico es un instrumento muy complejo y costoso, pero estrictamente necesario para progresar en el conocimiento de una realidad que cada vez se nos revela más compleja.

   El presente modelo ontológico-semiótico se ha ido complicando a medida que se aplica al análisis de la actividad matemática: de la lupa del triángulo semiótico (signo, objeto, concepto) se ha pasado al "microscopio" constituido por las seis entidades básicas (situaciones, lenguaje, acciones, conceptos, propiedades y argumentos) y los cinco pares de facetas duales, que operan como "apellidos" de las entidades básicas. Esto lleva a un modelo ontológico ciertamente mucho más complejo que el triángulo primitivo. Pero se está convencido que el modelo permitirá desvelar nuevas dimensiones de la cognición matemática y su desarrollo.

2. El enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática descrito en esta Monografía es obra de un equipo de investigación en el

que ha contribuido de manera esencial Carmen Batanero y otros investigadores que forman parte del Grupo de Investigación "Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística" de la Universidad de Granada. El trabajo realizado hasta este momento muestra una evolución progresiva que está lejos de haber concluido, no solo por las aplicaciones y reflexiones que continúan realizándose en nuestro propio Grupo, sino también por las aportaciones de otros investigadores. Entre estos investigadores debemos destacar los trabajos de A. Contreras (Universidad de Jaén), de V. Font (Universidad de Barcelona) y de S. Etchegaray (Universidad de Río Cuarto, Argentina) con sus respectivos equipos de investigación. En realidad concebimos esta Monografía como un proyecto de investigación abierto a la contribución de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas interesados por el enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática

CAPÍTULO V

APLICACIÓN DE LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MEDIANA

5.1 El Texto y las Unidades Primarias de Análisis

La mediana

Entre las medidas de centralización, la media aritmética es generalmente la que mejor representa a un conjunto de datos ya que en el cálculo de la media intervienen todos los datos.

Sin embargo, hay casos en que la mediana representa mejor a un conjunto de datos, como ocurre en el siguiente ejemplo:

En una oficina, los sueldos de las cinco personas que trabajan en ella son \$160.000, \$170.000, \$180.000, \$190.000 y \$780.000 ¿Qué cantidad puede representar mejor estos cinco sueldos?

La mediana de un conjunto ordenado de datos de una variable es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él.

Entidades matemáticas (unidades elementales)

Praxis	Leguaje	Logos
Situaciones Búsqueda de un valor representativo de un conjunto de datos con valores atípicos **Acciones** Calculo de la media. Obtención de frecuencias acumuladas Cálculo de la mediana con datos no agrupados; número par o impar de valores. Calculo de la mediana con datos discretos agrupados en tabla de distribución de frecuencias	**Términos y expresiones** Mediana, media aritmética, medidas de centralización, representan a conjuntos de datos ordenados, variable y valor **Notaciones** $\overline{X}$ = \$296.000 **Me** = \$180.000 **Representaciones** Tablas de frecuencias	**Conceptos** Mediana, media aritmética, representación, conjunto de datos, ordenación, variable y valor **Propiedades** Media aritmética mejor representante (1) Mediana mejor representante que la media aritmética cuando existen valores atípicos (2) En el algoritmo de cálculo de la media aritmética intervienen todos los datos **Argumentos** Justificación de (1) y (2)

La propia expresión de “Entre las medidas de centralización, la media aritmética es generalmente la que mejor representa a un conjunto de datos ya que en el cálculo de la media intervienen todos los datos”.

Deberá ser interpretada globalmente constituyendo una unidad semiótica. A su vez se puede descomponer en otras subunidades: Medidas de centralización; media aritmética; conjunto de datos.

El autor del texto usa la expresión “Entre las medidas de centralización, la media aritmética es generalmente la que mejor representa a un conjunto de datos ya que en el cálculo de la media intervienen todos los datos” [15]. Como parte de la motivación o justificación del proceso de estudio de la mediana que se presenta en el texto analizado. La media se presenta en el libro como una medida de centralización de un conjunto de datos inmediatamente antes de esta sección, resaltando su carácter de valor representativo. Mediante la expresión anterior quiere expresar que no siempre (aunque sí en la mayoría de los casos) la media

15 J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 158

es el mejor representante. El significado de este texto para el autor está ligado al texto precedente y también al texto que sigue (presentación de situaciones en que se debe elegir un representante diferente).

Para el profesor los términos y expresiones que componen la definición de mediana son transparentes, no precisan interpretación, funcionando de manera elemental. El alumno tiene que descomponer los términos constituyentes para asignarle un significado e interpretar dichos elementos. En este momento del proceso de estudio, el alumno puede atribuir un significado a la media aritmética, ya que acaba de ser estudiada, pero, puesto que no lo ha estudiado antes, puede tener dificultades ya que como medidas de centralización sólo conoce hasta este momento la media, y a la expresión "valor representante de una colección de datos" no se le ha asignado un significado (sólo se ha usado para afirmar que "la nota media 7 es la que mejor representa a las calificaciones 7, 8, 6, 5 y 9).

¿Qué significa para el alumno que un valor represente a otros? Desde el punto de vista matemático se afirma que la media es un representante de un conjunto de datos porque la suma de las desviaciones de los datos a la media es cero. Pero en otros casos para afirmar tal representación se requiere que el valor elegido no se vea afectado por valores extremos atípicos (mediana).

En la expresión mencionada anteriormente la media aritmética funciona intencionalmente (abstracta) cuando se dice que "la media representa a un conjunto de datos", ya que se habla de manera genérica, mientras que cuando se afirma que "la media es una medida de tendencia central", la media funciona de manera extensional (el objeto media como ejemplar o miembro de una colección). También vemos aquí que el concepto de “media” se pone en representación del concepto de “medidas de tendencia central”, lo que indica que en una función semiótica la expresión no tiene porqué ser una entidad lingüística.

El uso que hace el autor del texto es el de servir de justificación a la afirmación hecha y mencionada al comienzo como definición de mediana. Ambas unidades son interdependientes, es el instrumento con que pretende validar la definición Para que el alumno la comprenda la expresión requiere recordar cómo se calcula la media e interpretar la subexpresión 'intervienen todos los datos' como el hecho de que se suman todos los valores de la variable estadística. Interviene una entidad actuativa (cálculo de la media) y una propiedad de dicha entidad.

El hecho de que en el cálculo de la media intervengan todos los valores de la variable no es la razón por la cual la media “es generalmente” el mejor representante. Precisamente, en el ejemplo del conjunto de datos con un valor atípico que se estudia a continuación, esa característica es la razón por la cual la media deja de ser buen representante. Encontramos aquí un ejemplo de conflicto semiótico entre dos agentes institucionales.

Para el autor esta expresión forma parte de la secuencia que trata de justificar el estudio de la mediana, asignándole la propiedad de ser "mejor representante" en algunos casos. El estudiante puede tener dificultades para comprender la expresión, tanto por el término 'mediana' (al que aún no se ha asignado un significado) como por el término 'representa' según se ha indicado anteriormente.

Desde el punto de vista del autor se trata de una expresión que designa un ejemplo particular, de un tipo de problemas en los que se debe encontrar un valor representativo de un conjunto de datos en el caso de que exista algún valor atípico ($780.000). En este caso la media no se considera adecuada al ser un valor bastante diferente de la mayor parte de los datos de la colección (aunque estará más próxima al valor atípico). Aquí se está suponiendo que “el valor representativo” debe ser un valor próximo a la mayoría de los datos. Estas interpretaciones no son compartidas por el estudiante en este momento del proceso. ¿Qué es representar a una colección de datos? ¿En qué circunstancias se necesita representar una colección de datos por un único valor? Estas son cuestiones básicas para dotar de significado a la tarea propuesta y, por tanto, a todo el contenido pretendido.

La correspondencia semiótica entre ejemplar de tarea y el tipo correspondiente, así como entre el modo particular de actuar para resolverla y la técnica generalizada, no puede ser establecida por el estudiante, ya que la constitución de tales tipos no se contempla en el proceso. Parece poco probable que el alumno ordene de menor a mayor el conjunto de datos y proponga el "valor central" de la serie ordenada como representante. La presentación de esta técnica por parte del profesor parece inevitable dado el carácter convencional de la expresión "mejor representante" y su dependencia de las características de la variable estadística.

Para el autor del texto esta expresión es la definición del concepto de mediana, una nueva medida de centralización de una colección de datos estadísticos que se caracteriza por dividir la colección de datos, supuesta ordenada, en dos partes de igual tamaño.

Desde la posición del investigador la definición dada no es válida en general ya que las desigualdades que se indican en el enunciado no son estrictas sino mayor o igual (menor o igual). En el caso de haber valores repetidos la definición dada no caracteriza la mediana. En el ejemplo propuesto (datos repetidos) la mediana es 14. Pero datos inferiores a 14 hay 4, y datos por encima de 14 hay 8. La aplicación de esa regla requiere una formulación diferente para aceptar que 14 es la mediana.

Para el alumno que se enfrenta por primera vez a esta clase de problemas, la comprensión de la expresión requerirá atribuir significado a las dos subexpresiones siguientes: ‘conjunto ordenado de datos de una variable’; ‘valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él’.

No es suficiente con entender los términos y expresiones del enunciado de la regla. También hay que dominar las técnicas de su aplicación y, además, discriminar las diversas circunstancias en que se usa.

El texto desarrolla tres prácticas actuativas distintas para calcular la mediana: (identificación del valor central de la serie ordenada cuando el número de datos es impar), (cálculo de la media de los dos datos centrales cuando el número de datos es par) y (identificar el primer valor de la variable que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada inmediatamente superior a la mitad del número de datos). La forma de expresar el resultado de las prácticas, la mediana es..., hace que el estudiante se encuentre aquí con tres nuevas definiciones de la mediana cuya equivalencia con la caracterización inicial no es evidente ni inmediata. Esto puede explicar algunos de los errores encontrados en diversas investigaciones sobre la mediana. Si decimos que la mediana "es el valor central de la serie de datos", el alumno, ante una tabla de frecuencias puede dudar si el valor central a que se refiere "la definición" es el que corresponde a las frecuencias, o a la serie de valores de la variable. Cada definición de mediana produce un "sentido" diferente.

Significado institucional pretendido de la mediana. Comparación con el significado de referencia

> “El análisis realizado muestra la complejidad de cualquier noción matemática. El término ‘mediana’ designa a un sistema de prácticas (operatorias, discursivas) que progresivamente se va enriqueciendo a medida que avanza el proceso de estudio de un campo de problemas, en este caso, la búsqueda de un valor representante de un conjunto de datos, cuando tal conjunto tiene valores atípicos, se distribuye asimétricamente, o la escala de medida es ordinal.” [16]

El análisis también permite caracterizar los elementos del significado (institucional) local del contenido matemático pretendido en un proceso de estudio que tome exactamente como referencia el texto, como el caso de la enseñanza de la mediana efectuada a los alumnos.

Lenguaje (específico):

- 'Mediana', Me.

- Disposición ordenada de datos en forma de listado (horizontal y vertical) (lo que permite visualizar la mediana como la posición central de la ordenación).

- Tablas de frecuencias

No se han empleado otras representaciones como percentil 50%; 2º cuartil; 5º decil, abscisa del punto del gráfico acumulativo de frecuencias absolutas (relativas) cuya ordenada es n/2 (0.5), diagramas acumulativos o gráfico de cajas.

15 J.D. Godino, Teoría de la Funciones Semióticas, 2003, pág. 162

Situaciones:

Se presentan ejemplos de los siguientes tipos de problemas:

- Búsqueda de un valor representativo de una colección de datos de una variable estadística cuantitativa con un valor atípico (con número impar y par de datos).

- Búsqueda de un valor representativo de una colección de datos de una variable estadística medible en escala ordinal.

No se estudian otro tipo de situaciones, como la estimación o contraste en pequeñas muestras.

Acciones:

Se presentan ejemplos de las siguientes técnicas:

- Cálculo de la mediana para un número impar de valores en datos no agrupados.

- Cálculo de la mediana para un número par de valores en datos no agrupados.

- Cálculo de la mediana en la tabla de frecuencias acumuladas de variables discretas.

No se presentan ejemplos de cálculo con datos agrupados en intervalos, a partir de representaciones gráficas o mediante uso de calculadora u ordenador.

Definiciones:

Se presentan cuatro caracterizaciones de la mediana (incluyendo la formulación como valor central):

- Valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo.

- El dato central de una colección de datos en número impar supuestos ordenados de menor a mayor.

- La media de los dos datos centrales de una colección de datos en número par, supuestos ordenados de menor a mayor.

- El primer valor de la variable que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada, inmediatamente superior a la mitad del número de datos.

No se presenta la definición como caso particular de percentil o decil o a partir de la curva de distribución.

Propiedades

- Propiedad estadística: la mediana es un valor más representativo que la media en el caso de existir un valor atípico.

- La mediana es una medida de centralización.

No se estudian la mayoría de las propiedades de la mediana (a excepción de la mención a su carácter representativo de la colección de datos en algunos casos). Esto es lógico, debido al nivel para el que está previsto el libro.

Argumentos:

Se justifica el uso de la mediana como valor más representativo que la media mediante un ejemplo (cuando la serie de datos tiene un valor atípico). Es un tipo de argumentación informal, a partir de la comprobación de la propiedad para casos particulares.

No se incluyen demostraciones deductivas, ni se hace uso de los gráficos o del simbolismo algebraico.

En definitiva, en el texto se incluyen algunos elementos los que podrían describirse como una "teoría matemática de las medidas de tendencia central de una variable estadística": definiciones de mediana y alguna propiedad característica. Pero dado el nivel de enseñanza no se sistematizan los conceptos y propiedades ni se incluyen sus correspondientes justificaciones. El componente teórico básico sería, en este caso, la demostración de que la mediana es el valor “a” de la variable estadística que hace mínima la suma de las desviaciones absolutas de los distintos valores respecto de “a”.

La elaboración de la relación de entidades puestas en juego en un proceso de estudio particular, es un recurso metodológico que permite hacer comparaciones entre significados institucionales diversos, e identificar posibles limitaciones y sesgos de las transposiciones didácticas.

Se aprecia una preferencia por presentar elementos discursivos antes que los correspondientes elementos praxémicos (problemas y técnicas de solución). Primero se define el objeto y se le atribuyen propiedades y después se introducen los modos de actuar para resolver las tareas problemáticas. Dado que la "razón de ser" de las entidades discursivas se encuentra en los modos de resolver las clases de situaciones-problemáticas parecería recomendable invertir el orden del estudio. Incluso, en el nivel de enseñanza en que tiene lugar este proceso instruccional se podría prescindir del énfasis en presentar definiciones rigurosas, invirtiendo más tiempo en justificar (hacer razonable) la consideración del valor mediano como representativo.

Parecería deseable que se introdujera en este nivel de enseñanza recursos gráficos tales como el 'polígono acumulativo de frecuencias' y el 'diagrama del tallo y las hojas', los cuales permiten visualizar y calcular de manera complementaria la mediana.

5.2 Determinación de Significados Personales

Se aplicó el análisis de protocolo de respuesta de los estudiantes descrito anteriormente ante una prueba de evaluación tras el proceso de estudio de la mediana. A un grupo del primer curso se le entregó copia de las dos páginas del manual donde se describe la mediana, luego de estudiado el texto por alrededor de 45 minutos se les aplicó la prueba en donde se incluirán las respuestas dadas por los estudiantes.

Análisis de la Cuestión 1:

Isabel da la misma definición presentada por el libro para la mediana, que exige que el conjunto de datos sea ordenado, "La mediana de un conjunto ordenado de datos de una variable es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él". La mediana funciona en la respuesta de Isabel bajo su faceta intencional, esto es, como una generalidad regulada mediante una definición precisa, una regla que debe ser seguida fielmente.

En realidad la condición de que el conjunto de datos sea ordenado no es una exigencia del concepto de mediana, sino del procedimiento de cálculo. En el libro utilizado por Isabel no se menciona que si los datos no están ordenados, la mediana también es aplicable pero para determinar el valor que designamos como mediana el conjunto de datos se debe ordenar previamente.

Parece que el fallo de la estudiante en el 2º ejemplo que propone (Tabla), no es debido al olvido de la definición del concepto que se da, sino carencias del proceso de estudio seguido. Isabel ha hecho una interpretación literal de la definición y no ha tenido en cuenta que las expresiones 'por encima' y 'por debajo' quieren decir 'mayor' y 'menor', respectivamente.

En la tabla Prueba de evaluación sobre la mediana y protocolo de respuesta de Isabel

	1. Explica qué es la mediana y para qué se usa.
	Mediana: Es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por

debajo de él.
Representa el número al que más se acercan un número de datos, es decir, la media más representativa que la media aritmética.
Hay dos tipos de medianas:

• Mediana de un nº impar de datos, la mediana sería el dato central. Ejemplo,

80.000
$\boxed{60.000}$
40.000

• Mediana de un nº par de datos, la mediana es la media de los dos datos centrales. Ejemplo,

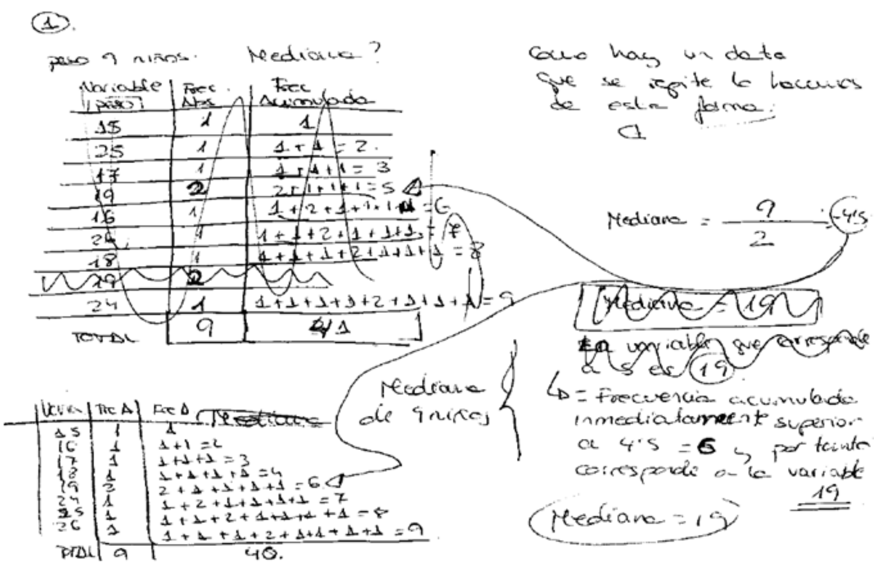
80.000
$\boxed{\begin{matrix}60.000\\50.000\end{matrix}}$ Suma de ambos : 2 = x
90.000

2. ¿En qué tipo de datos estadísticos es preferible usar la mediana en lugar de la media?

En datos como por ejemplo: los sueldos de personas de una empresa, ya que hay sueldos que son más elevados que otros y habría mucha diferencia entre éstos.

3. El peso en kilos de 9 niños es: 15, 25, 17, 19, 26,16, 18, 19, 24.
a)¿Cuál es la mediana del peso de los 9 niños.
b)¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que es de 43 kg?
c)En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta

a)



b) Si incluimos el peso de 43 kg.

	Frec. Ab.	Frec. Acum.	
Total	10	41	M = 10 / 2 = 5

La frecuencia acumulada inmediatamente superior a 5 es 6 y por tanto corresponde a la variable 19

c) La media aritmética no sería un buen representante de los 10 niños ya que hay un peso (43 kg) muy superior a los otros y por tanto la media aritmética que saldría no sería buena representativa

La explicación que da Isabel "el número al que más se acercan un número de datos" es adecuada desde el punto de vista del significado institucional local implementado, aunque 'número de datos' tiene aquí el sentido de 'conjunto de datos'. En el texto usado en el estudio, para descartar el uso de la media en el ejemplo de los sueldos, se afirma que los sueldos de cada una de las cinco personas están bastante alejados de las 136.000 pts. En realidad, ese acercamiento se debe referir a la globalidad del conjunto de datos, no de cada valor en relación a la mediana (la suma de las desviaciones a un promedio para el conjunto de datos es mínima para la mediana).

Trata de caracterizar la mediana mediante una propiedad referida al mejor acercamiento del conjunto de datos. Este mejor acercamiento es su interpretación personal de la representatividad de las medidas de tendencia central.

En la expresión usada por Isabel, la mediana "representa al número que más se acerca..." observamos la dificultad de la noción de representante.

Aquí usa la acción de representar para indicar que la palabra 'mediana' se refiere al número que cumple una cierta condición. Por el contrario, el uso de 'representación' en el texto relaciona el número mediana con el conjunto de datos.

La media más representativa que la media aritmética es una expresión incoherente; posiblemente quiere decir ‘medida de posición central más representativa que la media’, afirmación que en general es acorde con el significado de referencia. En el texto se afirma sólo que hay casos en que la mediana representa mejor a un conjunto de datos; en realidad la mediana siempre “optimiza” la representación. Sin embargo, en muchas situaciones se utiliza la media porque si las distribuciones son simétricas ambos estadísticos coinciden, y la media se calcula con procedimientos aritméticos más eficaces.

Hay dos tipos de medianas: El uso de dos técnicas de cálculo diferentes de la mediana, según que en la situación dada intervenga un número impar o par de datos, lleva a Isabel a considerar como dos “tipos de medianas”. Desde el punto de vista del significado referencial de la mediana ambos tipos de medianas se consideran como ejemplares del concepto más general de mediana, ya que cumplen los requisitos exigidos a la definición general de mediana. Este nuevo y más general nivel de abstracción no se implementa en el proceso de estudio local propuesto en el libro.

Es cierto que hay razones para que el alumno considere que los dos números obtenidos por los procedimientos descritos son diferentes “objetos mediana”; en el segundo caso el número que se obtiene no coincide con ninguno de los datos propuestos, mientras que en el primero sí coincide. Su unificación vendrá identificando una propiedad común: la minimización, en ambos casos, de la suma de las desviaciones.

En la resolución de los problemas propuestos en la evaluación se observa la dificultad que supone para Isabel el paso de una tabla de frecuencias con valores repetidos a una serie ordenada; la reconstrucción ordenada del conjunto de datos es una técnica que requiere un tratamiento específico.

Aquí vemos el conflicto semiótico que supone para Isabel la ordenación de las colecciones de datos. En el segundo caso, el ejemplo es incorrecto ya que no ordena los datos previamente.

Utiliza el recurso expresivo de trazar un recuadro alrededor del número que desea presentar como ‘mediana’.

Análisis de la Cuestión 2:

Se pretende que el sujeto manifieste sus conocimientos situacionales o fenomenológicos sobre la mediana, pidiéndole que describa el tipo de situaciones en las que, a la luz de la información dada en el texto, son específicas de venir representadas por la mediana (distribuciones asimétricas o cuando los datos son ordinales). Es claro que la demanda es excesiva para Isabel: se limita a dar un ejemplo de situación similar a la que se presenta en el texto. La justificación que propone, “ya que hay sueldos que son más elevados que otros y habría mucha diferencia entre éstos” no menciona la circunstancia que la distribución es asimétrica. La asimetría de la distribución, o el carácter ordinal de los datos son las dos características de las situaciones que obligan a usar la mediana en lugar de la media.

Análisis de la Cuestión 3a:

La solución del problema propuesto es prácticamente inmediata aplicando la técnica de la ordenación de la serie de datos: 15, 16, 17, 18, 19, 19, 24, 25, 26. Sin embargo, Isabel ha adquirido la técnica, bastante más compleja en este caso, de construir una tabla de frecuencias acumuladas. La traducción o paso de una a otra técnica y la discriminación de las situaciones óptimas de uso de cada una de ellas no ha sido trabajada de manera suficiente en el proceso de estudio. El hecho de que haya un dato repetido le lleva a preparar una tabla de frecuencias acumuladas como en las unidades anteriores del texto.

El proceso de estudio no ha enfatizado de manera suficiente la técnica de la ordenación de la serie de datos con valores repetidos y la relación entre esta técnica y el uso de la tabla de frecuencias acumuladas.

Ha sido capaz de transformar la colección de datos en una tabla de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas, así como de aplicar la regla descrita en la unidad anterior del texto para determinar el valor de la mediana.

Vemos las dudas de Isabel respecto a la condición de que los datos deben ordenarse previamente. Hace un primer cálculo de la mediana sin ordenar los valores, que en este caso particular concluye con un valor correcto (19).

Vuelve a aplicar la misma técnica, esta vez ordenando la serie de valores. Muestra un dominio seguro de esta acción, aunque con una rigidez fuerte y el empleo de notaciones y cálculos innecesarios (expresión del recuento de frecuencias acumuladas y la suma de las frecuencias acumuladas, que en este caso es impertinente).

Análisis de la Cuestión 3b:

Se muestra la rigidez de la técnica seguida, acorde con la definición del libro en el caso de datos repetidos: "primer valor que corresponde a la frecuencia absoluta acumulada inmediatamente superior a la mitad del número de datos". En efecto, 10/2 = 5, 5+1 = 6, que se alcanza al llegar al valor 19.

Se requiere hacer una interpretación de la propiedad de representatividad de las medidas de tendencia central que no ha sido formulada de manera explícita en el texto. El ejemplo de situación particular que se le ha propuesto es similar al estudiado en el proceso instruccional: la distribución de los datos es asimétrica porque hay un valor atípico. Este tipo de situación ha sido reconocido por Isabel en la situación dada.

Síntesis de conocimientos personales de Isabel sobre la mediana

A partir del análisis anterior, podemos inferir algunas características del significado personal que Isabel atribuye a la mediana, que, por supuesto, debemos interpretar con precaución, teniendo en cuenta las limitaciones de la prueba escrita realizada.

- Situaciones: Isabel reconoce el uso de la mediana en situaciones en las cuales existe un valor atípico y también resolvió correctamente un problema en el que los datos eran ordinales (calificaciones categóricas de puntuaciones escolares), que es mencionado en el texto, sin que se desarrolle un ejemplo.

- Lenguaje: Usa correctamente términos y notaciones específicas del tema como 'mediana', 'M'. Introduce un elemento ostensivo original para designar la media: el recuadro del valor correspondiente. La disposición tabular de los datos ha resultado un recurso poco flexible en este caso.

- Acciones: Selecciona el valor central de la serie de datos, pero no los ordena previamente. Calcula el promedio de los dos datos centrales cuando el número de datos es par. Conoce la técnica de cálculo de la mediana con datos repetidos y número total elevado de datos: Tabulación del conjunto de datos; cálculo de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas; cálculo de la mitad del número de datos; identificación del valor de la variable que corresponde a una frecuencia acumulada igual o inmediatamente superior a la mitad del número de datos. Sin embargo, la escritura del cálculo de las frecuencias acumuladas ha resultado un recurso innecesario.

- Conceptos: Usa los conceptos de mediana como dato central, media aritmética, frecuencia acumulada. Confunde las ideas de variable y valor.

- Propiedades: Usa las propiedades de mediana como valor de la variable estadística, mediana como número al que más se acercan un número de datos y número más representativo que la media aritmética.

- Argumentaciones: Justifica que la mediana se debe aplicar en la distribución de los sueldos de las personas, "ya que hay sueldos que son más elevados que otros y habría mucha diferencia entre éstos". Justifica el uso de la técnica de cálculo de la mediana mediante las frecuencias acumuladas "porque hay un dato que se repite". No ha tenido en cuenta la justificación que se da en el texto, "cuando el número de datos es grande". Son justificaciones informales no deductivas, acordes con la presentada en el texto.

El análisis del razonamiento de la alumna en la resolución de las tareas de evaluación permite tomar conciencia tanto de la complejidad semiótica de dicha prueba, como de las relaciones dialécticas entre los significados institucionales (puestos en juego en el texto) y los significados personales (correspondientes al sujeto que aprende).

La complejidad se manifiesta por el hecho de que cada término o expresión debe ser interpretado al menos implícitamente por el aprendiz, y que en unos casos tal interpretación puede requerir recordar un convenio establecido previamente ('medidas de centralización' es un nombre común a la media, la mediana y la moda), pero en otros es necesario movilizar un significado sistémico previamente elaborado (por ejemplo, la media aritmética).

La dependencia entre los significados personales e institucionales se observa porque el significado de las expresiones y entidades de las que el sujeto debe apropiarse son consecuencia de las informaciones y actividades propuestas por el profesor. Si entre el significado atribuido a la mediana no figura el ser el percentil del 50%, por ejemplo, el significado del aprendiz tendrá esa carencia.

Igual ocurrirá si entre las tareas problemáticas propuestas no figura el caso de variables asimétricas sin valores atípicos (componente situacional), o el desarrollo de la técnica de cálculo de la mediana en el caso de variables continuas agrupadas en intervalos de clase (componente actuativo), etc.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIÓN.

Las integrantes de este seminario pensamos que la Teoría de las Funciones Semióticas es un interesante aporte a la enseñanza de las matemáticas y que podría ser aplicada en el Sistema Educativo Chileno. A partir de ella, se podría construir una Didáctica de las Matemáticas que caracterice la enseñanza de esta disciplina en esta casa de estudios, en particular y en Chile, en general.

En cuanto al aporte que ha entregado este estudio respecto de los objetivos planteadas en un comienzo, rescatamos:

O.1 Determinar los elementos fundamentales de la Teoría de las Funciones Semióticas de Juan D. Godino.

O.2 Aplicar los conceptos fundamentales de la Teoría de las Funciones Semióticas, en la enseñanza de la medida de tendencia central, llamada mediana.

En el estudio realizado al trabajo de J.D. Godino se pudo detectar que esta teoría se estructura considerando que se parte de la situación-problema como noción primitiva, considerándola como cualquier circunstancia en la que se deben realizar actividades de matematización, que incluye:

1. Construir o buscar soluciones de un problema que no son inmediatamente accesibles;

2. Inventar una simbolización adecuada para representar la situación problemática y las soluciones encontradas, y para comunicar estas soluciones a otras personas;

3. Justificar las soluciones propuestas (validar o argumentar);

4. Generalizar la solución a otros contextos, situaciones-problemas y procedimientos.

Cuando una clase de situaciones-problemas tiene soluciones y procesos de resolución similares o relacionados, hablamos de un campo de problemas. En este seminario nos centraremos en los campos de problemas y en las actividades de las que emerge progresivamente el objeto matemático designado con el término “mediana”.

Para enunciar y resolver problemas, las personas utilizan representaciones simbólicas de los objetos matemáticos abstractos (números, operaciones,...). Por ejemplo, es una práctica habitual usar la expresión “la mediana es valor de la variable que ocupa la posición central de un conjunto que contiene un número impar de datos ordenados”.

En general los problemas no aparecen de forma aislada, sino que los mismos son compartidos dentro de cada institución, y las soluciones encontradas dependen de los instrumentos y prácticas sociales disponibles.

Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Puesto que se comparte la misma problemática, las prácticas sociales son compartidas, y suelen tener rasgos particulares, generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento, por lo que están ligadas a la institución, a cuya caracterización contribuyen. Así problemas relacionados con la mediana son compartidos en instituciones de investigación experimental, como la astronomía o la agronomía y también en las instituciones escolares, pero los instrumentos disponibles son muy diferentes en uno y otro caso, de modo que el significado de un concepto matemático varía según la institución considerada.

En la educación básica, los únicos instrumentos disponibles son los conocimientos numéricos de los alumnos, así como el uso de material didáctico y los currículos proponen que se enseñe a los alumnos:

- La definición de la mediana en el caso más simple, empleando una notación sencilla;
- Algunos ejemplos de aplicación, limitando su cálculo a conjuntos sencillos de datos, y haciéndolo manualmente.

En la educación media y en la educación superior se amplía la definición de la mediana, trabajándose variables discretas y continuas. Se enuncian y demuestran algunas de sus propiedades y se presentan aplicaciones a situaciones problemáticas más realistas y complejas.

Al considerar la enseñanza media, el significado construido por un estudiante particular, en un momento del proceso de aprendizaje puede no corresponder exactamente al significado del objeto en la institución dada, por lo que conviene distinguir entre significado institucional y significado personal de un objeto matemático. Esto nos lleva a diferenciar entre prácticas institucionales o personales.

De acuerdo a la institución en la que se desarrolle la práctica, el nivel de ésta puede ser mayor o menor, es decir, las prácticas que se desarrollan en el seno de la institución educativa no siempre coinciden con las que se desarrollan en la institución estadística, porque generalmente en la primera se manejan conceptos estadísticos menos elevados en el sentido de la formalización y del grado de conocimiento que se requiere para aplicarlos.

Las entidades elementales que se ha descrito (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades y argumentos) no aparecen aisladas en la actividad matemática, sino que se ponen en relación durante la misma. Habitualmente, en el trabajo matemático se usaron unos objetos en representación de otros, en especial de los objetos abstractos, existiendo una correspondencia, con frecuencia implícita, entre el objeto representante y el representado.

Para tener en cuenta estas relaciones entre elementos, además de la dimensión institucional, se tiene en cuenta en el marco teórico la faceta semiótico-cognitiva. Esta noción permite también describir el razonamiento matemático como secuencia de funciones semióticas encadenadas.

Godino describe la noción de función semiótica, tomando esta idea de Humberto Eco, como una "correspondencia entre conjuntos", que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- Un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido.

Con frecuencia las funciones semióticas vienen dadas por uno de sus tres componentes, quedando los otros dos implícitamente establecidos. El signo, por tanto, no explicita la correspondencia entre expresión y contenido, sino que alguien debe hacer una posible interpretación. Cuando la interpretación que hace un estudiante no está de acuerdo con lo esperado desde la institución de enseñanza, se produce un conflicto semiótico que explica muchas de las dificultades y errores observados en el aprendizaje.

Los cinco tipos de entidades primarias consideradas pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas, alguna de las cuales pueden interpretarse claramente como procesos cognitivos específicos (generalización, simbolización, etc.).

Las funciones semióticas son herramientas de tipo descriptivo que pueden ser útiles, ya que permiten describir con un lenguaje unificado muchos procesos que se han estudiado en el campo del pensamiento matemático.

Las funciones semióticas y los instrumentos de mediación posibilitan la construcción del conocimiento en lo referente a la comprensión de los objetos matemáticos.

Como se ha indicado, en el marco teórico se considera que los objetos matemáticos son fruto de la construcción humana, cambian a lo largo del tiempo y pueden ser dotados de significados diversos por personas o instituciones diferentes. Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o colectivos específicos implicados en el estudio de ciertas clases problemas. Incluso un problema particular surge inicialmente en una institución extra matemática, aunque posteriormente la comunidad matemática se interesa por su solución y la aplica a otros problemas o contextos. En consecuencia, los objetos matemáticos son entidades culturales socialmente compartidas.

El campo de problemas del que emerge el objeto matemático designado como mediana, puede resumirse en las situaciones que describimos a continuación.

1. Encontrar un resumen estadístico de posición central, en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa.

2. Encontrar un resumen estadístico de posición central para variables ordinales.

La superación de los dilemas o de los problemas didácticos en que se ven los docentes involucrados pueden ser superados y mejorados aplicando la teoría de la función semiótica escrita por Juan D. Godino, donde él indica variadas herramientas conceptuales y metodológicas de disciplinas de tipo holístico como la semiótica, la antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con disciplinas como la psicología y pedagogía que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la Didáctica de las Matemáticas, y que tenemos en cuenta en la construcción de un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática.

Concluyendo, en la cognición matemática se debe distinguir la dualidad de cognición individual que es el resultado del pensamiento y acción individual del sujeto en este caso el alumnado ante cierto problema y cognición institucional es el resultado del diálogo, convenio y regulación de un grupo de individuos frente a cierta clase de problema, en este caso podemos hacer referencia a los alumnos frente a un tipo de actividad en clases donde conversan e interactúan entre si.

A través de la teoría de función semiótica el profesor recibe una guía para poder superar el problema que en su cotidianeidad se ve enfrentado, comenzando con la empatía producida por las matemáticas para gran parte del estudiante, luego donde los estudiantes hacen sus primeros intentos por resolver un problema propuesto por el profesor.

La Didáctica de las Matemáticas es extremadamente compleja por lo tanto poder expresarla en una perspectiva sistemática permitirá materializar la difícil estructura como es enseñar dónde interviene el profesor y los alumnos. Que el docente sea capaz de identificar el significado que los alumnos atribuyen a los símbolos matemáticos a los conceptos y proposiciones, así como explicar la construcción de estos como consecuencia de la instrucción es el principal interés de la Didáctica de las Matemáticas.

Por último invitamos a todas las personas interesadas en la enseñanza de las Matemáticas, a compenetrarse y aplicar en sus prácticas cotidianas esta interesante teoría de la Didáctica de las Matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. UNO, 25, 41-58.

2. Batanero, C. (2001). Didáctica de la estadística. Granada. Grupo de Investigación en Educación Estadística.

3. Baena, G. (1998) Instrumentos de Investigación. Editores Unidos Mexicanos. México.

4. Garza A., Manuel (1998). Manual de Técnicas de Investigación. Harla. México.

5. Godino, J. D. (2004) Teoría de las Funciones Semióticas. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada.

6. Godino, J. D. (1996). Relaciones entre la investigación en Didáctica de las Matemáticas y la práctica de la enseñanza. Investigación y Didáctica de las Matemáticas (pp. 119-128). Madrid: CIDE.

7. Godino, J. D. (1999) Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática www.ugr.es/~jgodino/semioesp/aepistemico.htm).

8. Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathematiques, 14(3), 325-355.

9. Merino C., Belén (2003) Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria Tesis Doctoral 2003.