



*Escuela de Educ. en Humanidades y Ciencias
Departamento de Educación Matemática*

USO DE DOBLECES DE PAPEL Y ORIGAMI PARA LOS ELEMENTOS SECUNDARIOS DEL TRIÁNGULO

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN
EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA
EN MATEMÁTICA E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:
OLAVE ROJAS, PAZ
URZÚA GAETE, JENNIFER

PROFESOR GUÍA:
JORGE ÁVILA CONTRERAS

SANTIAGO, CHILE

2012

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos primero que todo a la Universidad Católica Silva Henríquez por habernos acogido luego de nuestra partida del Pedagógico. Reconocemos el esfuerzo del profesor Jorge Ávila de acompañarnos y guiarnos en este proceso, el apoyo de Maritza Mardones en cada etapa que fuimos sorteando y especial gratitud a los académicos Isabel Barros y Patricio Pérez por su disposición y aportes a nuestra investigación.

No podemos dejar de mencionar a don Juan Yáñez, ex docente de geometría de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, por sembrar la semilla del origami, que ha dado sus frutos en este estudio.

AGRADECIMIENTOS PERSONALES

En esta instancia me encantaría agradecer a muchas personas que me acompañaron en este largo camino. Para comenzar con los reconocimientos no puedo iniciar sin nombrar a aquella persona que caminó conmigo en todo este proceso, quien me abrazó cuando necesitaba y celebró conmigo cada triunfo logrado, con quien conocí el amor de pareja y la amistad verdadera, quien nunca me abandonó, mi pololo, “mi negro”, Manuel Aravena. No puedo dejar de lado a mi familia, mis padres, Manuel Urzúa y Marisol Gaete, quienes me apoyaron incondicionalmente, haciendo que la distancia que nos separaba se hiciera mínima con su constante preocupación. Mis hermanos han sido un pilar fundamental, Marta y Manuel, juntos a ellos mi pequeña sobrina Violeta, quienes han sido mi motivación para luchar día a día. No puedo dejar de lado a mis abuelitos, quienes me entregaban un sabio consejo en cada visita a su hogar y sobretodo nombrar a mi abuelita Elba, quien dejó en mí una huella imborrable y que desde el cielo me acompaña entregándome fuerza y perseverancia para enfrentar cada desafío. A mis amistades, que son pocas, pero intensas, mis amigas de la infancia: Marcela, Cecilia y Fernanda, a mis amigas de la Universidad: Isabel y Tania, a mi amiga y cuñada Carla. Y no puedo dejar de lado a mi compañera de tesis Paz, a quien he aprendido a conocer durante este proceso y a quien he tomado mucho aprecio, agradecer su apoyo y comprensión.

Gracias a todos por no abandonarme jamás.

Jennifer Urzúa Gaete

Le dedico esta tesis a mi papá, quien habría estado muy orgulloso en este momento, no dudo que entre sus palabras habría dicho, como siempre, *eres un ser humano maravilloso*, agradezco tener esa certeza.

Se cierra este ciclo en mi vida que fue extenso y bien disfrutado, por lo que sólo me queda agradecer a todos quienes me acompañaron en este proceso. En primer lugar a Miguel Hernández, a quien admiro y amo infinitamente, mi compañero de vida, que me ha acompañado en todo momento. También a Erika Rojas, mi mamá, por su constante apoyo y cariño; y por haber propiciado mi cercanía a las matemáticas aunque éstas no fueran su fuerte. A mi hermano por ser mi compañero de conversaciones acerca de las ciencias y la matemática, a mi hermana por estar siempre conmigo aunque sea a la distancia y a toda mi familia por su inagotable cariño.

A mis amig@s por no importar la frecuencia con que nos veamos para saber que siempre estarán cuando los necesite, a las profesoras y profesores que han marcado mi vida desde pequeña hasta la universidad, en particular a Edith Reyes, Virginia Aranda, Guillermo Arancibia e Isabel Vargas. Un especial agradecimiento al Equipo Espiral Educativo por invitarme a participar en su proyecto, acercarme al origami y por permitirme sentir que podemos mejorar las prácticas docentes y la educación.

Por último, le agradezco de todo corazón Jennifer, mi compañera en esta travesía por hacer que ésta fuera una bonita experiencia de aprendizaje y crecimiento.

Paz Olave Rojas

RESUMEN

La definición de la problemática del estudio fue en base a las experiencias previas de las investigadoras en el trabajo con origami, una selección del contenido a trabajar contrastando los programas del estudio con el texto Matemáticas y Papiroflexia (De la Peña, 2001), y al que actualmente los profesores chilenos reconocen estar menos preparados para enseñar geometría (Unidad de Currículum y Evaluación, 2004).

Se encuadra en un enfoque cualitativo, dilucidando percepciones y producciones de los estudiantes en una situación de trabajo. En particular, dado que no existen estudios preliminares de la enseñanza de elementos secundarios del triángulo con origami, el diseño de investigación es un estudio de casos de tipo exploratorio, aproximándose a un área poco desarrollada. A su vez, la información recopilada se analiza en base a la Ingeniería Didáctica, efectuando en el Análisis preliminar, un estudio histórico-epistemológico, didáctico y cognitivo sobre los elementos secundarios del triángulo, para posteriormente diseñar una secuencia de trabajo, conjeturar, experimentar y contrastar los supuestos con lo acontecido en la aplicación de la secuencia en lo referente a las percepciones de los estudiantes, sus reacciones, formas de trabajo y elaboraciones. Culminando con la presentación de propuestas para el rediseño, en función de una aplicación más eficiente.

Las conclusiones tienen relación con la positiva percepción de los estudiantes hacia la secuencia aplicada, junto con el beneficio observado en aspectos como trabajo colaborativo, constancia, motricidad fina, entre otros. Se generó una reflexión sobre las ventajas comparativas del trabajo con papel sobre la construcción con regla y compás, permitiendo el primero la aparición de un obstáculo didáctico en el estudiante. Respecto a lo anterior, queda pendiente la realización de un rediseño que contemple la generación de un conflicto cognitivo en los estudiantes, considerando que lo limitante del papel lo permite.

ABSTRACT

The definition of the problem of the study was based on previous experiences of the researchers working with origami, a selection of contrasting content to work study programs with text Mathematics and Origami (De la Peña, 2001), and Chilean teachers currently recognized to be less prepared to teach geometry (Curriculum and Evaluation Unit, 2004).

It falls into a qualitative approach, clarifying perceptions and student productions in a work situation. In particular, since there are no preliminary studies of teaching children of the triangle with origami, the research design is a case study exploratory, approaching an underdeveloped area. In turn, the information collected is analyzed based on the Engineering Teaching, performing in the preliminary analysis, a historical-epistemological and cognitive training on the children of the triangle, later to design a sequence of work, conjecture, and experience contrast to the events alleged in the application of the sequence regarding the perceptions of students, their reactions, ways of working and working. Culminating in the submission of proposals for the redesign, according to a more efficient implementation.

The findings are related to the positive perception of students applied to the sequence, along with the benefit seen in areas such as collaborative work, perseverance, fine motor skills, among others. It generated a reflection on the comparative advantages of labor on construction paper with ruler and compass, allowing the first appearance of an obstacle in the student teaching. Concerning the above, there remains the realization of a redesign that includes generating a student cognitive conflict, considering that it allows limiting the paper.

ÍNDICE

CAPÍTULO I	9
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	10
1.1. Antecedentes para la problemática	10
1.1.1. Momento 1: Experiencias previas con el trabajo de origami	11
1.1.2. Momento 2: Uso del origami y la currícula de matemáticas	13
1.1.3. Momento 3: La Geometría en el aula	18
1.2. Justificación	21
1.3. Definición del problema.....	23
1.4. Limitaciones.....	23
1.5. Supuesto del estudio.....	24
1.6. Objetivos.....	24
1.6.1. Objetivo General.....	24
1.6.2. Objetivos Específicos	24
CAPÍTULO II	26
MARCO REFERENCIAL	27
2.1. El origami en la matemática	27
2.2. Antecedentes históricos de trabajo algebraico en geometría.....	34
2.3. Algunos elementos de la didáctica fundamental	36
2.3.1. Los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas.....	36
2.3.2. La noción de contrato didáctico.....	38
2.4. Análisis de Textos de Estudio	39
CAPÍTULO III	50
MARCO METODOLÓGICO	50
3.1. Paradigma o enfoque de investigación.....	51
3.2. Diseño metodológico.....	51
3.3. Descripción del caso, escenario y actores.....	51
3.4. Fundamentación y descripción de Técnicas e Instrumentos.....	53
3.5. Validez y confiabilidad.....	54
3.6. Recogida y Análisis de la Información	54

CAPÍTULO IV	57
ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	58
4.1. Análisis Preliminar	58
4.1.1. Análisis histórico-epistemológicos.....	58
4.1.2. Análisis didáctico	59
4.1.3. Análisis cognitivo	60
4.1.4. Diseño de la Secuencia de trabajo.....	61
4.2. Análisis a Priori.....	65
4.2.1. Levantamiento de conjeturas respecto de las orientaciones para la implementación	65
4.2.2. Levantamiento de conjeturas respecto de la guía de trabajo	69
4.3. Descripción de la implementación	71
4.3.1 Descripción de lo ocurrido en las orientaciones para la implementación .	71
4.3.2. Descripción de lo ocurrido con la Guía de trabajo	73
4.4 Análisis a Posteriori	84
4.4.1. Contraste	84
4.5. Análisis de encuesta a estudiantes.....	90
4.6. Propuestas para el Rediseño.....	92
CAPÍTULO V	94
CONCLUSIONES	95
BIBLIOGRAFÍA	98
ANEXOS	100
1. Narrativas	100
1.1 Narrativa de Investigadora 1	100
1.2 Narrativa de Investigadora 2	103
2. Transcripción de entrevista a estudiantes	108
3. Análisis descriptivo por texto.....	110
4. Secuencia de trabajo inicial	125
4.1. Orientaciones para la implementación	125
4.2. Guía de trabajo inicial	129
5. Secuencia de trabajo final	135
5.1. Orientaciones para la implementación	135

5.2.	Guía de trabajo final	139
6.	Encuesta a estudiantes Inicial.....	145
7.	Encuesta a estudiantes Final	146

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Antecedentes para la problemática

La problemática para el presente estudio se levanta fundamentalmente a partir de la inquietud, sobre el uso de origami (o papiroflexia) para favorecer la actividad matemática y con ello, los aprendizajes en un contexto de enseñanza de aula. Esto, debido a experiencias favorables que las investigadoras sostuvieron con trabajo en origami, una en el año 2008 y, otra, en el año 2011. De manera que, el punto de partida del estudio es la motivación de trabajar el origami como herramienta de apoyo para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y reflexiona sobre sus potencialidades y limitaciones.

Para delimitar la problemática de investigación, se recurrió a tres momentos: el primero, de reflexión; un segundo momento, de análisis y, el tercero, de documentación y contextualización.

En el primero, se generaron narrativas de las experiencias de las investigadoras con el origami, que se encuentran escritas íntegramente en el Anexo 1, con el fin de reflexionar y discriminar aspectos comunes o disímiles de ambas experiencias. Posteriormente, se analizó qué contenidos de matemáticas de 5° básico a 4° medio eran más susceptibles de abordar mediante el origami. Esto último en base a contrastar lo expuesto en el texto *Matemáticas y Papiroflexia* de Jesús de la Peña Hernández (2001), con las materias que se abordan en los Programas de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación chileno, en adelante MINEDUC (de 5° básico a 4° año medio). Finalmente, como resultado de estos dos primeros momentos de delimitación del problema, se dilucidó como temática a trabajar en esta investigación, los elementos secundarios del triángulo, pertenecientes al Eje de Geometría. Éste, de acuerdo a antecedentes oficiales del MINEDUC y contextuales del colegio en el cual se efectúa el estudio, se evidencia como problemático, situación que se documenta en el momento 3.

A continuación se expone en detalle lo señalado anteriormente.

1.1.1. Momento 1: Experiencias previas con el trabajo de origami

Cada investigadora escribió una narrativa de manera independiente acerca de su experiencia previa de trabajo con origami. Como aspecto común, a partir de sus vivencias, coinciden en que este arte de origen japonés tiene especial relevancia no sólo por tratarse de un material concreto que permite su manipulación, sino que, además, propicia la libre generación de formas y modos de construcción que llevan a la persona que trabaja con él, involucrar facetas emocionales y cognitivas que favorecen la actividad matemática, tales como el maravillarse y analizar lo efectuado.

*“... el principal valor del origami es el trabajo con el material concreto, por una parte porque es más accesible, también porque es tangible, los estudiantes **lo pueden palpar y examinar, la cantidad de veces que consideren necesario y de las formas que les parezca**; además porque es algo que los estudiantes generan, no es un material que sólo deben manipular, sino que **ellos lo originan y luego deben analizar lo que ellos fueron capaces de construir.**”*

(Narrativa de Investigadora 2, Anexo 1.2)

*“Lo trascendental de esta técnica es la manera en que **cada uno se puede maravillar con el modo y tipo de construcciones**”*

(Narrativa de Investigadora 1, Anexo 1.1)

Se releva también el valor que se le asigna a la necesidad de aprender y experimentar nuevas prácticas que favorezcan la actividad matemática de los estudiantes, en este caso, en la geometría.

*“...Lo interesante era **visualizar las técnicas de construcción y las habilidades que se van adquiriendo mediante la práctica para crear figuras** comenzando por formar una pieza de inicio y luego enlazar una y otra **hasta formar un cuerpo**”.*

(Narrativa de Investigadora 1 Anexo 1.1)

*“...Los talleres duraban tres sesiones, **la geometría la trabajaron principalmente utilizando lenguaje matemático en el paso a paso y al estudiar los cuerpos finales**”.*

(Narrativa de Investigadora 2, Anexo 1.2)

Es decir, en ambos casos, hay total coincidencia en la valorización que se le asigna al trabajo con origami para propiciar en la actividad matemática el desarrollo de habilidades matemáticas al seno del trabajo en un área (en este caso la geometría), tales como el uso de la visualización, el concretar pasos matemático-formales y el estudio del producto (en este caso cuerpo) obtenido.

También se evidencia una preocupación sobre la escasa inclusión de la geometría en las aulas chilenas:

“En nuestra inserción en el mundo escolar, ya sea como estudiantes anteriormente y como docentes en la actualidad y el estrecho vínculo con el mundo de la educación y con todo suceso que dentro de ésta ocurre. Ha existido una realidad que ha sucedido hace muchos años y que es motivo de discusión de profesores y de los actores del sistema educativo, y es que durante el transcurso del tiempo no se ha realizado ningún cambio significativo, este problema es la escasa preocupación por la inclusión de la Geometría en las aulas...”

(Narrativa de Investigadora 1, Anexo 1.1).

En relación a lo anterior, una investigadora realizó un taller el año 2012 junto a compañeros, egresados y profesores de la carrera de Pedagogía en Matemáticas de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, el cuál consistía en capacitar a profesores de matemática, de todos los niveles de enseñanza en este tipo de herramientas para ser enseñadas e insertadas dentro del aula. El objetivo del curso fue que cada participante elaborara una clase con planificación (enfocada en las competencias) y actividades relativas al desarrollo de éstas. Más específicamente, en la descripción del curso se resalta que:

“El taller de Origami utiliza esta técnica del plegado del papel como una herramienta para dinamizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en los contenidos que propone el Marco Curricular vigente. La presente propuesta pretende que los participantes incorporen en su quehacer los contenidos de Geometría de una manera diferente e innovadora evidenciándolo en la elaboración de planes de clases basados en la planificación por competencias”

(Narrativa de Investigadora 2, Anexo 1.2).

Para finalizar, acerca de las experiencias previas del trabajo y uso de origami, es trascendental acentuar en los beneficios que provoca al incorporarlos dentro de las

prácticas educativas, como una actividad con material concreto. Todo esto relacionado con las prácticas previas de las investigadoras acerca del uso y trabajo con origami, como una experiencia enriquecedora y como una herramienta para realizar dicha investigación.

1.1.2. Momento 2: Uso del origami y la currícula de matemáticas

Como se indicó inicialmente, para explorar posibles potencialidades del uso de origami en relación a lo que plantea el currículum de matemáticas, de 5to básico a 4to medio, se efectuó un contraste entre el texto *Matemáticas y Papiroflexia* de Jesús de la Peña Hernández y los Programas de Estudio de Matemáticas de ese período de escolar por medio de las siguientes tres etapas:

Etapa 1: Se identificaron aquellos contenidos del currículum nacional que son trabajados con origami en el texto antes mencionado, obteniéndose un total de 15 temas.

Etapa 2: Se depuró la lista obtenida, con una segunda selección que consideró dos criterios:

- a) **La claridad de la construcción con origami**, entendida como la adaptabilidad de efectuar la construcción mediante origami, en relación a cómo lo presenta el texto. Es decir, cuando las investigadoras visualizaban una construcción mediante origami, para dicha temática, de manera más sencilla que como se abordaba en el texto.
- b) **Facilitar la visualización**, las investigadoras realizan una selección de aquellos temas susceptibles de poder trabajarse en la sala de clases. Comienzan a construir cada concepto que puede servir para trabajarlo con origami, que a su vez, tenga relación con los contenidos incorporados en el currículum nacional.

Con estos dos criterios, se escogieron cuatro temas: elementos secundarios del triángulo, teorema de Thales, parábola y área del triángulo.

Etapa 3: Fase de experimentación de construcción mediante origami de las temáticas seleccionadas –realizada por las propias investigadoras– para distinguir

posibles obstáculos y viabilidad de uso con los estudiantes, lo cual se explica en detalle a continuación:

Primero se revisó cada uno de los elementos secundarios del triángulo con distintos tipos de triángulos (de papel), realizando los diferentes pliegues y marcando cada uno de los componentes para encontrar los elementos, ya fueran puntos medios o perpendiculares y uniendo a vértices o lados y obteniendo alturas, bisectrices, simetrales, etc. Al principio no hubo problemas, pero al momento de trabajar con un triángulo obtusángulo, el ortocentro (ver fig. 1) y el circuncentro (ver fig. 2) quedaban fuera de él. Por un momento se pensó que no se podría trabajar este tipo de triángulo con origami, pero se determinó que en este caso ya no se utilizaría una pieza de papel triangular, sino que se debe realizar un triángulo dentro un papel más grande que no necesariamente debe ser de forma triangular. Este inconveniente se vislumbró como un obstáculo factible de abordar con los estudiantes para posibilitar un abordaje analítico y crítico, por ejemplo, de puntos singulares del triángulo para algunos casos particulares de triángulos.

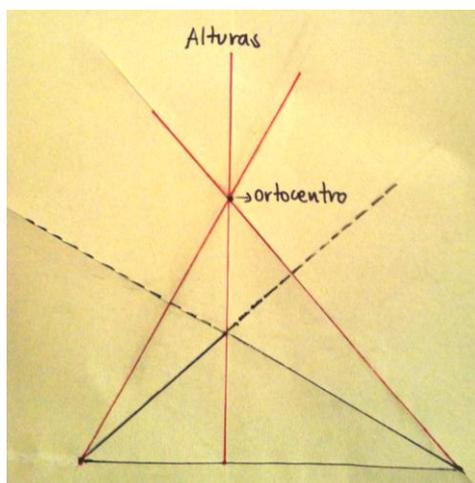


Fig. 1: Alturas en triángulo obtusángulo con origami

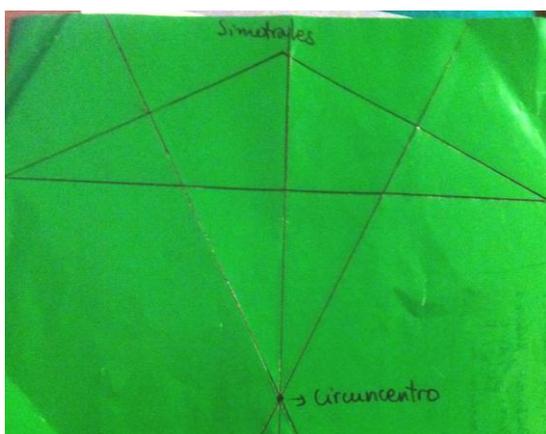


Fig. 2: Simetrales en triángulo obtusángulo con origami

En segundo lugar, se analizó la construcción Teorema de Thales con origami (ver fig. 3). De la “*división de un rectángulo en partes iguales*” (De la Peña, 2001) se tiene que la forma genérica de dividir en n partes el rectángulo, es hacerlo en potencias de dos: se debe comenzar por doblar el papel por la mitad y luego realizar nuevos pliegues a partir del ya realizado. Al principio, en el caso de una de las investigadoras, dobló el papel en dos partes y luego, lo volvió a doblar sobre el primer pliegue, así sucesivamente, pero llegó el momento en que no era posible doblar nuevamente el papel y, al abrirlo, éste no estaba dividido en partes iguales. Esto se debió a que, doblar sucesivamente (realizando siempre el mismo doblado) una pieza de papel, produce que el espesor aumente exponencialmente (en el paso n , el espesor original se habrá transformado en 2^n), por lo que al abrir el papel, los pliegues generados quedan marcados de forma irregular, provocando un margen de error importante, por lo tanto no es recomendable realizarlo de aquella manera. La forma correcta de plegar sucesivamente un papel es: desplegar después de cada doblado efectuado.



Fig. 3: Teorema de Thales con origami

Entonces, como al ir doblando en mitades se producen dos rectángulos iguales, de cada nuevo doblado que se efectúa, se obtienen nuevamente otros dos rectángulos iguales. Por tanto, en el paso n , se habrán generado 2^n rectángulos iguales. Así, cuando se trabaja con números impares o diferentes a la potencia de dos, basta con recortar los dobleces que sobran. Es decir, si se pretende generar trece dobleces, se busca la potencia de dos más próxima y mayor que el número de divisiones deseadas, en este caso se realizaron dieciséis (2^4) y se cortan tres para obtener los trece pliegues. Luego se realiza una diagonal desde un vértice al opuesto, esa diagonal corresponde a la transversal que corta a las paralelas, divide el plisado

(doblez) en dos segmentos de igual medida y, por lo tanto, se demuestra la proporcionalidad respecto a sus lados.

Luego de la experimentación efectuada, se concluye que el recurso del origami no es muy variado en cuanto al Teorema de Thales. La utilización del origami sería muy pequeña, por lo que se considera que no da sustento a seguir explorando mediante una investigación.

Con respecto a la construcción de la fórmula del Área de un Triángulo cualquiera (ver fig. 4), en primer lugar se dobla el papel en la altura (cualquiera de ellas), es decir que el pliegue es la altura, luego se hace coincidir el vértice que pertenece a esa altura con el pie de altura, después se hacen coincidir los vértices restantes en el pie de la altura, formándose dos rectángulos y con ello la fórmula del área ($\text{base} \cdot \text{altura} / 2$). Esto es muy interesante, podría servir para comprobar la fórmula; sin embargo, se opta por no abordar el estudio por dicha temática, dado que la construcción resultó bastante directa, al experimentarla no generó mayores obstáculos en las investigadoras.

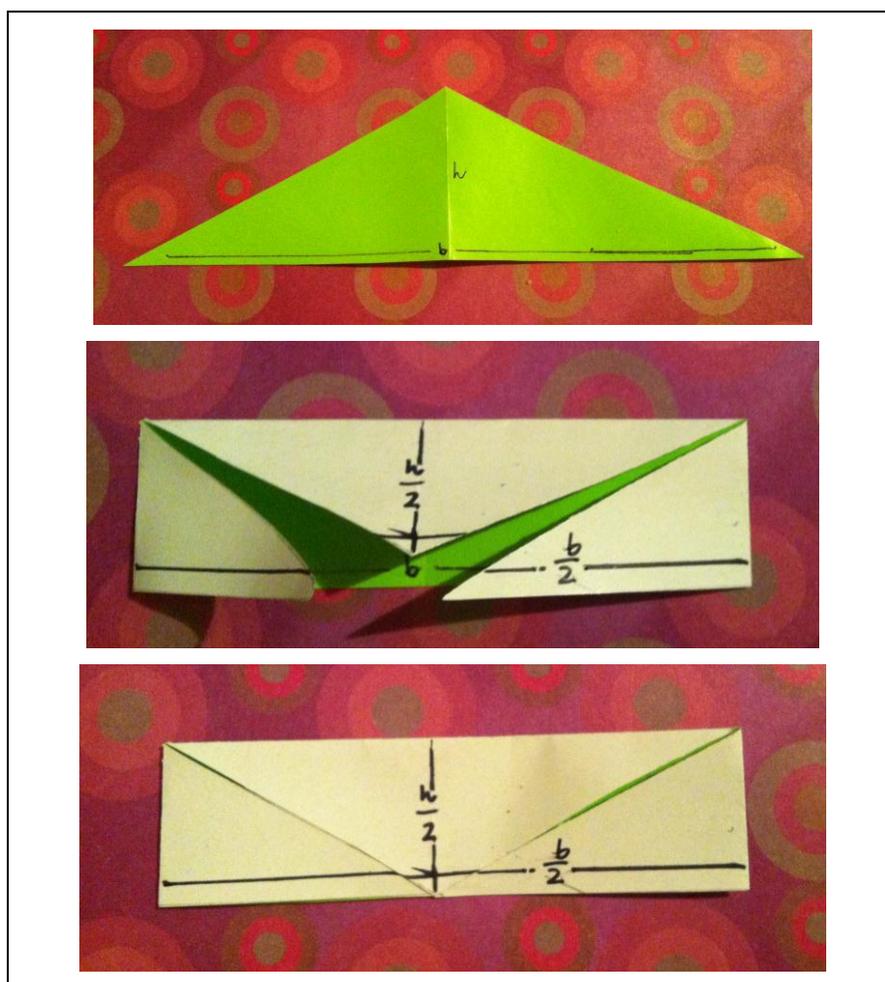


Fig. 4: Área del triángulo con origami.

Finalmente, se realizó la construcción de la Parábola como Lugar Geométrico en un papel cualquiera. Primero se definen la directriz y el foco (ver fig. 5), en este caso la directriz es uno de los lados del cuadrado y el foco es un punto en el cuadrado ubicado cerca del punto medio de la directriz. Luego, al hacer coincidir varios puntos pertenecientes a la directriz sobre el foco, se obtienen los dobleces que forman la parábola, siendo cada uno de ellos las rectas tangentes a la parábola.

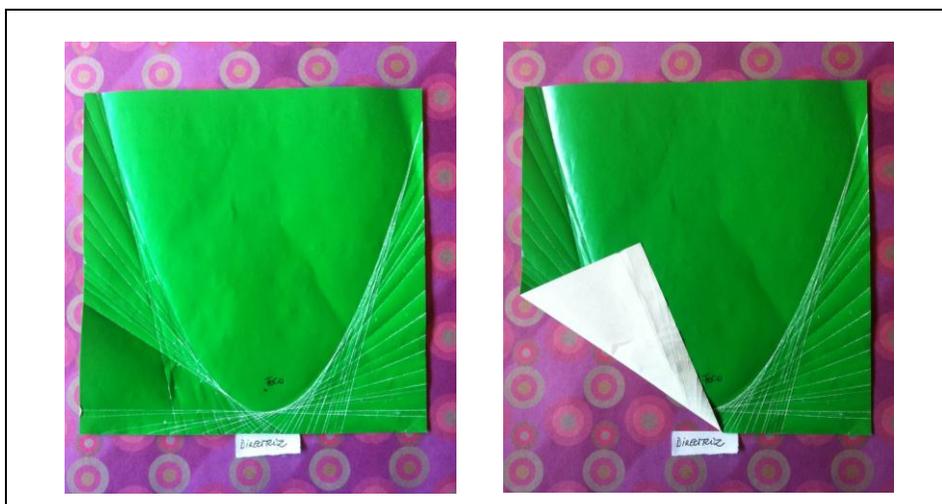


Fig. 5: Parábola con origami

Etapa 4: Delimitación del contenido específico a abordar en el estudio. Luego de experimentar la construcción de los cuatro casos señalados, se escogió el contenido de los elementos secundarios del triángulo. Además de las desventajas ya señaladas en algunos de ellos, se levantaron los siguientes criterios para dicha decisión:

- La temática de los elementos secundarios del triángulo involucra una diversidad de conceptos, los cuales a su vez son generadores de otros que, junto con los elementos secundarios, tienen variedad de aplicaciones en contextos tanto matemáticos como cotidianos. A modo de ejemplo, la altura, bisectriz y simetral son de gran importancia en situaciones de construcción y, a nivel físico, el baricentro corresponde al centro de masa del triángulo.
- Al trabajar en la construcción de los elementos secundarios del triángulo surgió el obstáculo de encontrar la imposibilidad de generar algunos dobleces para la construcción de dos elementos secundarios cuando se tenía el caso de un triángulo obtusángulo, a saber: altura y simetral. Este episodio propició una instancia de descubrimiento y necesidad por encontrar una solución al problema. En cambio, con las otras tres temáticas abordadas, no hubo ningún tipo de dificultad. Además, en cuanto a los

contenidos trabajados son acotados, por lo que no se generan mayores problemas.

- Sumado a los dos puntos anteriores, está el hecho que desde el punto de vista curricular, previo al actual Ajuste Curricular en esta temática, sólo se trabajaba la construcción de alturas y bisectrices en diferentes tipos de triángulos, no así ahora, ya que en los actuales Programas de Estudios se adiciona la construcción de la transversal de gravedad e incluye la comparación entre ellas. Así también, se motiva la realización de construcciones en diversas actividades.

Junto a lo hasta aquí expuesto, se considera que levantar un estudio con las características señaladas, en el subsector de geometría, resulta relevante dado que diversos estudios dan cuenta que la subárea en que los docentes indican sentirse menos preparados en enseñar, es en geometría (Unidad de Currículum y Evaluación, 2004), lo cual viene a corroborar lo anteriormente señalado por esta misma Unidad del Mineduc, en relación a que muy pocos docentes priorice el enseñar geometría, respecto a las subáreas de matemáticas (Unidad de Currículum y Evaluación, 2000).

Además está el hecho que, no obstante que en algunos textos de estudio pueden encontrarse actividades con dobleces de papel u otros recursos de material concreto, se ha documentado desde el Mineduc que en matemáticas éstos son poco usados en Chile, *“si bien los textos de estudio son ampliamente usados en sus clases por los profesores chilenos, Chile es uno de los países donde menos se utiliza este recurso, especialmente en matemáticas.”* (Unidad de Currículum y Evaluación, 2004, p.117).

1.1.3. Momento 3: La Geometría en el aula

Los resultados de Chile en evaluaciones internacionales en matemáticas son deplorables. Según los resultados TIMSS 2003, ningún estudiante de octavo básico demuestra alcanzar conocimientos ni desarrollar habilidades que los califican como alumno avanzado en matemática, siendo el promedio internacional un 26%. A su vez, el 12% es ubicado como nivel intermedio, implicando que son capaces de aplicar su conocimiento en situaciones reales, un 26% se situó en el nivel de logro bajo, es decir que sólo maneja algunos conocimientos básicos. Por último, obtuvieron un logro inferior a lo mínimo que describe TIMSS el 59% de los

estudiantes que rindieron el examen (Ídem). Esto resulta aún más dramático considerando que los resultados de los estudiantes que están en el nivel inferior, no se incluyen en el análisis de los datos de esta Prueba Estandarizada (Op. cit).

En cuanto a la geometría y, particularmente, su enseñanza, una preocupante realidad chilena es que muchos docentes en el país reconocen tener poca preparación y a su vez, dan poco énfasis a la enseñanza ésta. Esto se refrenda en dos informes que ha efectuado el MINEDUC, a través de su Unidad de Currículum y Evaluación, los años 2000 y 2004.

En el Informe elaborado el año 2004 se documenta que en la Prueba TIMSS 2003 *“Las subáreas en las que los profesores reconocen tener menos preparación para enseñar son geometría, en matemáticas...”* (Op. cit, p.117). Por su parte, en el Informe elaborado el año 2000, se señala que al consultar a los docentes por cuáles son las áreas más y menos enfatizadas en sus procesos de enseñanza, el 72% declara enfatizar el eje de los números, en contraposición a un 4% que acentúa la geometría y el álgebra combinados, y un 0% que enfatiza la enseñanza del álgebra. Más concretamente, el Informe explicita lo siguiente:

“Chile muestra una distribución temática absolutamente particular en comparación con los demás países [participantes del TIMSS] y con el promedio internacional: la enorme preponderancia que se da en nuestro país a la ejercitación numérica, priva a los alumnos del estudio de aspectos importantes del currículum, presentes en otros países (como álgebra y geometría). Por ejemplo, mientras la mayoría de los docentes (55%) en el promedio general de todos los países prioriza la enseñanza combinada de las materias de la matemática, en Chile sólo el 15% de los docentes trabaja así con sus alumnos. Por otra parte, mientras en Chile el 72% de los maestros dice enfatizar la enseñanza principalmente de los números, sólo el 14% de sus colegas de otros países lo hacen. Destaca además en Chile el que ningún profesor (0%) haya manifestado priorizar la enseñanza del álgebra, o de la geometría y el álgebra combinados (4%)”.

(Unidad de Currículum y Evaluación, 2000, p. 12-13)

En el caso de la enseñanza de la geometría, a partir de un gráfico presentado en el Informe, se desprende que menos del 4% de los docentes la resalta (ver gráfico 1).

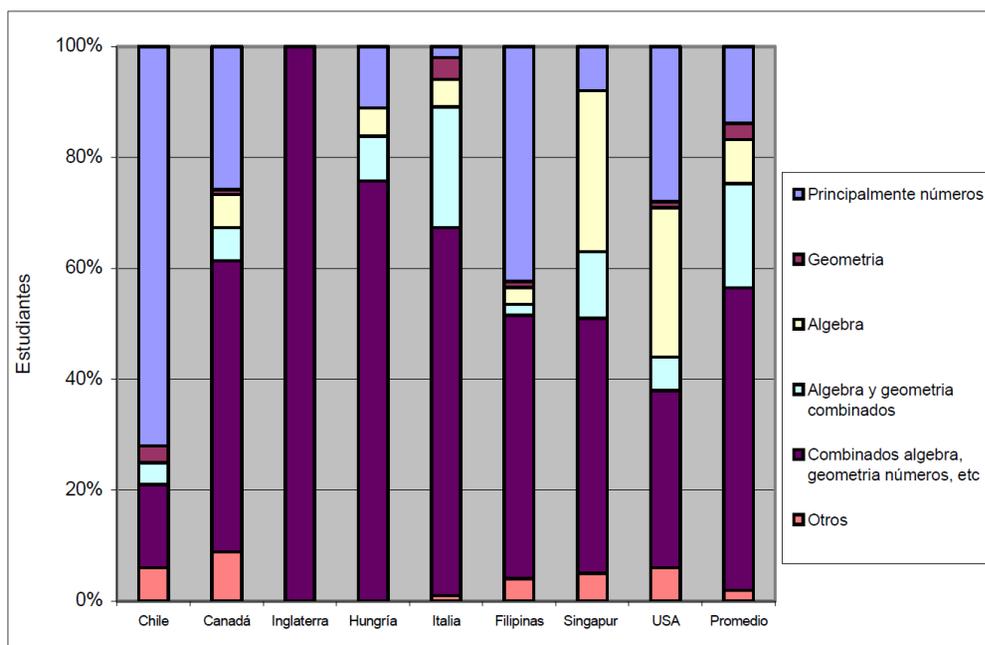


Gráfico N°1: Áreas más enfatizadas de enseñanza de la matemática, según consulta a docentes (Ídem, p. 13) [OBS: Se aprecia un error en la nominación de la variable vertical, dice: Estudiantes, debiendo decir, de acuerdo a lo descrito en el Informe, Docentes]

Para este trabajo en particular, se considerará como objeto de estudio el séptimo año básico de un colegio particular subvencionado, de la comuna de Macul, Región Metropolitana.

En dicho curso, una de las investigadoras del presente estudio, efectuó su Práctica Profesional I, durante el primer semestre, mientras que el segundo semestre realizó su Práctica Profesional II, en otro curso. Como consecuencia de esto, pudo verificar que existían variables de contexto alarmantes las cuales se detallan a continuación:

- En primer lugar la profesora de matemática a cargo del curso todos los días martes tenía que ausentarse de la clase, por lo que era reemplazada por otra profesora, en este caso no existía discontinuidad de los contenidos, ya que existía una organización previa a cada sesión.
- La profesora reemplazante debía comenzar su periodo pre-natal, por lo que para el día martes le designaron el curso a la profesora practicante de ese entonces, la que se haría cargo de la unidad de geometría. En esta ocasión la profesora a cargo le entregó material y las indicaciones pertinentes.
- Después de unos días la profesora se enferma y se mantiene con licencia hasta terminar el semestre, por lo que la profesora practicante se hace cargo

del curso, pero como existía poco tiempo, los contenidos no fueron todos evaluados, siendo la unidad de geometría una de las más perjudicadas.

- Durante el segundo semestre la profesora continúa con licencia, por lo que el curso no tuvo clases durante dos semanas, todo esto mientras el colegio busca docente para encargarse del curso. Dicho lo anterior existe falta y constante rotación de distintos profesores durante todo el segundo semestre, por lo que los contenidos, tanto los que faltaron del primer semestre y los correspondientes al segundo, no fueron tratados por completo y los que alcanzaron a ser vistos, no fueron analizados y evaluados por completo. En el caso de la unidad de geometría, a partir de los comentarios de los docentes y luego de una entrevista abierta a algunos estudiantes del curso a estudiar, señalan que sólo se trabajó en aclarar los contenidos sin especificar las construcciones correspondientes a cada concepto.
- En el caso de los elementos secundarios del triángulo, que pertenece a una de las construcciones antes probada, corresponde a uno de los conceptos que han trabajado en el segundo semestre, sin realizar las construcciones necesarias para aclarar los conceptos, por esto se decide trabajar con ellos y acentuar en generar las construcciones de los elementos con material concreto, como una forma de motivar y atraer a los estudiantes en este tipo de trabajo.

1.2. Justificación

Efectuar estudios que intenten incorporar elementos innovadores para la enseñanza de alguna temática y que además, presten atención a favorecer la motivación en el estudiantado en cuanto a mejorar su interés por las matemáticas, se considera que contribuye a la enseñanza de éstas; Más aún, parece ser una necesidad en el sistema educativo chileno. En este caso, la presente investigación se enmarca en esa línea.

El milenar arte del origami, se visualiza como herramienta pedagógica no tan sólo conceptual, sino también procedimental. El origami promueve el desarrollo de habilidades y manejo de exactitud, que con el tiempo motiva en los educandos la creatividad, fomentando un espíritu innovador, el trabajo en equipo y estimula la capacidad de investigación de los estudiantes, quienes inspirados por las ganas de aprender y trabajar, optan por buscar su propia información (Delgado, Fiol &

Zapatero, 2003). Es decir, la autonomía vendría a ser una de las habilidades que se desarrollan al trabajar con origami. Todas estas habilidades, sin lugar a dudas, son importantes de manejar para que el estudiantado enfrente de mejor manera este cambiante siglo XXI.

Araya & Dartnell (2006), por su parte, refuerzan el hecho que el estudiantado carece de autonomía al efectuar trabajo matemático en el aula. Específicamente, refieren que existe una *“Baja participación autónoma de los estudiantes (no realizan preguntas matemáticas) y profesores que no hacen demostraciones ni apelan a metáforas matemáticas.”* (Op. Cit., p.159).

Estos planteamientos, resultan pertinentes en el contexto nacional, pues junto con considerarlo importante por convicción, van de la mano con los Objetivos Fundamentales Transversales (OFT), correspondientes al nivel que se trabajará la investigación, ya que pretende conseguir:

- Actitudes de perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos.
- Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos.

Es importante también mencionar que trabajar la geometría con el apoyo de origami atiende a una problemática que en la enseñanza de la misma prevalece hasta el día de hoy, y es que en la práctica, la geometría se ha algebrizado bastante. Generar estudios que contribuyan a esa desalgebrización de la geometría, significa aportar, ya el Mineduc ha brindado señales favorables en torno a aquello con el último Ajuste Curricular, por ejemplo, el antiguo Eje de Geometría y Medida se ha separado en dos Ejes diferentes, un Eje de Geometría y otro, de Medida.

Por último, también resulta relevante en consideración a lo que expresa el Mineduc a partir de los resultados TIMSS que indican que *“álgebra y geometría son las subáreas en que Chile aparece más débil en relación con los demás países”* (Unidad de Currículum y Evaluación, 2004, p.39)”

1.3. Definición del problema

La investigación entonces se orienta a explorar la actividad matemática que se genera en una situación específica de trabajo con elementos secundarios del triángulo, a través del uso de dobleces de papel y origami con estudiantes de séptimo básico "A" (Ver los tres momentos planteados en 1.1. Antecedentes para la Problemática). A la luz de esto se espera obtener resultados acerca de lo que provoca el trabajo con este tipo de material concreto. Más específicamente, la pregunta de investigación planteada es la siguiente:

¿Cuáles son algunos aspectos que favorecen y otros que obstaculizan los aprendizajes matemáticos de estudiantes de séptimo básico, al incorporar el uso de dobleces de papel y de origami en el trabajo con elementos secundarios del triángulo?

1.4. Limitaciones

La noción de origami para muchos es desconocida y quienes han escuchado antes sobre él, probablemente no sepan de qué se trata. Por ello es importante, previo a la aplicación de este arte como herramienta de enseñanza, comenzar con la actividad introductoria para acercar el concepto hacia los receptores.

Una limitación considerable es la escasa bibliografía acerca del aprendizaje implementando las construcciones con Origami en el trabajo de las matemáticas, todo esto debido a la nueva instauración de esta herramienta como un método de aprendizaje. Dicho lo anterior es necesario realizar algunas sesiones para efectuar conclusiones o modificaciones futuras. Esto puede demandar tiempo importante para realizar una secuencia, lo que en este tipo de estudios sería una restricción significativa, ya que deben considerarse diferentes situaciones para realizar las investigaciones y encontrar las soluciones pertinentes para el estudio.

Para instaurar esta herramienta de enseñanza en la sala de clases, es necesaria la preocupación del profesor por los conceptos y contenidos de esta práctica, en este caso puede que el interés por las construcciones con Origami pasen a ser los protagonistas, olvidando que corresponde sólo a una herramienta que permitirá llegar a verificar la existencia de los elementos secundarios del triángulo en la construcción realizada.

Respecto a la instauración de la clase, al momento en que se realiza la segunda actividad de la guía de trabajo, la que consiste en doblar en la altura, bisectriz, simetral y transversal de gravedad en diferentes tipos de triángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo), para seguir las instrucciones varios estudiantes se complican cuando deben realizar los pliegues, esto debido a que los triángulos incluidos en los set correspondientes están cortados en pequeñas dimensiones, lo que dificulta principalmente realizar los tres dobleces en cada figura, dicho obstáculo predomina en el triángulo obtusángulo, esto por las pequeñas medidas de los ángulos (los opuestos al ángulo obtuso) lo que complejiza las construcciones y por ello, en algunas ocasiones los errores conllevaban al cambio del triángulo entregado por otro de repuesto (entregado por la investigadora).

1.5. Supuesto del estudio

El supuesto central de la investigación es que mediante los elementos secundarios del triángulo con dobleces de papel y Origami, los estudiantes pueden trabajar material concreto y maniobrarlo directamente, pudiendo visualizar nociones y características vinculadas a dicha temática, tales como: identificación de ciertos puntos singulares o proyección de lados de un triángulo, entre otros.

1.6. Objetivos

1.6.1. Objetivo General

Identificar aspectos que favorecen y obstaculizan el aprendizaje de elementos secundarios del triángulo en estudiantes de séptimo básico, al incorporar el uso de dobleces de papel y de origami.

1.6.2. Objetivos Específicos

- Analizar los elementos secundarios del triángulo, desde una visión didáctica, cognitiva e histórico-epistemológica.
- Diseñar e implementar una secuencia de trabajo con los elementos secundarios del triángulo a través del uso de dobleces de papel y origami.

- Conocer la percepción estudiantil acerca del origami como forma de trabajo en matemáticas.
- Levantar recomendaciones para generar un rediseño de la secuencia de trabajo desarrollada en el contexto del estudio.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1. El origami en la matemática

El origami es el arte de realizar formas reconocibles con pliegues de papel, también se dice que es una “*actividad plástica en la que se busca la belleza y la originalidad*” (Delgado, Fiol & Zapatero, 2003), éste proviene de etimología japonesa y significa doblar (*ori*) papel (*kami*). Sus reglas tradicionales incluyen el no pegar ni cortar y utilizar únicamente una pieza de papel, con estas (Royo, 2006). Beech (2011) señala que aunque sigue el interés por el origami tradicional, éste se ha desarrollado considerablemente en los 40 últimos años; variando incluso el material con el que se trabaja, menciona (entre otros) mallas u hojas de metal, hojas de acetato o bolsitas de té decoradas.

Se origina, con la aparición del papel en China entre los siglos I y II A.C. y llega a Japón alrededor del s. XI D.C. (Engel, 1989), donde ha formado parte de su historia. Primero siendo parte de ceremonias de la nobleza japonesa; luego, los distintos estilos de origami permitían distinguir entre las clases samuráis aristócratas, que utilizaban el *noshi* para enviarse cartas, este plegado es sumamente especial: una vez abierto no se puede doblar de igual manera por segunda vez, para plegarlo nuevamente requiere un par de dobleces extra. La democratización del origami llega en el período 1603-1867, cuando florecían la cultura y el arte en Japón, en ese entonces apareció la base del pájaro, que es utilizada para generar la grulla, figura más asociada al origami (Beech, 2001).

Akira Yoshizawa (1911-2005) es considerado padre del origami moderno, japonés que creó la simbología que actualmente se utilizan en las indicaciones para el plegado de los modelos en la papiroflexia. Para muchos, el segundo gran aporte al origami después de la invención del papel, dado que permitió la difusión de este arte al romper con la barrera de idioma (Royo, 2002). La *British Origami Society* es una organización que se creó en 1967 que integrarían fanáticos por el origami (Yoshizawa la integró), que elaboraría una revista a distribuirse entre los socios. En adelante, comenzaron a complejizarse las creaciones de este arte (Beech, 2011).

Con la diversificación del origami, actualmente la papiroflexia se puede clasificar de varias formas (Blanco & Otero, 2005):

- Según el fin:
 - Artístico: Construcción de figuras ornamentales o de la naturaleza.
 - Educativo: Construcción de figuras para estudiar propiedades geométricas sobre todo.

- Según la forma que tenga papel:
 - Papel completo: Una pieza de papel inicial de formas cuadrada, rectangular o de triángulo.
 - Tiras: La pieza inicial de papel tiene forma de largas tiras.

- Según el número de piezas de papel:
 - Tradicional: Sólo una pieza de papel inicial (ocasionalmente dos o tres, a lo más).
 - Modular: Varias piezas de papel iniciales que se pliegan en forma individual, formando unidades llamadas módulos, que generalmente son iguales, que se encajan para formar una figura compleja. El origami modular a su vez, también se puede clasificar según sus módulos (Royo, 2002):
 - Basados en aristas: Cada módulo corresponde a una arista y generalmente sus caras están perforadas.
 - Basados en caras: No es fácil de diseñar, las caras se juntan de dos en dos.
 - Basados en vértices: Se clasifican según la agrupación de sus aristas, como de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc.

Sólo hace 25 años se relaciona la matemática con la papiroflexia. Se considera al profesor japonés Humiaki Huzita como el impulsor del análisis matemático del Origami, cuando en 1989 presentó axiomas de la *Geometría del Origami*, donde incluyó la resolución de problemas irresolubles con regla y compás (Cobos, sf).

Los axiomas de Huzita-Hatori o Huzita-Justin son los siguientes (Cavacami & Saito, 2009):

1. Dados dos puntos distintos P_1 y P_2 , existe sólo un pliegue que pasa por ellos (ver fig. 6).

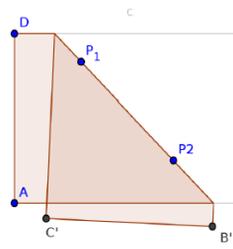


fig. 6: Axioma 1 (Cavacami & Saito, 2009, p.6)

2. Dados dos puntos P_1 y P_2 distinto, sólo hay un pliegue que coloca P_1 en P_2 (ver fig. 7).

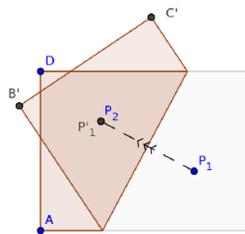


Fig. 7: Axioma 2 (Cavacami & Saito, 2009, p.6).

3. Dadas las rectas r_1 y r_2 , existe un pliegue que coloca r_1 sobre r_2 (ver fig. 8).

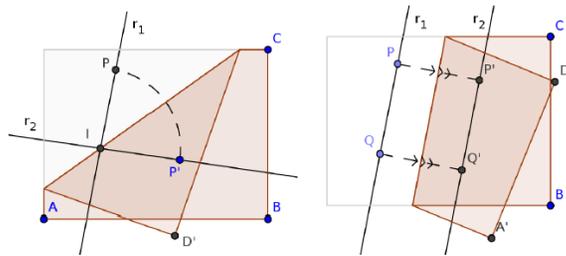


fig. 8: Axioma 3 (Cavacami & Saito, 2009, p.7).

4. Dados un punto P y una recta r , existe un pliegue único y perpendicular a r que pasa por P (ver fig. 9).

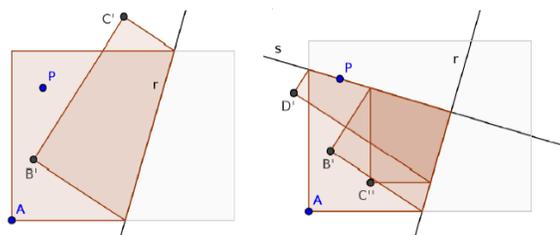


fig. 9: Axioma 4 (Cavacami & Saito, 2009, p.7).

5. Dados dos puntos P_1 y P_2 y una recta r_1 , hay un pliegue que coloca P_1 sobre r_1 y que pasa por P_2 (ver fig. 10).

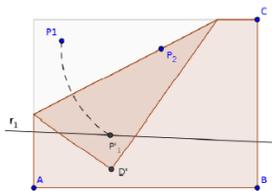


fig. 10: Axioma 5 (Cavacami & Saito, 2009, p.7).

6. Dados dos puntos P_1 y P_2 y dos rectas r_1 y r_2 , se puede realizar un pliegue que conduzca tanto a P_1 en r_1 como a P_2 en r_2 (ver fig. 11).

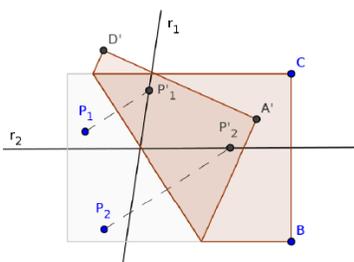


fig. 11: Axioma 6 (Cavacami & Saito, 2009, p.8).

7. Dado un punto P y dos rectas r_1 y r_2 , existe un pliegue que coloca a P_1 sobre r_1 y perpendicular a r_2 (ver fig. 12).

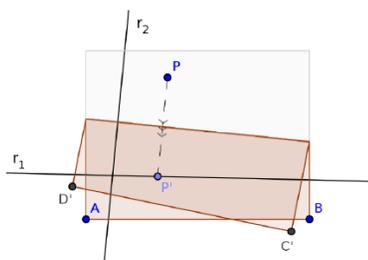


fig. 12: Axioma 7 (Cavacami & Saito, 2009, p.8).

En relación con lo anterior, son cuatro los ámbitos fundamentales en los cuales la matemática surge de la papiroflexia (Royo, 2006):

- Papiroflexia Modular: Creación de figuras geométricas y poliedros.
- Herramienta pedagógica: Los pliegues de papel se pueden utilizar para enseñar y aprender varios conceptos matemáticos.
- Axiomas de constructibilidad: Análisis según los axiomas de Huzita-Hatori.
- Diseño de figuras: Técnicas matemáticas para crear figuras de origami.

A diferencia del resto de la historia de la papiroflexia, no hay algún personaje al que se le atribuya el relacionar la enseñanza de las matemáticas, utilizando el origami

como una herramienta. Se pueden distinguir los siguientes beneficios (Blanco & Otero, 2005):

- Herramienta pedagógica que le permite al docente, desarrollar contenidos, conceptuales o de procedimiento. Además, apoya el desarrollo de la psicomotricidad, particularmente la psicomotricidad fina, tal como la inteligencia espacial.
- Desarrolla la destreza, precisión manual y la exactitud en la realización del trabajo.
- Relaciona la disciplina de las matemáticas con otras ciencias, como las artes, por ejemplo.
- Motiva al estudiante a ser creativo, ya que puede desarrollar sus propios modelos e investigar la conexión que tiene con la geometría no sólo plana, sino también espacial.

Con más detalle, integrantes del Grupo de Aprendizaje de la Geometría, plantean los aportes del origami en educación primaria, donde los distinguen entre conceptos, procedimientos y actitudes (Delgado, Fiol & Zapatero, 2003):

- Conceptos:
 - Geometría en el espacio, distancias, ángulos y giros en torno a sí mismo u otros puntos.
 - Figuras geométricas y sus elementos.
 - Simetrías y regularidades.
 - Estimación de medidas en distancias y ángulos.
- Procedimientos:
 - Describir situación y posición en el espacio, de un objeto, en relación a si mismo o a otros puntos de referencia.
 - Leer, interpretar y construir figuras representadas.
 - Construir cuerpos geométricos con figuras.
 - Reconocer figuras geométricas obtenidas de distintos criterios.
 - Indagación de simetrías y regularidades.

- Actitudes:
 - Atención y agrado por describir situaciones y relaciones espaciales en forma precisa, utilizando lenguaje geométrico.
 - Sensibilidad y agrado por elaborar y presentar cuidadosamente construcciones geométricas.
 - Interés y curiosidad por identificar relaciones y formas geométricas en objetos observados en la cotidianidad.
 - Constancia e interés al buscar soluciones a problemas relacionados con la organización y uso del espacio.

En cuanto al tratamiento de los elementos secundarios del triángulo, no se observa bibliografía que trate este contenido con recursos del Origami, pero De la Peña desarrolla alguno de estos conceptos matemáticos en forma genérica: mediatriz de un segmento, bisectriz del ángulo de dos rectas y rectas perpendiculares (De la Peña, 2001).

De la Peña describe cómo generar la mediatriz de un segmento (ver fig. 13), indicando *“dados dos puntos en un plano, si mediante un dobléz del papel conseguimos superponer uno sobre otro (lo mejor es tener fuertemente marcados ambos puntos y ayudarse en la operación por transparencia), la línea de plegado es la mediatriz del segmento determinado por ambos puntos. Logramos, en definitiva, que los puntos sean simétricos respecto de la línea de plegado como eje de simetría (característica de la mediatriz)”* (ídem, p. 3). Lo que no señala es la explicación de la creación de la simetral según su definición: Recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.

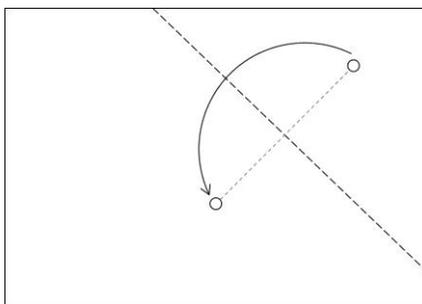


Fig. 13: Mediatriz. (Elaboración propia)

La bisectriz es tratada por De la Peña desde el punto de vista del ángulo entre dos rectas, distingue entonces cuatro casos (ver fig. 14), los dos primeros respecto a rectas coincidentes: el primero es el que considera el ángulo entre los bordes del papel y el segundo tiene relación con las bisectrices entre los bordes de dos líneas

de plegado. Los dos siguientes casos consideran la recta que dimidia dos rectas paralelas, por lo que en el caso tres trata la recta paralela entre dos bordes paralelos (siempre considerando una pieza de papel rectangular) y el caso cuatro hace referencia a la recta paralela media a dos líneas de plegado.

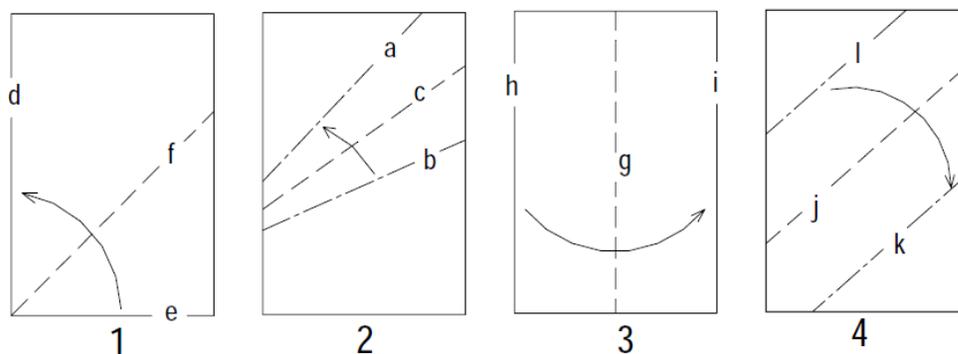


Fig. 14: Bisectriz del ángulo de dos rectas (op. cit, p. 4)

De la Peña entrega el análisis de las rectas perpendiculares con origami, donde incluye dos casos (ver fig. 15). El primero trata de la recta perpendicular a un borde del papel (considerando un papel rectangular), en éste señala que al plegar un borde sobre sí mismo, el doblez resultante es perpendicular al borde inicial. El segundo caso es el doblar el pliegue sobre sí mismo, haciendo coincidir las partes. En ambos casos, lo que no señala es que el pliegue resulta perpendicular porque dimidia un ángulo extendido, obteniendo dos ángulos de 90° (op.cit.).



Fig. 15: Rectas perpendiculares (op.cit, p. 4)

A partir de lo expuesto por De la Peña, acerca de la construcción de rectas perpendiculares (ver fig. 15), se puede desprender que, no obstante que el autor no desarrolla la idea de altura de un triángulo, en particular pudiese haberse presentado la construcción de ésta, por tratarse de una recta perpendicular específica.

2.2. Antecedentes históricos de trabajo algebraico en geometría

Para el presente estudio se consideró relevante explorar evidencias históricas que entregan antecedentes de un hecho que, con el trabajo de origami, se contribuye en parte a desmovilizar, esto es, el tratamiento fuertemente algebraico con que se suele abordar la enseñanza de la geometría en el sistema escolar. Aunque se aprecia que esto se tiende a desmontar con el actual ajuste curricular en los planes y programas de educación general básica, puesto que se ha separado el antiguo Eje de Geometría y Medida, en dos Ejes independientes, que anteriormente se presentaban fundidos, lo cual en la práctica generaba tratamientos que acentuaban un trabajo algebraico con pretexto de figuras geométricas, más que trabajo geométrico propiamente tal.

Para evidenciar lo anterior, basta tomar cualquier texto de estudio y observar la gran cantidad de ejercicios que tratan de encontrar una incógnita que se halla en alguna figura geométrica. Así también en los facsímiles o instrumentos que se utilizan para pruebas estandarizadas (PSU, SIMCE, entre otras). Y, en las mismas guías de ejercicios de aula o que frecuentemente es posible hallar en internet.

Al efectuar una indagación histórica de la vinculación de la geometría con el álgebra, se encontró que data desde el siglo XV, cuando Regiomontano comenzó a aplicar el álgebra en la geometría, así, *“...mientras que Euclides formulaba invariablemente sus problemas en términos de cantidades geométricas generales, Regiomontano daba valores numéricos concretos a sus segmentos, incluso cuando trataba de mostrar que sus métodos eran completamente generales. Esto le permitía hacer uso de los métodos algorítmicos desarrollados por los algebristas árabes y transmitidos a Europa a través de traducciones del siglo XII”* (Boyer, 1999, p.354). Pero este fue un acercamiento que cinco siglos más tarde llegaría a desarrollarse como algebrización de la geometría.

Ruiz (2003) profundiza la relación entre el álgebra y la geometría, él señala que fue hasta el siglo XVII que el álgebra dejó de estar subordinada a la geometría: *“con la geometría de coordenadas se dio una inversión decisiva para el destino de las matemáticas modernas. En primer lugar, debe mencionarse el papel y el valor especiales que le dieron los árabes e hindúes al álgebra y la aritmética. Debe subrayarse, sin embargo, el trabajo realizado por Vieta en el álgebra con el propósito de resolver problemas de construcción geométrica.”* (Ruiz, 2003, p.259). Entonces Vieta sería el matemático que comenzó a influir en la algebrización

porque *“Si bien interpretaba el álgebra como instrumento para hacer geometría, le daba a ésta un valor autónomo, propio.”* (Ídem).

Posteriormente, Descartes, quien indicó comenzar sus estudios a partir, entre otros, de los de Vieta. Se fue acercando a la algebrización de la geometría pues consideraba que *“la construcción geométrica clásica generaba un exceso innecesario de figuras, que él quería reducir, y, además, complementariamente, quería ofrecer un significado al álgebra usando la interpretación geométrica.”* (Op.cit, p.261). Este matemático además pensaba que el álgebra *“era una extensión de la lógica para lidiar con cantidades. Por medio de la simbolización de los principios y métodos lógicos era posible, según él, mecanizar el razonamiento y crear una ‘matemática universal’.”* (Op.cit, p.264). Entonces la matemática de Descartes se basaba en generar una matemática universal, y el álgebra le permitía universalizarla. Muestra de ello es que no sólo aplicó el álgebra a la geometría, sino que también lo realizó en forma inversa, pues *“Precisamente en el primer capítulo de ‘La géométrie’ se titula ‘Cómo se relacionan los cálculos de la aritmética con las operaciones de la geometría’, mientras que el segundo trata de ‘Cómo pueden efectuarse geoméricamente la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas’.”* (Boyer, 1999, p. 427).

Pero, fue después de Descartes que un amigo de Newton llamado John Wallis, influenciado por Vieta y Descartes, *“dio varios pasos en la “algebrización de la geometría”. Por ejemplo, en su libro Algebra (1685) dedujo en forma algebraica todo el Libro V de los Elementos de Euclides”* (Ruiz, 2003, p.263). A su vez, sus trabajos también influirían en matemáticos como Leibniz.

Ruiz asocia principalmente a la geometría de coordenadas como el comienzo de la algebrización de la geometría y además señala que el álgebra llega a potenciarse adicionalmente con el *“cálculo diferencial e integral, pues éste obligaba a una utilización sistemática del álgebra para su propio desarrollo. En ese sentido, la gran condensación teórica realizada por Newton y Leibniz potenció extraordinariamente el valor y significado del álgebra. Aunque, sin embargo, sus desarrollos decisivos y radicales se darían hasta el siglo XIX.”* (Ídem, p. 263).

2.3. Algunos elementos de la didáctica fundamental

2.3.1. Los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas

Las dificultades que tienen los estudiantes para aprender matemáticas, en general, responden a aspectos de diversa índole. Por su parte, al momento de enfrentarse a una secuencia de trabajo, el docente también afronta escenarios y contextos diversos, tales como el tiempo requerido para cubrir determinadas temáticas, los lineamientos curriculares vigentes, ya sea novedosos o tradicionales, y también las actitudes y creencias del estudiantado y de sí mismo, respecto de la disciplina o de lo que debiese ser la actividad matemática para el aprendizaje y enseñanza de ésta al seno de la misma, por mencionar algunos. Variada literatura especializada ha dado cuenta a la fecha que las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas no responden únicamente a situaciones de olvido o falta de estudio por parte de los estudiantes, sino que a modos de conocer implícitos asociados a dimensiones epistemológicas, cognitivas o didácticas, que se denominan obstáculos. Desde el punto de vista de la didáctica fundamental, los obstáculos se consideran un conocimiento. Por tanto, para desmovilizarlo no basta una serie de buenas explicaciones por parte de un docente, sino que se requiere de verdaderas ingenierías que sean capaces de levantar situaciones de enseñanza para erradicar dichos obstáculos. En la didáctica fundamental, siguiendo a Brousseau (1986), un obstáculo tiene las siguientes características:

- Es un conocimiento.
- Permite dar respuestas correctas a ciertos problemas.
- Provoca errores en otro tipo de problemas.
- Es resistente a toda modificación siendo además recurrente.
- Su rechazo puede provocar el aprendizaje de otro nuevo conocimiento

Desde el punto de vista de Brousseau, los errores que usualmente se aprecian en las producciones estudiantiles en general se encuentran directamente relacionados con algún tipo de obstáculo: *“Un obstáculo se manifiesta, por tanto, por sus errores, pero esos errores no son debidos al azar. Fugaces, erráticos, son reproducibles, persistentes. Además esos errores, en un mismo sujeto, están ligados entre ellos por una fuente común, una manera de conocer, una concepción característica, coherente sino correcta, antigua y que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones”*. (Brousseau, 1986, p.4).

Las dificultades y los errores que se dan en el aprendizaje de las matemáticas siempre están presentes, pero no en los alumnos menos capaces, sino que en todos los alumnos, casi siempre o algunas veces todos han tenido (y hemos tenido) dificultades y errores en el aprendizaje. Es importante mencionar que un obstáculo debe considerarse como una oportunidad para adquirir un conocimiento nuevo. Por lo que es necesario, que cuando un estudiante se enfrente a una dificultad, se le pueda guiar a comprender que los obstáculos siempre estarán presentes y que por medio de ellos se aprenderán nuevos conceptos, modificarán los ya adquiridos y rechazarán los que se consideren errados (re-estructuración de esquemas).

En la presente investigación acerca de la construcción de los elementos secundarios del triángulo con pliegues de papel y Origami, al momento de realizar los pliegues - por parte de las investigadoras - se presenta el obstáculo de tener que identificar fuera del pliegue de papel a los puntos singulares relacionados a la altura y a la simetral, en el caso de los triángulos obtusángulos. Es por ello, que inicialmente se decide ahondar en este tema, para desarrollar y analizar las construcciones estudiantiles al respecto.

Para resolver el problema u obstáculo que se presente es necesario consensuar acerca de la resolución del problema y la enseñanza de la matemática presente en él, aunque una crítica fundamental que hace Brousseau es: *"...el estudiante está ausente en todo el proceso. Éste solamente está esperando que se le enseñe, que el profesor haga evidente todos los conceptos, las definiciones, los algoritmos para resolver problemas etc. No hay significación conceptual en este sentido,"* (Barrantes, 2006. p.2). En esta investigación existe la preocupación de las investigadoras por encontrar conceptos que pueden construirse con dobleces de papel y en este caso averiguar acerca de la situación académica y conceptos previos de los estudiantes.

La secuencia de trabajo tiene como objetivo el que los estudiantes se hagan partícipes de la construcción del conocimiento y con ello realicen los análisis correspondientes a los conceptos a enseñar. Es por ello que a medida que construyen los elementos en los triángulos, tiene como intención que se encuentren con un obstáculo, que el punto singular queda fuera del triángulo en el caso de la simetría y la altura en el triángulo obtusángulo. Éste tiene como intención encontrar un uso ingenuo de la noción de "obstáculo" próxima a la de "dificultad" para que el estudiante aprenda ciertos conocimientos matemáticos, aunque no toda dificultad es considerada como un obstáculo. (Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J., 1997), ya que el estudiante a medida que va descubriendo en la construcción, va aplicando conocimientos previos y codificando nueva información.

2.3.2. La noción de contrato didáctico

Para establecer relaciones, es necesaria la existencia de códigos entre las partes, de este modo es importante la presencia de reglas y el cumplimiento de ellas, manteniendo el respeto y la comunicación para establecer la cordialidad mutua. Por ello es importante tener en claro el concepto de “Contrato Didáctico”, parte de este contrato que es específico del “Contenido”: conocimiento matemático focalizado, donde el profesor genera las condiciones suficientes para que exista apropiación de los conocimientos, siendo éste capaz de reconocer esta apropiación, cuando se produce, y asegurando que las adquisiciones anteriores y las condiciones nuevas dan al estudiante la posibilidad de apropiación. El estudiante debe satisfacer estas condiciones, si no se produce la adquisición, se dice que el estudiante no hizo lo que se esperaba de él, pero también que el docente no cumplió con lo prometido (implícitamente), todo lo anterior prevaleciendo la relación didáctica. Es necesario que el docente acepte la responsabilidad de los resultados y que asegure medios efectivos para que el estudiante adquiriera los conocimientos y también es importante que el estudiante acepte responsabilidad de resolver problemas, aunque no se les haya enseñado como resolverlos.

Brousseau señala: *“Cada uno, el maestro y el alumno, se hacen una idea de lo que el otro espera de él y de lo que cada uno piensa de lo que el otro piensa...y esta idea crea las posibilidades de intervención...”* (Brousseau, 2007, p. 70). Lo anterior se relaciona a la situación de aprendizaje que se desea implementar, ya que las partes involucradas mantienen una relación con un fin común, en este caso adquirir conocimientos acerca de los elementos secundarios del triángulo implementado a través de dobleces de papel y Origami. De este modo, cada una de las partes espera una respuesta del otro, reflejado en el análisis a priori de la secuencia a trabajar, aunque cada conjetura que se realiza tiene relación con lo que el docente espera que los estudiantes realicen. Mientras que los educandos por su parte tienen un papel importante y en este caso también esperan una respuesta del docente, la que se encuentra implícita, pero que es consecuencia del resultado y contraste realizado con las producciones y reacciones que se presentan después de realizar la guía de trabajo y en relación con las orientaciones para la implementación.

La intención de la investigación está relacionada con el contrato didáctico referido a lo que las investigadoras desean de los estudiantes, todo esto referente a que se espera que los educandos reaccionen respecto al obstáculo que se presenta en las construcciones de la simetral y la altura en el triángulo obtusángulo, dicha dificultad

respecto a que los puntos singulares se presentan fuera del triángulo y con ello deben prolongar tanto las rectas, en el caso de la simetral y los lados en la altura. Sin embargo este problema no ocasiona reacción en los estudiantes, los que no manifiestan respuesta al inconveniente que aparece en tal momento.

2.4. Análisis de Textos de Estudio

A fin de tomar conocimiento sobre cómo se trabaja en el currículum declarado la enseñanza de los elementos secundarios del triángulo, la dimensión didáctica se abordó a través del análisis de una serie de textos de estudio del sistema escolar. Se efectuó una selección de textos de estudio. Se revisaron once libros de séptimo año básico de distintos años de publicación y diferentes editoriales. Cinco de los libros consultados no incluían el contenido de elementos del triángulo. De los seis restantes, tres de ellos presentaban sólo alturas y bisectrices, y los otros tres, alturas, bisectrices, simetrales y transversales de gravedad. Cabe señalar que los textos que trabajan los cuatro elementos secundarios del triángulo pertenecen todos a la misma Editorial, la Editorial Santillana del Pacífico S.A.

Los textos que incluyen los elementos secundarios del triángulo son los siguientes:

Título	Autor(es)	Año	Editorial	Nombre en investigación
<i>Educación matemática, Séptimo básico</i>	Cárdenas, L.	2006	Cal y Canto	Texto 1
<i>Educación matemática, Séptimo básico</i>	Cárdenas, L.	2004-2005	Cal y Canto	Texto 2
<i>Educación matemática, Séptimo básico</i>	Baeza, A.; Villena, M.	2008	Santillana del Pacífico S.A.	Texto 3
<i>Educación matemática, Séptimo básico</i>	Aguilar, M. Badani, M. Chacón, M. Guerrero, G.	2007	SM Chile S.A.	Texto 4
<i>Matemática 7° Educación Básica</i>	Baeza, A.; Villena, M.	2007	Santillana del Pacífico S.A.	Texto 5
<i>Matemática 7° Educación Básica</i>	Setz, J. Darrigrandi, F.	2009	Santillana del Pacífico S.A.	Texto 6

Tabla 1: Textos seleccionados. (Elaboración propia)

Luego, se realizó un análisis didáctico de estos textos de estudio, por medio de dos fases. La primera consiste en un estudio descriptivo por texto, mientras que en la segunda fase se analiza cómo se trabaja cada uno de los elementos secundarios del triángulo.

Fase 1: Estudio descriptivo por texto (ver anexo 3).

Éste se estructura distinguiendo primero el trabajo con cada uno de los elementos secundarios, a su vez, se desglosa en materiales, metodologías de trabajo, enfoque didáctico y referencias de páginas web. Se describen en detalle las actividades, ejercicios resueltos y propuestos, definiciones y evaluaciones en el orden que aparecen en cada libro.

- **Materiales:** Papel, regla, compás, lápices, geoplano, tijeras, pegamento y/o escuadra.
- **Referencia a Páginas web:** Es dicotómica, indica si incluye o no referencias web.
- **Metodologías de trabajo:** Indica si en el texto se propicia el trabajo individual y/o el grupal.
- **Descripción:** Se detallan las indicaciones, tipo de explicaciones, características de las tareas, en el orden en que aparecen.

A continuación se presenta una tabla resumen del análisis descriptivo efectuado por cada texto:

Texto	Materiales	Incluye	Metodología de trabajo	Enfoque Didáctico	Tipo de construcción
-------	------------	---------	------------------------	-------------------	----------------------

		Papel	Regla	Compás	Lápices	Geoplano	Tijeras	Pegamento	Escuadra		Individual	Grupal	Definición- construcción	Construcción- definición	Regla y compás	Escuadra	Doble de papel
1	h	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x		x		x	
	b	x	x	x	x		x				x	x	x		x		x
2	h	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x		x		x	
	b	x	x	x	x		x				x	x	x		x		x
3	h				x				x		x			x		x	
	b	x	x	x	x		x			x	x	x	x		x		x
	s	x	x	x	x		x				x		x		x		x
	t	x			x		x				x			x	x		
4	h	x			x		x		x		x			x		x	
	b	x	x		x		x				x			x			x
5	h	x			x		x		x	x	x	x		x		x	
	b	x	x	x	x					x	x		x		x		
	s	x	x	x	x		x			x	x	x	x		x		
	t	x	x	x			x			x	x	x		x	x		
6	h	x			x				x		x	x		x		x	
	b	x	x	x	x		x			x	x	x		x	x		x
	s	x	x	x	x					x	x	x		x	x		
	t	x	x		x		x				x	x		x	x		

Tabla 2: Cuadro de caracterización por texto de estudio. (Elaboración propia)

(h: altura, b: bisectriz, s: simetral y t: transversal de gravedad)

Respecto a la tabla anterior, se observa lo siguiente:

Materiales: lo más recurrente es el uso de papel, lápices, tijeras y regla. Lo menos frecuente es geoplano y pegamento. No obstante que se propicia el trabajar con material concreto, la manipulación con este material sólo considera actividades planteadas en los textos y no construcciones complementarias.

Metodología de trabajo: en la mayoría de los textos se suele fomentar el trabajo tanto individual como grupal, de los cuales se debe considerar las actividades en cada uno de ellos, en este caso las construcciones y también las conclusiones consideradas en las secuencias de los textos analizados anteriormente.

Enfoque didáctico: en esta variable existe una predominancia acerca de la construcción de los conceptos y la manera en que se realiza, dicho esto domina el tipo construcción-definición por sobre definición-construcción. Todo lo anterior contribuye a la necesidad de los textos por incentivar el descubrimiento de los contenidos y con ello construir los conceptos solicitados, para ello finaliza con la definición formal del elemento en cuestión.

Tipo de construcción: en las actividades planteadas en los textos de estudio se propicia mayoritariamente la construcción con regla y compás, seguida por el uso de la escuadra y utilización de dobléz de papel, ambos con igual cantidad de utilizations. Dicho lo anterior, los libros analizados consideran la creación de los elementos con regla y compás, ya que pertenecen a instrumentos netamente matemáticos con los que pueden generarse todos los elementos, considerando que la regla cumple la función sólo de trazar líneas rectas y no la de medir distancias, todo esto en comparación con las otras formas antes mencionadas.

Fase 2: Análisis según cómo se trabaja cada uno de los elementos secundarios del triángulo.

En ésta se analizó la presentación de cada elemento secundario del triángulo considerando las siguientes dimensiones: (a) estructura de presentación, (b) métodos de construcción, y, (c) registros en que se presentan las indicaciones.

Estructura de Presentación. Se identificaron hasta tres maneras de presentar los elementos secundarios, a saber, a través de “Problema”, “Construcción” y/o “Definición”. No todos los elementos secundarios eran presentados mediante estos medios, ni tampoco en el mismo orden. Para distinguir el uso y orden de un determinado medio de presentación, en la Tabla 3 se utilizaron los numerales 0, 1, 2 y 3. Siendo 0 la ausencia de un determinado medio de presentación y 1, 2 y 3 el orden en que aparece secuenciado en el texto un determinado medio de presentación, cuando éste es utilizado.

Método de Construcción. Se identificaron cuatro métodos: “Doblez de papel”, “Regla y compás”, “Escuadra” y “Redes”. Al igual que en la dimensión anterior, para distinguir el uso y orden –en este caso de un determinado método- se utilizaron los numerales 0, 1, 2, 3 y 4. Siendo 0 la ausencia de un determinado método de construcción y 1, 2, 3 y 4, el orden en que aparecen secuenciados cuando son usados.

Registros en indicaciones es la dimensión que considera los registros de representación utilizados para el paso a paso de las construcciones, los registros observados fueron el “Icónico” (imágenes y/o fotografías) y “Lenguaje natural”. Tal como en las dimensiones anteriores, se usaron los dígitos 0, 1 y 2, donde 0 es la ausencia de dicha representación, mientras que 1 y 2 se asocian al orden en que aparecen en el texto. Si se observa que ambos registros se presentan al mismo tiempo, a ambos se les asigna el valor 1.

Se identifica la presencia de actividades que promueven un análisis de los elementos secundarios según tipos de triángulos, por lo que la dimensión **Análisis según tipos de triángulos** incluye dos categorías: “Según ángulos” y “Según lados”. Al igual que en el resto de las dimensiones, se recurre al mismo registro numérico: 0, 1 y 2, siendo 0 la ausencia de un análisis según esa clasificación de triángulos y 1 y 2 se relacionan a la secuencia en que aparecen.

Existen algunos textos que incluyen indicaciones respecto al uso de procesadores geométricos para complementar el estudio del elemento tratado, este dominio fue llamado: **Aluden a procesador geométrico**. Representando la presencia o ausencia de este aspecto con los números 0 y 1, donde 1 denota la aparición de éste, mientras que la no presencia se denota con 0.

Las **Metodologías de trabajo** observadas que fomentan los textos de estudio son: el número de integrantes de quienes realizan las actividades y el tipo de trabajo práctico, en cuanto al número de integrantes, se categoriza según actividad “Individual” o “Grupal”, como también el tipo de trabajo práctico tiene dos categorías: la “Construcción” y “Conclusiones”. Se utilizarán los numerales 0 y 1, indicando 0 la ausencia de la metodología en cuestión y 1 a la presencia de ésta.

Texto de estudio		Presentación de contenidos	Método(s) de Construcción	Registros en indicaciones	Análisis según tipos de triángulos	procesador	Metodologías de trabajo	
							Individual	Grupal

		Problema	Construcción	Definición	Doble de papel	Regla y compás	Escuadra	Redes	Icónico	Lenguaje natural	Según ángulos	Según lados		Construcción	Conclusiones	Construcción	Conclusiones
1	h	1	2	3	0	0	2	1	2	1	2	1	0	1	1	0	1
	b	0	2	1	1	2	0	0	2	1	1	2	0	1	1	0	1
2	h	1	2	3	0	0	2	1	2	1	2	1	0	1	1	0	1
	b	0	2	1	1	2	0	0	2	1	2	1	0	1	1	0	1
3	h	0	1	2	0	0	1	0	1	0	2	1	0	1	1	0	0
	b	0	2	1	1	2	0	0	1	0	1	2	1	1	1	1	1
	s	0	2	1	2	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
	t	0	1	2	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
4	h	1	2	3	0	0	2	1	2	1	1	2	0	1	1	0	0
	b	0	1	2	1	2	0	0	2	1	1	2	0	1	1	0	1
5	h	0	1	2	0	0	1	0	1	2	1	0	0	1	0	0	1
	b	0	2	1	0	1	0	0	1	0	1	2	1	1	1	1	1
	s	0	2	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
	t	0	1	2	0	1	0	0	1	1	1	2	1	1	1	1	1
6	h	0	1	2	0	0	1	0	1	0	2	1	0	1	1	0	0
	b	0	1	2	1	2	0	0	1	0	1	2	1	1	1	1	1
	s	0	1	2	0	1	0	0	1	1	1	2	1	1	1	1	1
	t	0	1	2	0	1	0	0	2	1	2	1	0	1	1	1	1

Tabla 3: Cuadro de caracterización de fase 2. (Elaboración propia)

A continuación, se describe en detalle lo anteriormente expuesto en la tabla, de acuerdo al tratamiento que se efectúa en cada texto a cada uno de los cuatro elementos secundarios.

Alturas

En los textos 1, 2 y 4 comienzan a trabajar este elemento secundario con la presentación de un problema, luego la construcción y finalmente la definición, mientras que en los otros tres parten con la construcción y después la definición, es decir que en todos los textos hay una intención de generar primero una instancia de descubrimiento, para luego institucionalizar el concepto de altura.

En todos los textos analizados se insta a construir las alturas con escuadras, en tres de ellos (textos 3, 5, y 6) que pertenecen a la misma editorial, las alturas se construyen exclusivamente con este instrumento y en los tres libros restantes (1, 2 y 4) trabajan primero con redes y luego con escuadra. Cabe destacar entonces que en ningún caso se fomenta la construcción con regla y compás o con dobléz de papel.

De acuerdo a los registros que presentan las indicaciones para construir las alturas, se destaca que la mayoría de los textos son del tipo icónico y lenguaje natural, mientras que en dos de ellos (textos 3 y 6) sólo se observa el registro icónico.

A su vez, se analizan en todos los textos las características de las alturas en los triángulos según lados y ángulos, salvo uno (texto 5) sólo las analiza según las medidas de sus ángulos.

En ningún texto de estudio instan a manipular un procesador geométrico (referencia web).

Las metodologías de trabajo propuestas en las actividades son variadas, en tres textos (3, 4 y 6) sólo se trabaja en forma individual tanto la construcción como el desarrollo de conclusiones, en otros dos textos (1 y 2) además de esto se fomenta la discusión grupal para generar acuerdos. En un libro se encontró que se incentiva tanto el trabajo grupal como el individual en la construcción y conclusiones. En otro texto de estudio (texto 5) se presentan actividades de construcción en forma personal y la generación de conclusiones de manera grupal.

Bisectriz

En los seis textos revisados, se observa que la bisectriz se trata sin la presentación de un problema, en la mayoría de ellos (texto 1, 2, 3 y 5) se comienza a trabajar este contenido desde la definición y sólo en dos libros (texto 4 y 6) parten con la construcción, para luego institucionalizar este elemento secundario.

Respecto a los métodos de construcción de las bisectrices, en todos los textos de estudio se plantea mediante la construcción con regla y compás y con dobléz de papel. Sólo en uno de los libros (texto 5) se presenta primero la construcción con regla y compás, en el resto comienzan a tratarla con dobléz de papel. En algunos textos utilizan también la escuadra, pero para la construcción del incentro.

En tres libros (texto 3, 5 y 6), de la misma editorial sólo presentan indicaciones con registro icónico, mientras que el resto de los textos (1, 2 y 4) primero presentan el paso a paso en forma escrita, para luego mostrar las imágenes al respecto.

En todos los textos fomentan el análisis de las características de las bisectrices según los tipos de triángulos, la mayoría comienza trabajando con triángulos según lados y luego según ángulos, mientras que sólo uno parte el análisis de triángulos según ángulos y luego según sus lados.

En la mitad de los textos de estudio (textos 1, 2 y 4) no se alude a trabajar con procesador geométrico las bisectrices, el resto de ellos (textos 3, 5 y 6) son de la misma editorial e indica trabajar con un procesador geométrico online, es decir con un applet, indican lo que deben hacer y además incluyen preguntas orientadoras para su trabajo.

En cuanto a las metodologías de trabajo que aparecen en los libros de estudio, en los seis se observa que inducen a un trabajo individual de construcción y de contestar preguntas orientadoras. Las diferencias se encuentran en los planteamientos para los trabajos grupales, donde en tres textos (1, 2 y 4) de la distinta editorial fomentan sólo la realización de discusiones y llegar a conclusiones en grupo, mientras que en los otros tres (textos 3, 5 y 6), que son de la misma editorial, se insta a construir y también a discutir y generar conclusiones en grupos.

Simetral

De acuerdo a los seis textos revisados y en los que aparecen los elementos secundarios del triángulo, tres de ellos (textos 3, 5 y 6) trabajan con la construcción y definición de la simetral, cabe destacar que los tres textos pertenecen a la misma editorial: Santillana del Pacífico S.A.

Respecto a la presentación de contenidos en dos textos (textos 3 y 5) se presenta la definición del concepto en cuestión y luego construye, al revés que el texto que se utiliza en la actualidad (texto 6), el concepto se construye para encontrar la definición.

Para los métodos de construcción del elemento en los tres representantes (textos 3, 5 y 6) se trabaja utilizando regla y compás, mientras que en sólo un ejemplar (texto 3) complementa con la construcción de la simetral con doblez de papel.

En cuanto al registro que se utiliza al momento de proporcionar las indicaciones para la construcción y las actividades pertinentes, en los tres casos se utilizan ambos registros al mismo tiempo, es decir, se presenta el concepto con lenguaje natural y a su vez con registro icónico, cada uno depende del otro de acuerdo al tipo de indicaciones presentadas.

Los tres textos trabajan de forma diferente el análisis de la simetral, de acuerdo a los tipos de triángulos que utiliza para la construcción de ésta, considerando que en este caso los tres libros analizan la simetral de manera diferente. En un ejemplar (texto 3) se trabajan con triángulos según la medida de sus ángulos, otro (texto 5) sólo considera triángulos según la medida de sus lados y en un caso (texto 6) utiliza ambos tipos de triángulos, primero según la medida de sus ángulos y luego según la medida de sus lados.

En dos casos (textos 5 y 6) utiliza procesador geométrico para verificar o complementar los contenidos, en este caso se trabaja con un procesador geométrico online, donde se ha generado un applet indicando el procedimiento a seguir y presenta preguntas guías para la reflexión del caso. El caso que no se nombra, no alude al trabajo complementario con procesador geométrico.

De acuerdo a la metodología de trabajo que se realiza en cada uno de los textos analizados, se observa que en dos ejemplares (textos 5 y 6) se trabaja de acuerdo a diferentes metodologías. En primer lugar respecto a la cantidad de personas, donde realiza las actividades de manera individual y también grupal, todo dependiendo del propósito del contenido y desde este modo ambas metodologías instan el trabajo de construcción del concepto mediante manipulación de materiales y también se requiere concluir de acuerdo a diferentes preguntas orientadoras en los textos. El otro ejemplar (texto 3), sólo trabaja de manera individual en el momento de construir y reflexionar los conceptos, lo que manifiesta la nula intención del texto para trabajar algunas actividades de manera grupal.

Transversal de Gravedad

Al igual que en caso anterior, existen tres ejemplares (textos 3, 5 y 6) de los seis analizados, que utilizan y trabajan este concepto de transversal de gravedad y los tres libros corresponden a la editorial Santillana del Pacífico S.A. Los tres textos coinciden en la presentación de los contenidos, es decir comienzan a trabajar con la construcción del concepto, esto sea ir definiendo el concepto mediante diferentes

materiales, luego de dichas construcciones y cuando el concepto está siendo definido se institucionaliza a través de una definición formal.

Respecto al orden en que es presentada la construcción del concepto y al igual que en el caso anterior los tres libros coinciden en la manera de trabajo, en esta ocasión sólo se utiliza el método de construcción con regla y compás, dejando de lado otros procedimientos: el doblado de papel, escuadra y manejo de redes.

En cuanto al registro en que se presentan las indicaciones de la construcción e instrucciones de actividades, en los tres textos que se presenta este tema, se maneja de manera diferente, ya que en un caso (texto 3) sólo se utiliza el lenguaje natural, sin utilizar imágenes ni contenido ilustrativo, en otro libro (texto 5) utiliza paralelamente el lenguaje natural junto al lenguaje icónico, es decir, realiza indicaciones con ambos registros a la vez, y por último (texto 6) utiliza el lenguaje natural, ejecutando las instrucciones mediante texto y luego lo demuestra a través de imágenes o lenguaje icónico.

Los tres ejemplares se ocupan del concepto de transversal de gravedad de manera diferente respecto al análisis de diversos tipos de triángulos, es decir en una ocasión (texto 3) utiliza los triángulos según la medida de sus lados y en los dos casos restantes (texto 5 y 6), ocupan ambos tipos de triángulos, respecto a la medida de sus ángulos y de sus lados, aunque en ambas ocasiones se presentan en diferente orden. En el texto nº5 utiliza primero triángulos según la medida de los ángulos, seguido por la medida de sus lados, mientras que el texto nº6 trabaja primero con triángulos según la medida de sus lados y luego según la medida de sus ángulos.

Respecto al uso de procesador geométrico, sólo el texto nº5 utiliza un applet para señalar y complementar la utilización del concepto. En este caso, dicho procesador se puede manipular para identificar y demostrar que el centro de gravedad (intersección de las tres transversales de gravedad) siempre se encontrará en el interior de un triángulo cualquiera.

Para finalizar con el análisis de los cuatro elementos secundarios del triángulo de acuerdo a la investigación de los cinco textos anteriormente mencionados y de acuerdo a las metodologías de trabajo y de igual forma que en el caso de la simetral, existen dos casos en los que insta el trabajo tanto individual como grupal, en ambas ocasiones intenta construir el concepto y también pretende que los estudiantes realicen reflexiones y conclusiones al respecto: En el otro caso

construye y motiva la realización de conclusiones de manera individual, dejando de lado el trabajo en parejas o de manera grupal.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1. Paradigma o enfoque de investigación

La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo en la que se observará, describirá y analizará producciones y percepciones de estudiantes de séptimo año básico en situación de trabajo matemático frente a actividades centradas en eje de Geometría, particularmente los elementos secundarios del triángulo con uso de dobles de papel y origami. Todo lo anterior, con la intención de, en el marco de un estudio cualitativo, procurar abandonar prejuicios, perspectivas y creencias sobre ellos, observando los fenómenos como si se estuviesen viendo por primera vez. (Taylor & Bogdan, 1987).

Como lo señalan Taylor y Bodgan *“Para el ‘investigador cualitativo’, todas las perspectivas son valiosas. Este investigador no busca ‘la verdad’ o ‘la moralidad’ sino una comprensión detallada de las perspectivas de otras personas.”* (Taylor & Bodgan, 1987, p. 21), por ende, para comprender mejor cómo toman la actividad matemática en la cual se sitúa a los estudiantes, se incluirá una entrevista a un profesor de matemáticas, en que nos planteará sus percepciones acerca de las actitudes que tienen en forma cotidiana en contraste con las que tomarán ante la situación.

3.2. Diseño metodológico

El diseño de investigación es un estudio de casos de tipo exploratorio, *“los estudios exploratorios se efectúan normalmente, cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado o que no ha sido abordado anteriormente”* (Hernández, Fernández & Baptista, 1991, p.58). En efecto, no obstante que existe bastante información acerca del origami, una considerable cantidad de bibliografía respecto de la matemática con el origami e incluso se pueden encontrar experiencias de aula no sistematizadas como herramienta de apoyo, desde el punto de vista investigativo no se han encontrado estudios formales que den cuenta de la influencia de este tipo de técnicas en situaciones de trabajo matemático con estudiantes. En particular, nada con relación a los elementos secundarios del triángulo.

3.3. Descripción del caso, escenario y actores

El caso se sitúa en un colegio ubicado en la comuna de Macul, en la Región Metropolitana, en un curso de séptimo Año Básico. Se diseñó y aplicó una secuencia de trabajo para los elementos secundarios del triángulo, con uso de dobleces de papel y origami a un total de 24 estudiantes, del curso de séptimo año considerado para el estudio.

El establecimiento educacional es dependiente de la comunidad salesiana, el cual ofrece los niveles: Pre-escolar, Educación General Básica y Enseñanza Media, en la modalidad Humanista-Científico, orientado a la continuación de estudios superiores. Es un establecimiento para varones, con una matrícula de 1512 estudiantes en el mes de Marzo del año 2012; con nivel socioeconómico medio alto, particular subvencionado, con subvención compartida, poseyendo jornada escolar completa.

Los criterios de selección del grupo al cual se les aplicó el estudio fue:

- Ser estudiantes de un establecimiento educacional perteneciente al sistema educativo formal, y que sea accesible a los investigadores. En el establecimiento considerado, una de las Investigadoras desarrolla su práctica profesional, por lo que la viabilidad para el estudio se aseguró desde su inicio.
- Ser estudiantes que se encuentran cursando Séptimo Año de Enseñanza Básica. La unidad III correspondiente al eje de Geometría, incluye los siguientes contenidos a trabajar:
 - Construcción de ángulos y triángulos mediante regla y compás o un procesador geométrico.
 - Caracterización de elementos lineales del triángulo mediante regla y compás o un procesador geométrico
 - Redacción de pasos de una construcción mediante regla y compás.

Dichos contenidos corresponden al programa de estudios de matemática actual de ese nivel. Aunque los contenidos aparezcan sólo para construcciones con regla y compás, en éste se explicita el trabajo con material concreto en forma genérica, no sólo con regla y compás, por lo que la investigación se enmarca perfectamente en aquello.

- Que los estudiantes hayan desarrollado los contenidos Elementos Secundarios del Triángulo, correspondientes a la Unidad III del Eje de Geometría.

La secuencia de trabajo se realizó en tres partes, con una duración total de 3,5 horas (210 minutos), con los recreos correspondientes, en primer lugar se les entregó a los estudiantes la guía de trabajo. Una vez terminada se realizó la segunda parte de la secuencia de trabajo, que consistió en la construcción con Origami. Cuando se concluyó la realización de éste, se entregó la parte final del instrumento que consiste en una encuesta estructurada abierta.

3.4. Fundamentación y descripción de Técnicas e Instrumentos

Las técnicas e instrumentos utilizados para llevar a cabo el estudio, fueron los siguientes:

Entrevista abierta no estructurada a grupo de estudiantes del 7° año A del Liceo considerado para el estudio: Esta entrevista estuvo enmarcada en la recopilación de información necesaria para los análisis preliminares, previo al diseño de la secuencia de trabajo. Particularmente, se relaciona con analizar las concepciones de los estudiantes, incluyendo las dificultades y obstáculos.

La entrevista se realiza considerando que los estudiantes tuvieron dos profesores y, además, estuvieron un período de tiempo sin docente. Lo anterior podía significar que los contenidos en cuestión no se hubiesen tratado, se hubiesen visto de forma deficiente o que se trabajaran en forma normal. Por lo que la entrevista comienza con preguntas genéricas como: ¿Conocen los elementos secundarios del triángulo?, para luego generar preguntas que den mayor cuenta del contexto.

Encuesta a estudiantes: Se realiza en forma individual al término de la sesión, cuando los estudiantes terminan sus guías y son entregadas a las investigadoras. Es individual porque se pretende identificar si trabajaron alguna vez la geometría con esta técnica, si sabían de ella, para luego conocer sus percepciones frente a las actividades.

La primera pregunta que se realiza indica si poseen experiencias previas de clases de geometría con origami. La segunda pregunta se dirige a conocer la emocionalidad del estudiante frente a la situación planteada, la pregunta se enfoca en la manifestación de emociones acerca de la actividad realizada. La tercera pregunta consiste en la necesidad de modificar la actividad, dicha pregunta tiene por objetivo que los estudiantes puedan efectuar críticas o transformaciones a la

actividad ya planteada, a fin de recoger insumos a considerar para generar recomendaciones para el rediseño de la secuencia de trabajo. Y para finalizar, se consulta a los estudiantes si conocen o han oído hablar acerca del Origami, con el fin de recoger antecedentes acerca de la experiencia previa de los estudiantes con dicha herramienta de trabajo.

Encuesta abierta al profesor de matemáticas del curso en estudio: La entrevista se efectúa luego que el docente observa la clase desarrollada por las investigadoras. Para ello una investigadora le hace entrega del instrumento al final de la sesión. La intención de la encuesta es que por medio de una comparación, desde la perspectiva docente, se distinga el cambio de actitud de los estudiantes frente a este tipo de trabajo.

La encuesta contiene preguntas que deben tener relación con el comportamiento de los estudiantes en la clase, primero señalando las similitudes existentes entre las clases realizadas comúnmente y la observada. Luego, señalar y desarrollar las diferencias observadas, para que al finalizar ambas comparaciones, el docente pueda realizar los comentarios que estime pertinente.

3.5 Validez y confiabilidad

La secuencia de trabajo (ver anexos 4 y 6) se sometió a la validación de dos expertos, ambos académicos de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, de la Universidad Católica Raúl Silva Henríquez. La primera validadora es la académica Isabel Barros Inostroza, Profesora de Matemáticas y Computación, con especialización en Informática Educativa y, el segundo, el académico Patricio Pérez Reyes, Licenciado en Educación, Profesor de Matemáticas con mención en Estadísticas, y vasta experiencia en la enseñanza de la geometría.

Luego de la validación, la secuencia de trabajo es sometida a un análisis y reestructuración considerando las observaciones y comentarios realizados por los académicos antes mencionados (ver anexos 5 y 7).

3.6. Recogida y Análisis de la Información

Los instrumentos utilizados para la investigación, que se mencionaron en la sección 3.5, fueron utilizados en el contexto de una metodología de recogida de la información, la cual a su vez también funge como metodología de análisis de la información, denominada Ingeniería Didáctica.

Para analizar los datos es necesario estar al tanto de la situación y contexto de las muestras analizadas. Al respecto, Douady sitúa a la ingeniería didáctica como *“un instrumento privilegiado para tener en cuenta la complejidad de la clase”*. (Douady, 1987, citado en Artigue, Douady, Moreno & Gómez, 1995, p.37). Esta metodología describe el proceso experimental, por medio de una distinción temporal en cuatro fases, las que corresponden a *“... la fase uno de análisis preliminar, la fase dos de concepción, la fase tres de experimentación y finalmente la fase cuatro de a posteriori y evaluación”*. (Artigue, Douady, Moreno & Gómez, 1995, p. 38).

La validación, de la secuencia de trabajo, se efectúa sobre la base de una validación interna, realizando un contraste entre el Análisis A Priori y el Análisis A Posteriori. Ambas fases, junto a las otras que conforman la Ingeniería Didáctica se detallan más detenidamente, a continuación:

Análisis preliminar. Se efectúa como primera fase de la ingeniería didáctica y se realiza considerando los objetivos de la investigación. Se debe basar en los aspectos didácticos, analizar la epistemología de los contenidos, la forma actual de enseñarlos, concepciones y obstáculos de los estudiantes, junto con las restricciones de la investigación particular.

Análisis a priori y diseño de la secuencia de trabajo. Este análisis considera el levantamiento de conjeturas acerca de todo lo que el investigador prevea que puede suceder en la aplicación de la secuencia: batería de respuestas que pueden surgir, tipo de obstáculos y errores que podrían ocurrir, partes de la secuencia que les sería más fácil o más difícil de abordar a los estudiantes, entre otros.

Experimentación. Corresponde a la ejecución de la secuencia diseñada a ciertos estudiantes. En ella, el investigador controla las actividades y registra los sucesos más relevantes en la secuencia de la clase.

Análisis a posteriori. Se realiza en función de la recolección de la información obtenida en la experimentación, lo que implica, analizar los datos obtenidos de la experimentación, ya sean las observaciones de las situaciones de aprendizaje y las

producciones de los estudiantes. Todo lo anterior se complementa con otras investigaciones.

Validación. Se basa en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, o sea, entre las expectativas del comienzo y los resultados obtenidos de las situaciones de enseñanza; y se define en qué medida las expectativas fueron alcanzadas.

El análisis preliminar de la investigación o el primer nivel para la elaboración de la situación, tiene como objetivo ser la génesis de una futura estrategia de enseñanza. Se debe revisar y estar al tanto de los conocimientos de quienes serán protagonistas del estudio, analizando también los efectos que tiene la enseñanza que tradicionalmente se les entrega a los estudiantes, considerando las dimensiones didácticas asociadas al funcionamiento del sistema de enseñanza, de modo de hacer un diagnóstico general para la secuencia presentada. No menos importante es profundizar acerca de las dificultades que presentan y de los obstáculos que éstas ocasionan. También analizar las restricciones que se puedan presentar al momento de realizar la secuencia de trabajo, considerando el lugar de realización y el contexto que se presente. Todo lo anterior debe considerarse en torno a los objetivos específicos.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

A continuación se da cuenta del análisis de la información llevado a cabo mediante la metodología de la ingeniería didáctica.

4.1. Análisis Preliminar

Como análisis preliminar para el diseño de la secuencia de trabajo, se analizaron tres dimensiones relacionadas a los elementos secundarios del triángulo: la histórico-epistemológica, la didáctica y la cognitiva.

4.1.1. Análisis histórico-epistemológicos

Respecto al origen de los elementos secundarios del triángulo, no se puede obtener mucha información. El estudio de Boyer (1999), no hace referencia a los elementos secundarios del triángulo, lo que menciona que más se podría relacionar al respecto es el trabajo de Euclides en el Libro I de los *Elementos*, en que trata “...los conocidos teoremas sobre congruencia de triángulos (pero sin ningún axioma que justifique el método de superposición), sobre las construcciones elementales con regla y compás, sobre las desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo, sobre las propiedades de las rectas paralelas (con la consecuencia principal de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos)... las demostraciones del teorema de Pitágoras y su recíproco”. (Boyer, 1999, pp.148-149). También nombra el centro de gravedad en varias oportunidades, pero nunca en relación al triángulo ni tampoco se refiere a sus orígenes.

Al igual que Boyer, en el texto *Historia y filosofía de las matemáticas*, Ángel Ruiz (2003) tampoco hace referencia a los elementos secundarios del triángulo, mencionando en general los elementos de Euclides, además de elementos como componentes de un conjunto, la altura de cuerpos geométricos principalmente y sólo señala el centro de gravedad trabajado por Arquímedes en magnitudes, planos, conos o cuerpos en general.

Por todo lo anterior se puede decir que es desconocido el origen de los elementos secundarios del triángulo. Y esto tiene sentido si se considera que *“Las afirmaciones que se hagan acerca de los orígenes de la matemática, ya sea de la aritmética o la geometría, serán necesariamente arriesgadas y conjeturales, ya que, en cualquier caso, los orígenes de esta materia son más antiguos que el arte de la escritura”* (Boyer, 1999, p. 24) y continúa argumentando la inexistencia de información de los orígenes de las matemáticas indicando que lo único con lo que podemos contar es con suposiciones: *“Nosotros sólo podemos hacer conjeturas acerca de qué fue lo que impulsó a los hombres de la Edad de Piedra a contar, a medir y a dibujar esquemas geométricos, pero lo que sí está claro es que los orígenes de la matemática son más antiguos que las civilizaciones más antiguas”* (Ídem). En síntesis, no hay cultura ni algún personaje al que se le pueda asociar el desarrollo de del conocimiento de los elementos secundarios del triángulo. Por lo tanto estos elementos forman parte de la humanidad desde, al menos, de la época de los registros que lograron sobrevivir a los embates de la historia.

4.1.2. Análisis didáctico

A fin de tomar conocimiento sobre cómo se trabaja en el currículum declarado la enseñanza de los elementos secundarios del triángulo, la dimensión didáctica se abordó a través de la revisión de las orientaciones didácticas del Programa de Estudio de Matemática, séptimo año básico y del análisis de una serie de textos de estudio del sistema escolar.

El programa de estudio presenta orientaciones didácticas para el trabajo anual y por unidades, en función de la secuencia de trabajo se consideran las siguientes (Unidad de Currículum y Evaluación, 2011):

- Se invita a la utilización de **materiales concretos** y la realización de trabajos prácticos.
- El profesor debe recordar el contexto cultural e histórico de la disciplina.
- Los estudiantes deben conjeturar y verificar el comportamiento de los elementos y sus relaciones.
- Se debe sacar provecho de los errores, en forma constructiva para fomentar aprendizajes significativos.
- Generar un ambiente creativo que permita la formulación, verificación o que se refuten conjeturas acerca de problemas planteados.

- Las construcciones geométricas posibilitan la sistematización y el establecimiento del orden en las instrucciones.
- Seguir rigurosamente las indicaciones para realizar la construcción geométrica con éxito.
- Las construcciones geométricas permiten el trabajo grupal y el cambio de ambientes en la sala de clases.
- El profesor debe destacar la secuencia, el orden y el respeto a los conocimientos previos de los estudiantes.

En cuanto al análisis de textos de estudio de matemáticas de séptimo año básico, éste se desarrolla exhaustivamente en el acápite 2.4. Análisis de Textos de Estudio.

4.1.3. Análisis cognitivo

El análisis cognitivo se llevó a cabo mediante una entrevista efectuada a cinco estudiantes del curso en el cual se aplicaría el estudio, los cuales fueron escogidos aleatoriamente a fin de recabar antecedentes de las concepciones, contexto y obstáculos que pudiesen resultar relevantes de considerar para el estudio.

La encuesta se realizó en el patio del colegio, donde predominaba el silencio y la tranquilidad, ya que los cursos se encontraban en clases en esos momentos. Las preguntas se realizaron en torno a concepciones de los elementos secundarios del triángulo y a la modalidad en que estos habían sido trabajados en las clases anteriores. La idea de realizar la entrevista de manera abierta y con más de un estudiante fue que ellos pudiesen comentar con sus pares acerca de lo consultado y se generase un debate al respecto, aunque cabe destacar la buena disposición de los entrevistados para entregar su opinión.

En vista a la entrevista realizada, fue posible distinguir que los estudiantes reconocían los conceptos de altura, bisectriz, transversal de gravedad y simetral. También los relacionaban con perpendiculares, puntos medios, vértices y ángulos, pero de modo desarticulado, confusamente.

I: Chicos, ¿Ustedes me podrían decir por definición que es la altura de un triángulo?

Todos: Ehhhhhhh...mmm...ehhh.

E3: Es lo que se, es lo que se...ehhh, ahhhh.

E2: Ya si usted no sabe. Es desde el vértice...

E1: Al lado opuesto.

E2: ...a la simetral del lado opuesto. La simetral es el punto medio...en el equilátero y en el isósceles es al medio, pero en el escaleno no siempre.

(Transcripción de entrevista a estudiantes, Anexo 2)

En cuanto a la metodología de trabajo, ésta había sido de manera expositiva por parte del docente, con soporte en ejercicios y uso de compás:

E2: Nos pasaba materia y también nos pasaba ejercicios.

I: Pero, ¿Con qué materiales trabajaba para la construcción?, ¿Con regla y compás?

E5: No...sólo nos explicó como se hacía con compás.

E1: Pero no trabajamos.

(Transcripción de entrevista a estudiantes, Anexo 2)

Las dificultades se presentaron al momento de transcribir la grabación, ya que en algunos pasajes se confunde el audio y las opiniones y voces de los estudiantes.

4.1.4. Diseño de la Secuencia de trabajo

El programa de estudios de séptimo año básico actual, incluye como elementos secundarios del triángulo las alturas, bisectrices, simetrales y transversales de gravedad, y son éstos los que se tratan en tres de los textos de estudio analizados (ver 4.1.2.). Es por esta razón que en la secuencia de trabajo no se incluyeron las medianas como otro elemento secundario del triángulo.

El diseño de la secuencia de trabajo está compuesto por dos partes complementarias: orientaciones para la implementación y guía de trabajo, alternándose de la siguiente manera en su aplicación

- Inicio
 - Actividad de Apresto: Trabajo con papeles irregulares (Guía de trabajo)

- Desarrollo
 - Presentación PowerPoint de los elementos secundarios del triángulo (Orientaciones para la implementación).
 - Trabajo con triángulos de papel (Guía de trabajo)

- Cierre
 - Presentación Prezi acerca del Origami (Orientaciones para la implementación)
 - Paso a paso con applet de GeoGebra (Orientaciones para la implementación)

4.1.4.1. Diseño de las orientaciones para la implementación

La secuencia de trabajo (ver anexo 5) comienza con la información a los estudiantes acerca de la actividad y la explicación sobre el contexto en que se enmarca. Se les solicita que se reúnan en grupos de tres integrantes y una vez que se han organizado, reciban las Guías de trabajo.

La investigadora, junto con los estudiantes, lee las indicaciones generales que aparecen en la primera hoja de la guía; responde consultas al respecto, en caso de haberlas. La intención está en que los estudiantes sepan con claridad qué es lo que se realizará en toda la clase y por ello se pretende responder consultas al respecto.

La primera actividad del desarrollo es la presentación del contenido, con el apoyo de una presentación PowerPoint (ver fig. 16). La idea es realizar un repaso de los contenidos, donde la investigadora antes de entregar la información, vaya preguntándoles el contenido antes a los estudiantes, de este modo ir recordando y reforzando en conjunto los conceptos.



fig. 16: Presentación PowerPoint de los elementos secundarios del triángulo.

La presentación PowerPoint fue elaborada como síntesis para que recordaran la noción de los elementos secundarios del triángulo y evitar el desconocimiento de los conceptos base (bisectrices, transversales de gravedad, simetrales, alturas y sus

puntos singulares) para prever que fuese un impedimento al momento de construirlas.

Para comenzar la actividad de cierre, que consiste en la construcción de un dodecaedro con construcciones en base del origami modular, la investigadora pregunta a los estudiantes si conocen acerca del Origami. Una vez que todos realicen sus observaciones y comentarios al respecto, la investigadora señala lo esencial de las acotaciones. Luego con el apoyo de una presentación Prezi (ver fig. 17), la investigadora señala lo que es el origami, sus características principales y clasificación. La intención es introducir el trabajo que se realizará posteriormente con el propósito de orientarlos y motivarlos.



fig. 17: Presentación Prezi acerca del Origami.

La investigadora proyecta el paso a paso para construir un dodecaedro, con el apoyo de un applet de GeoGebra (ver fig. 18), en el que, moviendo un punto, se observa el movimiento a realizar, es decir cada vez que los estudiantes realicen un pliegue y mientras no existan dudas, se procede a realizar el siguiente movimiento y así sucesivamente hasta que se construya por completo el módulo.

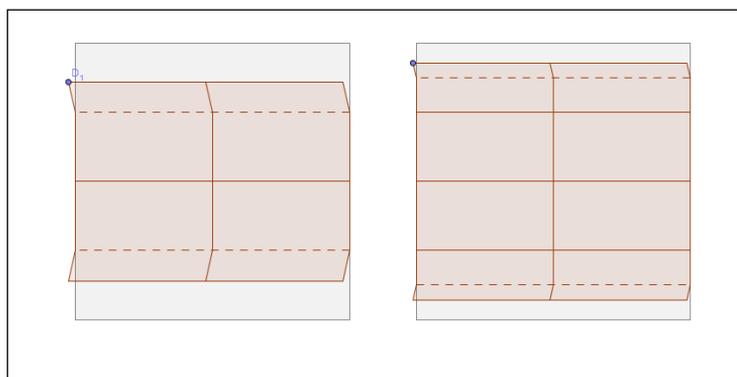


fig. 18: Applet con paso a paso para construcción de dodecaedro con origami modular.

Cada grupo construye dos módulos, solicitando cuando es necesaria la ayuda de la investigadora, es decir, volviendo a visualizar la presentación anterior para realizar los dobleces, esto sólo en caso de ser necesario, y la idea principal es que los

estudiantes se asistan y ayuden en dichas construcciones, ya que ésta tiene como finalidad el trabajo grupal, incentivando el compañerismo y espíritu colaborativo. Cuando llega el momento en que realizan por completo los módulos, se reúnen con otro grupo para encajar todos juntos los módulos y llegar al sólido platónico final. Este origami tiene 12 módulos y es posible (y más cómodo) armarlo al menos con tres personas, para realizar el ensamblaje, por esta razón se escogió este modelo de construcción, para promover el trabajo en equipo, motivando el compañerismo entre los estudiantes que realizaron la actividad antes descrita.

4.1.4.2. Diseño de la guía de trabajo

En la actividad de inicio llamada *APRESTO: Trabajo con papeles irregulares*, se pretende que los estudiantes deduzcan la relación entre los elementos: segmento, punto medio y recta perpendicular, y su construcción con dobleces de papel; deben pegar los papeles en la guía.

Si en la actividad anterior se entregara un papel cuadrado o rectangular, probablemente, el segmento arbitrario solicitado a construir sería un eje de simetría o una diagonal en el caso del rectángulo, por lo que automáticamente construirían la perpendicular que pasa por el punto medio. Para evitar lo anterior, se decide utilizar papeles con bordes irregulares con el objetivo de generar mayores oportunidades de reflexión acerca de las características involucradas en la construcción del punto medio de un segmento.

En la segunda actividad del desarrollo -luego de la presentación PowerPoint de los elementos secundarios del triángulo (ver 4.1.4.1)-, se les entrega los set de triángulos de papel. Cada uno de los set etiquetados con los cuatro elementos secundarios del triángulo y contienen tres triángulos de papel: un acutángulo, un rectángulo y el otro obtusángulo. Cada grupo debe realizar los tres dobleces del elemento secundario que se indica en cada página. Usando el set que le corresponde, deben marcar con lápiz los dobleces realizados, para luego pegar cada triángulo en el elemento y clasificación de triángulos correspondiente.

El primer elemento secundario que deben construir con dobleces es la bisectriz, luego la transversal, estos dos se colocaron antes, pues siempre resulta que sus puntos singulares, quedan al interior del triángulo. Al construir la simetral, en el triángulo obtusángulo el circuncentro queda fuera de éste y finalmente se deja la altura, que además de suceder con el ortocentro lo mismo que al circuncentro, hay

que prolongar los lados del triángulo. Este orden entonces, es intencional, para que en forma gradual noten primero que la intersección puede quedar afuera y luego lleguen a una situación en que además deben prolongar los lados. Desde este punto de vista, sorprende que en todos los textos de estudio (ver 4.1.3.) aparece primero la altura, se sospecha que puede deberse a que es el concepto más cercano en el lenguaje cotidiano.

Dentro de cada elemento secundario, se incluyeron tres recuadros en los que debían colocar primero un triángulo acutángulo, luego uno rectángulo y, finalmente el obtusángulo; esto con la intención de ir aumentando el grado de dificultad, ya que todos los elementos secundarios quedan al interior de los triángulos acutángulos, además que en los triángulos rectángulos, el ortocentro y el circuncentro coinciden con el vértice en el caso del primero y el segundo pertenece a la hipotenusa; finalmente, en el triángulo obtusángulo, los dos puntos singulares mencionados anteriormente quedarán fuera.

4.2. Análisis a Priori

El análisis que se realiza a continuación tiene como principal objetivo el levantamiento de conjeturas respecto a la realización de la secuencia de trabajo, dicha secuencia se divide en dos análisis, primero se realizaron los supuestos relacionados a las orientaciones para la implementación, y luego, se efectuó el levantamiento de conjeturas en cuanto a la guía de trabajo.

4.2.1. Levantamiento de conjeturas respecto de las orientaciones para la implementación

Para las indicaciones respecto a la implementación de la secuencia (ver anexo 5), en el caso en que, a propósito de dichas indicaciones, debiese surgir algún tipo de productividad matemática ya sea de tipo escrita o verbal, se levantaron las siguientes conjeturas:

“la investigadora pide a algunos estudiantes -en los cuales haya observado que hay algunas diferencias en las construcciones que efectuaron- que expliquen al curso lo que realizaron y argumenten por qué el último doblez es perpendicular al primero, en cada caso.”

Se cree que habrá al menos dos tipos distintos de construcciones: uno al realizar un doblez sobre el primero y otro al desdoblar el primer pliegue para hacer el segundo. Respecto de los argumentos acerca de por qué el doblez es perpendicular, podrían indicar que ese doblez es una bisectriz, por lo que al realizar la bisectriz a un ángulo extendido, resultan dos ángulos rectos. En el caso que realizaran un doblez sobre el primero, serían dos bisecciones seguidas, primero a un ángulo completo y luego a dos ángulos extendidos.

Por el contrario, si el curso resulta escueto para expresar sus ideas y debido a que la forma previa de pasar la materia fue sin que ellos construyeran, pudiese aparecer un sólo tipo de argumento, relacionado a doblar sobre el doblez, pues esta sucesión de pliegues parece ser más natural.

“deberán explicar cuál fue el criterio que utilizaron para lograr obtener ese punto medio y, a su vez, explicar por qué ese punto corresponde al punto medio.”

Se considera que habrá al menos una explicación acerca de la marca del punto medio: que hagan coincidir los extremos del segmento. Argumentarán que las partes del segmento obtenidas coinciden y que, por ende, miden lo mismo y el punto entonces es el punto medio.

“Posteriormente, la investigadora les solicita que hagan la perpendicular que pasa por ese punto medio. Al igual que en el caso anterior, si ningún estudiante logra la construcción del punto medio, la investigadora entregará las instrucciones para llevarla a cabo y justificará.”

Como primera construcción se espera que los estudiantes unan los puntos extremos del segmento inicial y con ello hagan coincidir el lado del segmento. Otra forma es que se construya el punto medio, uniendo los extremos del segmento y luego medir con la escuadra de papel el ángulo recto y realizar el doblez correspondiente. Por el hecho de haber reforzado los conocimientos previos al inicio de la sesión y estar en un momento grupal, se supone que no se dará el hecho de que ningún estudiante logre la construcción del punto medio.

“La investigadora indica los conceptos matemáticos que han utilizado y le solicita a algunos estudiantes que señalen cómo se realiza cada uno de ellos con dobleces.”

Se cree que al menos un estudiante querrá señalar cómo se realiza cada uno, se espera que al referirse a:

- Bisectrices: señale que se hacen coincidir los lados, a partir del vértice que tienen en común.
- Transversales de gravedad: indique que se hacen coincidir los vértices, obteniendo el punto medio de un lado y luego doblan la transversal uniendo el punto medio con el vértice opuesto.
- Simetral: exprese que primero deben ubicar el punto medio de un lado y luego doblar la perpendicular al lado que pasa por la marca del punto medio.
- Altura: describe que deben realizar un doblar perpendicular al lado que pase por el vértice opuesto.

“La investigadora realiza una presentación en PowerPoint (...) nombra los elementos secundarios y antes de indicar las características de ellos, va preguntando a los estudiantes lo que ellos recuerdan, para luego indicarlas.”

Se piensa que, de acuerdo a sus conocimientos previos, los estudiantes serán capaces de recordar y con sus propias palabras describir los elementos secundarios del triángulo.

“Mientras la mayor parte de los educandos está construyendo las simetrales en el triángulo obtusángulo, la investigadora examina el trabajo de cada grupo y una vez que han terminado o no, sigan avanzando, generando preguntas orientadoras al respecto.

¿Qué ocurre en el caso de la construcción de las simetrales?

¿Qué problemas pueden visualizarse?

¿Cuándo se les presentó la dificultad?

¿A qué creen que se debe este problema?

¿Qué solución le darían a la problemática presentada?”

Las preguntas recién presentadas tienen como finalidad que los estudiantes logren expresar la situación en la que se encuentran sin que la investigadora les entregue la respuesta, por lo que no necesariamente las realizará todas, sólo las utilizará en caso de necesitar que los estudiantes sigan desarrollando sus ideas hasta que encuentren una solución a la problemática. Se esperaba que en para este caso, el de la construcción de las simetrales, en el triángulo obtusángulo, los estudiantes

presentarán dificultades para encontrar la intersección de las rectas y con ello el circuncentro.

“La intención de las anteriores preguntas tiene relación con generar una instancia de discusión, en que los estudiantes logren generar hipótesis, solucionar el problema y concluir.”

Se espera que los grupos demuestren instancias para encontrar el punto de intersección señalando que las simetrales no se intersectan dentro del triángulo, por lo que se cree que los estudiantes puedan encontrar la solución indicando que se deben realizar las prolongaciones de las simetrales, ya que la intersección queda fuera de él. Una posible solución que se espera es que señalen realizar las proyecciones de las simetrales en la guía y con ello pegar el triángulo de tal modo que se puedan dibujar las proyecciones y la intersección buscada. Otra solución que pueden señalar es que en una pieza de papel se pliegue un triángulo obtusángulo de modo que las prolongaciones de las simetrales queden dentro del trozo de papel.

“Cuando los estudiantes realizan los dobleces y llegan a la construcción de las alturas del triángulo obtusángulo, la investigadora pone atención a las inquietudes de los estudiantes. Cuando la mayoría del curso se encuentra en esta secuencia, la investigadora guía las dudas que presenten los estudiantes realizando las siguientes preguntas orientadoras:

- *¿Qué sucede cuando trabajamos con la construcción de la altura?*
- *¿Qué problemas pueden visualizarse?*
- *¿Qué solución le darían a la problemática presentada?*
- *¿Sucede algo similar que la construcción de las simetrales?*
- *¿En qué se asimilan?*
- *¿Cuál es el problema?*
- *¿Cuál sería la solución a dicho inconveniente?”*

Nuevamente se espera que en la construcción de la altura del triángulo obtusángulo se presentarán dificultades para encontrar las intersecciones de las alturas de los lados. Al igual que en el caso de la construcción de las simetrales, las preguntas orientadoras tienen como intención que los estudiantes logren identificar la situación sin que la investigadora lo señale ni entregue la respuesta, no siendo necesario realizar todas las preguntas, sólo se ocuparán todas en caso de ser preciso.

También se espera que consideren otra solución, que consiste en la construcción del triángulo obtusángulo dentro de una pieza de papel, plegando los lados de éste y luego prolongándolos, junto a ello se generan alturas fuera, por lo que el triángulo debe acomodarse a las prolongaciones de sus lados y al de sus respectivas alturas, de tal modo que sus proyecciones y la intersección de ella queden también dentro de la pieza de papel.

“Mientras se proyecta el tutorial los estudiantes van doblando su papel. Al mismo tiempo, la investigadora propicia una discusión acerca de los dobleces realizados, relacionándolos con: bisectar un ángulo, la altura de una figura, el punto medio y la simetral de un trazo.”

Se espera que los estudiantes generen comentarios respecto a los contenidos tratados en la clase, de este modo relacionar conceptos, que reconozcan y visualicen la existencia de los elementos anteriormente en la construcción que se desea generar.

“Cada integrante del grupo realizará dos módulos, para luego unirlos y construir en conjunto a otro grupo, el poliedro.”

Se piensa que este momento de la propuesta didáctica provocará un ambiente de compañerismo y colaboración entre ellos.

4.2.2. Levantamiento de conjeturas respecto de la guía de trabajo

Para la guía de trabajo (ver anexo 5.2), las conjeturas se levantaron sobre la base de lo que podría suceder en el desarrollo de cada una de sus partes, es decir, el Apresto y las Actividades con los triángulos de papel.

Actividad de APRESTO: Trabajo con papeles de bordes irregulares

En la actividad 1, en que deben construir un **pliegue perpendicular a un doblez**: Se espera que los estudiantes peguen el papel irregular con los dos dobleces solicitados (no más que esos), bien contruidos, que marquen con lápiz los dobleces generados y que los nombren, es decir: que escriban y muestren el segmento inicial y la perpendicular a dicho segmento. Además se cree que la perpendicular **no**

pasará por el punto medio del segmento inicial, pues se espera una perpendicular genérica.

En la actividad 2, en que deben construir la **Perpendicular al dobléz que pasa por el punto medio**: Se espera que los estudiantes peguen el papel irregular con los dos pliegues solicitados (no más que esos), que marquen con lápiz los dobleces generados y el punto medio; que cada uno esté bien construido y que escriban cual es el segmento inicial, el punto medio y la perpendicular que pasa por el punto medio.

Actividad de los triángulos de papel

Bisectrices, transversales de gravedad, simetrales en triángulo acutángulo y rectángulo, y alturas en triángulo acutángulo: Se espera que casi no haya errores, lo que implica que en todas estas actividades los estudiantes realicen sólo los tres pliegues correspondientes, que peguen los triángulos clasificándolos correctamente, delineando cada dobléz con un lápiz y marcando el punto de intersección. Se considera que algunos podrían tener dificultades a la hora de realizar los dobleces, por lo que se cree que harán más de un dobléz antes de llegar al final y por ende quedarán marcas de esos intentos, en adelante a esta característica se le llamará **ensayo y error**.

Alturas en triángulo rectángulo: En este caso se conjetura la mayoría de los grupos identifiquen que los catetos coinciden con dos alturas y que por ende realicen sólo un dobléz. Además se espera que no todos los grupos logren realizar sólo los tres pliegues correspondientes, que los peguen con una correcta clasificación de ellos, que marquen cada dobléz y el punto de intersección con un lápiz.

Simetral en triángulo obtusángulo: Se considera que todos los grupos realizarán los tres dobleces en forma correcta, pero que no todos buscarán el punto de intersección. Se cree que la mayoría de los que buscarán la intersección, una vez pegado el triángulo en la guía, prolongarán las simetrales y encontrará la circuncentro; puede que algunos utilicen un trozo de papel en el que dibujen un triángulo al interior, hecho esto, doblen las simetrales y que aparezca la intersección de ellas.

Además se espera que quienes realicen los pliegues de las simetrales, peguen todos los triángulos bien clasificados, marcando los dobleces y el circuncentro con un marcador.

Alturas en triángulo obtusángulo: se conjetura que algunos grupos realizarán un doblez en forma correcta: la altura que pertenece al triángulo, y que unos menos prolongarán dos lados una vez pegado en la guía o trabajando con un triángulo dentro de un trozo de papel, pues la dificultad ahora estaría en prolongar los lados antes de generar las alturas.

De los grupos que peguen sus triángulos se considera que pegarán los triángulos con una correcta clasificación, marcando todos los dobleces realizados con una lapicera.

4.3. Descripción de la implementación

4.3.1 Descripción de lo ocurrido en las orientaciones para la implementación

En la primera actividad del Apresto, luego de bastantes intentos de construcción por parte de los estudiantes, se identificaron dos estudiantes que tuvieron formas diferentes de efectuar los dobleces. Un estudiante explicó que para hacer la construcción de la perpendicular al segmento inicial, realizó el pliegue inicial, luego desplegó e hizo coincidir los extremos de ese pliegue. El otro estudiante también explicó correctamente su construcción, pero al momento de evidenciar por qué el segundo pliegue era perpendicular al primero, localizó una escuadra sobre su doblez y mostró al curso que era un ángulo recto, pero no puedo explicar la razón de aquello.

Acerca de la construcción del punto medio, los estudiantes quisieron explicar por qué ese era el punto medio, algunos de ellos indicaron hacer coincidir los lados y otros lograron decir que los dos segmentos que se generan tienen igual medida.

Respecto a la construcción de la perpendicular que pasa por el punto medio no hubo inconvenientes para realizarlas, pues ya tenían hecho el punto medio y la perpendicular ya sabían plegarla.

Los estudiantes pudieron referirse a los conceptos con pliegues de papel acerca del punto medio, perpendicular y ambos juntos, aunque cuando se refirieron a los elementos secundarios del triángulo, no fueron capaces de realizar una definición correcta de los conceptos y la realización con dobleces de papeles.

Mientras la investigadora realizó la clase con apoyo de la presentación PowerPoint los estudiantes se mostraron bastante inquietos. Antes de hablar de cada uno de los elementos secundarios, al preguntarles qué conceptos se relacionaban con cada uno de los elementos, se generó un desorden en que respondieron indiscriminadamente todo tipo de conceptos. Finalmente, la investigadora caracterizó los elementos secundarios del triángulo, sin poder hacer referencia a los comentarios de los estudiantes porque la situación no lo permitió.

En cuanto a la actividad de trabajo con triángulos de papel, se extendió por un largo periodo de tiempo, lo que ocasionó que mientras algunos grupos estuvieran realizando la actividad de la simetría e incluso de la altura, otros recién comenzaban a realizar las transversales. Además el curso, por la extensión de tiempo y lo reiterativo de la actividad, se notaban cansados y no cooperaron a que se generaran las preguntas orientadoras.

En el momento de la construcción del módulo del dodecaedro con el paso a paso, los estudiantes se veían motivados y esto se evidenció con su alta participación al asociar los pliegues con los conceptos trabajados. Nunca nombraron la simetral, pero sí indicaron cuando existía una perpendicular que pasaba por el punto medio. También distinguieron cuando el doblez correspondía a una bisectriz.

Para la construcción del dodecaedro, todos los estudiantes hicieron el primer módulo con el apoyo del paso a paso, mientras que en la construcción del segundo módulo, hubo estudiantes que lo terminaron muy rápido y otros que tardaron bastante. En general cada estudiante alcanzó a realizar al menos dos ejemplares, pero al momento de unirlos acudieron exclusivamente a sus compañeros de equipo y no se unieron con otros grupos para ensamblar por completo el poliedro. En base a conversaciones con varios estudiantes se presume que la razón fue el no querer perder sus módulos ya realizados, para continuar su construcción en sus casas.

4.3.2. Descripción de lo ocurrido con la Guía de trabajo

Se formaron nueve grupos de trabajo, seis de ellos fueron tríos y los tres restantes se organizaron en parejas. Después de organizar al curso se realizaron las actividades que se describen a continuación.

APRESTO: Trabajo con papeles irregulares

1. **Pliegue perpendicular a un doblez:** Todos los grupos terminaron esta actividad.

Dobleces: En cuanto al doblez inicial, todos los grupos tendieron a plegar el papel por la mitad. Cuatro de ellos presentaron un papel irregular con sólo dos dobleces, en todos ellos la perpendicular al segmento está cerca del punto medio del segmento inicial. Otros cuatro grupos presentan más de una perpendicular al segmento inicial (ver fig.19) y el último tiene dos pares de rectas perpendiculares, cuya intersección coincide.



fig. 19: perpendiculares a doblez.

Marcas con lápiz: Cuatro grupos no marcaron sus dobleces realizados. De los cinco grupos restantes, uno de ellos sólo pinta sobre el punto de intersección; otro, además de marcar los puntos de intersección, indica que son perpendiculares con el símbolo de ángulo recto (ver fig.20), es interesante que colocaron este símbolo en los cuatro ángulos formados por la intersección, evidenciando que todos los ángulos son rectos, cuando es suficiente colocar sólo una marca. Un grupo sólo marcó el segmento inicial y los dos restantes marcan y nombran cada una de las rectas como “segmento” y “recta perpendicular” o “complemento perpendicular”. Llama la atención esto último porque “complemento” está mal utilizado, se consideran dos posibles razones del error: la primera es que lo relacionen con el

complemento de un ángulo y la segunda que se asocia al concepto léxico, en el sentido de completar o hacer íntegra la secuencia.

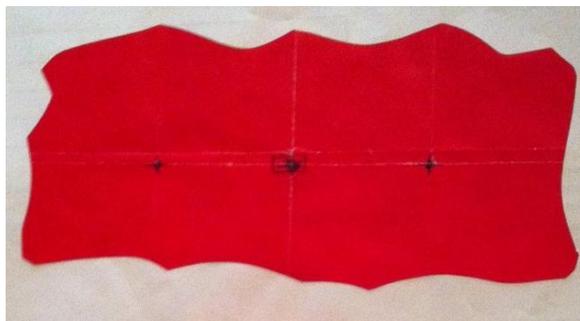


fig. 20: Marcas de ángulos rectos

2. **Perpendicular al doblez que pasa por el punto medio:** Todos los grupos realizaron la actividad.

Dobleces: Todos los grupos marcaron bien el punto medio, no así el doblez perpendicular, ocho grupos lo realizaron correctamente. Cinco grupos realizan el segmento inicial en función del ancho del papel, mientras que el resto no se guían por el ancho ni el largo (ver fig. 21).

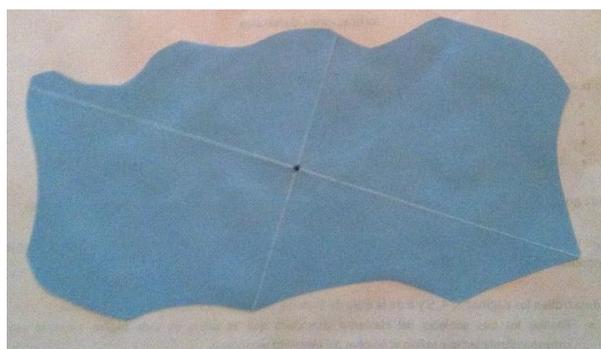


fig. 21: No se guía por los márgenes.

Marcas con lápices: Tres de los grupos no marcan sus dobleces, pero uno de ellos distingue el “*segmento original*” y “*punto medio*”; otros tres sólo marcan el punto de intersección, mientras que el resto además de marcar el anterior, delinear las rectas y dos de estos grupos nombran los elementos “*segmento inicial*”, “*perpendicular*” y “*punto medio*”.

3. Comentarios

Tres grupos no realizan comentarios respecto a esta actividad. En cuanto a las observaciones realizadas por el resto de los estudiantes, cuatro grupos

se refieren a sus **aprendizajes** en la actividad: sólo uno de ellos indica haber sabido la materia; otros dos señalan haber aprendido, e incluso uno de estos nombra sus aprendizajes: “*punto medio*” y “*perpendicular*”. El otro grupo narra indicaciones para realizar las construcciones “*Hay que hacer coincidir los puntos y hay que fijarse en los puntos iniciales*”; se consideró que el haber incluido una explicación sobre lo que realizaron, evidenciaba una mayor comprensión, pero se observó que su construcción de la Perpendicular al doblez que pasa por el punto medio, es el único caso en que está mal realizada la actividad, se estima que quien realizó la última construcción no necesariamente fue quien entregó las indicaciones.

Aún refiriéndonos a los comentarios: tres grupos se refieren a la **dificultad** de las actividades, uno de éstos declara “*Nos costó al principio, pero con las explicaciones de la investigadora, pudimos trabajar sin problemas*”; los otros dos grupos señalan que fue fácil, uno de ellos agrega “*no costó*”. Además tres grupos incluyen sus **percepciones**: uno de ellos encontró “*bonitos ^_^*” los colores y a los otros dos grupos les pareció “*entrete*” y “*muy entrete*”. Llamó la atención que incluyeron *emoticones*, éstos aparecen en otros comentarios, el de este caso “*^_^*” que se asocia a vergüenza.

DESARROLLO: Trabajo con triángulos de papel

Al comenzar la actividad con triángulos de papel, un estudiante tuvo que retirarse y su par se unió a otro grupo, por lo que en adelante pasan a ser ocho grupos en total. Seis grupos alcanzaron a pegar todos los triángulos en la guía, del resto, a un grupo le faltó pegar los triángulos de la altura y el otro no pegó los de altura ni simetral.

A continuación se describe el trabajo que realizaron los grupos, con los triángulos de papel, considerando aspectos tales como: la clasificación que efectuaron, la posición con que cada grupo pegó los triángulos en la hoja de papel, si hubo o no exceso de dobleces y ensayo y error para la realización de los mismos, la marcación con lápiz de los dobleces, y, la identificación de puntos de intersección de los elementos secundarios trabajados.

En cada caso, también, se hace referencia al tipo de comentarios que los estudiantes efectuaron respecto de cada fase.

1. Bisectrices

Antes de comenzar con la clasificación es importante mencionar que en todos los grupos pegaron los triángulos en el espacio determinado para ello.

Triángulo Acutángulo: En cuanto a la **clasificación** de los triángulos existe un caso donde pegan obtusángulo en vez de uno acutángulo, esto quiere decir que en tal grupo no identifican dicha categorización, provocando dificultad cuando se enfrentan sólo al dibujo, sin considerar la medida de los ángulos de forma visible. En ocho grupos el triángulo es pegado en una **posición** en función de un lado del triángulo, por lo que se denomina la base de éste. Esta práctica es habitual en este tipo de actividades, ya que los estudiantes tienen una visión generalizada de los triángulos, ya sea para dibujarlo o como es este caso, posicionarlo en un determinado espacio. En dos grupos no realizan **dobletes** en el triángulo correspondiente, en estos caso sólo dibujan las rectas, de acuerdo a esto, en cinco casos de los restantes realizan los tres dobleces solicitados, lo que no significa que éstos sean realizados de manera correcta, es decir, en tres casos los pliegues corresponden a las bisectrices de los triángulos, del resto, sólo un grupo realiza dos pliegues, sin terminar dicha parte de la actividad.

En tres grupos, respecto a los pliegues se visualiza la existencia del **ensayo y error**, es decir que efectúa el doblez, pero realizándolo más de una vez en otro lugar cerca, pero no el mismo de la bisectriz, con esto da cuenta de la confusión por el concepto o deficiencia con las manualidades. En ningún caso existe el **exceso de dobleces**, es decir realizar más de los solicitados. En cinco grupos **marcan con lápiz** los pliegues, pero no así la **intersección** de ellos ya que en tres casos marcan la concurrencia entre las rectas. Respecto a los indicadores antes descritos es importante destacar que de los ocho grupos que realizaron la actividad, existe sólo un caso donde realizaron correctamente todas las instrucciones de la guía de trabajo.

Triángulo Rectángulo: Al igual que en el triángulo acutángulo, existe un caso donde el triángulo pegado no corresponde a uno rectángulo, destacar que no es el mismo grupo que en el caso anterior. Acerca de la **posición** del triángulo, existe un grupo donde el triángulo es pegado en función del vértice, mientras que el resto posiciona un lado como base de estos; no siendo así la recurrencia de la base de éstos, ya que comúnmente en el caso del triángulo rectángulo se utiliza el cateto como base, pero en dicha ocasión

existen tres casos que lo hacen. En cuanto a la presencia de **dobleces**, siete grupos los realizan, como en el caso anterior, en cinco de ellos realizan los **tres pliegues** correspondientes, en este caso todos los dobleces pertenecen a la bisectriz del ángulo en cuestión. En cuanto al exceso de ellos, no existen casos en que los dobleces sean más a los indicados, como tampoco existe la presencia del **ensayo y error**. En cuanto a las **marcas con lápiz** efectuadas, en cinco grupos delimitan los pliegues del triángulo, en un caso marcan el ángulo recto, para dar muestra que saben a qué tipo de triángulo se enfrentan. Sólo existe un grupo que marca el punto de **intersección** de las tres bisectrices, pero en este caso el grupo no realiza los dobleces, más bien sólo trazan las rectas.

Triángulo Obtusángulo: Respecto a la **clasificación** de éstos, en dos grupos no realizan la categorización correspondiente, vale decir que en este caso es donde hay mayores errores respecto a la clasificación, por lo que en algunos casos desconocen las características de dicho triángulo. Respecto a la **posición**, existe un caso donde el triángulo es pegado en función al vértice, mientras que los siete restantes se caracterizan por localizar su base en uno de los lados de los mismos. Referente a los **dobleces**, en siete casos los realizan y además **los tres** correspondientes a cada triángulo, en este caso existe un grupo que no pliega la bisectriz hasta el vértice opuesto, se destaca que éste es el único grupo que intenta marcar con lápiz que los ángulos son bisectados (ver fig. 22). En dos casos existe la presencia del **ensayo y error**, es decir los estudiantes que realizan los pliegues no tienen la certeza de estar realizando lo correcto, por lo que tienden a equivocarse al momento de doblar el papel. En ningún caso **exceden** a los dobleces solicitados, mientras que al momento de realizar las **marcas con lápiz**, seis grupos las realizan, no así la identificación de la **intersección** de éstos, ya que en dos casos se marca el punto de concurrencia de las tres rectas. Es importante señalar que no existe un triángulo que cumpla con todas las indicaciones antes mencionadas, ya que el único caso donde sigue todas las indicaciones es cuando el triángulo está mal posicionado dentro de la clasificación.



fig. 22: Delinean ángulos bisectados.

Comentarios: existen tres grupos que realizan observaciones, un grupo dice: *“estaba muy fácil, ni nos esforzamos”*, aunque contrastando con las construcciones y respecto a los indicadores nombrados anteriormente, existen deficiencias en cuanto a las delineaciones de los pliegues previamente realizados, ya que sólo marcan sin preocuparse de hacerlas coincidir con los dobleces, dando cuenta del concepto de bisectriz y su definición formal. Otro grupo señala: *“Se realizó sin problemas esta actividad”*, contrastando el comentario con las construcciones, se acentúa el primer caso, donde el grupo en vez de realizar los pliegues, sólo delinea con lápiz, no así en el caso del rectángulo y obtusángulo, ya que en ambos casos no existen deficiencias en la construcción. Para finalizar con los comentarios un grupo dice: *“Difícil”*, poniendo énfasis en las producciones realizadas, se observan deficiencias en realizar los pliegues, tampoco delinear las construcciones antes efectuadas.

2. Transversales de gravedad

Antes de comenzar con la categorización, cabe destacar que en todas las clasificaciones de estos elementos, se han pegado la totalidad de los triángulos correspondientes para tal actividad.

Triángulo Acutángulo: En cuanto a la **clasificación**, un grupo que pega un triángulo obtusángulo en vez de uno acutángulo, dicho grupo corresponde al mismo que comete un error de clasificación en el concepto de bisectriz. En cuanto a la posición en que se encuentran los triángulos, todos los grupos los pegan en función del lado, por lo que este puede denominarse como base de la figura que se trabaja. Respecto a la realización de **dobleces** en seis ocasiones realizan dobleces de las cuales sólo en cuatro grupos realizan los **tres** dobleces solicitados, no existiendo **excesos** en la cantidad de pliegues. En el caso del ensayo y error, existen tres grupos los que al realizar sus pliegues en esta categoría cometen errores en las marcas de sus papeles, por lo que visualizan dobleces cercanos al correcto, lo que

determina la presencia de dudas al momento de efectuar la actividad. Referente a las marcas realizadas con lápiz, en seis grupos delinean los dobleces con lápiz, pero ningún grupo marca la intersección de las transversales. Es importante destacar que existen sólo tres grupos que realizan las transversales de manera correcta, pero no cumplen con todas las indicaciones antes mencionadas en la guía de trabajo.

Triángulo Rectángulo: Todos los grupos localizan el triángulo en el espacio y la **clasificación** correspondiente. En el caso de la **posición** de los triángulos, existe un caso en que es pegado en función del vértice y el resto de las ocasiones en función de un lado, siendo éste categorizado como la base, en este caso se destaca que la mayoría (5 grupos) hace coincidir la base con un cateto de dicho triángulo. Respecto a los **dobleces** efectuados, en cinco grupos realizan los pliegues, en dichas ocasiones realizan los **tres** dobleces, sin existir casos en que realizan más de los dobleces solicitados, hay sólo tres casos que corresponden a las verdícas construcciones de las transversales de dicho triángulo. Se visualiza sólo un caso en que existe el **ensayo y error**, es decir, hay más de un pliegue por una verdadera transversal realizada. En cinco grupos **delinean** las transversales de gravedad, de ellos cuatro remarcan los dobleces antes efectuados, sólo un grupo marca el punto de **intersección**, siendo éste el único caso en que cumple con todas las instrucciones antes designadas en la hoja de indicaciones.

Triángulo Obtusángulo: Siete grupos **clasifican** de forma correcta los triángulos entregados. Respecto a la **posición** en que son pegados, en siete casos se adhieren en función a alguno de sus lados, por esto, dicho lado es denominado como la base del triángulo. Referente a los **dobleces** realizados, cinco grupos realizan pliegues, pero en dichos casos sólo cuatro realizan los **tres** solicitados. Existen seis grupos que realizan las **marcas con lápiz**, no necesariamente realizándolos en forma correcta. En cuanto a la realización de transversal, existen dos casos en que está bien construida, de ellos un caso **marcó** sin realizar los dobleces necesarios, por lo que se deduce que midieron cada lado utilizando el concepto de dicho elemento. En el otro caso cumple con las indicaciones de la guía, siendo éste el único caso donde marca el punto de intersección de las tres rectas generadas.

Comentarios: Existieron dos equipos que realizaron observaciones, un grupo señala lo siguiente: “*muy fácil*” siendo uno de los grupos que no realizó

ninguna construcción de acuerdo a lo indicado en la guía. Otro grupo comenta: “Fácil, se realiza sin complicaciones” (ver fig. 23), en este caso existen algunas deficiencias en las construcciones, aunque no todo está erróneo, pero cabe destacar que en dos triángulos se observan dobleces tentativos que evidencian ensayo y error al plegar, por lo que demuestra que los estudiantes no estaban seguros de las construcciones, esto se contradice con los comentarios realizados.

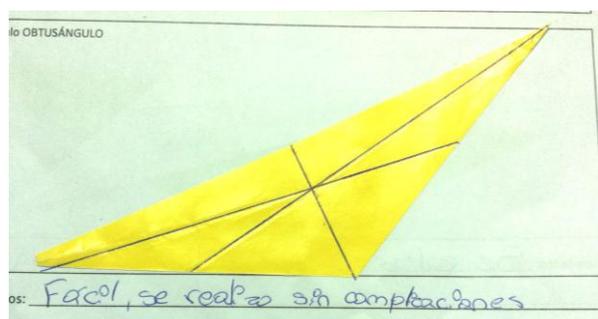


fig. 23: Transversales en triángulo obtusángulo y comentarios

3. Simetrales

Dos grupos no pegaron sus triángulos en la guía, por lo que se hará referencia al trabajo de seis grupos.

Triángulo acutángulo: De los seis triángulos pegados, sólo hay uno que está mal **clasificado**, pues pegan el obtusángulo en su lugar; se cree que esto se debe a que lo pegaron en forma apresurada, ya que ni siquiera le realizaron dobleces y menos lo marcaron. A su vez, la **posición** en que fueron pegados los triángulos, fue en función de los lados, por lo que se distingue uno de ellos como base del triángulo; esto puede deberse a que este tipo de triángulos generalmente se ubica de esta manera y los estudiantes lo colocan así porque les parece más natural. En referencia a los **dobleces**, hay dos triángulos que no los tienen; de los cuatro que los presentan: uno de ellos dobló sólo una simetral y lo hizo bien; del resto, dos las hicieron bien y en la otra guía realizaron una transversal, los otros dos trazos sí son simetrales, es comprensible que suceda esto pues ambas se comienzan marcando el punto medio y si ellos estaban distraídos, es probable que caigan en este error, sobre todo si en el resto de los triángulos las simetrales tampoco están mal hechas. Continuando los dobleces, se observa sólo un triángulo con intentos previos para llegar al doblez final, por lo que en éste hubo **ensayo y error** al realizar los pliegues. En una de las guías se observa

un **doble extra**, éste es una transversal, pero no es el mismo caso de la transversal señalada anteriormente, pues en este caso realizaron la transversal al lado de la simetral, por ello se cuenta como un **pliegue extra**. Sólo en una guía marcaron un punto de **intersección**, es la misma en que marcan los dobleces.

Triángulo rectángulo: Todos estos triángulos se **clasificaron** bien al pegarlos en la guía, de ellos, sólo en una guía se **posicionó** el triángulo en función de un ángulo (ver fig. 24), a diferencia del resto que lo hizo en función de un lado, por lo que se distingue una base del triángulo, en tres de ellos la base es la hipotenusa y en dos es un cateto, por lo que se puede desprender que los estudiantes tienden a ubicarlos en función de los lados, pero no se puede decir que prefieran hacerlo con los catetos o la hipotenusa como base.

Hay dos triángulos que no presentan **dobleces**, de los cuatro que restan, un triángulo tiene sólo un doblez realizado en forma correcta. De los tres grupos restantes, en dos guías realizan adecuadamente los pliegues, mientras que el otro realizó dos dobleces, pero ninguno corresponde a la simetral, ella se ubicaría entre los dos que hicieron. Además, hay dos triángulos con un doblez en particular en que se evidencia que hubo varios intentos (**ensayo y error**) de dobleces antes de marcar el correcto. En ningún caso marcaron la **intersección** de las simetrales.

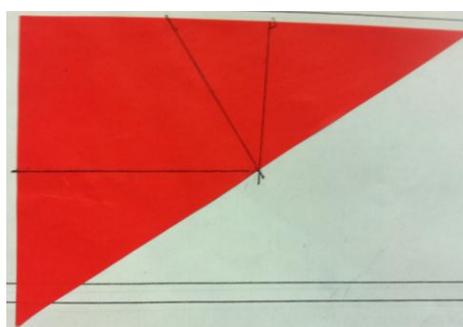


fig. 24: Se pega en función del ángulo.

Triángulo obtusángulo: Uno de los triángulos pegados como obtusángulo es en realidad acutángulo, éste es el único mal **clasificado**; anteriormente se supuso que esto se pudo deber a que esta acción la realizaron de forma apresurada. La posición de todos fue la misma, en función del lado y con base el lado más largo, es decir, el opuesto al vértice de ángulo obtuso. Hubo dos triángulos que no venían con **pliegues**, de ellos, uno marca con lápiz las simetrales; de los cuatro con dobleces, uno tiene sólo una simetral y

el resto tiene las tres, todos estos con los dobleces realizados en forma **correcta**. No se observan dobleces que den la impresión de haber **ensayo y error**, a diferencia del **exceso de dobleces** en dos casos: en un triángulo, al lado de la simetral marcada, está la altura sin marcar con lápiz; mientras que en el otro aparecen todas las bisectrices en lugar de la simetral, se sospecha que en el primer caso se debe a que alguno del grupo se confundió e hizo ese doblez de más; en el segundo caso da la impresión que sucedió lo mismo que en el otro, pero con los tres dobleces. Finalmente, de los dos grupos que **marcaron con lápiz** los elementos, uno realizó todo correctamente; mientras que el otro, además de no haber realizado los dobleces, las marcas estaban mal realizadas, los pies en cada vértice no coinciden con el punto medio y tampoco son perpendiculares a los lados, esto es interesante, pues la única indicación que realizaron la hicieron en forma errada. En ningún caso se observa la intención de encontrar los puntos de **intersección**.

Comentarios: El único comentario lo realizó el grupo que marcó con lápiz y que no realizó dobleces; indicaron que la actividad fue “*papa*”, lo que no es consecuente porque además de no haber realizado los pliegues, todas las marcas con lápiz están mal realizadas. Esto se puede deber a que los estudiantes han visto como se construye con regla y compás, pero no lo han realizado en la práctica, por lo que no han llegado a comprender lo específico del elemento.

4. Alturas

Un grupo no pegó los triángulos correspondientes, entonces se analizará el trabajo de siete grupos.

Triángulo acutángulo: Todos los grupos **clasificaron** bien estos triángulos y la **posición** de todos es en base a un lado del triángulo. Respecto a los **dobleces** realizados, hay dos guías en las que pegaron los triángulos sin realizarles ningún pliegue, hubo dos grupos que sólo doblaron una altura, aquella cuyo pie de altura pertenece a la base, se comprende que haya realizado esto, pues esta altura es la más natural, sólo una está bien realizada. De los cuatro grupos que efectuaron los tres dobleces, tres tienen sólo una altura bien realizada y la otra hizo dos bien; en ningún triángulo se encontraron todos los dobleces correctos. Sólo se ve una altura que intentaron con **ensayo y error** y ella está bien hecha. Se puede decir, que al

haber pocas marcas de intentos por mejorar sus pliegues, es más probable encontrar dobleces mal realizados, porque se conformaron con lo primero que les salió. Se observan **dobleces extra**, pero son dobleces cualquiera. No marcaron ningún punto de intersección, pero lo interesante es que, pese a que en la mayoría de las alturas están mal realizadas, de todas maneras éstas se encuentran en sólo un punto: esto demuestra la claridad que tienen respecto a que las alturas coinciden en un punto.

Triángulo rectángulo: Todos los grupos **clasificaron** bien estos triángulos. Respecto a la **posición**, sólo en una guía pegan el triángulo en función del ángulo; de los que pegan en función del lado, cinco tienen como base la hipotenusa y el otro que queda, tiene un cateto como base. Respecto a los **dobleces**, hay dos triángulos con tres dobleces, cuando corresponde que sólo haya uno, en este caso sí sucede que en ambos casos los tres pliegues no coinciden en un punto. A su vez hay dos triángulos con dos dobleces como alturas, de ellos, uno está correcto. Hay sólo un caso en que hay sólo un dobléz y está bien realizado, pero además de marcar la única altura que no coincidía con los catetos del triángulo, de todas formas realizaron otras dos marcas mal realizadas. No se evidencian marcas de **ensayo y error**, mientras que sí se ven **pliegues extra**, que en su mayoría son bisectrices. Sólo en un caso hay sólo una marca de altura y por ende, pese a que no marcaron el punto de **intersección**, se puede indicar que sólo aquí está bien realizado, pero además sólo en este caso está la marca y no el dobléz, en el resto de los casos no se intersectan en un punto (ver fig. 25) o hacen coincidir las alturas en este punto, pero no están bien realizadas.

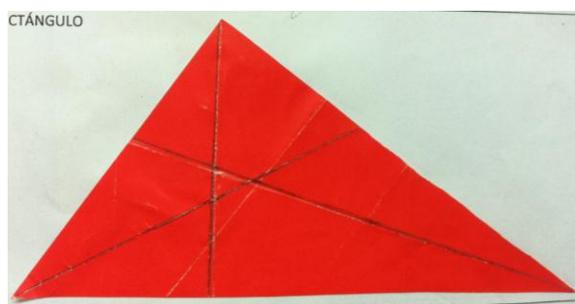


fig. 25: Alturas no se intersectan en un punto.

Triángulo obtusángulo: Todos los grupos **clasificaron** bien estos triángulos y los **posicionaron** en base al lado más largo, el opuesto al ángulo obtuso. En relación a los **dobleces**, hay tres triángulos que no tienen dobleces algunos, además, hay sólo un triángulo con tres dobleces, uno de estos pliegues es la

altura que queda al interior del triángulo, el otro es una bisectriz y el tercer pliegue se hizo coincidir con la intersección: se observan casos en que hacen coincidir los dobleces de forma tal que coincidan en sólo un punto; son tres el resto de los triángulos que tienen un solo doblez como altura, uno de ellos tiene marcas de más que no se realizaron a partir de pliegues; llama la atención que pese a que saben que son tres las alturas y que siempre se intersectan en un punto, no intentaron ubicar éste. Sólo en un triángulo se observan marcas de **ensayo y error**, que fue uno de los que más se acercaron a la construcción. En ningún caso han marcado un punto de **intersección**, pero hay dos triángulos en que coinciden las marcas con lápiz, al interior de los triángulos, por lo que éstas están mal realizadas.

Comentarios: Hubo sólo un comentario: “*muy fácil*”, están bien realizadas las marcas, pero no son todas y además que no están generadas con dobleces. Esto nos muestra que generalmente cuando ya se han apropiado de una forma de realizar ciertas cosas, prefieren no hacerlo de otras formas, pues les es suficiente lo que ya conocen.

4.4 Análisis a Posteriori

4.4.1. Contraste

Para esta etapa de análisis se realiza una comparación entre las conjeturas realizadas en el análisis a priori y la recolección de datos obtenidos en la experimentación de la secuencia de aprendizaje, es decir, a las orientaciones para la implementación y la guía de trabajo.

4.4.1.1. Orientaciones para la implementación

“la investigadora pide a algunos estudiantes -en los cuales haya observado que hay algunas diferencias en las construcciones que efectuaron- que expliquen al curso lo que realizaron y argumenten por qué el último doblez es perpendicular al primero, en cada caso.”

En este caso se pensó que existirían dos tipos de construcciones y de acuerdo a las observaciones y a las producciones de la guía, esto se cumplió, pero se creía que la construcción de pliegue sobre pliegue sería la más frecuente, sin embargo plegar-abrir-plegar fue la más presente.

Respecto a las explicaciones de las construcciones, un estudiante realiza lo que se tenía considerado, construyó y explicó bien. Mientras que el otro estudiante tenía una buena idea para realizar la construcción, pero se alejó de lo esperado, ya que utilizó una escuadra en lugar de hacerlo exclusivamente con papel.

La actividad tardó más del tiempo esperado y esto puede ser consecuencia de que los estudiantes se enfrentaron por primera vez a esta forma de trabajar la geometría y eso implicó a que dedicaran tiempo a explorar esta nueva herramienta.

“deberán explicar cuál fue el criterio que utilizaron para lograr obtener ese punto medio y, a su vez, explicar por qué ese punto corresponde al punto medio.”

Se conjeturó que existiría al menos una explicación sobre la construcción del punto medio y así fue, la primera refiriéndose a hacer coincidir los pliegues, mientras que la otra tuvo relación con el concepto de medida.

“Posteriormente, la investigadora les solicita que hagan la perpendicular que pasa por ese punto medio. Al igual que en el caso anterior, si ningún estudiante logra la construcción del punto medio, la investigadora entregará las instrucciones para llevarla a cabo y justificará.”

En este caso se cumplió lo pensado, ya que las explicaciones a las construcciones se realizan sin problemas.

“La investigadora indica los conceptos matemáticos que han utilizado y le solicita a algunos estudiantes que señalen cómo se realiza cada uno de ellos con dobleces.”

Se esperaba que los estudiantes explicaran la perpendicular y el punto medio a un segmento, y ellos lograron expresar como realizar cada uno, sin embargo no pudieron hacerlo cuando se debían relacionar con los elementos secundarios del triángulo.

“La investigadora realiza una presentación en PowerPoint (...) nombra los elementos secundarios y antes de indicar las características de ellos, va preguntando a los estudiantes lo que ellos recuerdan, para luego indicarlas.”

En este caso se esperaba que los estudiantes recordaran las características relacionadas a los elementos secundarios del triángulo, al preguntarles qué conceptos se relacionaban con cada uno de los elementos, el desorden que se generó impidió que se cumpliera la conjetura respectiva.

“Mientras la mayor parte de los educandos está construyendo las simetrales en el triángulo obtusángulo, la investigadora examina el trabajo de cada grupo y una vez que han terminado o no sigan avanzando, genera preguntas orientadoras al respecto.

¿Qué ocurre en el caso de la construcción de las simetrales?

¿Qué problemas pueden visualizarse?

¿Cuándo se les presentó la dificultad?

¿A qué creen que se debe este problema?

¿Qué solución le darían a la problemática presentada?”

Se esperaba que en el caso de la construcción de las simetrales en el triángulo obtusángulo, los estudiantes presentaran dificultades para encontrar la intersección de las rectas y con ello el circuncentro, aunque la investigadora generó algunas preguntas anteriormente mencionadas, los estudiantes no fueron capaces de generar el punto singular de este caso y con ello no se ocasionó la dificultad esperada. Cabe señalar que este aspecto había sido motivo de dificultad para las investigadoras cuando se situaron en el rol de desarrollar la actividad con dobleces de papel. Resulta interesante analizar lo acontecido desde el punto de vista de que no se rompió el contrato didáctico implicado en la actividad matemática que se estaba realizando, esto es, que al no estar explícito en la consigna entregada a los estudiantes por las docentes investigadoras el “Hallar los puntos singulares”, esto no fue motivo de análisis ni de indagación por parte de los estudiantes. Se les pidió construir las simetrales, las construyeron, por ende, desde el punto de vista estudiantil la tarea está hecha, es decir, la situación como estaba estructurada no generó una evolución de ésta direccionado a enfrentar el desarrollo de un trabajo vinculado al punto singular.

“La intención de las anteriores preguntas tiene relación con generar una instancia de discusión, en que los estudiantes logren definir hipótesis, solucionar el problema y concluir.”

No ocurrió lo que se esperaba, porque ni siquiera se generó instancias de diálogo, en el caso de las simetrales y alturas en el triángulo obtusángulo, ya que los estudiantes estaban cansados y desanimados para continuar la actividad.

“Cuando los estudiantes realizan los dobles y llegan a la construcción de las alturas del triángulo obtusángulo, la investigadora pone atención a las inquietudes de los estudiantes. Cuando la mayoría del curso se encuentra en esta secuencia, la investigadora guía las dudas que presenten los estudiantes realizando las siguientes preguntas orientadoras:

- *¿Qué sucede cuando trabajamos con la construcción de la altura?*
- *¿Qué problemas pueden visualizarse?*
- *¿Qué solución le darían a la problemática presentada?*
- *¿Sucede algo similar que la construcción de las simetrales?*
- *¿En qué se asimilan?*
- *¿Cuál es el problema?*
- *¿Cuál sería la solución a dicho inconveniente?”*

En este caso se esperaba al igual que en el caso de las simetrales se ocasionara la dificultad y también se realizaron las preguntas orientadoras mencionadas, para ellos se esperaba que proyectaran dos de los lados del triángulo y luego de ello se realizaran las alturas correspondientes a tales lados para así generar con la unión de las tres el ortocentro, pero los estudiantes no demostraron interés por ello. Sólo se realizaron, en los casos que sucedió, las alturas que se pueden realizar, es decir una en este caso, y no presentaron la necesidad de construir las restantes, por ello no se generaron hipótesis ni la intención por encontrar las posibles soluciones y conclusiones esperadas. Se considera que tampoco se generó una ruptura del contrato didáctico, ya que los estudiantes no problematizaron el quedar imposibilitados de “visualizar” el ortocentro, pues no estaba en la consigna de la actividad.

“Mientras se proyecta el tutorial los estudiantes van doblando su papel. Al mismo tiempo, la investigadora propicia una discusión acerca de los dobleces realizados, relacionándolos con: bisectar un ángulo, la altura de una figura, el punto medio y la simetral de un trazo.”

Los estudiantes fueron capaces de identificar los pliegues y asociarlos a los conceptos trabajados anteriormente, por lo que se cumplió lo esperado.

“Cada integrante del grupo realizará dos módulos, para luego unirlos y construir en conjunto a otro grupo, el poliedro.”

Se cumplió que la mayoría de los estudiantes realizó dos módulos y que los unieron con sus compañeros de grupo, pero no fue así entre grupos, por lo que en este aspecto no se cumplió lo esperado.

4.4.1.2. Guía de Trabajo

APRESTO: Trabajo con papeles irregulares

1. **Pliegue perpendicular a un doblez:** En general se cumplió lo que se esperaba en esta actividad, salvo algunos casos, en que hicieron cosas de más como marcas con lápices o dobleces extra, lo rescatable es que en general realizaron lo justo y necesario o más. Esto evidencia el entusiasmo con el que comenzaron a trabajar.

Se decidió trabajar con papeles de márgenes irregulares para que los estudiantes notaran bien la diferencia entre una perpendicular cualquiera y la que pasa por el punto medio del segmento inicial, se previó bien este asunto, pero no fue suficiente, pues los estudiantes de igual manera tendieron a marcar en el punto medio. Se cree que se debió a que pese a ser papeles con bordes irregulares, se tiende a completarlos mentalmente como rectángulos (ver fig. 26).

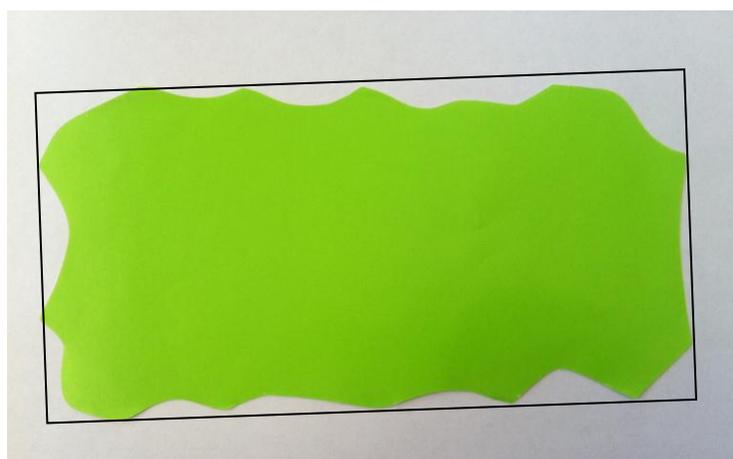


fig. 26: Papel con bordes irregulares visto como rectángulo

2. **Perpendicular al doblez que pasa por el punto medio:** Se cumplió que todos los estudiantes realizaron esta actividad, todos los grupos realizaron bien el doblez del punto medio y la mayoría lo hizo con la perpendicular.

En este caso nuevamente se observa que la mayoría de los grupos pliegan el segmento inicial en función del largo del papel, completando mentalmente el trozo de papel, pese a que se esperaba que la irregularidad del papel impidiera realizar esto.

3. **Comentarios:** Fue pensado para que incluyeran sus conclusiones y algunos de ellos sí las colocaron, pero no se consideró la riqueza de comentarios que podían escribir en esta sección los estudiantes, como la dificultad que les significó o las percepciones más a nivel emocional.

DESARROLLO: Trabajo con triángulos de papel

1. **Bisectrices y transversales de gravedad:** La totalidad de los grupos no realizaron toda la actividad. En su mayoría, pegaron los triángulos clasificándolos y realizando los tres dobleces correctamente, que era lo más importante, pero no fue tan común el marcar con lápiz los dobleces o el punto de intersección. Sucedió lo previsto respecto a que se encontrarían indicios de intentos de dobleces alrededor de uno bien marcado.
2. **Simetrales y alturas:** En esta actividad los estudiantes trabajaron menos que lo presupuestado, pero esto se atribuye a problemas de tiempo. De los grupos que realizaron la actividad, la mayor parte de ellos clasificaron bien los triángulos, tal como se esperaba. No se presupuestó que pliegaran

transversales en lugar de simetrales, pero un grupo lo hizo así y se comprende pues el comienzo de la construcción es similar.

3. **No considerado:** Un asunto que no se presupuestó fue observar la posición en que los estudiantes pegaron sus triángulos de papel en las guías, pero pareció interesante distinguir que la generalidad fue pegarlos en función de uno de los lados como base.

Otro aspecto no pensado con anterioridad fue que los estudiantes marcarían los elementos secundarios con lápiz directamente, sin los pliegues previos y sin los instrumentos necesarios para hacerlo. Este grupo fue el mismo que, antes de haber recibido los set de triángulos, ya estaban dibujando triángulos en la guía, realizando los trazos solicitados y sin herramientas de construcción manual.

4.5. Análisis de encuesta a estudiantes

La encuesta efectuada a los estudiantes es un instrumento de retroalimentación a la actividad antes realizada de modalidad individual (ver anexo 7). La encuesta desea conocer las percepciones y gustos frente a la secuencia, acerca de la construcción de los elementos secundarios del triángulo con dobleces de papel y realización de un poliedro con origami, como también la necesidad de modificar alguna parte de la actividad y saber si los estudiantes conocen acerca del origami. Para evaluar los logros de la secuencia de trabajo se analizan a continuación separando las cuatro preguntas, realizando gráficos con las interpretaciones correspondientes. Es importante señalar que la mayoría de las preguntas son dicotómicas y en algunos casos los estudiantes desarrollan las respuestas y realizan comentarios.

Analizando los datos de las respuestas a la pregunta ¿Habías trabajado la geometría de esta manera alguna vez? (ver gráfico 2), el 79% (19 estudiantes) declara no haber trabajado la geometría de esta manera, es decir con dobleces de papel y origami, mientras el 21% (5 estudiantes) dice haber trabajado geometría con esta modalidad. En dos casos los estudiantes comentan su respuesta señalando nunca haber trabajado la geometría de esta manera, pero que les gustó y encontraron divertida la actividad, mientras el resto de los estudiantes responden sólo con monosílabos (Sí o No).



Gráfico 2: ¿Habías trabajado geometría de esta manera alguna vez? (Elaboración propia)

La segunda pregunta consta de dos partes. La primera pregunta ¿te gustó la actividad? es dicotómica (ver Gráfico 3). De ella, el 96% (23 estudiantes) del curso declara gustarle la actividad. La otra pregunta ¿Cómo te sentiste en ella? es de desarrollo, ya que busca identificar los sentimientos de los estudiantes respecto a la actividad, en la que se realizan diversas opiniones y comentarios, identificando que los estudiantes sienten: confianza, conformidad, motivación, diversión y compañerismo.



Gráfico 3: ¿Te gustó esta actividad? (Elaboración propia)

Respecto a si ¿Modificarías alguna parte de la actividad?, el 83% (20 estudiantes) enuncia no sentir la necesidad de modificar la secuencia de trabajo, mientras el 17% (4 estudiantes) expresa la intención de modificar la actividad, aunque en este caso ningún estudiante comenta la respuesta (Ver Gráfico 4).



Gráfico 4: ¿Modificarías alguna parte de la actividad? (Elaboración propia)

La última pregunta se refiere a identificar si los estudiantes conocían o habían escuchado acerca del origami (ver Gráfico 5), dicho esto el 92% (22 estudiantes) del curso señala conocer el origami, en este caso y respecto a los comentarios realizados los estudiantes señalan que lo conocen o han escuchado del origami a través de los compañeros o la televisión y que en estos casos no habían practicado la técnica. En cambio existe un 8% (2 estudiantes) que declara no conocer ni haber escuchado acerca del origami (Ver Gráfico 5).



Gráfico 5: ¿Conocías o habías escuchado hablar alguna vez del origami? (Elaboración propia)

4.6. Propuestas para el Rediseño

En función de los análisis realizados, se puede decir que el tiempo empleado en la situación de trabajo fue más extenso que el previsto para ella, por lo que se propone que la actividad dure dos sesiones de dos horas pedagógicas cada una. Para la primera sesión se considera la realización de las actividades de inicio y de desarrollo. Y la segunda sesión exclusivamente a la elaboración del Dodecaedro.

En la actividad de inicio, se utilizaron papeles de bordes irregulares para evitar que doblaran sin intención la perpendicular que pasa por el punto medio, pesa a ello igual sucedió que se acercaron a este punto, aunque lo que se esperaba era que construyeran un punto genérico del segmento inicial. Se recomienda entonces que para una futura aplicación es mejor que se trabaje con papeles regulares, con el pliegue inicial (segmento) ya realizado. Evitando de esta forma que el doblez inicial corresponda a los ejes de simetría y diagonales en el cuadrado y rectángulo.

Se observó que la actividad de los triángulos de papel requirió mucho tiempo en realizarse. También era reiterativa y engorrosa, porque se les solicitaba a cada estudiante realizar un doblez por cada triángulo entregado. Para solucionar esto anterior se propone que a cada estudiante del grupo le corresponderá un set con cuatro triángulos, todos acutángulos, rectángulos u obtusángulos, con esta propuesta no se soluciona lo repetitivo de la actividad, pero sí lo embrollado.

En referencia a la actividad de cierre con Origami modular y considerando que se realizará en una sesión completa de clases. Cada estudiante debería realizar al menos cuatro módulos, por lo que sólo con los módulos del grupo podrían armar el dodecaedro. La ejecución del primer ejemplar seguiría siendo con el apoyo de la investigadora, el paso a paso de GeoGebra y relacionándolo con los contenidos tratados, pero para que los estudiantes hagan los tres módulos restantes se les entregaría una hoja con el tutorial.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

No se encontró registros bibliográficos respecto a los elementos secundarios del triángulo, se puede deber a que son parte de los orígenes de las matemáticas pues éstos “...son más antiguos que las civilizaciones que el arte de la escritura” (Boyer, 1999), por lo que no se puede reconocer sus inicios.

Del análisis didáctico efectuado, se pudo detectar que de los once textos consultados, seis incluían el contenido de los elementos secundarios del triángulo. De éstos, la mitad consideraba los cuatro elementos y el resto sólo la altura y bisectriz, esto puede variar en adelante dado el último ajuste curricular, pues a diferencia del anterior, hace referencia a la simetral y transversal de gravedad. En el caso de los métodos de construcción planteados en los textos, la mayoría propone al menos la construcción con regla y compás para todos los elementos salvo la altura, que se plantea trabajarla con escuadra. En cada uno de los libros de estudio proponen el trabajo de este contenido con material concreto, siendo coherente con lo que indica el Programa de Estudios; pero esto no representa la realidad del curso investigado, quienes vieron el contenido de forma lacónica y sin realizar construcción alguna, lo cual formó parte importante del problema de investigación.

En todos los textos, la altura es el primer elemento presentado, las razones no se explicitan en los textos consultados, por nuestra parte pensamos que ello puede deberse a que es el concepto más cercano a la realidad, pero en esta investigación se propone trabajarla al final -después de la simetral-, ya que en el triángulo obtusángulo los puntos singulares correspondientes a cada una de ellas quedan fuera del polígono, por lo que se pretendía provocar un obstáculo en los estudiantes al tener que prolongar las simetrales y los lados del triángulo en el caso de las alturas, situación que no se dio, pues los estudiantes participantes del estudio se remitieron a efectuar lo que se les indicaba en las instrucciones del diseño didáctico en cuanto a construir los elementos secundarios pedidos, en cada uno de los triángulos de papel entregados, sin preguntarse por la intersección de dichos elementos. Ni siquiera intentaron prolongar los lados para la construcción de las alturas en el triángulo obtusángulo, dibujando sólo la que pertenecía al triángulo.

En el caso de la simetral, dado que ellas siempre quedan dentro del triángulo, las plegaron todas, pero no las prolongaron con la intención de encontrar su intersección en el caso del obtusángulo. El que los estudiantes no realizaran lo

esperado, evidencia la presencia de un contrato didáctico tradicional, que no se rompe, pues como las investigadoras nunca explicitaron la búsqueda de los puntos singulares ni en las indicaciones de la actividad se solicita, no se levantó por parte del estudiantado la necesidad de hacerlo.

La secuencia de trabajo constó de tres partes, cada una de ellas con un grado de dificultad mayor a la anterior y, según lo realizado en las producciones de los estudiantes, se pudo observar que ellos lograron relacionarlas. En la primera, los estudiantes debieron asociar características geométricas a movimientos comunes con papeles de bordes irregulares, pero se propuso para el rediseño utilizar papeles cuadrados o rectangulares con un segmento marcado previamente, con la intención de tener la certeza que éste no pertenezca a los ejes de simetría y/o diagonales.

En la segunda actividad tuvieron que utilizar construcciones realizadas en la anterior para plegar los elementos secundarios del triángulo. A medida que avanzaba su aplicación, se produjo un descenso en la participación de los estudiantes debido a lo extenso de ella, por lo que en el rediseño se propone que la secuencia de trabajo dure dos sesiones.

Como actividad final, manejando los conceptos vistos anteriormente, realizaron los dobleces para construir los módulos, uniéndolos para formar el dodecaedro. En su rediseño se plantea aumentar el tiempo de la actividad, lo que permitiría que cada grupo ensamblara el poliedro, solucionando lo sucedido al no compartir los módulos entre grupos. Según la entrevista realizada a uno de los profesores de matemática del curso, se puede señalar que ésta fue la que más les agradó, pues los vio más participativos y motivados que nunca. Y en general, los estudiantes expresaron haber sentido en la sesión, entre otros, confianza, motivación, diversión y compañerismo, lo que permitió lograr uno de los objetivos específicos: Conocer la percepción estudiantil acerca del origami como forma de trabajo en matemáticas y esta aceptación permite validar lo planteado por Delgado, Fiol & Zapatero (2003) acerca de los aportes del origami en educación primaria.

Esto conduce a levantar -en el ámbito de la didáctica específica- una reflexión respecto de aspectos a atender en el trabajo con elementos secundarios del triángulo: en el presente estudio, el uso de dobleces de papel para el trabajo con elementos secundarios del triángulo, si bien es cierto, favoreció el trabajo colaborativo, la constancia, habilidades motrices y rigor en la realización de construcciones, sucede que el hecho que el papel en sí sea "limitado" -para el caso en que el punto singular queda fuera del rango corporal del papel- parece actuar

como una limitante para que el estudiante explore respecto de ubicar los puntos singulares. Este problema es poco probable que ocurra cuando se trabaja con regla y compás, dado que en ese caso cuando se trabaja con triángulos y sus respectivos puntos singulares, éstos en general “cabén” en la hoja del papel que se está utilizando, por lo que de todos modos “quedan a la vista”. En la enseñanza usual con regla y compás, entonces se hace más difícil capturar esta suerte de divorcio entre puntos singulares y simetrales (y alturas) para el caso de triángulos obtusángulos, pues al estar en la hoja visibles, difícilmente surge la pregunta de si se relacionan o no, por el contrario, se favorece una hipótesis pedagógica ad hoc respecto de que los estudiantes relacionan ambas cosas.

Se concluye entonces como una de las limitaciones del origami que - al menos cuando no se explicita el maniobrar o identificar un objeto matemático fuera del papel “que se ve” - no emerge la inquietud estudiantil de ver qué sucede con aquello vinculado a lo que se está trabajando pero que “sí se ve”. En este caso, lo que se ve, vía los trozos de papel, son los elementos secundarios, y lo que no se ve, los puntos singulares.

Lo ocurrido, conduce entonces también a evidenciar una conclusión más genérica, interesante de resaltar desde el punto de vista didáctico: los conflictos pedagógicos en relación a dificultades asociadas al trabajo matemático, no tienen por qué ser esperables como conflictos estudiantiles respecto de esa misma actividad. Se contribuye por tanto a afinar la mirada en ese sentido.

Luego, en atención a lo señalado desde el punto de vista didáctico, se considera que, junto a las recomendaciones de rediseño para la secuencia de trabajo, esgrimidas en el punto 4.6., que apuntan más bien, a una mejor eficiencia para la aplicación de la secuencia de trabajo, se puede concluir que queda pendiente el incorporar aspectos de rediseño de la secuencia que atiendan a generar conflicto cognitivo en los estudiantes de modo que sientan la necesidad de relacionar los puntos singulares a los elementos secundarios respectivos, sin que el docente los tenga que explicitar, lo cual abre nuevos escenarios para estudios futuros.

BIBLIOGRAFÍA

- Amstrong, T. (2006). *Inteligencias múltiples en el aula: Guía práctica para educadores*. España: Paidós Ibérica.
- Araya, R. & Dartnell, P. (2006). *Saber pedagógico y conocimiento de la disciplina matemática en docentes de educación general básica y media* en Selección de Investigaciones Primer Concurso FONIDE: Evidencias para Políticas Públicas en Educación. Santiago: Centro avanzado de investigación en educación Universidad de Chile. pp. 155-198.
- Artigue, M. Douady, R., Moreno L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Barrantes, H. (2006). *Los Obstáculos Epistemológicos*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Año 1, Número 2,. Recuperado 19/12/2012 de la fuente: www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes.
- Beech, R. (2011). *Enciclopedia del origami*. Madrid: Ed. Libsa. pp. 6-15.
- Blanco, C. & Otero, T. (2005) *Geometría con papel (papiroflexia matemática)*. Recuperado el 13/08/2012, de nombre del sitio Web de la organización: <http://imarrero.webs.ull.es/sctm05/>
- Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
- Brousseau, G. (sf). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas*. Recuperado el 12/11/2012, de nombre del sitio web de la organización:
<http://fractus.uson.mx/Papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm>
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Casassus, J. (2007). *La educación del ser emocional*. Santiago: Editorial cuarto propio.
- Cavacami, E. & Saito, Y. (2009). *Explorando geometría con origami*. Recuperado el 13/08/2012 del sitio Web de la organización: <http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf>
- Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. (pp. 213-226). Cuadernos de Educación No. 22. Institut de Ciències de l'Educació (Universitat de Barcelona) y Editorial Horsori. Barcelona, España.

- Cobos, F. (sf). *Matemáticas y origami*. Recuperado el 13/08/2012 del sitio Web de la organización: <http://abstractotal.com/mate/Geometria/Geometria%20del%20origami.pdf>
- De la Peña, J. (2001). *Matemáticas y papiroflexia*. Madrid: Asociación Española de Papiroflexia.
- Delgado, M. Fiol, M. & Zapatero, M. (2003). *El origami (papiroflexia) recurso didáctico para el aprendizaje de la Geometría*. Consultado el 03/09/2012 en la página web: <http://www.uv.es/aprenggeom/archivos2/DelgadoZapFiol03.pdf>
- Engel, Peter. (1989). *Origami: from angelfish to zen*. N.Y.: Dover Publications.
- Hernández, R. Fernández, C. & Baptista, P. (1991). *Metodología de la Investigación*. México: Mc. Graw Hill Interamericana de México S.A.
- Kawamura, M. (2001). *Polyhedron Origami: For beginners*. Tokyo: Nihon Vogue CO., LTD.
- Royo, J. (2002). *Matemáticas y papiroflexia*. Recuperado el 13/08/2012, de nombre del sitio Web de la organización: www.euskadi.net
- Royo, J. (2006). *Poliedros y teoremas de papel*. Recuperado el 13/08/2012, de nombre del sitio Web de la organización: <http://sctmates.webs.ull.es/>
- Ruiz, Á. (2003) *Historia y Filosofía de las Matemáticas*. Recuperado el 30/11/2012, de nombre del sitio Web personal del autor: <http://www.angelruizz.com/>
- Taylor, S. Bodgan, R. (2000). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.
- Unidad de Currículum y Evaluación (2011). *Matemática Programa de Estudio para Séptimo Año Básico*. Santiago: MINEDUC.
- Unidad de Currículum y Evaluación (2004). *Chile y el aprendizaje de Matemáticas y Ciencias según TIMSS 2003*. Santiago: MINEDUC.
- Unidad de Currículum y Evaluación (2000). *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias 1999*. Santiago: MINEDUC.

ANEXOS

1. Narrativas

1.1 Narrativa de Investigadora 1

Transcurriendo el año 2008 en la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación de Santiago, durante el 2° semestre del presente y cursando la actividad curricular Geometría III el profesor de dicha actividad curricular nos propuso trabajar durante algunas sesiones un taller de Origami, en mi caso, de acuerdo a mi experiencia, y para el resto de mis compañeros era una palabra nueva dentro de nuestro vocabulario, cada uno se preguntaba el significado de dicho concepto, para comenzar con el taller les propuso a un grupo de estudiantes de la carrera y que se destacaban en geometría para que realizaran este taller, pero al avanzar la primera clase el profesor se encargó de mostrarnos una presentación en PowerPoint para introducir y explicar el significado de Origami, desde ese momento cada uno fue aclarando las interrogantes presentadas al inicio de la clase. En la presentación nos expuso figuras realizadas con Origami y la realización de ellas a partir de un trozo de papel cualquiera y desde ahí podíamos visualizar diversas figuras que vemos a nuestro alrededor y así nos fuimos familiarizando con esta nueva técnica. Cada uno de nosotros nos fuimos sorprendiendo con las figuras que se puede trabajar, que en muchos casos se pueden utilizar como adornos dentro de una sala o también para nuestros hogares. Lo interesante era visualizar las técnicas de construcción y las habilidades que se van adquiriendo mediante la práctica para crear figuras comenzando por formar una pieza de inicio y luego enlazar una y otra hasta formar un cuerpo, sólo con hacer calzar las piezas sin utilizar algún pegamento adicional y para hacerlo más llamativo se pueden utilizar diversos colores.

El profesor después de realizar la introducción comenzamos a trabajar con nuestros compañeros que complementarían el taller, al final de la primera sesión nos hicieron formar parejas para trabajar en la construcción de una figura que íbamos a trabajar en el taller correspondiente, en el caso nuestro nos correspondió trabajar con la construcción del dodecaedro. Cada una de nosotras se encargó de buscar la información necesaria para trabajar en la clase siguiente respecto a origami y la construcción del cuerpo geométrico que nos correspondió. A la semana siguiente todos llegamos con el material y la información correspondiente para comenzar el taller, en nuestro caso para que la figura resultase más llamativa trabajamos con tres colores: amarillo, verde y violeta, esa combinación nos pareció interesante y a

medida que íbamos realizando figura a figura nos íbamos entusiasmando con el trabajo, lo que también se podía observar en el resto del curso, todos trabajando en pareja y compartiendo las experiencias con los compañeros. La clase terminaba y la próxima sesión debíamos traer terminado el trabajo para obtener la calificación. Para avanzar traté de terminar el dodecaedro en mi casa, pero no lo pude realizar, ya que comenzaba a unir las piezas por un lado y se desarmaba al otro lado, así que preferí que lo realizáramos en conjunto con mi compañera, aunque al comienzo se nos complicó la realización de ésta, después de una larga tarde y después de armarnos de paciencia, ya que no podían coincidir los colores, logramos terminar de unir las piezas y formar el dodecaedro que se nos había designado, estábamos felices viendo el hermoso cuerpo que habíamos formado. Lo único que nos complicó en ese momento era el traslado hacia la universidad, como en mi caso yo vivía más cerca tuve que llevarlo. Lo más emocionante fue llegar a la sala y ver todas las figuras que se realizaron, el profesor pidió que se los lleváramos a su oficina, después de la evaluación correspondiente. Finalmente la evaluación fue satisfactoria, lo que el profesor nos pedía era quedarse con nuestros trabajos para adornar su oficina, petición que todos accedieron y de la que nosotras no podíamos negarnos dando un toque geométrico matemático a la oficina del profesor, el que quedó fascinado.

En nuestra inserción en el mundo escolar, ya sea como estudiantes anteriormente y como docentes en la actualidad y el estrecho vínculo con el mundo de la educación y con todo suceso que dentro de ésta ocurre. Ha existido una realidad que ha sucedido hace muchos años y que es motivo de discusión de profesores y de los actores del sistema educativo, y es que durante el transcurso del tiempo no se ha realizado ningún cambio significativo, este problema es la escasa preocupación por la inclusión de la Geometría en las aulas. En mi experiencia como escolar en el colegio no tuve una buena base de dichos contenidos que se vieron reflejados al momento de ingresar a la universidad. Y ahora con mis vivencias en las prácticas profesionales, los conceptos geométricos son vistos de manera temporal y no son retomados como una consecuencia de contenidos, de manera espiral como el resto de las unidades de este o cualquier subsector de aprendizaje, sino que hasta el año próximo y a medida que las unidades lo ameriten, recurriendo siempre al repaso innecesario de los conceptos, como consecuencia de la diferencia del tiempo de trabajo, lo que dificulta el avance de los contenidos.

El semestre pasado y en el colegio donde realizaba mi Práctica I se realizó una reunión como consecuencia de fin de semestre, la que incluía a los profesores de matemáticas en conjunto con el Jefe de UTP, donde la problemática anterior fue

tema principal de discusión, en ella cada docente dio su punto de vista y todos coincidieron en la falta de tiempo para dichos contenidos. Después de ello en el colegio como fin de semestre les hicieron realizar una propuesta de mejoramiento para evaluar y realizar a futuro, donde un profesor me pidió ayuda, conversando con él me pude dar cuenta de la escasez de manejo tecnológico de algunos profesores dentro de la sala de clases, como también del manejo de diferentes herramientas de aprendizaje, uno de ellos es la inserción del Origami como una herramienta de enseñanza y también la incorporación de programas matemáticos en diferentes contenidos de este sector de aprendizaje, especialmente los contenidos de geometría.

Claramente que los contenidos matemáticos son visualizados de manera jerárquica y que existen algunos que se les considera más importantes o en este caso se les dedica más tiempo, la geometría no es considerada de igual manera que el álgebra en el mundo de las matemáticas, inclusive los contenidos geométricos son vistos algebraicamente y no son considerados y que son de igual importancia para una formación académica competente al salir de la enseñanza escolar y enfrentar los estudios superiores, como también la escasa preparación de los docentes por contribuir con nuevas prácticas tanto motivadoras como tecnológicas dentro del aula.

Recurriendo a bibliografía referente a la práctica del Origami, he descubierto diferentes técnicas de enseñanza, y que en muchas ocasiones me han dejado maravillada, creo que es una manera interesante y encantadora de incorporar diferentes conceptos geométricos dentro de la sala de clases, que motiva a la participación y el trabajo en equipo, ya sea con el docente como con los compañeros de curso. Creo que esa fue la técnica que quisieron incorporar en la universidad cuando nos realizaron el taller, una experiencia que a muchos habrá dejado encantados, quienes tendrán la opción de incorporar dentro de sus prácticas como actores de la enseñanza.

La importancia de este tipo de técnica es la incorporación del trabajo con material concreto como una manera de visualizar en terreno todo lo que va sucediendo a medida que se van construyendo el tipo de figuras y cuerpos que se desea, como también la utilización de diferentes conceptos matemáticos para la construcción de ellos mismos. Lo trascendental de esta técnica es la manera en que cada uno se puede maravillar con el modo y tipo de construcciones y la manera en que son dispuestos y presentados ante nuestros estudiantes, quienes como en nuestras experiencias se volverán a impregnar e impresionar con este tipo de enseñanza del

mundo de la geometría y quien sabe en un futuro no muy lejanos este tipo de técnicas y trabajos sean un común denominador en las aulas chilenas.

1.2 Narrativa de Investigadora 2

Los inicios

A todo estudiante de Geometría en el Espacio de la carrera de Pedagogía en Matemáticas de la UMCE se le daba la oportunidad de realizar como trabajo extracurricular, para mejorar las calificaciones en la asignatura, poliedros de papel con la técnica del origami, yo no realicé este trabajo pues este curso me fue bastante sencillo de comprender y por ende lo aprobé sin mucha dificultad y no tuve la necesidad de realizarlo, pero un grupo de estudiantes que cursaba esta asignatura el año 2006 que realizaron este trabajo extracurricular, tuvo la idea de trabajar con más profundidad el origami con los siguientes estudiantes de la asignatura como apoyo a la asignatura, presentaron esta idea al profesor del curso y en adelante comenzaron a realizar talleres obligatorios de origami a quienes cursaran la asignatura. Los talleres duraban 3 sesiones, la geometría la trabajaron principalmente utilizando lenguaje matemático en el paso a paso y al estudiar los cuerpos finales.

En el 2010, un par de los estudiantes (ya egresados) que participó en la realización de los talleres de origami desde el comienzo, junto a otros egresados y estudiantes de la carrera, postularon al Fondo de Desarrollo Institucional (FDI), del MINEDUC, dos proyectos dirigidos a la capacitación de estudiantes, egresados y profesores de matemáticas en el uso didáctico y pedagógico de la técnica del Origami y del Software GeoGebra respectivamente.

Comienza mi participación

En abril del año 2011 el grupo que ejecutaría el FDI me ofreció participar en una organización no funcional, particularmente apoyando la ejecución los proyectos. Las primeras semanas estuve participando en la organización sin tener definido el proyecto que apoyaría, pero ya a comienzos de mayo trabajé principalmente con origami. De ahí en adelante trabajé en el equipo de origami junto a dos personas más, primero nos dimos la tarea de recopilar bibliografía respecto a las matemáticas en el origami y en paralelo estudiamos el currículum basado en competencias, pues primero elaboramos la parte pedagógica de las capacitaciones, la parte pedagógica de origami se enfocaba principalmente en el trabajo con material concreto dentro del aula, a diferencia del grupo de GeoGebra que contemplaba el trabajo con tecnologías.

Aproximadamente en julio comenzamos a trabajar de lleno en origami, primero que todo realizamos la carta Gantt, luego discutimos los documentos recopilados, para después planificar lo que haríamos en forma general en la capacitación, la descripción del cursillo fue la siguiente:

El taller de Origami utiliza esta técnica del plegado del papel como una herramienta para dinamizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en los contenidos que propone el Marco Curricular vigente. La presente propuesta pretende que los participantes incorporen en su quehacer los contenidos de Geometría de una manera diferente e innovadora evidenciándolo en la elaboración de planes de clases basados en la planificación por competencias.

A medida que planificábamos las sesiones, generábamos el material didáctico necesario: presentaciones tanto en Prezi como en PowerPoint, videos y material escrito. En cada sesión utilizaríamos al menos dos de estos recursos según nuestra conveniencia, en las primeras sesiones serían de gran utilidad los videos para mostrar por ejemplo el video *Papiroflexia*, que refleja el espíritu del origami de volver a las raíces o a la naturaleza en ese caso; los Prezi los utilizaríamos para desarrollar algunos conceptos, como en la primera sesión que indicaríamos qué es el origami, su clasificación, simbología de los pliegues, axiomas de Huzita y algunos teoremas, mientras que las presentaciones en ppt nos servían para mostrar el paso a paso de la generación de los origami tradicional o modular.

Fueron meses de trabajo en que hubo tiempos lentos y otros en que avanzábamos con fluidez, nos ayudó el trabajar en paralelo con el grupo de GeoGebra, pues las capacitaciones tenían la misma estructura y cuando un grupo se iba quedando atrás, podíamos notarlo e intentábamos volver al ritmo que necesitábamos para cumplir a tiempo.

La capacitación de origami fue creada con la intención de presentar el abanico de posibilidades que entrega el origami en la enseñanza de la geometría desde 1° básico a 4° año medio, por lo que no se profundizaría en cómo utilizar el origami como herramienta para la enseñanza de un contenido en particular, sino que se analizaron las diversas formas de utilizar este recurso, ya fuese de la figura final con origami tradicional o modular, del análisis de pliegues, de los axiomas de Huzita o de teoremas; y por lo anterior las inscripciones se abrieron a profesores de primer ciclo básico, segundo ciclo básico y enseñanza media.

Los talleres se realizaron los lunes, miércoles y viernes del 9 al 23 de enero 2012, de 15:30 a 21:00 e incluía materiales, coffee-break y certificación de la universidad. Se inscribieron 8 personas al taller de origami, de ellas 2 nunca asistieron y finalmente se certificaron 4. De estos inscritos había profesores o estudiantes de pedagogía de primer, segundo ciclo básico y educación media.

Sesiones

La primera sesión se trató de una introducción al origami, primero planteamos los objetivos de la capacitación, les preguntamos qué sabían del origami y qué experiencia tenían, mostramos el video *Papiroflexia*, indicamos lo que es el origami, las diversas clasificaciones que tiene el origami, y las diversas formas en que podemos trabajar el origami con las matemáticas, una de las formas son los axiomas de Huzita o algunos teoremas, y mencionamos las ventajas de trabajar con origami como recurso para el aprendizaje de las matemáticas. Explicamos y mostramos el teorema de Haga y le solicitamos a los participantes que intentaran demostrarlo, luego le pedimos a un par de ellos que explicaran en la pizarra cómo lo demostraron y en función de esto generamos una discusión respecto a la riqueza del origami como herramienta educativa, considerando siempre que esta riqueza es producto de la intencionalidad que entrega el docente. Finalmente presentamos un teorema de trisección de un ángulo con origami y les planteamos como tarea la demostración del mismo.

La segunda sesión la comenzamos revisando las distintas formas de demostración de la trisección del ángulo y cerramos concluyendo que siempre se pueden demostrar de formas distintas. Damos pie al desarrollo de la segunda sesión tratando el *origami tradicional*, donde en particular trabajamos polígonos regulares, donde los participantes construyeron un triángulo equilátero, un pentágono y hexágono regulares a partir de las indicaciones que les entregamos y realizamos junto a los participantes un breve análisis de los tres. Luego les solicitamos que transformaran en cuadrado un papel irregular sólo por medio de pliegues les solicitamos que uno de los participantes hiciera el análisis matemático y finalmente les entregamos un documento que indicaba paso a paso cómo construir el módulo del cubo sonobe.

En la tercera sesión comenzamos a trabajar con origami modular, presentamos el tema de los sólidos platónicos, con su historia y desarrollo con origami. Los participantes llevaron los módulos y armaron el cubo sonobe, además, con el mismo módulo armaron otra superficie a la que nosotros le llamamos *cubos intersecados* y lo analizamos según su volumen y lo comparamos con el cubo sonobe. Luego proyectamos un video donde aparece un profesor haciendo una clase acerca de los

sólidos platónicos sólo con una pizarra y le preguntamos a los participantes de qué forma trabajarían los poliedros en el primer ciclo básico, segundo ciclo o enseñanza media, según el nivel que trabajan y junto a los participantes definimos qué tipo de análisis del origami es más propicio a cada nivel escolar. Finalizamos la sesión instando a los participantes a definir en qué nivel plantearían su planificación.

En la cuarta sesión planteamos problemas de construcción con regla y compás que se solucionan con el origami, en particular los participantes trabajaron con la construcción de un módulo de octaedro en cuya construcción se trisecta un ángulo, construyen el octaedro y luego construyen el esqueleto de un octaedro y les planteamos su análisis como la intersección de planos en el espacio. Posteriormente construyeron un cubo estrellado y un dodecaedro, finalmente le dejamos tiempo a los participantes para que comenzaran a avanzar en sus productos considerando estas nuevas construcciones.

Durante la quinta sesión, los participantes dedicaron un buen tiempo a la construcción de un hexágono truncado estrellado y una vez que lo terminaron, se dedicaron a avanzar nuevamente en los productos, elaborando al menos la planificación de la clase y agregando presentaciones, videos, guías y todo material que fuese necesario.

La sexta sesión se dividió en dos partes, la primera la utilizamos para que los participantes terminaran un avance de su producto final, la hicimos en un laboratorio de computación (a diferencia de las sesiones anteriores, que fueron en una sala) y además recibieron nuestro apoyo en la generación de su material; la segunda parte la dedicamos a que presentaran lo que llevaban de producto y después de cada presentación retroalimentábamos los monitores y el resto de los participantes.

La séptima sesión, todos presentaron sus productos, los comentamos en conjunto y se escogió una presentación como representante del grupo de origami, para luego en una ceremonia presentar unos videos de resumen de las jornadas de trabajo de las sesiones de origami y GeoGebra, cada representante presentó sus productos y se les certificó.

Productos

Los participantes debían generar un producto en función a lo realizado en forma progresiva en las sesiones, este producto debía ser al menos la planificación (por competencias) de una clase en que se utilizara el origami como una herramienta que apoyase el aprendizaje de las matemáticas.

Se generaron cuatro planificaciones, la primera era para sexto básico, cuyo objetivo de aprendizaje fue: *El estudiante clasifica los polígonos, comparando lados y formas en las construcciones hechas con origami y en pinturas, en alumnos de 6° año básico.* Y además de la planificación, generó una guía y una presentación en ppt, además de incluir un video que obtuvo de internet.

La segunda planificación fue realizada para octavo año básico, el objetivo de aprendizaje planteado fue: *El estudiante verifica en casos particulares el teorema de Pitágoras, de manera manual, para poder comprenderlo y posteriormente aplicarlo a la resolución de problemas en contextos matemáticos y cotidianos,* incluía un anexo con el paso a paso de la construcción con origami y de la explicación. Esta planificación me pareció muy interesante, pero considero que esta forma de estudiar el teorema de Pitágoras no es tan evidente como otras que también pueden ser trabajadas con material concreto y en que se evidencia en forma más clara este teorema.

La tercera planificación se realizó para 7° básico, el objetivo fue: *El estudiante comprende los conceptos de área y volumen de un cuerpo geométrico, construyendo cuerpos geométricos con la técnica del origami para identificarlos en la resolución de problemas.* Incluyó una presentación en Prezi con 3 videos.

La última planificación fue generada para sexto básico, cuyo objetivo fue: *El estudiante formula conjeturas sobre la medida de ángulos interiores de polígonos regulares comunicando ideas y experiencias de manera coherente y fundamentada haciendo uso del origami en el colegio Santa María de la Cordillera.* Este producto incluyó tres presentaciones en ppt, una acerca de los polígonos en el arte, un paso a paso de la construcción de polígonos con origami y una presentación que incluía los mapas de pliegues de estos polígonos.

Reflexiones

Mi comentario respecto a la segunda planificación es el que más me hace pensar, pues me interesaría desarrollar el origami de formas variadas, como fue el caso del teorema de Pitágoras, pero es importante cuestionarse si esta forma de trabajar facilita o no el aprendizaje de los estudiantes.

Lo anterior considero que es el foco que no hay que perder y que se relaciona con lo que usted nos indicaba la vez que nos reunimos, que debemos encontrar un contenido que obstaculice los aprendizajes de los estudiantes, para presentarles

una solución, que genere cuestionamientos y que esté planteado de manera tal que evidencie los obstáculos y que a su vez les permita superarlos.

Finalmente según la experiencia que he adquirido, considero que el principal valor del origami es el trabajo con el material concreto, por una parte porque es más accesible, también porque es tangible, los estudiantes lo pueden palpar y examinar, la cantidad de veces que consideren necesario y de las formas que les parezca; además porque es algo que los estudiantes generan, no es un material que sólo deben manipular, sino que ellos lo originan y luego deben analizar lo que ellos fueron capaces de construir.

2. Transcripción de entrevista a estudiantes

La siguiente conversación corresponde a la transcripción de una entrevista realizada a cinco estudiantes de séptimo año básico del Liceo considerado para el estudio. La cual fue efectuada por una de las investigadoras. Dicho diálogo se realizó en el patio del establecimiento el día 14 de noviembre y consiste en recabar información acerca del trabajo realizado en matemática relacionado con la unidad de geometría específicamente el tema de los Elementos secundarios del triángulo.

I: Chicos, con respecto a la unidad de geometría ¿Cuál es la última materia que les han pasado?

E1: círculo...eh...circunferencia, área y perímetro.

E2: El radio y el diámetro.

I: Ya ahora... ¿Recuerdan los contenidos acerca de los elementos secundarios del triángulos?

E1: Sí

E2: Transversal, bisectriz, mediana.

E1: Simetrales, mediana.

I: Entonces... ¿Hace cuánto tiempo trabajaron esto?

E3: Como hace dos semanas.

E1: Aproximadamente dos semanas.

I: Ya, ¿Cuál fue la metodología que utilizó el profesor?, ¿Con el profesor Daniel están trabajando?

E4: Ah no con el no...con el profesor Jorge.

I: Ah...pero entonces quien les hace clases a ustedes, ¿El profesor Daniel o el profesor Jorge? ¿Cuál de ellos dos?

E4: Los dos.

I: Pero los días martes y miércoles.

E5: los días martes no hace el profesor nuevo, él nos hace geometría.

I: ¿Él les hace sólo geometría?

E2: Sí...el profesor Daniel Romero eso de las ecuaciones y todo eso.

I: Y respecto a los elementos secundarios del triángulo, ¿Cuál fue la metodología de trabajo? Les hicieron trabajar con regla y compás, con papel.

E3: La profesora Cifuentes, antes que se fuera del colegio, en una hoja de papel nos hizo hacer un triángulo obtusángulo con todas las...

E4: Con las bisectrices.

E2: ...con todos los productos notables.

I: Eso se los hizo la profesora María Cifuentes. Y con el profesor ¿Cómo lo trabajaron?

E2: Nos pasaba materia y también nos pasaba ejercicios.

I: Pero, ¿Con qué materiales trabajaba para la construcción?, ¿Con regla y compás?

E5: No...sólo nos explicó como se hacía con compás.

E1: Pero no trabajamos.

I: ¿No trabajaron mucho?, y con papel ¿No trabajaron, con dobleces de papel?

E1: No, no.

I: Entonces...sólo lo vieron por definición.

E4: Sí.

I: Pero ustedes lo entendieron de esa forma. Si les hicieran construir con regla y compás ¿Podrían hacerlo?

Todos: Sí.

I: ¿Les resultaría para todos los elementos secundarios del triángulo?

E2: A mí sí.

I: ¿Ustedes creen que al curso les quedó claro?

E1: No.

I: ¿Ya les hicieron la prueba de estos conceptos?

E1: No.

E2: Si po, pero sólo habían dos preguntas.

I: Chicos, ¿Ustedes me podrían decir por definición que es la altura de un triángulo?

Todos: Ehhhhhhh...mmm...ehhh.

E3: Es lo que se, es lo que se...ehhh, ahhhh.

E2: Ya si usted no sabe. Es desde el vértice...

E1: Al lado opuesto.

E2: ...a la simetral del lado opuesto. La simetral es el punto medio...en el equilátero y en el isósceles es al medio, pero en el escaleno no siempre.

I: Ya, entonces me podrían decir por definición que es una bisectriz.

E2: Es cuando un ángulo se divide en dos ángulos iguales...menos mal que vine, no sabían ninguna cuestión.

I: Chicos, ¿Qué se les hizo más complicado aprender de los elementos secundarios del triángulo?

E2: Ahí ustedes ven, yo no me meto.

E4: Las bisectrices.

I: ¿Las bisectrices, en serio? ¿Y saben cómo se denominan a las intersecciones de dichos elementos? Sabemos que en un triángulo ¿Cuántas alturas se forman?

E2: Ortocentro es el de las alturas, intocentro.

E3: Incentro, ortocentro, circuncentro, transversal de gravedad y el otro no me acuerdo.

I: ¿Pero entienden cuál es su correspondencia?

Todos: Sí...obvio.

I: Ya chicos, esas son las preguntas que debía realizar, les agradezco la disposición y el respeto hacia sus compañeros y hacia mí. Muchas gracias.

I: Investigadora

E1: Estudiante 1

E2: Estudiante 2

E3: Estudiante 3

E4: Estudiante 4

E5: Estudiante 5

3. Análisis descriptivo por texto

Texto 1:

- Cárdenas, L. (2006). *Educación matemática, Séptimo básico*. Santiago: Ed. Cal y canto.
- Unidad N° 4: “*Geometría, figuras y cuerpos geométricos.*”
- Elementos secundarios: Alturas y bisectrices.

Alturas

- Materiales: Geoplano, escuadra, papel, tijeras, pegamentos y lápices.
- Referencia Páginas web:

http://www.cnice.mecd.es/eos/MaterialesEducativos/mem2002/geometria_triangulo/contenido.htm

- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y grupal para comparar y concluir.
- Descripción: Comienza con la presentación de una problemática de variación de alturas en prismas y pirámides. Para solucionar el problema realizan una actividad en un geoplano o cuadrícula (en el cuaderno), lo utilizan para aumentar las alturas de las caras laterales de cada cuerpo, sacan conclusiones respecto a la variación de las alturas de las caras laterales de ambos cuerpos geométricos, aunque en el caso de la pirámide no se concluye el problema, ya que no sucede lo mismo que el caso del prisma, y para finalizar se define el concepto de altura.

Luego, para visualizar lo aprendido en el problema anterior, se realiza una actividad complementaria, ésta consiste en dibujar un triángulo cualquiera y uno equilátero y ver qué sucede con cuando se trazan las alturas correspondientes, reflexionar respecto a los triángulos que se forman después de haber realizado dichos trazos.

A continuación se realiza un paso a paso acerca de la construcción con escuadra de alturas en un triángulo equilátero (5 cm. de lado), considerando que se forman ángulos rectos en cada altura formada. De este modo se solicita realizar la actividad anterior con un triángulo obtusángulo y con esto se plantean cuatro preguntas de discusión grupal, las que se refieren a la formación de las alturas y la intersección de éstas en diferentes triángulos (respecto a la medida de sus ángulos). Para finalizar con la construcción del concepto se define el concepto de ortocentro (intersección de las alturas) y con ello se muestra qué sucede en los triángulos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo.

Para finalizar el concepto de altura (h) realiza una actividad que consiste en copiar diversos triángulos, cada uno con un vértice C y se pide trazar la altura respecto a ese vértice (h_c). Al costado derecho de la actividad aparece en un recuadro una página web complementaria para dicho contenido.

Observaciones: Queda pendiente solucionar el problema de la relación entre las alturas de las caras laterales respecto a la pirámide.

Bisectrices

- Materiales: Tijeras, papel, regla, lápices y compás.
- Página web: Ninguna.
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y grupal para comparar y concluir.

- Descripción: Comienza definiendo el concepto de bisectar y bisectriz. La primera actividad consiste en mostrar un paso a paso de recortar diferentes triángulos y luego doblarlos en cada vértice, de modo que cada ángulo quede dividido en dos partes iguales, luego marcar con lápiz cada doblez y en el punto de intersección de los tres trazos localizar el compás y con la medida a cualquiera de sus lados se dibuja una circunferencia. Para analizar qué sucede se plantean tres preguntas grupales, las que se refieren acerca de lo sucedido con la circunferencia dibujada en la actividad anterior, y también visualizar qué sucede con los diferentes tipos de triángulos y cómo definir las bisectrices de un triángulo. Para finalizar con la construcción del concepto se define el punto singular (incentro), que es la intersección de las tres bisectrices y la circunferencia inscrita dentro del triángulo.
- Como otra forma de comprender el concepto se construye con regla y compás la bisectriz detallando el paso a paso de la construcción. De acuerdo con lo anterior se realiza una discusión en grupo acerca de las construcciones y respecto al tipo de triángulos formados luego de trazar las bisectrices correspondientes.

Como actividad complementaria y recurriendo al concepto de bisectriz y altura se debe encontrar los valores de ángulos de diferentes triángulos dadas algunas medidas de ángulos. Y luego determinar lo que sucede con respecto a los triángulos formados a partir de la construcción de las bisectrices de un triángulo equilátero.

Luego de finalizar los conceptos y al final de la unidad aparecen actividades de evaluación de contenidos, para ello se deben realizar cuadros resumen en el cuaderno, dichas tablas consisten en realizar comentarios acerca de las construcciones de alturas y bisectrices en diferentes triángulos: respecto a las medidas de sus ángulos y lados y de acuerdo a las intersecciones y coincidencias de éstas. Y una autoevaluación con ejercicios de aplicación de los contenidos anteriores.

- Observación: Define el concepto de inmediato. Pide la construcción de la circunferencia inscrita al triángulo no detalla cómo realizarla en forma precisa, sino sólo aproximándose a ella por tanteo.

Texto 2:

- Cárdenas, L. (2004-2005). *Educación matemática, Séptimo básico*. Santiago: Ed. Cal y Canto.
- Unidad N° 4: “*Geometría, figuras y cuerpos geométricos.*”

- Elementos secundarios: Alturas y bisectrices

Alturas

- Materiales: Geoplano, escuadra, papel, tijeras, pegamentos y lápices.
- Referencia Páginas web:

http://www.cnice.mecd.es/eos/MaterialesEducativos/mem2002/geometria_triangulo/contenido.htm

- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y grupal para comparar y concluir.
- Descripción: Comienza con la presentación de una problemática de variación de alturas en prismas y pirámides. Para solucionar el problema realizan una actividad en un geoplano o cuadrícula (en el cuaderno), lo utilizan para aumentar las alturas de las caras laterales de cada cuerpo, sacan conclusiones respecto a la variación de las alturas de las caras laterales de ambos cuerpos geométricos, aunque en el caso de la pirámide no se concluye el problema, ya que no sucede lo mismo que el caso del prisma, y para finalizar se define el concepto de altura.

Luego, para visualizar lo aprendido en el problema anterior, se realiza una actividad complementaria, ésta consiste en dibujar un triángulo cualquiera y uno equilátero y ver qué sucede con cuando se trazan las alturas correspondientes, reflexionar respecto a los triángulos que se forman después de haber realizado dichos trazos.

A continuación se realiza un paso a paso acerca de la construcción con escuadra de alturas en un triángulo equilátero (5 cm. de lado), considerando que se forman ángulos rectos en cada altura formada. De este modo se solicita realizar la actividad anterior con un triángulo obtusángulo y con esto se plantean cuatro preguntas de discusión grupal, las que se refieren a la formación de las alturas y la intersección de éstas en diferentes triángulos (respecto a la medida de sus ángulos). Para finalizar con la construcción del concepto se define el concepto de ortocentro (intersección de las alturas) y con ello se muestra qué sucede en los triángulos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo.

Para finalizar el concepto de altura (h) realiza una actividad que consiste en copiar diversos triángulos, cada uno con un vértice C y se pide trazar la altura respecto a ese vértice (h_c). Al costado derecho de la actividad aparece en un recuadro una página web complementaria para dicho contenido.

Bisectrices

- Materiales: Tijeras, papel, regla, lápices y compás.
- Página web: Ninguna.
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y grupal para comparar y concluir.
- Descripción: Comienza definiendo el concepto de bisectar y bisectriz. La primera actividad consiste en mostrar un paso a paso de recortar diferentes triángulos y luego doblarlos en cada vértice, de modo que cada ángulo quede dividido en dos partes iguales, luego marcar con lápiz cada doblez y en el punto de intersección de los tres trazos localizar el compás y con la medida a cualquiera de sus lados se dibuja una circunferencia. Para analizar qué sucede se plantean tres preguntas grupales, las que se refieren acerca de lo sucedido con la circunferencia dibujada en la actividad anterior, y también visualizar qué sucede con los diferentes tipos de triángulos y cómo definir las bisectrices de un triángulo. Para finalizar con la construcción del concepto se define el punto singular (incentro), que es la intersección de las tres bisectrices y la circunferencia inscrita dentro del triángulo.
- Como otra forma de comprender el concepto se construye con regla y compás la bisectriz detallando el paso a paso de la construcción. De acuerdo con lo anterior se realiza una discusión en grupo acerca de las construcciones y respecto al tipo de triángulos formados luego de trazar las bisectrices correspondientes.

Como actividad complementaria y recurriendo al concepto de bisectriz y altura se debe encontrar los valores de ángulos de diferentes triángulos dadas algunas medidas de ángulos. Y luego determinar lo que sucede con respecto a los triángulos formados a partir de la construcción de las bisectrices de un triángulo equilátero.

Luego de finalizar los conceptos y al final de la unidad aparecen actividades de evaluación de contenidos, la que consiste en encontrar la medida de ángulos en diferentes triángulos considerando las definiciones de los dos elementos vistos anteriormente.

El texto trabaja la altura y bisectrices de igual manera que el texto N° 1, sólo existe la diferencia respecto a los logos que indican los conceptos y definiciones de dicho contenido, las indicaciones para la realización de actividades y la evaluación de contenidos al final de la unidad.

Texto 3:

- Baeza, A.; Villena, M. (2008). *Educación matemática, Séptimo básico*. Santiago: Ed. Santillana del Pacífico S.A.
- Unidad N° 2:
- Elementos secundarios: Alturas, bisectrices, simetrales y transversales de gravedad.

Alturas

- Materiales: escuadra y lápices.
- Página web: Ninguna
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y para razonar.
- Descripción: Recuerda que han trabajado los elementos primarios de los triángulos, indica que aprenderán qué son y cómo se construyen los elementos secundarios y los nombra. Aparecen fotografías, sin indicaciones en lenguaje natural de la construcción de alturas con una escuadra, luego aparecen preguntas para responder en forma individual, en un recuadro aparece una explicación de la notación para las alturas que incluye la razón de la letra que asociada. Deben construir en forma personal alturas en triángulos equilátero, isósceles y escaleno y deben contestar consultas (para que distingan que con los triángulos equilátero e isósceles los triángulos se pueden dividir en dos triángulos congruentes). Se presenta un desafío para reconocer qué triángulo se forma cuando la altura pasa por el punto medio de la base. Definición de altura y su punto singular. Dibujan 2 triángulos acutángulos, 2 rectángulos y 2 obtusángulos distintos entre sí, trazan sus alturas, comparan la ubicación de ellas y completan una tabla resumen según tipos de triángulos versus ubicación de las alturas, ubicación del ortocentro e incluyen conclusiones.
- Observaciones: No aparece la construcción de alturas con regla y compás, analizan las alturas según los dos tipos de triángulos.

Bisectrices

- Materiales: triángulo de papel, lápiz, compás, escuadra (para dibujar incentro) y regla.
- Página web: <http://santillana.cl/licitacion>
- Metodologías de trabajo: Individual para construcciones, reflexiones y Grupal para construcción y reflexiones.
- Descripción: Define el elemento secundario y su punto singular. Deben observar fotos donde aparece cómo generar las bisectrices al doblar papel y luego muestran un paso a paso de su construcción con regla y compás, cada

uno sin la descripción escrita. Indican que se pueden trazar 3 bisectrices en un triángulo y preguntan dónde se intersectan las bisectrices, las figuras que se forman de la intersección, cómo saber las medidas de los ángulos interiores y consultan en qué triángulos coinciden con las alturas. En un recuadro los invitan a ingresar a la página web. En grupo, cada uno de los estudiantes construye las bisectrices en distintos tipos de triángulos (según sus ángulos) y con el apoyo de un paso a paso construyen los radios de la circunferencia inscrita (no indican aún que es una circunferencia inscrita), concluyen. En forma personal Caracterizan los triángulos que se generan al trazar una bisectriz en un triángulo equilátero y las medidas de los ángulos del triángulo isósceles al saber uno de los ángulos generados por la bisectriz. Institucionalización de bisectriz y del Incentro.

- Observaciones: La forma de llegar a construir la circunferencia inscrita es bien interesante y está bien planteada.

Simetrales

- Materiales: regla, compás y triángulos de papel
- Página web: Ninguna
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y reflexión.
- Descripción: Define simetral, en recuadro se indica el sinónimo y se indica que un tip respecto a la construcción con regla y compás. Hay un paso a paso para la construcción con regla y compás que incluye imágenes e indicaciones escritas bajo cada imagen. Con triángulos acutángulos y rectángulos de papel construyen con pliegues las simetrales, las marcan y ubican su intersección, aparece la pregunta acerca de la ubicación de la intersección en estos dos triángulos y se plantea el cuestionamiento sobre la ubicación en los obtusángulos. Institucionalizan nuevamente lo que son las simetrales y agregan el circuncentro.
- Observaciones: Sólo analizan la simetral con distintos triángulos según ángulos.

Transversales de Gravedad

- Materiales: triángulo isósceles de cartón
- Página web: Ninguna
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y comprobación
- Descripción: Indican que las transversales de gravedad tienen ese nombre por una propiedad e invitan a descubrirla, además indican su sinónimo. Indican el paso a paso para la construcción de las medianas, las construyen en el triángulo de cartón, deben colocar la punta de un compás en la intersección e indican que verán que se equilibra, invitan a razonar si se

cumple esta propiedad en otros tipos de triángulos, que intenten explicar eso, preguntan si el punto de equilibrio podría estar en uno de los lados del triángulo, en qué caso, luego deben distinguir de 3 triángulos, cuál de ellos tiene unos segmentos que no son las transversales, finalmente se define la transversal de gravedad y el centro de gravedad o baricentro.

- Observaciones: Esto es trabajado sin papel

Herramientas tecnológicas

- Materiales: regla y compás
- Página web: <http://santillana.cl/licitacion>
- Metodologías de trabajo:
- Descripción: En la página web buscar el link correspondiente, ahí aparece un applet de un triángulo ABC, con las bisectrices, circuncentro y circunferencia inscrita, deben mover los lados y responder a las preguntas como si es posible que la circunferencia quede fuera del triángulo, consulta si se pueden construir las bisectrices sin compás y si existe alguna relación entre los triángulos que se forman por las bisectrices.
- Observaciones: El applet es exclusivo para las bisectrices, podría haberse extendido al resto de los elementos secundarios.

Cierre

- Completar mapa conceptual en forma individual.
- Construir en parejas un esquema con los conceptos: Datos mínimos para construir un triángulo, teorema de Pitágoras, fórmula del área de un triángulo y condiciones para obtener distintos triángulos con igual área.
- Resumen

Texto 4:

- Aguilar, M. Badani, M. Chacón, M. Guerrero, G (2007). *Educación matemática, Séptimo básico*. Ediciones SM Chile S.A.
- Unidad N° 2: “*Geometría: prismas, pirámides y triángulos*”
- Elementos secundarios del triángulo

Alturas

- Materiales: Papel (redes), escuadra, tijeras y lápices.
- Página web: ninguna
- Metodologías de trabajo: Individual y de construcción.
- Descripción: Comienza con una problemática acerca de cómo aumentar la altura de una pirámide, para encontrar la solución se hace un paralelo entre las pirámides y los prismas, al igual que en el texto n°1 y n°2, y trabajando

en conjunto con las redes de dichos cuerpos y con ello con las caras laterales respectivas, aumenta la altura de los rectángulos que forman el prisma, de este modo aumenta la altura del cuerpo geométrico y en el caso de la pirámide, como está conformada por triángulos, se aumenta la altura de cada triángulo y luego se compone la figura, para realizar esto se trabaja con el material recortable que contiene el texto. Con ello surge la interrogante acerca del aumento de la altura de la pirámide respecto al aumento de las alturas de las caras laterales.

- Luego para complementar dicha problemática inicial se construyen las alturas de un triángulo cualquiera con escuadra, dicha herramienta se utiliza para formar ángulos de 90° , cada procedimiento de la actividad anterior sólo utiliza fotografías del paso a paso. Luego de ello se presentan preguntas referentes a las imágenes anteriores, acerca de la posición de la escuadra, la cantidad de alturas en un triángulo y si existe intersección entre ellas. Se solicita copiar dos triángulos del libro al cuaderno (uno rectángulo y otro obtusángulo) y trazar las alturas de ellos, y plantea reflexionar acerca de lo que sucedió en ellos mediante tres preguntas acerca del tipo de triángulos, de la coincidencias de ellas y si debe recurrir a la prolongación de algún lado.
- En un recuadro define y recuerda el concepto de altura y el nombre que recibe la intersección de ellas (ortocentro (h))
- Como actividad de cierre de dicho concepto se plantea realizar diversos tipos de triángulos según medida de lados y ángulos, cada uno de ellos ya designados en un recuadro, construir sus alturas y realizar las conclusiones las de las situaciones que se presentan en ellos, ya sea al tipo de triángulos en donde las alturas quedan tanto dentro como fuera de él, la presencia de la altura sobre algunos de sus lados y sobre la existencia de algún triángulo donde queden todas las alturas fuera de él.

Bisectrices

- Materiales: Tijeras, papel lustre, regla, lápices, plumón, compás
- Página web: Ninguna.
- Metodologías de trabajo: Individual y de construcción.
- Descripción: pide recortar un triángulo cualquiera, luego pide marcar los tres ángulos y doblar cada uno de ellos por la mitad. Ahora pide marcar las líneas resultantes de los pliegues e identificar el punto en que ellas se intersectan. Para realizar cada uno de los pasos anteriores describe con texto y muestra fotografías de cada procedimiento.

- A continuación en un recuadro define el concepto de bisectriz y el nombre que recibe la intersección de ellas (Incentro (I)).
- Para realizar un paralelo de ambos conceptos requiere trabajar en el triángulo donde se han marcado las tres bisectrices, marcar las alturas y reflexionar con un compañero acerca de lo sucedido, visualizar si existen coincidencias y diferencias entre ellas.
- Con imágenes se construye las bisectrices con regla y compás sólo mostrando en las imágenes el procedimiento a seguir y no existe una explicación textual de lo anterior. En el cuaderno deben dibujar diversos triángulos (según lados y ángulos), preguntas de orientación respecto a la coincidencia de las bisectrices y las intersecciones de ellas y luego en todos los triángulos construir las alturas y ver qué sucede. Finalmente deben llenar un cuadro resumen de bisectrices y alturas considerando clasificación de triángulos según ángulo versus construcción, intersección, coincidencias y comentarios o conclusiones.

Texto 5:

- Baeza, A.; Villena, M. (2007). *Educación matemática, Séptimo básico*. Santiago: Ed. Santillana del Pacífico S.A.
- Unidad N° 2:
- Elementos secundarios: Alturas, bisectrices, simetrales y transversales de gravedad.

Elementos secundarios

Descripción de elementos primarios de los triángulos, indica que aprenderán qué son y cómo se construyen los elementos secundarios y los nombra.

Alturas

- Materiales: escuadra, lápices, triángulos de papel
- Página web: www.santillana.cl/proyecto/enlaces.htm
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y para razonar y grupal de construcción y para razonar.
- Descripción: Aparecen imágenes de la construcción de alturas con una escuadra, luego se Incluye una explicación de la notación para las alturas que incluye la razón de la letra que asociada. En un recuadro con imagen indican que en un triángulo obtusángulo se deben prolongar los lados del triángulo para construir las alturas. Deben observar la página web y responder a consultas. Siempre en forma personal, resuelven un problema sobre la distancia más corta entre un punto y una recta. Seguir indicaciones

en una construcción de triángulo, definir cuántas soluciones encuentran y contrastar repuestas con compañeros

- En grupos dibujan 2 triángulos en grupos 2 rectángulos y 2 obtusángulos distintos entre sí, trazan sus alturas (con escuadra), comparan la ubicación de ellas y reflexionan respondiendo unas preguntas. completan una tabla resumen según tipos de triángulos versus ubicación de las alturas, ubicación del ortocentro e incluyen conclusiones.
- Observaciones: No aparece la construcción de alturas con regla y compás, analizan las alturas de triángulos según ángulos, no sólo en función de las alturas.

Bisectrices

- Materiales: triángulo de papel, lápiz, compás y regla.
- Página web: www.santillana.cl/proyecto/enlaces.htm
- Metodologías de trabajo: Individual para construcciones, reflexiones
- Descripción: Define el elemento secundario. Deben observar fotos donde aparece cómo generar las bisectrices con regla y compás. Institucionaliza el concepto de bisectriz y de su punto singular. Deben conectarse a la página web, se encontrarán con el applet de un triángulo con sus bisectrices, les indican mover los vértices y responder consultas respecto a la ubicación del incentro en los distintos tipos de triángulos según ángulos.
- En grupo, deben construir bisectrices de triángulos (según sus lados) y contestan preguntas, deben relacionar en qué circunstancias coinciden alturas y bisectrices.
- En forma personal dibujan triángulos equilátero e isósceles, trazan y luego doblan las bisectrices, concluyen. Finalmente aparece un problema con un triángulo equilátero e isósceles que coinciden, deben encontrar el valor de un ángulo
- Observación: En ejercicio final deben doblar el papel, pero los triángulos no se cortan...

Simetrales

- Materiales: regla, compás y triángulos de papel
- Página web: www.santillana.cl/proyecto/enlaces.htm
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y reflexión y grupal construcción y reflexión.
- Descripción: Define simetral, se indica el sinónimo, con imágenes y comentarios hay un paso a paso para construirla con regla y compás. Institucionalizan la simetral y el circuncentro.

- Deben conectarse a la página web, se encontrarán con el applet de un triángulo con sus simetrales, les indican mover los vértices y responder consultas respecto a la ubicación del circuncentro en los distintos tipos de triángulos según ángulos.
- En grupo, deben construir simetrales de triángulos (según sus lados) y contestan preguntas, deben relacionar construir circunferencias circunscritas y concluir.
- En triángulos equiláteros construyen (personal) simetrales y alturas y deben responder qué sucede con ellas.
- Presentan un problema en que tres puntos representan ciudades, se debe construir algo a igual distancia de las tres. Dónde y en cuántos lugares se podría construir.
- Observación: Problema final planteado es muy interesante.

Transversales de Gravedad

- Materiales: triángulo isósceles de cartón
- Página web: www.santillana.cl/proyecto/enlaces.htm
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y comprobación, parejas igual.
- Descripción: En un recuadro indican que al tener un triángulo de cartón y pinchar con un lápiz en la intersección de las transversales de gravedad, el triángulo se mantiene en equilibrio
- Indican el paso a paso para la construcción de las medianas en forma escrita y con fotografías.
- Se define la transversal de gravedad y el centro de gravedad o baricentro. Y en un recuadro también indican que transversal de gravedad y medianas son sinónimos.
- Deben conectarse a la página web, se encontrarán con el applet de un triángulo con sus medianas, les indican mover los vértices y responder consultas respecto a la ubicación del centro de gravedad en los distintos tipos de triángulos según ángulos.
- En forma personal deben construir simetrales de triángulos (según sus ángulos) y contestan preguntas, deben marcar el baricentro. Luego en tres triángulos (según sus lados) hay unos segmentos en su interior y los estudiantes deben verificar si son medianas.
- En parejas construyen triángulos según lados y deben comparar qué sucede con los elementos secundarios en cada caso, concluir.
- Observaciones: Esto es trabajado sin papel.

Herramientas tecnológicas

- Materiales: -
- Página web: www.santillana.cl/proyecto/enlaces.htm
- Metodologías de trabajo: Individual
- Descripción: En la página web buscar el link correspondiente, ahí aparece un applet de un triángulo ABC, con las bisectrices, incentro y circunferencia inscrita, deben mover los lados y responder a las preguntas como si es posible que la circunferencia quede fuera del triángulo, consulta si se pueden construir las bisectrices sin compás y si existe alguna relación entre los triángulos que se forman por las bisectrices.
- Observaciones: El applet es exclusivo para las bisectrices, podría haberse extendido al resto de los elementos secundarios.

Cierre

- Completar mapa conceptual en forma individual.
- Responder preguntas en función del esquema.

Texto 6: Actual texto de estudio (2012)

- Setz, J. Darrigrandi, F. (2009). *Matemática 7° Educación Básica*. Santillana del Pacífico S.A.
- Unidad N° 3: “*Geometría*”
- Contenidos:

-Alturas de un triángulo

-Bisectrices de un triángulo

-Simetrales

-Transversales de gravedad.

Alturas

- Materiales: hoja de papel, lápices, escuadra.
- Página web: ninguna
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y discusión.
- Explica en primer lugar cuáles son los elementos primarios del triángulo (lados, ángulos y vértices, por lo que los elementos secundarios son: alturas, bisectrices, simetrales, transversales de gravedad.
- Descripción: Para iniciar muestra en tres imágenes la construcción de las alturas de un triángulo, sin dar las instrucciones pertinentes. Luego plantea dos preguntas de discusión acerca de las medidas de las alturas. Explica de donde proviene la letra que se designa la altura y cómo se escribe cuando se origina desde un vértice determinado.

- Luego deben copiar una actividad en el cuaderno, la que consiste en dibujar las alturas de tres triángulos diferentes (equilátero, isósceles y escaleno) y responder acerca de lo que se construye en ellos. Después dibujar dos triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, construir las alturas de ellos y completar una tabla resumen, donde incluye la ubicación de las alturas y donde se intersectan.
- Para finalizar este concepto define el concepto de altura y el nombre de la intersección de las tres alturas existentes en un triángulo.

Bisectrices

- Materiales: Tijeras, papel lustre, hoja de papel, regla, compás, lápices.
- Página web: www.santillana.cl/futuro/ejerc4.html
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y grupal para comparar y concluir.
- Descripción: comienza con la formación de grupos de tres integrantes, cada uno dibuja y luego recorta un triángulo acutángulo, rectángulo y obtusángulo respectivamente, luego que doblen los ángulos interiores de cada triángulo por la mitad, haciendo coincidir los bordes del papel en cada doblez, y que luego marquen cada segmento generado por los dobleces y para finalizar que marquen el punto donde se intersectan los tres segmentos.
- Luego se solicita copiar en una hoja los triángulos trabajados anteriormente y construir con regla y compás las bisectrices mostrando el procedimiento en cuatro pasos, sin explicar cada procedimiento. Para concluir se pide comparar ambos procedimientos. Para discutir se plantean preguntas acerca de las medidas e intersección de ellos.
- Para concretar la explicación del contenido define el concepto y el nombre de la intersección de las tres bisectrices. También realiza dos preguntas acerca del tipo de triángulos que se forman al trazar una bisectriz en un triángulo equilátero e isósceles. Y para concluir agrega un página web en la que aparece una actividad complementaria.

Simetrales

- Materiales: hojas de papel, regla, compás, lápices.
- Página web: <http://www.santillana.cl/puntocl/mat7ej1.htm>
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y grupal para comparar y concluir.
- Descripción: Formar grupos de tres integrantes y que sigan las instrucciones que aparecen, cada integrante debe dibujar un triángulo distinto, con el compás medir un arco de circunferencia de mayor medida que la mitad de cada lado, luego posicionar el compás en cada vértice y su opuesto y en la

intersección de ambos trazos dibujar una recta que es la simetral de un lado, luego se realiza con los dos lados faltantes. Y luego realiza preguntas para la discusión en grupo. Para finalizar define el concepto y el nombre que recibe la intersección de las tres simetrales, también en diferentes triángulos dibujados encontrar las simetrales correspondientes. Para complementar la información agrega una página web donde aparece un ejercicio relacionado con el concepto.

Transversales de Gravedad

- Materiales: tijeras, regla, cartón y lápiz.
- Página web: ninguna.
- Metodologías de trabajo: Individual de construcción y en parejas para comparar y concluir.
- Descripción: en parejas deben seguir las instrucciones señaladas, uno de los integrantes debe dibujar en un cartón un triángulo equilátero y otro isósceles, luego se marcan los puntos medios de cada lado del triángulo, se une cada vértice con el punto medio del lado opuesto y con ellos están construidas las transversales de gravedad, luego marcar el punto de intersección de las tres transversales y en él localizar un lápiz. Se realizar preguntas de discusión acerca de lo que sucede en dicha situación.
- A continuación se explica el concepto, su definición y el nombre que recibe el punto donde se intersectan las tres transversales.
- Para practicar se realizan actividades de aplicación.
- Para complementar propone una actividad acerca de la construcción con regla y compás y la construcción de las transversales de gravedad en diferentes situaciones.

4. Secuencia de trabajo inicial

4.1. Orientaciones para la implementación

Secuencia de trabajo de los elementos secundarios del triángulo mediante dobleces en papel

- **Aprendizaje Esperado (Según Programa de Estudios Séptimo Básico)**

Comprobar propiedades de alturas, simetrales, bisectrices y transversales de gravedad de triángulos, utilizando instrumentos manuales.

- **Materiales:**

-4 Set de Triángulos de Papel (3 triángulos: un acutángulo, rectángulo y obtusángulo)

-1 Set de papeles de márgenes irregulares (2 piezas)

-1 Set de Cuadrados de Papel (6 piezas)

-Lápices de colores

-Data Show

-Notebook

-Pegamento

-Guía de trabajo

Orientaciones para la implementación

- **Actividad individual de Inicio. Apresto sobre la relación entre doblez y segmento, hacer un doblez perpendicular a otro y doblar el punto medio de un segmento.**

- A cada niño se le entregan tres trozos de papel irregular.

- La investigadora solicita a los estudiantes que por medio de un doblez construyan un segmento. Luego les indica que generen un doblez perpendicular al segmento que realizaron anteriormente. Cuando ya han culminado, la investigadora le pide a algunos estudiantes -en los cuales ella haya observado que hay algunas diferencias

en las construcciones que efectuaron- que expliquen al curso lo que realizaron y argumenten por qué el último doblez es perpendicular al primero, en cada caso. La investigadora resume a los estudiantes las formas de construir una perpendicular con papel. En el caso que ningún estudiante logre la construcción, la investigadora indicará los pasos a seguir.

- Con un nuevo trozo de papel irregular se le pide a los estudiantes realizar un doblez cualquiera, luego la investigadora les pide que marquen el punto medio de ese doblez. Cuando ya lo hayan realizado, deberán explicar cuál fue el criterio que utilizaron para lograr obtener ese punto medio y, a su vez, explicar por qué ese punto corresponde al punto medio. Posteriormente, la investigadora les solicita que hagan la perpendicular que pasa por ese punto medio. Al igual que en el caso anterior, si ningún estudiante logra la construcción del punto medio, la investigadora entregará las instrucciones para llevarla a cabo y justificará.

- **Fase de Institucionalización:** La investigadora indica los conceptos matemáticos que han utilizado y le solicita a algunos estudiantes que señalen cómo se realiza cada uno de ellos con dobleces.

- **Actividad N°1:**

- La investigadora realiza una presentación en PowerPoint en que recuerdan los elementos primarios del triángulo y nombra los elementos secundarios y antes de indicar las características de ellos, va preguntando a los estudiantes lo que ellos recuerdan, para luego indicarlas.

- **Actividad N°2:**

- La investigadora entrega una guía de trabajo y cuatro sets de triángulos por grupo, después lee las instrucciones junto con los estudiantes y responde las consultas que puedan surgir.

- Los estudiantes resuelven la guía en conjunto.

- Cuando los estudiantes realizan los dobleces y llegan a la construcción de las alturas del triángulo obtusángulo, la investigadora pone atención a las inquietudes de los estudiantes. Cuando la mayoría del curso se encuentra en esta secuencia, la

investigadora guía las dudas que presenten los estudiantes realizando las siguientes preguntas orientadoras:

- ¿Qué sucede cuando trabajamos con la construcción de la altura?
- ¿Qué problemas pueden visualizarse?
- ¿Cuándo se les presentó la dificultad?
- ¿A qué creen que se debe este problema?
- ¿Qué solución le darían a la problemática presentada?

La intención de las anteriores preguntas tiene relación con generar una instancia de discusión, en que los estudiantes logren generar hipótesis, solucionar el problema y concluir.

- Mientras la mayor parte de los educandos está construyendo las simetrales en el triángulo obtusángulo, la investigadora examina el trabajo de cada grupo y una vez que han terminado o no sigan avanzando, genera preguntas orientadoras al respecto (a continuación).

- ¿Qué ocurre en el caso de la construcción de las simetrales?
- ¿Sucede algo similar que la construcción de las alturas?
- ¿En qué se asimilan?
- ¿Cuál es el problema?
- ¿Cuál sería la solución a dicho inconveniente?

Actividad de Cierre: Construcción de Dodecaedro con Origami con Origami Modular

- Los estudiantes trabajan con el set de papel, entregando al principio de la actividad. La investigadora proyecta una presentación PowerPoint que contiene información acerca del Origami e indica ejemplos de figuras conocidas realizadas con esta técnica. Luego aparece paso a paso la construcción de un dodecaedro con origami modular (12 módulos).

- Mientras se proyecta el tutorial los estudiantes van doblando su papel. Al mismo tiempo, la investigadora propicia una discusión acerca de los dobleces realizados, relacionándolos con: bisectar un ángulo, la altura de una figura, el punto medio y la simetral de un trazo. Cada integrante de los grupos realizará dos módulos, para luego unirlos y construir en conjunto a otro grupo el poliedro.

- Finalmente los estudiantes responden la encuesta ubicada al final de la guía de trabajo de forma individual.

4.2. Guía de trabajo inicial

GUÍA DE TRABAJO: *ELEMENTOS SECUNDARIOS DEL TRIÁNGULO*

Fecha: _____/_____/_____
Integrantes:

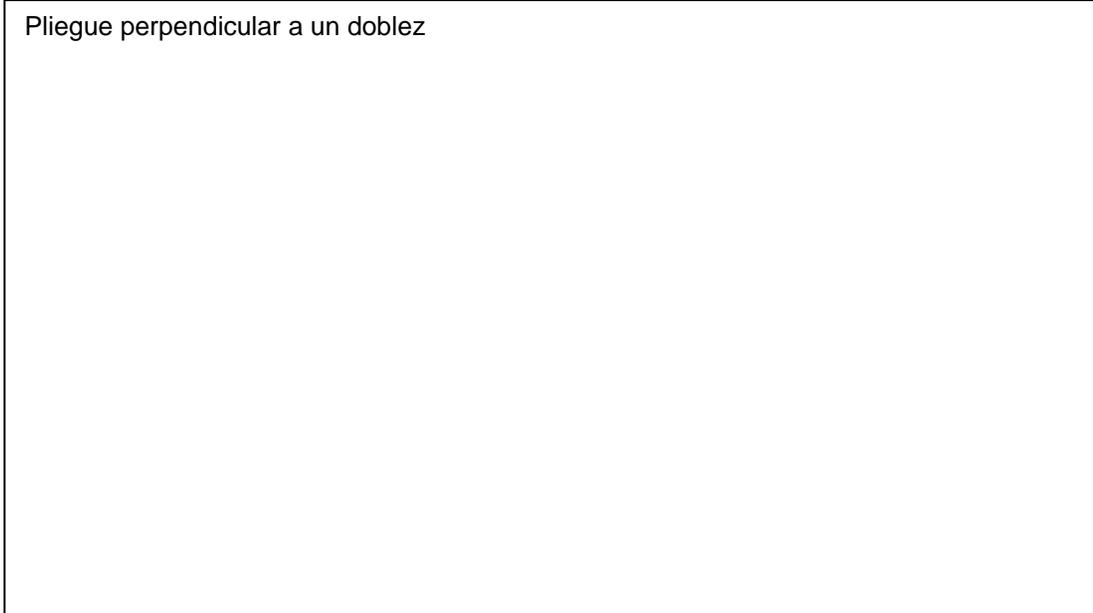
El presente material ha sido creado para recopilar información del trabajo en estudiantes de séptimo año básico, del Liceo Salesiano Camilo Ortúzar Montt, acerca de los elementos secundarios del triángulo realizados con dobleces de papel. Que se enmarcan en la investigación del Seminario de grado de estudiantes de Pedagogía en Educación Matemática e Informática Educativa.

Indicaciones:

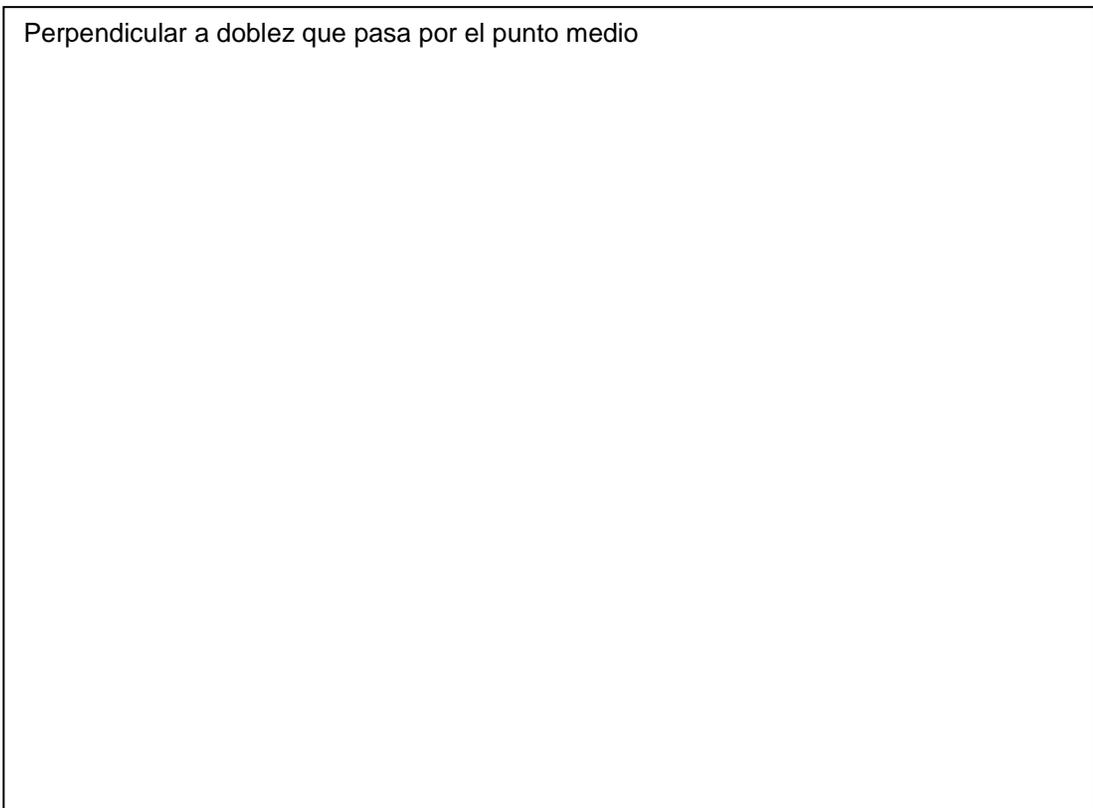
1. Reunirse en grupos de 3 personas y recibir guía de trabajo, set de triángulos y set de papeles irregulares.
2. Realizar los tres dobleces del elemento secundario correspondiente en cada tipo de triángulo.
3. Cada integrante del grupo debe realizar un doblez por cada triángulo realizado.
4. Marcar los dobleces con lápiz para su mejor distinción.
5. Pegar cada triángulo, de forma que queden visibles las marcas de los dobleces con lápiz, según el tipo de triángulo.
6. Escribir los comentarios u observaciones al término de cada página.
7. Por último, según las indicaciones recortar en tres partes la hoja final de la guía y responder la encuesta en forma individual.

Trabajo con papeles irregulares

Pliegue perpendicular a un dobléz



Perpendicular a dobléz que pasa por el punto medio



Comentarios: _____

Bisectrices (*b*)

Triángulo ACUTÁNGULO

Triángulo RECTÁNGULO

Triángulo OBTUSÁNGULO

Comentarios: _____

Transversales de gravedad (f)

Triángulo ACUTÁNGULO

Triángulo RECTÁNGULO

Triángulo OBTUSÁNGULO

Comentarios: _____

Simetrales (s)

Triángulo ACUTÁNGULO

Triángulo RECTÁNGULO

Triángulo OBTUSÁNGULO

Comentarios: _____

Alturas (*h*)

Triángulo ACUTÁNGULO

Triángulo RECTÁNGULO

Triángulo OBTUSÁNGULO

Comentarios: _____

5. Secuencia de trabajo final

5.1. Orientaciones para la implementación

SECUENCIA DE TRABAJO DE LOS ELEMENTOS SECUNDARIOS DEL TRIÁNGULO MEDIANTE DOBLECES EN PAPEL

- **Objetivo de la Secuencia de trabajo**

Favorecer la construcción de elementos secundarios del triángulo mediante el uso de material concreto, a saber, dobles de papel y posteriormente origami.

- **Aprendizaje Esperado (Según Programa de Estudios Séptimo Básico)**

Comprobar propiedades de alturas, simetrales, bisectrices y transversales de gravedad de triángulos, utilizando instrumentos manuales.

- **Materiales:**

- 4 set de tres Triángulos de Papel (3 triángulos: un acutángulo, rectángulo y obtusángulo)
- 1 Set de papeles de márgenes irregulares (2 piezas)
- 1 Set de Cuadrados de Papel (6 piezas)
- Lápices de colores
- Data Show
- Notebook
- Pegamento
- Guía de trabajo

Orientaciones para la implementación

- **Actividad individual de Inicio. Apresto sobre la relación entre dobles y segmento, hacer un dobles perpendicular a otro y doblar el punto medio de un segmento.**

- La investigadora indica el objetivo de la clase e informa a los estudiantes que esta actividad está referida a la construcción de los elementos secundarios del triángulo, que la primera parte se es en función a una Guía de trabajo y que en la segunda trabajarán con origami.

- La investigadora señala que deben organizarse en grupos de tres, si no en parejas y mientras los estudiantes se ponen de acuerdo, cambian de puesto y se organizan, él distribuye las guías de trabajo u el set de papeles con márgenes irregulares.

- Los estudiantes junto con la investigadora leen las indicaciones de la guía y la investigadora responde dudas de haberlas.

- Solicita a los estudiantes que por medio de un dobléz construyan un segmento. Luego les indica que generen un dobléz perpendicular al segmento que realizaron anteriormente. Cuando ya han culminado, el educador le pide a algunos estudiantes -en los cuales ella haya observado que hay algunas diferencias en las construcciones que efectuaron- que expliquen al curso lo que realizaron y argumenten por qué el último dobléz es perpendicular al primero, en cada caso.

- Con un nuevo trozo de papel irregular se le pide a los estudiantes realizar un dobléz cualquiera, luego la investigadora les pide que marquen el punto medio de ese dobléz. Cuando ya lo hayan realizado, deberán explicar cuál fue el criterio que utilizaron para lograr obtener ese punto medio y, a su vez, explicar por qué ese punto corresponde al punto medio. Posteriormente, la investigadora les solicita que hagan la perpendicular que pasa por ese punto medio. Al igual que en el caso anterior, si ningún estudiante logra la construcción del punto medio, la investigadora entregará las instrucciones para llevarla a cabo y justificará.

- **Fase de Institucionalización:** La investigadora indica los conceptos matemáticos que han utilizado y le solicita a algunos estudiantes que señalen cómo se realiza cada uno de ellos con dobleces.

- **Actividad N°1:**

- La investigadora realiza una presentación en PowerPoint en que recuerdan los elementos primarios del triángulo y nombra los elementos secundarios y antes de indicar las características de ellos, va preguntando a los estudiantes lo que ellos recuerdan, para luego indicárselas.

- **Actividad N°2:**

- La investigadora entrega una guía de trabajo y cuatro sets de triángulos por grupo, después lee las instrucciones junto con los estudiantes y responde las consultas que puedan surgir.

- Los estudiantes resuelven la guía en conjunto.

- Mientras la mayor parte de los educandos está construyendo las simetrales en el triángulo obtusángulo, la investigadora examina el trabajo de cada grupo y una vez que han terminado o no sigan avanzando, genera preguntas orientadoras al respecto (a continuación).

- ¿Qué ocurre en el caso de la construcción de las simetrales?
- ¿Qué problemas pueden visualizarse?
- ¿Cuándo se les presentó la dificultad?
- ¿A qué creen que se debe este problema?
- ¿Qué solución le darían a la problemática presentada?

La intención de las anteriores preguntas tiene relación con generar una instancia de discusión, en que los estudiantes logren generar hipótesis, solucionar el problema y concluir.

- Mientras avanzan en la realización de las construcciones y cuando los estudiantes realizan los dobleces y llegan a la construcción de las alturas del triángulo obtusángulo, la investigadora pone atención a las inquietudes de los estudiantes. Cuando la mayoría del curso se encuentra en esta situación, la investigadora guía las dudas que presenten los estudiantes realizando las siguientes preguntas orientadoras:

- ¿Qué sucede cuando trabajamos con la construcción de la altura?
- ¿Qué problemas pueden visualizarse?
- ¿Qué solución le darían a la problemática presentada?
- ¿Sucede algo similar que la construcción de las simetrales?
- ¿En qué se asimilan?
- ¿Cuál es el problema?
- ¿Cuál sería la solución a dicho inconveniente?

- **Actividad Grupal de Cierre. Construcción de Dodecaedro con Origami Modular**

- Los estudiantes trabajan con el set de cuadrados de papel, entregado al principio de la actividad.

La investigadora proyecta una presentación PowerPoint que contiene información acerca del Origami e indica ejemplos de figuras conocidas realizadas con esta técnica. Luego aparece paso a paso la construcción de un dodecaedro con origami modular (12 módulos).

- Mientras se proyecta el tutorial los estudiantes van doblando su papel. Al mismo tiempo, la investigadora propicia una discusión acerca de los dobleces realizados, relacionándolos con: bisectar un ángulo, la altura de una figura, el punto medio y la simetral de un trazo. Cada integrante de los grupos realizará dos módulos, para luego unirlos y construir en conjunto a otro grupo, el poliedro.

- Finalmente los estudiantes responden la encuesta ubicada al final de la guía de trabajo, en forma individual.

5.2. Guía de trabajo final

GUÍA DE TRABAJO

ELEMENTOS SECUNDARIOS DEL TRIÁNGULO

Integrantes:	_____

El presente material ha sido creado con el fin de explorar, en estudiantes de séptimo año básico, del Liceo Salesiano Camilo Ortúzar Montt, la construcción de los elementos secundarios del triángulo mediante uso de material concreto. **Más específicamente, mediante dobleces de papel.** Lo cual se enmarca en una investigación de Seminario de Grado de estudiantes de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa.

De antemano muchas gracias por tu participación.

Atte.

Las investigadoras:

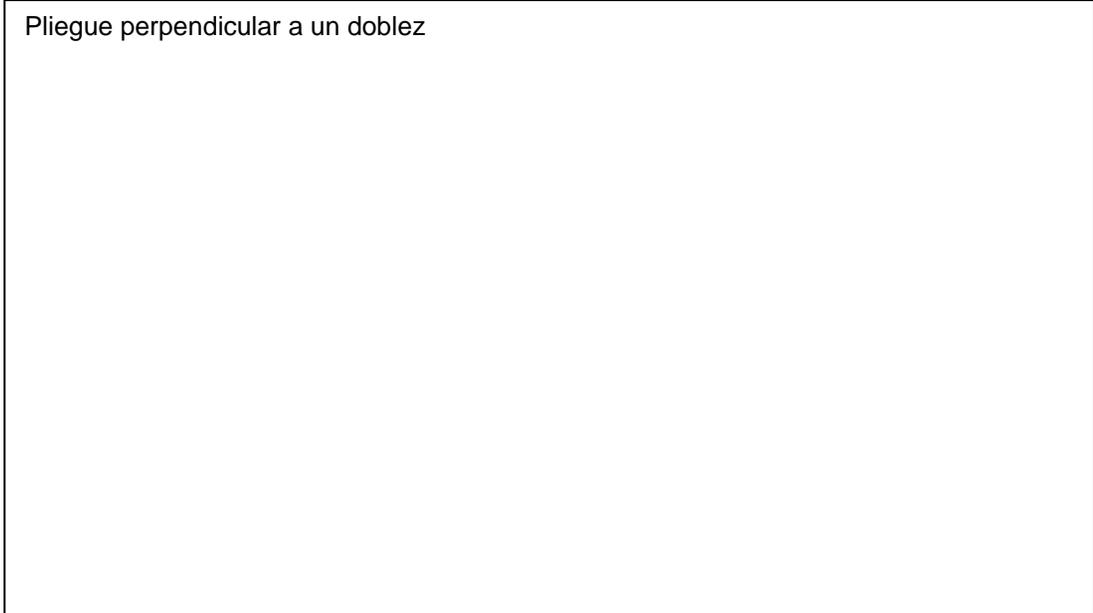
Paz Olave Rojas y Jennifer Urzúa Gaete

Indicaciones Generales

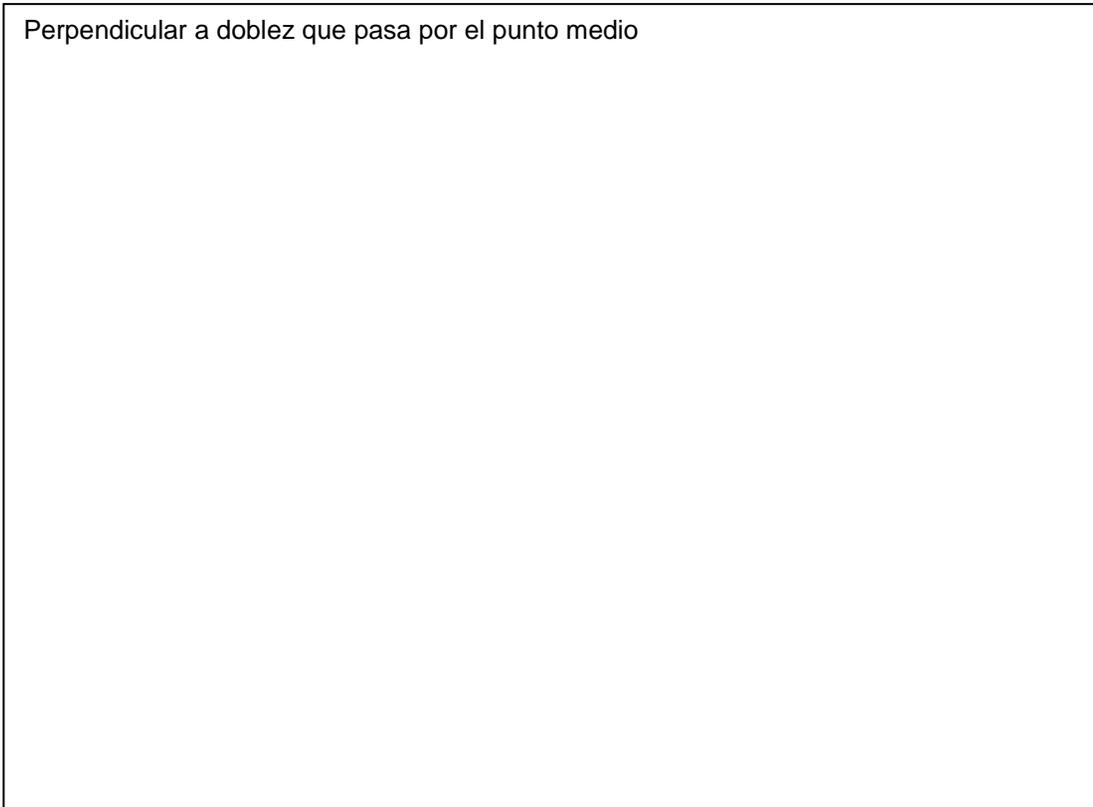
1. Se reúnen en grupos de tres personas. Durante la actividad, a cada grupo se le hará entrega de:
 - La presente Guía de trabajo
 - Cuatro set de triángulos etiquetados con: Transversales de gravedad, Simetrales, Bisectrices y Alturas
 - Un set de papeles irregulares
 - Un set de seis cuadrados
2. Cada grupo desarrolla la actividad llamada APRESTO, siguiendo las indicaciones que darán las investigadoras.
3. Se desarrollan las páginas 3, 4, 5 y 6 de la Guía de Trabajo, siguiendo las siguientes instrucciones:
 - Realizar los tres dobleces del elemento secundario que se indica en cada página, haciendo uso del correspondiente set que señala el nombre del elemento secundario.
 - Cada integrante del grupo debe realizar un dobléz con cada triángulo del set.
 - Marcar los dobleces con lápiz para su mejor distinción.
 - Pegar cada triángulo, de forma que queden visibles las marcas de los dobleces con lápiz, según el tipo de triángulo.
 - Escribir los comentarios u observaciones grupales al término de cada página.
4. Cuando la investigadora lo indique, se reúnen en equipo de trabajo de a dos grupos y efectúan la construcción de un dodecaedro, orientados por las instrucciones que se entregarán mediante una Presentación PowerPoint.
5. Completar de manera individual la Hoja de Retroalimentación de la Actividad que entregará la investigadora.
6. En el momento en que la docente lo indique, observan con atención la presentación en PowerPoint que se expondrá.

APRESTO: Trabajo con papeles irregulares

Pliegue perpendicular a un dobléz



Perpendicular a dobléz que pasa por el punto medio



Comentarios: _____

Actividad con triángulos de papel: Bisectrices (b)

Triángulo ACUTÁNGULO

Triángulo RECTÁNGULO

Triángulo OBTUSÁNGULO

Comentarios: _____

Actividad con triángulos de papel: Transversales de gravedad (*t*)

Triángulo ACUTÁNGULO

Triángulo RECTÁNGULO

Triángulo OBTUSÁNGULO

Comentarios: _____

Actividad con triángulos de papel: Simetrales (s)

Triángulo ACUTÁNGULO

Triángulo RECTÁNGULO

Triángulo OBTUSÁNGULO

Comentarios: _____

Actividad con triángulos de papel: Alturas (h)

Triángulo ACUTÁNGULO

Triángulo RECTÁNGULO

Triángulo OBTUSÁNGULO

Comentarios: _____

6. Encuesta a estudiantes Inicial

ACERCA DE LA ACTIVIDAD

Respondan en forma individual las siguientes preguntas.

1. ¿Has trabajado la geometría de esta manera alguna vez? _____
2. ¿Te gustó o no esta clase? _____
 - a. ¿Por qué? _____

3. ¿Te gustaría trabajar de esta forma en tus futuras clases? _____
 - a. ¿Por qué? _____

4. ¿Conocías el origami? _____
5. ¿Qué te pareció más interesante de la clase? _____
 - a. ¿Por qué? _____

7. Encuesta a estudiantes Final

RETROALIMENTACIÓN DE ACTIVIDAD

NOMBRE:

Responde individualmente. En cada caso argumenta brevemente tu respuesta. Muchas gracias.

a) ¿Habías trabajado la geometría de esta manera alguna vez?

b) ¿Te gustó o no esta actividad? ¿Cómo te sentiste en ella?

c) ¿Modificarías alguna parte de la actividad?

d) ¿Conocías o había escuchado hablar alguna vez de Origami?