



Salesiana

*Escuela de Educación en Humanidades y Ciencias
Departamento de Educación Matemática*

**APROXIMACION AL DESARROLLO DEL METODO DE
RUNGE-KUTTA PARA LA SOLUCION DE ECUACIONES
DIFERENCIALES NO LINEALES Y LA ADAPTACION DE ESTE
CONOCIMIENTO A ESTUDIANTES ESCOLARIZADOS**

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN
EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN
MATEMÁTICA E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:
JOFRÉ MORALES, JOCELYN L.
VALDÉS ROMERO, JOSÉ I.

PROFESOR GUÍA:
FRANCISCO JAVIER
GÓMEZ FERNÁNDEZ

SANTIAGO, CHILE
2012

*“Uno de los principales
objetivos de la Educación
debe ser ampliar las ventanas
por donde se mira al mundo”*

(Arnold H. Glasow)

Agradecimientos

Siento que termina un proceso inmensamente enriquecedor, lleno de bellos momentos y de crecimiento personal, el cual no hubiese sido posible sin el amor y apoyo de muchas personas importantes en mi vida y ahora es cuando solo puedo agradecer toda su entrega. En primera instancia agradecer a Dios por todas esas veces en que sentía que no podía más y con solo sentir su presencia me fortaleció para seguir luchando por mis metas.

A mi familia, mi padre Luis y a mi madre María, mis hermanos María Alejandra, Esteban, Sara y Bernarda, mis 7 hermosos sobrinos y a mis cuñados, ya hermanos, sin el apoyo y amor de cada uno de ellos no hubiese sido posible alcanzar este gran objetivo, el ser profesora.

A mis buenos profesores del Departamento de Matemática, en especial a mi Estimado y querido profesor Carlos Gómez por enseñarme el verdadero amor por esta profesión. Y a esos buenos amigos ganados en estos 5 años de formación, en especial a mi gran amigo Fabián Mendoza por su lealtad, cariño y confianza, hoy considerado un hermano más. Gracias a todas aquellas personas que confiaron en mí y me dieron la oportunidad de ser parte de sus vidas y ustedes de la mía.

Jocelyn Jofré Morales

Deseo agradecer a todo aquellos que han creído en mí. A lo largo de este periodo son muchas las personas que han entrado en mi vida, así como muchos los que salieron, pero sin duda todos han aportado un granito de arena el cual moldea el profesor que soy en la actualidad. Mis más sinceros agradecimientos para mis profesores del DEM, quienes me han apoyado en todo este periodo, a mis compañeros de clases quien me han dado un espacio en sus corazones y, asimismo, yo he dejado un espacio en el mío para ellos. A mi familia que me ha aguantado por tanto tiempo, pero me han dado la oportunidad de llegar acá y finalmente a mi por nunca dejarme caer y obligarme a seguir adelante. ¡Mamá lo logre!

José Valdés Romero

Agradecimientos Generales

Ya culmina un intenso proceso de formación de 5 años, donde no podemos dejar de agradecer a esas personas que nos formaron día a día ya sea académicamente o con un consejo de esos que muchas veces nos orientaron en la vida, empezando por agradecer a nuestro profesor guía, Francisco Gómez por todo su apoyo en el desarrollo de esta tesis y más que eso por el honor y agrado de trabajar con él y haber sido nuestro profesor en esas asignaturas muchas veces complicadas.

A todos los profesores del Departamento de Matemáticas y por el orgullo de haber sido parte del departamento y alumnos de la carrera de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa y agradecer a las personas más importantes de nuestras vidas, nuestras familias por todo el apoyo incondicional, por creer y confiar en nosotros, por nunca dejarnos caer en los momentos complicados. Nos sentimos plenamente orgullosos de la formación recibida y de ser ya unos docentes amantes de su profesión.

INDICE

Resumen	7
Abstract	8
Introducción	9
CAPITULO I	12
1 Planteamiento del problema	12
1.1 Importancia del estudio	13
1.2 Pregunta de Investigación	15
1.3 Objetivos	16
1.3.1 Objetivo General	16
1.3.2 Objetivos Específicos	16
1.4 Limitaciones	17
1.5 Hipótesis, conjeturas	17
CAPITULO II	19
2 Marco Referencial	19
2.1 Un poco de historia	19
2.1.1 Desarrollo histórico de las Ecuaciones Diferenciales	19
2.2 ¿Qué son las Ecuaciones Diferenciales?	23
CAPITULO III	27
3 Marco Teórico	27
3.1 Vygotsky y la Teoría Sociocultural	27
3.2 Teoría de situaciones didácticas	32
CAPITULO IV	37
4 Análisis del objeto de estudio	37
4.1 Desarrollo de Método Runge-Kutta de cuarto orden (RK44), para el Sistema de Van Der Pol	37
4.1.1 Cambio de la ecuación a su forma vectorial	37

4.2	Aplicación del Método	39
4.3	Conocimientos necesarios para el desarrollo de Runge-Kutta de orden cuatro	41
	CAPITULO V	44
5	Análisis contenidos	44
5.1	Análisis de Planificaciones semestrales versus Planes y Programas de Estudio MINEDUC	44
5.2	Historial de Contenidos y contraste con Planes y Programas del MINEDUC	48
	CAPITULO VI	58
6	Como aplicar el método de Runge-Kutta para el desarrollo de Ecuaciones Diferenciales No Lineales	58
	CAPITULO VII	61
7	Conclusiones	61
	BIBLIOGRAFIA	63
	ANEXOS	67

Resumen

La meta principal de la Educación es crear hombres que sean capaces de hacer cosas nuevas, no simplemente de repetir lo que otras generaciones han hecho; hombres que sean creativos, inventores y descubridores. La segunda meta de la Educación es la de formar mentes que sean críticas, que puedan verificar y no aceptar todo lo que se les ofrece (Jean Piaget).

El propósito de este trabajo es investigar si a través de los aprendizajes obtenidos por estudiantes de un Establecimiento Educacional determinado, particular subvencionado de la Comuna de Santiago Centro, en Tercer y Cuarto año Medio en Electivo de Matemáticas, estos serán capaces de adquirir y desarrollar un nuevo aprendizaje ligado a un tópico matemático fuerte como es la Ecuación Diferencial utilizando un método numérico conocido como Runge-Kutta.

Esta tesis es un trabajo de investigación, en el cual se realizará un análisis a los contenidos vistos por las estudiantes en sus dos años anteriores de escolaridad (2010-2011), en el área de las Matemáticas, viendo así, si poseen las herramientas necesarias para adquirir este nuevo concepto (Ecuaciones Diferenciales) y, a la vez, comparando estos contenidos con los entregados en los Planes y Programas de Estudio del MINEDUC (2012, sin ajustes curriculares). También se centra en la Investigación bibliográfica para el desarrollo histórico de las Ecuaciones Diferenciales y el desarrollo matemático del Método Runge-Kutta de orden cuatro. Por lo tanto, esta investigación intenta develar las capacidades cognitivas de las estudiantes de un colegio determinado, y para ello nos basaremos en la Teoría Sociocultural de Lev Vygotsky y la Teoría de Situaciones didácticas propuesta por Brousseau.

Abstract

The primary goal of education is to create men who are capable of doing things new not simply of repeating what other generations have done-men who be creative, inventors and discoverers. The second goal of education is to form minds that are critical, they can verify and not accept everything they are offered (Jean Piaget).

The purpose of this paper is to investigate whether through learning acquired by students in an educational class subsidized private Commune of Santiago Centro, in third and fourth year in Elective Mathematics Middle, will be able to acquired and develop a new learning linked to a strong mathematical topic is the differential equation using a numerical method known as Runge –Kutta.

This thesis is a research project, which is an analysis of the content seen by the students in their last two years of schooling (2010- 2011), in the area of mathematics, and seeing if they have the necessary tools to acquire this new concept (Differential Equations) while comparing these delivered content with Plans and Programs study Mineduc (2012, no curricular adjustments). It also focuses on the research literature to the historical development of the Runge-Kutta method of order four. Therefore, this research attempts to uncover the cognitive abilities of the students in a particular school, and for this we draw on sociocultural theory of Lev Vygotsky and the theory of didactical situations proposed by Brousseau.

Introducción

En el desarrollo del proceso enseñanza y aprendizaje, en el cual los estudiantes son los entes principales, siempre nos encontraremos con desafíos que nos llevarán a pensar si los contenidos y herramientas entregadas por los docentes les otorgará la facultad de alcanzar un nivel de abstracción necesaria para comprender y hacer de ellos una matemática avanzada, obtenida muchas veces de intensos procesos cognitivos. Es bien sabido que el aprendizaje es un acto de voluntad y que exige un mínimo de atención para su registro en la memoria, pero también sabemos que el comprender, analizar, conjeturar, aplicar, interactuar y transformar es parte fundamental para la adquisición de los conocimientos, donde es el estudiante quien llevará a cabo dicha tarea.

El estudio del aprendizaje significativo, se centra en identificar los procesos que están teniendo lugar en el alumno. Las estrategias de aprendizaje les otorga (al alumnado) características propias que las hace observables, medibles, capaces de ser adquiridas e incluso promover su inclusión en la educación formal (Beltrán, 1998).

El desafío como docentes, en el cual se está inmerso día a día, es poder crear un enlace entre los contenidos entregados y la adquisición de aquel aprendizaje por parte de los estudiantes, el cual otorga una plena satisfacción al saber que se puede construir un puente entre una matemática muchas veces dura y una adquisición de ese saber expuesto ante el estudiante.

Existen contenidos que se entregan en el proceso de formación como docentes, y para adquirirlos se necesita de una matemática avanzada, generalmente no vista en ciertos establecimientos educacionales, pero ¿Serán capaces los estudiantes de poder adquirir estos conocimientos con los contenidos previos entregados en el aula en el transcurso de su Enseñanza Media?, ¿Tendrán las herramientas necesarias para poder desarrollar algún tópico matemático fuerte? He aquí las dudas que develaremos como parte de nuestra problemática, la cual se centra en la Enseñanza Media. Para ello será necesario realizar un trabajo de investigación, donde la muestra serán estudiantes de un Establecimiento educacional determinado. Por ende el desarrollo de esta tesis consiste en tomar un tópico matemático fuerte en educación superior “Ecuaciones Diferenciales” (Sistemas Dinámicos) y develando particularmente si las estudiantes

de un Establecimiento Educacional Particular subvencionado de la Comuna de Santiago Centro, específicamente Tercer y Cuarto año Medio del área Electiva de Matemáticas, poseen las herramientas necesarias para poder adquirir y desarrollar dicho tópico matemático, a través de un análisis de sus aprendizajes previos.

Seleccionamos en específico las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden y No lineales (de forma particular el sistema de Van Der Pol, por sus aplicaciones físicas), el cual lo desarrollaremos a través del método numérico de Runge-Kutta, esto último por ser un método relativamente fácil de aplicar y con un grado de exactitud muy superior al resto de otros métodos.

Desde esta perspectiva es de nuestro interés adentrarnos en el mundo de las EDO¹ para así poder llevar a cabo un análisis tanto metodológico como algebraico de ellas, con el fin de observar cuales son los contenidos previos y herramientas que deben dominar los/as estudiantes de Tercer y Cuarto año Medio Electivo, para ser capaz de resolver una ecuación de este tipo, utilizando las herramientas adquiridas en su proceso escolar. Así surgen algunas interrogantes a desarrollar en este trabajo de investigación como: ¿Qué es una EDO?, ¿De dónde proviene el termino EDO?, ¿Cómo se clasifican?, ¿Qué es un método numérico en una EDO?, ¿Qué es el método Runge-Kutta? Los cuales le daremos respuestas en el desarrollo de esta tesis.

Así, teniendo los conceptos definidos y las interrogantes expuestas, se realizará un desarrollo matemático e histórico de dichas ecuaciones, también nos involucraremos en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de estudiantes de Tercer y Cuarto año Medio Electivo de un Establecimiento Educacional determinado, con el objetivo de analizar las habilidades, conocimientos y herramientas adquiridas por ellas, y de esta forma, observar si existe la posibilidad de desarrollar este tipo de ecuaciones en este establecimiento en particular. De la misma forma, para dar un sustento teórico a este trabajo de investigación es que nos introduciremos en las teorías de Lev Vygotsky (Teoría sociocultural) y Guy Brousseau (Teoría de situaciones didácticas), con el fin de poder definir los factores necesarios para desarrollar la problemática.

La motivación principal para desarrollar este tipo de investigación, es por el interés al concepto de las Ecuaciones Diferenciales, el cual fue visto en el transcurso del Tercer

¹ EDO: Ecuación Diferencial Ordinaria

año del proceso de nuestra formación docente, en la asignatura de Cálculo III. La inquietud nace de la posibilidad de acceder a la aplicación de un concepto que no se ha visto ser enseñado, en el aula de cualquier establecimiento educacional chileno. Este propósito nos llevó a conjeturar, investigar, evaluar, analizar y desarrollar un conjunto de tareas y metas propuestas para el cumplimiento de cada uno de nuestros objetivos planteados en esta Tesis, para así tener plena satisfacción de que nuestro propósito ha sido cumplido de manera cabal, otorgándonos una satisfacción del trabajado realizado.

CAPITULO I

1 Planteamiento del problema

La reforma Educacional y el Marco Curricular chileno propician Objetivos Fundamentales Transversales (OFT) para la Educación Básica y la Educación Media, a través de los que se busca otorgar una formación integral de los alumnos y alumnas, que responda a las nuevas necesidades educativas, promoviendo un mayor desarrollo personal y una formación ético valórica, que les permita enfrentar con seguridad los desafíos del presente y futuro, y hacer un aporte real a la construcción de un mundo mejor.

En la Educación Media específicamente en el área Científico – Humanista, se concibe que los conocimientos, habilidades y actitudes seleccionados en los objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios apunten a su desarrollo. En el ajuste curricular de matemática, aprobado en el año 2009 por el Consejo Nacional de Educación, se destaca la importancia de desarrollar procesos matemáticos de grandes tópicos (matemática más avanzada), dentro de los cuales la resolución de problemas ya no se concibe como un eje en sí mismo, sino que es parte del razonamiento matemático, siendo trabajado transversalmente en los cuatro ejes de contenidos actualmente presentes: Números, Álgebra, Geometría y Datos y azar.

Sobre esta base abordaremos esta Tesis, orientada específicamente a las asignaturas de III y IV año Medio (sin ajustes curricular), Electivo de Matemáticas, e investigar si es factible poder llegar a un nivel de desarrollo matemático de un tópico fuerte como son las Ecuaciones Diferenciales (Sistemas Dinámicos) sabiendo que a partir de los Planes y Programas de Estudio entregados por el MINEDUC (2012, sin ajustes curriculares ya que a la fecha no se encontraban disponibles), explicitan que los contenidos a tratar solo se limitan a Derivadas e Integrales, de lo cual podemos inferir que las/os estudiantes son capaces de adquirir conocimientos que generalmente se imparten en primer año de una carrera universitaria, como lo es en el área de la Ingeniería y/o Pedagogía en Matemáticas.

El estudio que proponemos, surge de preguntas tales como: ¿Estarán preparados las estudiantes de un Establecimiento Educacional Particular Subvencionado de la Comuna de Santiago Centro, para la adquisición de un tópico matemático fuerte como son las Ecuaciones Diferenciales?, ¿Qué herramientas deben poseer las estudiantes para la adquisición de dicho contenido?, ¿Cuáles son las herramientas que deben dominar los estudiantes para desarrollar matemáticamente este proceso?, todas estas interrogantes son la proyección de nuestra investigación.

Si bien, estas preguntas pueden ser más amplias que lo que se puede abordar en una investigación como la presente, no queremos dejar de mencionarlas, ya que nos orientan a la especificación de nuestros objetivos. En este sentido buscamos evaluar qué tipos de conocimientos y herramientas deben adquirir los estudiantes para desarrollar y comprender este tópico matemático. Para ello, se analizarán los contenidos vistos previamente por estudiantes de un establecimiento educacional de niñas, de la comuna de Santiago Centro, Científico – Humanista, en las asignaturas de Tercer y Cuarto año Medio de Matemáticas Electivo, ya que nuestro trabajo de investigación está orientado a las herramientas necesarias que las estudiantes deben poseer para el desarrollo de un tópico matemático fuerte como son las Ecuaciones Diferenciales.

En este capítulo veremos la importancia de estudio, las preguntas que nos llevaron a investigar este tema, los objetivos planteados en esta Tesis, y junto con ella, las limitaciones posibles del proceso de investigación.

1.1 Importancia del estudio

El tópico desarrollado en esta investigación “ecuaciones diferenciales no lineales por desarrollo numérico, a través del método de Runge-Kutta” es un tema sin estudiar en el contexto de enseñanza secundaria. Es importante saber cuáles son los límites de nuestros estudiantes y, por lo tanto, debemos llevarlos a nuevas situaciones donde ellos puedan demostrar sus destrezas lógico-matemáticas.

Además, se considera que si bien los contenidos en la enseñanza secundaria de Chile son adecuados para las necesidades de un país en desarrollo, estos están en un estado de obsolescencia, debido a la poca coherencia con las necesidades actuales del estudiantado chileno. No son temas de interés para nuestros estudiantes el cómo calcular el área de un cuadrado o las soluciones de una ecuación cuadrática si estos contenidos no están asociados con un tema real, o tangible para ellos. Esto solamente incita a la creación de algoritmos, sin sentido aparente en nuestros estudiantes, los cuales por lo mismo le quitan el carácter de importante en su aprendizaje. Por lo tanto, es necesario descubrir nuevas formas de aventurar a los estudiantes a una matemática más dinámica y completa, punto donde radica la riqueza de este estudio, ya que abre una nueva ventana a los aprendizajes, en el cual estudiantado chileno pueda tener acceso.

Por último, es importante señalar que hoy en día no se puede responder a la pregunta tradicional sobre si los estudiantes chilenos tienen las capacidades mínimas para entrar a una carrera universitaria. Esto debido a falta de estudios referentes a este tema, o solo la poca correlación entre los aprendizajes logrados en el enseñanza secundaria y los contenidos primarios vistos en carreras universitarias. De forma adyacente el estudio realizado en esta investigación puede responder a una de las ramificaciones que se desglosa de ese tipo de pregunta. Por ejemplo, ¿los estudiantes de enseñanza media de Chile pueden ingresar directamente a un curso de matemáticas avanza en la universidad?

Los sistemas dinámicos y, en particular, el desarrollo por métodos numéricos de ellos, es un ramo característico de una carrera universitaria con orientación matemática. Por lo tanto, este estudio podría atender a esta pregunta, en la medida en que se oriente a ella, ya que este devela la capacidad que posee el estudiante chileno en la actualidad. En la medida que sea posible, y después de todo el análisis realizado en esta investigación podríamos llegar a conjeturar que el estudiante chileno tiene las herramientas y la capacidad cognitiva para ingresa a un curso de matemáticas avanzada en la universidad.

1.2 Pregunta de Investigación

La pregunta de investigación que caracteriza esta tesis intenta develar las capacidades cognitivas de los estudiantes de un Establecimiento Educativo determinado, en el área de matemática, apuntando a la preparación de ellos para un curso de matemáticas avanzada, como es el caso particular de las ecuaciones diferenciales y los métodos de desarrollo. A través de esta pregunta se intentará definir el problema a investigar y las componentes necesarias para su desarrollo.

La pregunta de tesis que caracteriza esta investigación es:

¿Pueden las estudiantes chilenas de Tercer y Cuarto año Medio, de un establecimiento determinado, desarrollar el tópic de ecuaciones diferenciales no lineales a través del desarrollo del método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden?

Como se mencionó anteriormente, la finalidad de esta pregunta es develar la capacidad de los estudiantes en Chile de nivel secundario para responder a la inquietante planteada en esta pregunta. Pero es importante señalar que la pregunta escogida para guiar el estudio realizado, esconde en forma transversal otros ejes relacionados con las capacidades cognitivas de las estudiantes chilenas, la significancia de los contenidos pertenecientes al marco curricular establecido por el Ministerio de Educación de Chile, apuntar a un contenido mucho más completo y enriquecedor para los estudiantes pertenecientes a los programas electivos de matemáticas y de esta manera puedan estar preparadas para rendir un curso de carácter universitario.

Al realizar esta pregunta se especificó que se desprenden otros objetivos más particulares al momento de investigar en base a ésta. Es aquí donde nacen las preguntas relacionadas las cuales se orientan al desarrollo y la respuesta de las interrogantes encontradas al momento de desarrollar la pregunta de tesis.

¿Están preparadas las estudiantes chilenas de Enseñanza Media para desarrollar este método?

¿Se podrá construir el conocimiento requerido en esta investigación con las herramientas que estos estudiantes poseen?

¿Estará este conocimiento acorde a las necesidades de las estudiantes?

Estas preguntas apuntan a los ejes dichos con anterioridad.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Evaluar la posibilidad de adquisición de un tópico matemático fuerte como son las Ecuaciones Diferenciales (Sistemas Dinámicos) a través del Método Numérico de Runge Kutta de Orden Cuatro, en estudiantes escolarizados pertenecientes a los programas electivos de Matemática en III y IV año de Enseñanza Media.

1.3.2 Objetivos Específicos

Identificar si los aprendizajes adquiridos previamente, por las estudiantes de Tercer y Cuarto año Medio, de electivo Matemáticas, serán de utilidad para desarrollar por un método numérico Ecuaciones Diferenciales.

Identificar los contenidos necesarios para el aprendizaje de un tópico matemático fuerte como son las Ecuaciones diferencias a través de un método numérico.

Desarrollar matemáticamente las Ecuaciones Diferenciales No lineales por el método numérico de Runge-Kutta para ser implementado en Enseñanza Media.

1.4 Limitaciones

Las limitaciones de un estudio pueden tener dos características, internas y externas.

En la primera, se hace referencia a los problemas principales generados al momento de realizar el estudio, problemas del tipo:

- Saber abordar el tema
- Trabajos relacionados con este
- Recopilación de información suficiente para el desarrollo de este estudio.

Estos problemas atienden directamente a la construcción de la tesis, pero a su vez enmarcan el carácter de ella.

La segunda limitación se confronta con el desarrollo del estudio, por el hecho de contextualizarlo, buscar un colegio que permita analizar su forma de enseñar es y será un problema en cualquier investigación, ya que son muy pocas las instituciones educativas capaces de abrir sus puertas a cualquier tipo de crítica que se lograría general en la investigación.

1.5 Hipótesis, conjeturas

La construcción de hipótesis o conjeturas al momento de realizar el estudio, deben estar marcadas por el carácter de la investigación. Es por ello, que centraremos nuestras conjeturas en el hecho mismo de aplicar éste. Además, estas hipótesis enmarcadas por la pregunta de investigación deberán entregar el margen por el cual se construirán el estudio. Nos indicará que aspectos debemos revisar para responder a las preguntas formuladas y nos pondrá en duda respecto del desarrollo particular de esta tesis.

La primera Conjetura o Hipótesis es que “las estudiantes seleccionadas han aprendido a través del Currículum nacional establecido por el Ministerio de Educación y el tratamiento realizado por su establecimiento educacional, los contenidos mínimos

necesarios para desarrollar este estudio”, con esta hipótesis debemos repasar los contenidos vistos por estos estudiantes, tanto los establecidos por el Ministerio de Educación, así como los realmente vistos durante sus años de escolarización.

La segunda Conjetura o Hipótesis es que “las estudiantes de los niveles de Tercer y Cuarto año Medio seleccionadas, tienen las capacidades cognitivas mínimas para desarrollar el tópico analizado en esta investigación”, la cual se centrará en las capacidades cognitivas de las estudiantes, o mejor dicho, si estarán capacitados a nivel cognoscitivo para desarrollar un tópico tan avanzado de matemáticas.

La tercera y última conjetura o hipótesis es que “el desarrollo del método de Runge-Kutta de cuarto orden facilitara el aprendizaje por su calidad y relevancia con las necesidades de aprender de las estudiantes seleccionadas”, con esta tercera hipótesis se plantea la necesidad de comprobar si los aprendizajes que requieren las estudiantes de este colegio están a la altura planteada en este estudio.

CAPITULO II

2 Marco Referencial

2.1 Un poco de historia

A continuación en este capítulo veremos el desarrollo histórico de las Ecuaciones Diferenciales, el cual tiene como objetivo realizar un recorrido por los aspectos más relevantes de la formación de dichas ecuaciones, hasta llegar al desarrollo del método numérico utilizado en esta investigación (Método Runge – Kutta). También se hará un recorrido sobre los tipos de ecuaciones diferenciales, para lograr entender el contexto del contenido en el cual nos estamos desarrollando.

2.1.1 Desarrollo histórico de las Ecuaciones Diferenciales

La siguiente reseña histórica, es una síntesis del trabajo realizado por Nápoles y Negrón (2002), el cual nos habla sobre el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales hasta llegar al tema de estudio de esta tesis que son los sistemas dinámicos y su desarrollo por métodos de aproximación numérica.

Si bien, la matemática diferencial es una ciencia nueva dentro del campo de las matemáticas, su importancia no es menor. Así mismo, la búsqueda de respuestas a lo largo de los años estaba orientada al hallazgo de ellas. Desde Arquímedes² (287-212 a.C.) planteando los principios de la mecánica con su trabajo referente a la palanca y al principio de empuje hasta Fermat³ (1601-1665 d.C.) en el siglo XVII quien encontró las tangentes y puntos críticos sentando las bases de lo que conoceríamos

² Arquímedes (1986) “el método”, alianza editorial, Madrid (traducción, introducción y notas: Luis Vega)

³ Hawkins, T. (1970): “Lesbesgue’s Theory of integration. Its origins and development”, The university of Wisconsin Press, Madison, Wis-London

hoy como diferenciación, encontramos el interés en desarrollar problemas que involucren, como es conocido en la actualidad, una función y sus derivadas.

De esta manera, alrededor de los siglos XVII XVIII se desarrollaron los principales avances en esta materia. A modo de síntesis relataremos los más grandes aportes a las Ecuaciones Diferenciales, los cuales en su mayoría, siguen siendo enseñados en casas de estudio universitario o en colegios a través de la matemática diferencial en Chile:

- **Newton-Leibniz**

Como menciona Newton a Leibniz a mediados del siglo XVII en un anagrama:

“6a cc d ae 13e ff 7i el 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x, el cual quiere decir en latin data eaquatione quotcunque quantitaes involvente fluxiones invenire et viceversa”, ⁴traducido al español, “Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa”. No siendo referente al lenguaje contemporáneo, este mensaje planteaba un problema de diferenciación, entiéndase fluxiones como $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$ y fluentes como $f(x)$, $f(y)$.

- **Leibniz**, En 1675 escribió la ecuación $\int ydy = \frac{y^2}{2}$, donde se introduce el signo de integral. en el Acta Eruditom de 1684, definió la diferencial e incluyo reglas para su cálculo, y problemas de aplicación para tangentes y puntos críticos.
- **Newton**, Entrega la primera clasificación de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

⁴ Nota: Cita del anagrama “Leibniz-Newton (1977): “el cálculo infinitesimal origen-polémica, editorial universidad de Buenos Aires”

- **Hermanos Bernoulli (James y Johan)**, son quienes en la última década del siglo XVII introducen el concepto de integrar una ecuación diferencial así como el proceso de separación de variables.
- **Johan Bernoulli**, quien alrededor de 1692 en su búsqueda por resolver ecuaciones que no puedan ser separables nos entrega la multiplicación por un factor integrable.
- **Ricatti**, en 1724 estudio la ecuación de tipo $\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^2$ (bastante importante para este estudio ya que es la primera mirada a una ecuación diferencial no lineal).
- **D'Alembert** en el año 1766 descubre que la solución general de una ecuación lineal no homogénea, es la suma de una solución particular y otra homogénea
- **Lagrange**, 1774 demostró que la solución general de una ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes es de la forma $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ y nos entregó en su forma más general el “método de variación de parámetros”.
- **Euler** finales del siglo XVIII es quien logra sistematizar todos los trabajos anteriores entregándonos la primera clasificación de ecuaciones diferenciales de primer orden (Homogéneas, Lineales, Exactas) y de segundo orden (Lineales, y susceptibles de reducir el orden). También nos entrega el método de serie de potencias para resolver ecuaciones del tipo $y'' + ax^n y = 0$

Pero no es hasta 1892 (Liapunov y Poincare, en su annus mirabilis) donde se formaliza lo que para esta tesis es su tema de estudio, la teoría de ecuaciones

diferenciales no lineales. Estos autores convierten la no linealidad en su trabajo y aportaron conceptos fundamentales para su desarrollo.

Reorientando la atención hacia el tema de estudio de esta tesis, es importante señalar que, si bien, es grande el avance tanto para ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, es muy escaso lo que se puede realizar con ellas, ya que son muy pocas las ecuaciones diferenciales que pueden ser tratadas a través de estos métodos anteriormente mencionados. Es aquí donde se destaca el desarrollo de métodos numéricos para encontrar soluciones aproximadas en algunos puntos. Los métodos más populares son el de Euler (mediados del siglo XVIII) y Runge-Kutta (finales del siglo XIX).

Basándonos en el trabajo de Moreno, Salvador, Menarguez y Germendia llamado Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales, y el trabajo de Sanz-Serna con su trabajo llamado “El método de Euler de integración Numérica”.

Definiremos los dos métodos más importantes sobre multipasos, en los cuales radica su importancia tanto por su carácter histórico como por su efectividad (Euler y Runge-kutta respectivamente).

- **Método de Euler de integración numérica**

Euler en 1768 busca encontrar de manera “verdaderamente aproximada”, la integral de una ecuación diferencial cualquiera. Para no desviarnos en el desarrollo de este método nos centraremos en la notación moderna que se puede obtener del desarrollo de Euler, la cual consiste en sustituir cada paso de una Ecuación diferencial por el desarrollo de

$$y(x + h) \approx y(x) + hy'(x)$$

Y para ecuaciones de orden superior, podemos obtenerlo a través de un desarrollo de Taylor

$$y(x + h) \approx y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2}h^2y''(x) + \dots + \frac{1}{n!}h^ny^{(n)}(x)$$

- **Método Runge-Kutta**

Expresado de forma completa por W.M. Kutta en 1901, es el método que entrega mayor exactitud en la actualidad. Este consiste en determinar constantes apropiadas de modo que coincidan con un desarrollo de Taylor hasta el quinto término. Ya que la intención de este capítulo es solo orientar al lector hacia el desarrollo de las ecuaciones diferenciales y su desarrollo, solo entregaremos los resultados de este estudio:

$$\vec{\mu}_{n+1} = \vec{\mu}_n + \frac{h}{6}(\vec{F}_1 + 2(\vec{F}_2 + \vec{F}_3) + \vec{F}_4)$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}(t_n, \vec{\mu}_n)$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}(t_n + \frac{h}{2}, \vec{\mu}_n + \frac{1}{2}\vec{F}_1)$$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}(t_n + \frac{h}{2}, \vec{\mu}_n + \frac{1}{2}\vec{F}_2)$$

$$\vec{F}_4 = \vec{F}(t_n + h, \vec{\mu}_n + \vec{F}_3)$$

2.2 ¿Qué son las Ecuaciones Diferenciales?

La construcción de modelos matemáticos para tratar los problemas del mundo real se ha destacado como uno de los aspectos más importantes en el desarrollo teórico de cada una de las ramas de la ciencia y en especial de las matemáticas. Con frecuencia, estos modelos implican una ecuación en la que una función y sus derivadas desempeñan un papel decisivo. Tales ecuaciones son llamadas Ecuaciones Diferenciales.

La meta es reconocer qué conocimientos y herramientas deben adquirir los estudiantes de Tercer y Cuarto año Medio Electivo en su proceso de enseñanza y aprendizaje para poder resolver tales ecuaciones.

Por ende, se dará una breve descripción de las ecuaciones diferenciales y sus clasificaciones, con el fin de llegar al eje de interés que son las EDO No Lineales.

Ecuaciones diferenciales

Definición: una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocidas con una o más variables.

Clasificación: Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a su tipo, orden, grado y linealidad.

- Según el tipo: se clasifican en ecuación diferencial ordinaria y en ecuación diferencial en derivadas parciales.

a) Ecuación diferencial Ordinaria: la función desconocida depende de una sola variable.

Ejemplo: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

b) Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: la función desconocida depende de más de una variable. Cuando una ecuación involucra a una o más derivadas con respecto a una variable en particular, tal variable es llamada independiente y “x” es dependiente si aparece una derivada de esa variable.

- Según el orden: el orden de una ecuación diferencial (ordinaria o en derivadas parciales) es el grado de la derivada más alta (exponente).

Ejemplos:

1er Orden: $\frac{dx}{dy} = 2x + y$

2do Orden: $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0$

3er Orden: $\frac{d^3x}{dy^3} + x \frac{dx}{dy} - 4xy = 0$

4to Orden: $a^2 \frac{d^4v}{dx^4} + \frac{d^2v}{dt^2} = 0$

- Según linealidad y no linealidad: Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden a cualquier ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Donde P y Q son funciones continuas de x . Esta ecuación diferencial lineal de primer orden se dice que está en forma normal.

Definición de ecuación diferencial lineal de orden n

Sean g_1, g_2, \dots, g_n y f funciones de x con un dominio común (un intervalo). Una ecuación de la forma

$$y^{(n)} + g_1(x)y^{(n-1)} + g_2(x)y^{(n-2)} + \dots + g_{n-1}(x)y^2 + g_n(x)y = f(x)$$

Se llama una ecuación diferencial lineal de orden n .

Si $f(x) = 0$, se dice que es homogénea; en caso contrario, es no-homogénea.

Se dice que una ecuación diferencial No Lineal es una ecuación diferencial ordinaria que NO cumple con las condiciones de linealidad o propiedades de linealidad.

Ejemplos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \text{sen}(y) = 0 \quad y^2 + 4xy = \ln(x)$$

Debido a que el desarrollo de esta tesis está enfocado en Ecuaciones Diferenciales No lineales, hemos decidido considerar hasta este apartado señalando así las

características principales de ecuaciones diferenciales, con el propósito de tener un claro conocimiento de que hablamos cuando utilizamos el término “Ecuación Diferencial”.

CAPITULO III

3 Marco Teórico

3.1 Vygotsky y la Teoría Sociocultural

Lev Vygotsky (1896-1934) oriundo de Orsha Bielorrusia, fue uno de los más importantes autores que estudiaron la psicología evolutiva del ser humano. Su trabajo llamado Teoría sociocultural el cual se dio a la luz mucho después de su muerte (1960), llevo la cognición humana a nuevos estándares de aproximación, acercando a nosotros nuevos términos como zona de desarrollo proximal (ZDP) o el famoso “andamiaje” que realiza aquel que tiene la necesidad de enseñar para poder adaptar el aprendizaje que se espera, a quienes tienen la necesidad de aprender.

A diferencia de otros autores como Piaget o Bruner, este realiza sus estudios basándose en la innegable necesidad de aprender en un contexto sociocultural determinado, que fundamenta a las personas como entes particulares capaces de aprender en solo lo que la sociedad a la cual pertenezcan les pueda entregar, “*Los niños pequeños aprenden, en su relación con los demás, innumerables cosas, elaborando representaciones personales o desarrollando contenidos objetos de la realidad; es un encanto verificar, cada día y cada mes, esta prodigiosa capacidad de transformación del ser humano*”(Antunes C, 2003. Pág. 16).

Se debe entender con esto, que los humanos adquirimos esta calidad en base a la interacción con otros humanos, somos personas porque vivimos entre personas, en una cultura y una sociedad determinadas. Tal es el caso ocurrido en la India sobre dos niñas encontradas, las cuales habían sido criadas por lobos. Estas caminaban sobre las manos, poseían un olfato extremadamente sensible, jadeaban como perros y maullaban a la luna como lobos. Después de 9 años de intentos no se logró mucho para convertirlas en humanas⁵.

⁵ Referencia Wikipedia (John McCrone (1994). "Wolf Children and the Bifold Mind". *The Myth of Irrationality: The Science of the Mind from Plato to Star Trek*. Carroll & Graf Pub. Retrieved October 18, 2005).

En la teoría de Vygotsky se aprecia el desarrollo intelectual de los niños y jóvenes como una estrecha relación entre lo cognoscitivo y lo cultural. Las capacidades mentales y la utilidad del cerebro se desarrolla para resolver problemas e interpretar el entorno en el cual se desenvuelve el individuo y son determinadas por la cultura en la cual se está inmerso. Vygotsky propone enmarcar el desarrollo cognoscitivo en cuatro niveles interconexos de interacción con el entorno:

- i. Desarrollo Ontogenético: el que se realiza a lo largo de la vida del individuo
- ii. Desarrollo Microgenético: cambios que ocurren en periodos relativamente breves. En segundo, minutos o días en contraste con los cambios a gran escala en el desarrollo ontogenético.
- iii. Desarrollo Filogenético: desarrollo a través del tiempo evolutivo
- iv. Desarrollo Sociohistórico: cambios que ocurren en la cultura, en valores y tecnologías generados por la historia.

A este último, es al cual se debe prestar mayor interés, por el carácter normador que tienen en la cultura los avances realizados a través de la historia para una sociedad. Como se ha mencionado con anterioridad, este trabajo busca replantear los límites de conocimiento a los cuales los estudiantes pueden acceder en nuestro sistema de enseñanza actual. Por ello es que las necesidades de los alumnos debe ser la principal arista a la cual se debe sujetar un profesor al momento de planificar o realizar una actividad para ellos. Como mencionan Beltrán, Pérez y Ortega (2006), dos factores importantes para el aprendizaje significativo en niños, son la motivación y el control emocional.

“En primer lugar, aparece la motivación como una de las principales estrategias que discriminan a los de alto y bajo rendimiento, al parecer los primeros reportaron estar más motivados intrínsecamente, conocen sus capacidades, se muestran más interesados por aprender significativamente y por los retos académicos que pudieran enfrentar. Una estrategia íntimamente ligada a la anterior es mantener un control emocional adecuado, permanecer tranquilo durante los exámenes y en las tareas, tener mejores maneras de manejar la ansiedad, mantener un

buen autoconcepto y saber cómo manejar los altibajos de las diferentes situaciones académicas” (Beltrán, Pérez y Ortega, 2006).

Esto nos da a entender que el profesor debe ser, no solo un mero reproductor de conocimientos en la institución educativa a la cual pertenezca, sino, más bien este debe entender que los estudiantes pertenecen a un contexto, socio cultural en particular, y así mismo cada uno se merece una especial atención por las necesidades personales que este amerite.

Continuando con la visión de Vygotsky, este plantea que el lugar donde se realiza el aprendizaje es en donde se centran los procesos cognitivos que experimenta un ser humano. A este proceso el cual nosotros llamaremos aprendizaje, Vygotsky lo llama Zona de Desarrollo Proximal (ZDP), que consiste en el espacio donde el niño, joven logra, con la compañía de alguien más experimentado en el tema, aprender a hacer suyo el conocimiento necesario para responder a una problemática planteada. Esta zona llamada ZDP, es el espacio entre lo que puede lograr un individuo por sí solo, y lo que puede llegar a aprender con la ayuda de alguien más preparado (experimentado) en el tema que este observa. Ilustremos este caso con el siguiente ejemplo:

Tanya, una niña de 4 años, acaba de recibir su primer rompecabezas. Intenta resolverlo pero no avanza hasta que su padre se sienta a su lado y le da algunas sugerencias. Le dice que convendría armar primero las esquinas, le enseña el área rosada del borde de una pieza de esa parte y le dice “busquemos otra pieza rosa”. Cuando Tanya parece frustrada, su padre coloca juntas dos piezas acopladas para que las vea; cuando Tanya lo logra le dice palabras de aliento. A medida que ella aprende a armar el rompecabezas, su padre se retira y la deja trabajar cada vez con mayor independencia” (Shaffer y Kipp, 2007. pág. 277)

Es entonces la ZDP el lugar donde interactúan, la niña para lograr completar el problema al cual se enfrenta y el padre, quien le guía a través del proceso de solución del problema. De manera más formal podríamos llamar a la Zona de Desarrollo Proximal como “*el espacio en el que, gracias a la interacción y a la ayuda de otros,*

una determinada persona puede realizar una tarea de un modo y un nivel que no podría alcanzar individualmente” (Antunes C, 2003. pág. 26).

Es también en la ZDP donde aparece un nuevo concepto el cual se vuelve una característica para fomentar el desarrollo cognoscitivo, lo llamaremos andamiaje. El andamiaje, se refiere al tratamiento que realiza el participante más experto en el problema para lograr adecuarlo al entendimiento del novato. Claramente es el profesor quien hace propio este concepto, ya que su trabajo es hacer entender a los alumnos los contenidos fijados por la planificación, aunque no se debe dejar de forma exclusiva este concepto a él, ya que cualquier persona experta en un tema puede ajustar el conocimiento para servir como guía a quien necesite de él. Como en el caso del ejemplo anterior, es el padre de Tanya quien realiza un andamiaje sobre las técnicas de solución de rompecabezas para que ella pueda hacerlas propias.

Para finalizar, Vygotsky le entrega un interés particular al lenguaje, principalmente en el desarrollo cognoscitivo de los niños. Este le atribuye dos funciones decisivas: la primera como el medio para el cual los adultos transmiten a niños modos culturalmente valiosos de pensar y de resolver problemas; en segundo lugar se convierte con el tiempo en una herramienta más poderosa para la adaptación intelectual (Shaffer y Kipp, 2007). Este autor sostiene que el pensamiento y el lenguaje terminan fusionándose para el segundo fin mencionado anteriormente.

Entre las observaciones de Vygotsky, este destaca los monólogos realizados por estudiantes preescolares al momento de intentar resolver un problema, monólogos de carácter individual. Este monólogo o “hablar con el yo”, lo llamo habla privada y ayuda al niño a plantear estrategias para cumplir con sus objetivos. Esto nos lleva a entender que desde muy temprano los niños se encuentran en la ZDP, solo que el guía viene siendo el mismo. Vygotsky también plantea que el habla privada se limita con la edad, pero nunca desaparece por completo, ya que este se convierte en un sistema de autoorientación, el cual termina convirtiéndose en un habla silencioso o interno, el pensamiento verbal latente con que organizamos y regulamos nuestras actividades cotidianas (Shaffer y Kipp, 2007).

En síntesis, podríamos decir que el trabajo de este autor se centra en el conocimiento que se genera y los procesos que atienden los estudiantes en el proceso de

aprendizaje. “aprender no es copiar o reproducir la realidad. Aprendemos en la escuela cuando somos capaces de elaborar una representación personal acerca de un objeto de la realidad o contenido que pretendamos asimilar” (Antunes C., 2003. pág. 18).

Ahora bien, la importancia de Vygotsky para este estudio, se encuentra en la concepción que este tiene sobre la participación de un segundo agente en el aprendizaje (experto) y el tratamiento que este da a la información (andamiaje), ya que nos muestra de forma particular, la relación que se establece entre un estudiante y su profesor. Así mismo, sitúa esta relación en un contexto determinado, único para cada situación de aprendizaje, y particular para cada alumno en el aula. Nos entrega una gran importancia a las tareas a realizar, y el grado evolutivo que hay que darles a ellas, para ir construyendo nuevos aprendizajes, o en palabras más Vygotskianas, “el pensamiento del alumno se modifica de modo progresivo en dirección a la realización de tareas gradualmente más complejas” (Antunes C., 2003. pág. 28).

Son muchos los conceptos que rescatamos del trabajo de Vygotsky, a saber, Desarrollo Cognoscitivo, ZDP, Andamiaje, Habla Privada y Habla Interna... pero es necesario mencionar que esta es una mirada pequeña a todo el abanico de conocimientos y teorías que estableció este autor sobre la misma línea del pensamiento. Temas como “El Habla Social”, “Aprendizaje Guiado”, “Competencia Cognoscitiva”, entre otros, han sido dejados en este abanico. Principalmente porque se perdería el sentido de este estudio, y porque no alcanzarían las palabras para describir tantos conceptos nacientes del pensamiento de este, sin duda, gran autor.

Teniendo en cuenta, que la intriga de esta tesis es saber cómo podrían llegar a entender los estudiantes secundarios chilenos las ecuaciones diferenciales por medio de un desarrollo numérico, la importancia del trabajo de Vygotsky para esta investigación se centra en la ZDP, y en particular el tratamiento que debe realizar el profesor a los contenidos que desee enseñar (andamiaje). No es menor entender que debemos conocer el contexto en el cual se desenvuelven los estudiantes, o fomentar el habla privada y llevarlos a lograr un habla autoorientadora, pero para lograr satisfacer la necesidad de enseñar lo que pide este estudio es que continuaremos con lo que nos plantea el concepto de andamiaje.

Como mencionamos con anterioridad, andamiaje “se refiere al tratamiento que realizar el participante más experto en el problema para lograr adecuarlo al entendimiento del novato”. Es por ello, que para lograr enseñar un concepto de matemáticas puras como es Ecuaciones Diferenciales, y más aún para desarrollarla a través de un método de multipasos, Método de Runge-Kutta, debemos realizar un tratamiento a estos. Con el fin de que los estudiantes puedan hacer propio este aprendizaje, se ha tomado la decisión de realizar el tratamiento a estos conceptos a través de la teoría de situaciones didácticas elaborada por G. Brousseau, donde se aparta el “enfoque tradicional de enseñanza⁶”, para centrarse en los tres elementos fundamentales que menciona este autor, estudiante, profesor y el medio didáctico, donde es el profesor quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento a través de una serie de situaciones didácticas propiciadas por él.

3.2 Teoría de situaciones didácticas

En el marco de la enseñanza propuesta por la Universidad Católica Silva Henríquez, para el programa de Formación de Matemáticas e Informática Educativa, se estudiaron en las actividades curriculares correspondientes a Didáctica de las Matemáticas I y II diferentes modelos de enseñanza, o paradigmas para el desarrollo de las clases de matemáticas en el aula. Entre todos los modelos vistos existe uno que particularmente se ajusta a la necesidad de esta tesis de enseñar el método de Runge-Kutta que es el que enmarca este apartado, debido principalmente al tratamiento que realiza el profesor por el saber a enseñar.

La teoría de situaciones didácticas propuesta por Brousseau nos entrega tres componentes que interactúan entre sí, la componente cognitiva la cual es representada por el estudiante quien requiere construir y hacer suyo el conocimiento en juego, la componente epistemológica o el saber a enseñar que tiene propia naturaleza y que se

⁶ enfoque tradicional de enseñanza: es una relación estudiante-profesor, en la cual, el profesor simplemente provee (o deposita) los contenidos, instruye al estudiante, quien captura (o engulle) dichos conceptos y los reproduce tal cual le han sido administrados. (cita, teoría de situaciones didácticas, Jesennia Chavarría)

ha desarrollado o construido a lo largo de la historia, y la componente didáctica representada por el profesor quien actúa como facilitador en la construcción que el estudiante hace del conocimiento en juego.

Para visualizar estas tres componentes en el desarrollo de este estudio podemos asignar a cada una de estas componentes un proceso sobre la finalidad de esta tesis:

- i. La primera componente se relaciona directamente con la necesidad de aplicar este método a estudiantes. Por lo visto en el marco teórico de este estudio sabemos que los estudiantes tienen la capacidad de desarrollar conocimientos que se adecuen al proceso cognitivo en el cual están inmersos. Además, se afirma que ellos están capacitados por el marco curricular y la propuesta de la institución para aprender este tipo de matemáticas.
- ii. En la segunda componente, identificamos el modelo de Runge-Kutta, su construcción histórica a través de las ecuaciones diferenciales y su desarrollo matemático.
- iii. En la tercera y última componente está el trabajo final de la tesis, el cual consiste en desarrollar una estrategia para enseñar este método a los estudiantes seleccionados.

Situaciones didáctica/a-didáctica

Estas situaciones son en las cuales el profesor interviene directamente con el alumno, aunque se distinguen por el tipo de intervención que este crea. Las situaciones a-didácticas, son aquellas donde el docente planteará una problemática al estudiante, el cual deberá afrontarlo usando solo sus conocimientos previos, como segunda finalidad se busca que el estudiante logre generar hipótesis y conjeturas semejantes a las realizadas en cualquier comunidad científica. En las Situaciones Didácticas, es el profesor quien propicia el medio didáctico por el cual es estudiante lograra construir el conocimiento. Es aquí donde se representan las tres componentes mencionadas con antelación (profesor, alumno y medio didáctico), y las relaciona en una es un estado

de equilibrio entre el profesor y el alumno, utilizando como balanza para ello el medio didáctico puesto en práctica por el profesor. En resumen, “la interacción entre los sujetos de la Situación Didáctica acontece en el medio didáctico que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento (*situación didáctica*) y pueda el estudiante, a su vez, afrontar aquellos problemas inscritos en esta dinámica sin la participación del docente (*situación a-didáctica*)” (cita de teoría de situaciones didácticas, página 2).

Es así que Brousseau plantea a la Situación Didáctica como el proceso de enseñanza-aprendizaje modelado de tal manera que este se logre visualizar como un juego para el cual el docente y el estudiante establezcan las reglas y acciones implícitas necesarias para este cometido. Cuando logramos entender esta relación, aparecen dos términos, entregados por Brousseau, que sirven para lograr realizar el tratamiento al contenido específico con las reglas presenten por ambos participantes de la situación didáctica, el Contrato Didáctico y la Transposición Didáctica.

En el Contrato Didáctico se enfatizan las reglas entre los alumnos y el profesor, se entiende como “los comportamientos que espera el docente del alumnos y los que el alumno espera del docente” (cita de situaciones didácticas, pág. 3). Como las reglas ya están definidas, el proceso de enseñanza aprendizaje se vuelve cómodo para alumnos y profesores, por lo cual una ruptura de este, crearía un estado caótico en el aula, aunque se entiende también que la riqueza en una situación didáctica se establece en la ruptura y creación de nuevos contratos, en la medida que la situación varíe.

La Transposición Didáctica, se refiere al mecanismo por el cual el profesor toma un conocimiento a desarrollar en el aula y lo transforma con la finalidad de que sus alumnos logren entenderlo. El profesor es quien desglosa el saber a enseñar, llamado por Brousseau como saber sabio, ya que este no puede ser presentado a sus estudiantes de forma pura, debido a las características particulares del sector al cual pertenece este saber. Un vocabulario único y entendido solo por aquellos que pertenecen al círculo científico en el cual este saber se desarrolla. Por ello es que el profesor es quien por necesidad para sus alumnos somete este saber a un proceso el cual ya llamamos Transposición Didáctica.

Dentro de la transposición didáctica nacen preguntas que sirven como camino para plantear la forma en que se realizará esta. Estas preguntas son referentes a tres ejes que sirven de arquetipo para la transposición deseada:

- EL QUE ¿Qué voy a enseñar? Selección de contenidos a enseñar, el profesor tiene libertad para elegir los contenidos que crea pertinentes para la transposición.
- EL PARA QUE ¿Para qué enseñarlo? Son los objetivos del profesor al momento de enseñar un saber en un determinado momento (contexto para Vygotsky).
- EL COMO ¿Cómo lo enseñaré? Punto donde se pone la experticia del profesor. Aquí este debe valerse de todas las herramientas didácticas que posea.

Para finalizar este alcance a la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau, es importante mencionar que dentro de las situaciones didácticas existen diferentes tipologías presentadas por Brousseau, las cuales tienen por finalidad llegar a una situación a-didáctica, en otras palabras, que el estudiante logre valerse de sus propios conocimientos, ya adquiridos a través de la situación didáctica cursada.

⁷Estas situaciones son:

1. La *situación acción*, que consiste básicamente en que el estudiante trabaje individualmente con un problema, aplique sus conocimientos previos y desarrolle un determinado saber. Es decir, el estudiante individualmente interactúa con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos.

Dentro de las condiciones que una *situación acción* debería reunir para desembocar en una situación a-didáctica tenemos, por ejemplo, la formulación del problema: éste debe ser del interés del estudiante, además el tipo de pregunta formulada debe ser tal que no tenga respuesta inmediata, de modo que represente realmente un problema para el estudiante.

Este comportamiento debe darse sin la intervención del docente. Empero, si bien el proceso se lleva a cabo sin la intervención del docente, no implica que éste se aisle del proceso. Pues es el docente quien prepara el medio didáctico, plantea los problemas y enfrenta al estudiante a ese medio didáctico.

2. Ahora bien, la *situación de formulación* consiste en un trabajo en grupo, donde se requiere la comunicación de los estudiantes, compartir experiencias

⁷ Extracto directo del documento “Teoría de situaciones didácticas de Jesennia Chavarría”

en la construcción del conocimiento. Por lo que en este proceso es importante el control de la comunicación de las ideas.

La situación formulación es básicamente enfrentar a un grupo de estudiantes con un problema dado. En ese sentido hay un elemento que menciona Brousseau, esto es, la necesidad de que cada integrante del grupo participe del proceso, es decir, que todos se vean forzados a comunicar las ideas e interactuar con el medio didáctico.

3. Otro tipo de situación didáctica es la *situación de validación*, donde, una vez que los estudiantes han interactuado de forma individual o de forma grupal con el medio didáctico, se pone a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esta interacción. Es decir, se valida lo que se ha trabajado, se discute con el docente acerca del trabajo realizado para cerciorar si realmente es correcto.

Ya teniendo en cuenta todos estos factores, desde la perspectiva de la teoría Sociocultural de Vygotsky, y centrándonos en el concepto de andamiaje para realizar el alcance de Brousseau sobre su Teoría de Situaciones Didácticas, es que nos encontramos preparados para realizar un tratamiento al tópico matemático elegido como tema de estudio en esta investigación. Los siguientes capítulos nos entregarán las herramientas necesarias para realizar una transposición didáctica a este tema y una aproximación al cómo se debería enseñar las ecuaciones diferenciales por el método número de Runge-Kutta.

CAPITULO IV

4 Análisis del objeto de estudio

4.1 Desarrollo de Método Runge-Kutta de cuarto orden (RK44), para el Sistema de Van Der Pol

Baltasar Van der Pol (1889-1959), físico e ingeniero Holandés, se le conoce principalmente por su trabajo en circuitos eléctricos, aunque también estudio sistemas que presentan oscilaciones. Van der Pol agrupo varios fenómenos en una sola categoría de sistemas que presentan oscilaciones periódicas, el famoso “Oscilador de Van der Pol”. Este oscilador con amortiguamiento no lineal, está gobernado por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden, homogénea:

$$x'' - \varepsilon (1 - x^2) x' + x = 0$$

Nota: Para el objeto de estudio en esta investigación aplicaremos una pequeña excitación externa. Para poder hacerla depender del tiempo. Esta excitación externa ⁸será $f(t, x) = a \cos(t)$, con a una constante arbitraria y t el tiempo en el cual transcurre la ecuación, donde x es la variable dependiente y describe el voltaje del circuito y ε es el parámetro que entrega las características físicas del circuito, la amortiguación. (Larraza y Palencia, 2010).

4.1.1 Cambio de la ecuación a su forma vectorial

Para aplicar el método Runge-Kutta de cuarto orden, debemos inicialmente realizar un tratamiento a esta ecuación, ya que este método se define en forma vectorial, realizaremos un cambio de variable para poder expresar el sistema como un vector

⁸ Fuerza externa llamada excitación y su forma es una función

Primero llamamos a x como x_1 y a x' como x_2 :

$$x = x_1 \ ; \ x' = x_2$$

A continuación nos disponemos a derivar estos dos elementos

$$x = x_1 \xrightarrow{\text{derivamos}} x' = x_1' = x_2$$

$$x' = x_2 \xrightarrow{\text{derivamos}} x'' = x_2' = \dot{x} ?$$

Para encontrar el valor de x_2' reemplazamos x_1 y x_2 en la ecuación original y despejamos en función de x_2' :

$$x_2' - \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + x_1 = a \cos(t)$$

$$\begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \text{despejamos en función de } x_2' \end{array}$$

$$x_2' = \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 - x_1 + a \cos(t)$$

Ya teniendo estos valores nos disponemos a reescribir la ecuación en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Derivamos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Y reemplazamos los valores ya encontrados

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 - x_1 + a \cos(t) \end{pmatrix}$$

Donde llamaremos a $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$ como el vector $\dot{\vec{X}}$. Entonces la nueva ecuación diferencial en forma vectorial quedaría de la siguiente forma:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 - x_1 + a \cos(t) \end{pmatrix}$$

La cual es tratable a través del método Runge-Kutta de cuarto orden.

4.2 Aplicación del Método

Tomando como condiciones iniciales (las cuales son necesarias al momento de aplicar este método, debido a la necesidad de conocer la ubicación del sistema en algún punto determinado) $x_0 = 0$ y $x_0' = 1$; el tamaño del salto como $h = 0,05$; el parámetro $a = 0,5$ y la amortiguación $\varepsilon = 0,1$.

Definimos los siguientes elementos del método

Como vector inicial $\mu_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La función vectorial $\vec{F}(t_n, \vec{\mu}_n) = \begin{pmatrix} x_2 \\ (1 - x_1^2) x_2 - x_1 + 0,5 \cos(t) \end{pmatrix}$

Y comenzamos a calcular los vectores característicos F_1, F_2, F_3 y F_4 .

Para el caso de F_1 tenemos:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}(t_n, \vec{\mu}_n)$$

Dónde:

$$\vec{F}(t_n, \vec{\mu}_n) = \begin{pmatrix} x_2 \\ (1 - x_1^2) x_2 - x_1 + 0,5 \cos(t) \end{pmatrix}$$

Reemplazamos por $\mu_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $t = 0$, obteniendo como resultado

$$\vec{F}_1 = \vec{F}\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ (1 - 0)1 - 0 + 0,5 \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

Para el caso de F_2, F_3 y F_4 consideramos los mismos valores de μ_0 y t_0 agregando el tamaño del salto $h = 0,05$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{\mu}_n + \frac{1}{2}\vec{F}_1\right) = \begin{pmatrix} 1,0150 \\ 0,5763 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \vec{\mu}_n + \frac{1}{2}\vec{F}_2\right) = \begin{pmatrix} 1,0144 \\ 0,5758 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_4 = \vec{F}(t_n + h, \vec{\mu}_n + \vec{F}_3) = \begin{pmatrix} 1,0288 \\ 0,5513 \end{pmatrix}$$

Teniendo ya nuestros cuatro vectores característicos, podemos encontrar la solución del sistema en el punto μ_1

$$\mu_{n+1} = \mu_n + \frac{h}{6}(F_1 + 2(F_2 + F_3) + F_4)$$

Entonces para $n = 0$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{0,05}{6} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0,6 \end{pmatrix} + 2 \left(\begin{pmatrix} 1,0150 \\ 0,5763 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,0144 \\ 0,5758 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1,0288 \\ 0,5513 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0,05073 \\ 1,02880 \end{pmatrix}$$

Si repetimos este método considerando a nuestro vector inicial como el vector resultante del método, manteniendo el tamaño del salto y escalando el tiempo que ha transcurrido obtendremos los siguientes resultados:

$$\begin{array}{cccc} \mu_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mu_1 = \begin{pmatrix} 0,05073 \\ 1,02880 \end{pmatrix} & \mu_2 = \begin{pmatrix} 0,10254 \\ 1,04309 \end{pmatrix} & \mu_3 = \begin{pmatrix} 0,15441 \\ 1,03080 \end{pmatrix} \\ \mu_4 = \begin{pmatrix} 0,20524 \\ 1,00189 \end{pmatrix} & \mu_5 = \begin{pmatrix} 0,25477 \\ 0,97922 \end{pmatrix} & \mu_6 = \begin{pmatrix} 0,30369 \\ 0,97745 \end{pmatrix} & \mu_7 = \begin{pmatrix} 0,35288 \\ 0,98960 \end{pmatrix} \\ \mu_8 = \begin{pmatrix} 0,40247 \\ 0,99339 \end{pmatrix} & \mu_9 = \begin{pmatrix} 0,45161 \\ 0,97180 \end{pmatrix} & \mu_{10} = \begin{pmatrix} 0,49914 \\ 0,92867 \end{pmatrix} & \mu_{11} = \begin{pmatrix} 0,54450 \\ 0,88524 \end{pmatrix} \\ \mu_{12} = \begin{pmatrix} 0,58814 \\ 0,86062 \end{pmatrix} & \mu_{13} = \begin{pmatrix} 0,63103 \\ 0,85426 \end{pmatrix} & \mu_{14} = \begin{pmatrix} 0,67356 \\ 0,84650 \end{pmatrix} & \mu_{15} = \begin{pmatrix} 0,71515 \\ 0,81673 \end{pmatrix} \\ \dots & & & \end{array}$$

4.3 Conocimientos necesarios para el desarrollo de Runge-Kutta de orden cuatro

Si bien, el desarrollo de este método no necesita de una experticia superior al momento de realizar los cálculos, debemos pensar que el objetivo de este estudio es poder aplicarlo a estudiantes de nivel secundario. Es por ello, que nos debemos un análisis minucioso de los contenidos expuestos en el desarrollo del método de Runge-Kutta de cuarto orden, ya que no podemos realizar una aplicación sobre algo que sea universalmente lejano para nuestros estudiantes.

Partiendo por el cambio de la expresión diferencial a una vectorial, los estudiantes deben tener conocimientos sobre derivadas y vectores. Llegando al desarrollo del método para encontrar los vectores característicos los estudiantes deben saber, suma, resta y multiplicación de matrices de orden 2×1 , evaluación de funciones, operatoria con números decimales y conocimientos básicos sobre las condiciones que genera una ecuación diferencial escrita en forma vectorial (este último es la base sobre la cual se desarrollara el método y parte de la introducción al momento de aplicar esta intervención).

Al separar el desarrollo de este método podremos encontrar tres ejes principales (sustitución o cambio de variable, búsqueda de vectores característicos y evaluación de ellos e interpretación del resultado, desarrollados en el orden expuesto), los cuales implican un dominio de las matemáticas bástate particular al tratar de interactuar con cada uno de ellos.

Definiremos los tres ejes de forma que se logre entender claramente el propósito de cada uno, y los pasos cognitivos que deberá desarrollar el estudiante al momento de aplicar Runge-Kutta de cuarto orden para encontrar soluciones puntuales de una ecuación diferencial.

1. Sustitución o cambio de variable: el estudiante deberá realizar un cambio de variable a la ecuación diferencial para poder aplicar el método. Esto principalmente debido a que el método de Runge-Kutta se desarrolla en forma vectorial, por tanto el estudiante deberá tener conocimientos básicos sobre derivadas, y un manejo apropiado de la axiomática sobre ecuaciones y vectores.
2. Búsqueda de vectores característicos: este proceso se orienta a la búsqueda de los parámetros " F_1, F_2, F_3 y F_4 ", los cuales son necesarios al momento de aproximar la ecuación diferencial después del salto generado. En primeras instancias, el estudiante deberá tener conocimiento pleno sobre funciones y evaluación de ellas, pero el problema particular es la presentación de ellas como vectores. Por lo tanto, también deberá saber conocimientos sobre el álgebra de vectores. Por ejemplo, multiplicación de un escalar por un vector, o

suma de vectores). Para este caso particular, la excitación externa es del tipo trigonométrica. Por lo tanto, también deberá tener conocimientos sobre evaluación de funciones trigonométricas, como es el caso de “ $\cos(0)$ ”, y el manejo pertinente de algunas propiedades instantáneas referentes a esta temática en enseñanza secundaria.

3. Evaluación de Vectores característicos e interpretación de los resultados: al igual que en los dos casos anteriores, el manejo sobre vectores debe ser excepcional, ya que en este punto, el estudiante se encuentra listo para poder reemplazar los datos y encontrar la solución aproximada de la ecuación diferencial (en el salto realizado). En el caso final de este, el estudiante deberá entregar sentido a todo lo realizado, es por ello que deberá interpretar los datos resultantes obtenidos con el fin de hacer propio este contenido.

Para saber si este método es aplicable o no a estudiantes de los cursos de Tercer y Cuarto año Medio pertenecientes al Plan electivo de Matemáticas, de un Establecimiento Educativo particular subvencionado, en la comuna de Santiago Centro, estas estudiantes deberán estar en conocimiento de todo lo antes expuesto. La forma de acreditar que ellas poseen estos contenidos, será a través del análisis de los Planes y Programas del MINEDUC (2012, sin ajustes curriculares), de las planificaciones semestrales de los respectivos años ya cursados y sobre todo de las observaciones clases a clase del profesor a cargo en estos periodos, por consiguiente sabremos la factibilidad de lograr este aprendizaje en la muestra seleccionada.

CAPITULO V

5 Análisis contenidos

Es este capítulo se analizan las planificaciones semestrales de los años 2010, 2011 y 2012 (hasta la fecha), del establecimiento Educacional determinado versus los Planes y Programas de estudios establecidos por el MINEDUC, con el propósito de identificar los aprendizajes adquiridos previamente por las estudiantes de Tercer y Cuarto año Medio de electivo Matemáticas, para ello fue necesario estructurar una pauta de observación a los libros de clases, además de realizar el historial de los contenidos por unidad vistos por las estudiantes, los cuales fueron extraídos de las planificaciones clase a clase entregadas por los docentes del establecimiento.

5.1 Análisis de Planificaciones semestrales versus Planes y Programas de Estudio MINEDUC

Para establecer dicho análisis ha sido necesario examinar los contenidos entregados por los docentes registrados en los libros de clases de los años 2010, 2011 y 2012 (hasta la fecha), en el subsector de Matemáticas. Para ello se desarrolló una pauta de observación, con el fin de constatar los contenidos vistos por las estudiantes seleccionadas.

La pauta realizada es la siguiente

Pauta de observación - Contenidos de libros de clases

Establecimiento : _____

Curso : _____

Año : _____

La siguiente pauta tiene como finalidad recoger información respecto de los contenidos entregados por los docentes en el subsector de Matemáticas. Se analizarán los 4 ejes temáticos (números, álgebra, geometría, datos y azar), la finalidad es buscar evidencia de los contenidos vistos por las estudiantes. Las categorías se centran en la observación de los contenidos escritos en el libro de clase por los respectivos docentes.

Categorías

- Contenidos vistos en forma completa.
- Contenidos vistos de forma incompleta.
- No Observado
- Aplicación de Contenidos (observación hasta la fecha)

UNIDAD	CONTENIDOS (Categorías)
Nº1: Números	
Nº2: Álgebra	
Nº3: Geometría	
Nº4: Datos y Azar	

Dentro de estos podemos extraer los siguientes datos, los cuales otorgara información para observar el nivel de manejo conceptual de contenidos de las estudiantes.

Comenzaremos por el año 2010 donde fue cursado el I año Medio, del cual se puede concluir dicha información:

UNIDAD	CONTENIDOS
N°1: Números	Contenidos vistos de forma completa.
N°2: Álgebra	Contenidos vistos de forma completa.
N°3: Geometría	Contenidos vistos de forma incompleta.
N°4: Datos y Azar	Contenidos vistos de forma incompleta.

Al analizar los contenidos entregados por la Docente durante el año escolar y el programa de estudio regido por el Ministerio de Educación se observa la carencia en algunos contenidos de las últimas dos unidades, las cuales concentran principalmente los siguientes aspectos:

Composición de funciones para realización de transformaciones isométricas en el plano.

Observación: Los contenidos vistos en lo que corre del año 2012 están acorde a los regidos por los Planes y Programas del MINEDUC.

Año 2011 cursando II año Medio

UNIDAD	CONTENIDOS
N°1: Números	Contenidos vistos de forma completa.
N°2: Álgebra	Contenidos vistos de forma completa.
N°3: Geometría	Contenidos vistos de forma Incompleta
N°4: Datos y Azar	No Observado

Se observa la carencia de los siguientes contenidos:

Demostrar teoremas relativos a la Homotecia de figuras planas.

Emplear elementos del muestreo simple para inferir sobre la media de una población.

Compara características de dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central, de posición y de dispersión.

Observación: Los contenidos vistos en lo que corre del año 2012 están acorde a los regidos por los Planes y Programas del MINEDUC.

Año 2012 cursando III año Medio

UNIDAD	CONTENIDOS
N°1: Números	Contenidos vistos de forma completa.
N°2: Álgebra	Contenidos vistos de forma completa.
N°3: Geometría	Contenidos vistos de forma completa
N°4: Datos y Azar	Aplicación de Contenidos (observación hasta la fecha)

Observación: Los contenidos vistos en lo que corre del año 2012 están acorde a los regidos por los Planes y Programas del MINEDUC y de forma completa.

Año 2012 cursando III año Medio Electivo Matemáticas

UNIDAD	CONTENIDOS
N°1: Algebra	Contenidos vistos de forma completa.
N°2: Geometría Analítica	Contenidos vistos de forma completa.
N°3: Secciones Cónicas	Contenidos vistos de forma completa
N°4: Matrices y Determinantes	Aplicación de Contenidos (observación hasta la fecha)

Observación: Los contenidos vistos en lo que corre del año 2012 están acorde a los regidos por los Planes y Programas del MINEDUC y de forma completa.

Se ha realizado el seguimiento desde el año 2010 hasta la fecha (Noviembre 2012) de los contenidos entregados por los Docentes del Establecimiento Educacional estudiado, los cuales podemos observar en los libros de clases, estos fueron otorgados para su revisión por el jefe de UTP de dicho Establecimiento. En su análisis se ha podido identificar la carencia de algunos contenidos los cuales fueron observados principalmente en los años 2010 y 2011.

Una observación realizada en los libros de clases y verificada en UTP es que cada año las estudiantes han cambiado de docente por ende la continuidad de contenidos no ha sido la más óptima para su proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que si algún contenido no fue enseñado en el año anterior este no se enseña en el año siguiente y el vacío de contenidos persiste hasta los próximos años de enseñanza.

No obstante, aún no podemos fiarnos de esta información, debido principalmente al hecho de que lo visto en clases suele ser bastante diferente a lo escrito en las planificaciones. Es por ello, que para completar aun mas nuestro análisis decidimos analizar los libros de clases, esto por ser el único registro empleado por el profesor para justificar lo realizado en el aula.

El análisis realizado es fundamental para el logro de uno de los objetivos planteados en esta investigación, ya que gracias a este análisis podemos identificar si los aprendizajes adquiridos previamente por las estudiantes son de utilidad para el desarrollo de una Ecuación Diferencial por un método numérico.

5.2 Historial de Contenidos y contraste con Planes y Programas del MINEDUC

En el siguiente apartado se dará a conocer el historial de los contenidos vistos por las estudiantes desde I año Medio a IV año Medio, centrándonos en las asignaturas del Electivo Matemáticas de III y IV año Medio. Las observaciones fueron realizadas en las Planificaciones Semestrales y Clase a Clase entregadas al jefe de la UTP por los docentes a cargo de cada asignatura en los años correspondientes. Los contenidos

están estructurados en unidades y estas a su vez se detallan específicamente con los temas tratados en clases.

I año Medio A-B 2010

Unidad N°1: “Potencias de exponentes enteros”

Notación decimal

Notación científica

Decimal a fracción

Potencias en enteros y Racionales

Unidad N°2: “Conjuntos Numéricos”

Operaciones en Racionales

Monomios y Binomios

Términos semejantes

Unidad N°3: “Ecuaciones y Algebra”

Ecuación de Primer grado

Lenguaje algebraico

Problemas de planteamiento.

Unidad N°4: “Productos y Factores”

Productos de Polinomios

Productos Notables

Cuadrado de Binomio

Suma por su diferencia

Producto de Binomio con un término en común.

Cuadrado de trinomio

Unidad N°5: “Factorización”

1er caso: Factor común

2do caso: Factor común y agrupamiento

3er caso: Trinomio de cuadrado perfecto

4to caso: Diferencia de cuadrados

$$\begin{aligned} \text{5to caso: Trinomio de la forma } & x^2 + (a + b)x + a \cdot b \\ & = (x + a) \cdot (x + b) \end{aligned}$$

Unidad N°6: “Funciones”

Plano y Grafica

Variable Dependiente e Independiente.

Dominio y recorrido

Análisis de graficas

Función afín y lineal

Ecuación Principal y general de la recta.

II año Medio A-B 2011

Unidad N°1: “Conjuntos Numéricos”

Reglas de Divisibilidad

Potencias.

Unidad N°2: “Fracciones Algebraicas”

Fracciones algebraicas

División de Fracciones Algebraicas

M.C.M

Suma, resta y amplificación de fracciones.

Unidad N°3: “Ecuación de la Recta”

Distancia entre dos puntos

Punto Medio

Pendiente de la recta

Puntos del plano

Rectas Paralelas, perpendiculares y coincidentes

Ecuación principal de la recta y punto pendiente

Ecuación General

Unidad N°4: “Funciones”

Dominio y recorrido

Función afín y lineal

Función Parte entera

Función por tramo

Descomposición de Funciones

Unidad N°5: “Sistemas de Ecuaciones”

Método de Igualación

Método de Sustitución

Método de Reducción.

III año Medio A-B 2012 (hasta la fecha)

Unidad N°1: “Raíz cuadrada”

Racionalización

Ecuaciones con radicales

Unidad N°2: “Ecuaciones y función cuadrática”

Ecuaciones Cuadráticas

Funciones Cuadráticas

Graficas

Vértices, raíces y concavidad

Unidad N°3: “Inecuaciones y desigualdades”

Conjunto

Intervalo

Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Ecuaciones No Lineales

Unidad N°4: “Trigonometría”

Razones trigonométricas y pitagóricas

Ángulos Notables

Identidades Trigonométricas

Teorema del Seno y del Coseno

Unidad N°5: “Probabilidad”

Espacio y tamaño muestral

Sucesos o eventos

Principio multiplicativo

Permutaciones / combinaciones

Calculo de probabilidad

Sucesos Equiprobables e independientes

Probabilidad condicional

III año Medio Electivo Matemáticas A-B 2012 (hasta la fecha)

Unidad N°1: “Algebra”

Producto algebraico

Términos semejantes

Factorización

Producto algebraico

Fracciones algebraicas

Unidad N°2: “Geometría Analítica”

Ecuación de la Recta

Punto Medio

Distancia entre dos puntos

Distancia entre un punto y una recta

Posición relativa entre dos rectas

Vectores en el plano

Suma y Producto de Vectores

Unidad N°3: “Secciones Cónicas”

Ecuación de la Circunferencia

La parábola

La Elipse

La Hipérbola

Unidad N°4: “Matrices y Determinantes”

Propiedad de matrices

Adición y Producto de matrices

Transpuesta de una matriz

Determinante de una matriz

Propiedad de los determinantes

Determinante de orden 2 y 3

Regla de Cramer

IV año Medio Matemáticas 2012 (hasta la fecha)

Unidad N°1:”Funciones”

Logaritmos

Propiedades de Logaritmos

Ecuaciones Logarítmicas y exponenciales

Función exponencial, raíz, racional, potencia y logarítmica

Función Compuesta

Función Par – Impar

Dominio y recorrido

Evaluación de Funciones.

Unidad N°2:” Cuerpos Geométricos”

Área y Volumen de Cuerpos

Área y perímetro de figuras planas

Poliedros y su clasificación

Poliedros regulares

Prismas, pirámides, cono, cilindro y esferas (área y volumen)

Observación: Los contenidos en IV año Medio no fueron vistos en su totalidad, se observó la carencia de la Unidad de “Datos y Azar”

IV año Medio Electivo Matemáticas 2012 (hasta la fecha)

Unidad N°1: "Números"

Sumatorias PA, PG, PH

Progresiones aritméticas y Geométricas

Límites de funciones

Continuidad.

Unidad N°2: "Derivadas"

Derivada en un punto

Derivadas inmediatas

Derivada de una función exponencial y de base e

Derivadas Trigonométricas

Regla de la cadena

Unidad N°3: "Integrales"

Suma de Riemann

Área bajo la curva

Integrales inmediatas

Teorema Fundamental del Cálculo

Integrales definidas e Indefinidas

Uso de formulas

Unidad N°4: "Lógica y Teoría de Conjuntos"

Tablas de verdad

Conectivo y / o

Conectivo Implica

Conectivo si y solo si

El objetivo de realizar el historial de los contenidos es para evaluar si es posible la aplicación y el desarrollo, por parte de las estudiantes, de una Ecuación diferencial No Lineal por Método Numérico Runge-Kutta de Cuarto Orden utilizando las herramientas adquiridas en su proceso de formación en la Enseñanza Media. Los contenidos más indispensables para la resolución de dicha ecuación, se centra en las asignaturas de III y IV año Medio Electivo de Matemáticas, pero no por esto los demás contenidos no serán de gran utilidad para el dominio de este tópico. Como sabemos los contenidos están estructurados de forma que el proceso cognitivo de las estudiantes sea incrementado a medida que ellas los interioricen y los asimilen. Los contenidos esenciales para dicho dominio son:

Ciclo de Enseñanza	Contenido	Justificación
I año Medio	Unidad N°6: “Funciones”	Es importante el análisis de gráficas, el término de <i>variables</i> y la ubicación en el eje de coordenadas.
II año Medio	Unidad N°4: “Funciones”	Dominio y recorrido de funciones.
III año Medio Electivo Matemáticas	Unidad N°2: “Geometría Analítica”	<p>Vectores en el plano.</p> <p>Suma y producto de vectores.</p> <p>La ecuación utilizada es la de Van del Pol, está a su vez se expresa en forma vectorial con una o más variables. Por eso es de importancia que las estudiantes dominen los conceptos de vector y escalar utilizando sus propiedades se suma y productos de estos.</p>

	Unidad N°4:” Matrices y Determinantes”	Propiedades de matrices. Adición y producto de matrices. Las ecuaciones se pueden expresar por medio de matrices, por ende el dominio de las propiedades básicas de estas es necesario.
III año Medio	Unidad N°4 : “Trigonometría”	Razones trigonométricas y pitagóricas. La excitación externa utilizada en la ecuación de Van der Pol posee la variable coseno, por lo cual las estudiantes poseen el dominio de la gráfica y características las identidades trigonométricas.
IV año Medio	Unidad N°1: “Funciones”	Evaluación de Funciones. Para poder iterar los resultados de la ecuación, es necesario saber “evaluar” funciones.
IV año Medio Electivo Matemáticas	Unidad N°2: “Derivadas”	Derivadas Inmediatas. Derivadas de una función Exponencial. Derivadas trigonométricas. Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que contienen una o más derivadas, por ende es indispensable el

	dominio de este contenido.
Unidad N°3: “Integrales”	<p>Suma de Riemann</p> <p>Área bajo la curva</p> <p>Integrales Inmediatas</p> <p>Teorema fundamental del cálculo.</p> <p>Este último punto nos sirve para justificar que si las estudiantes llegan al nivel de desarrollar y poder abstraer el análisis de una integral sabiendo que es la suma de áreas bajo una curva, (llamadas por ella como función), también serán capaces de adquirir un aprendizaje avanzado como es la de una Ecuación Diferencial</p>

Uno de los Objetivos específicos de esta investigación, consiste en identificar los contenidos necesarios para el aprendizaje de las Ecuaciones diferenciales a través de un método numérico conocido como Runge – Kutta.

Como observamos anteriormente, se ha realizado un historial de los contenidos vistos por unidades a través de las planificaciones, de las cuales se puede desprender dicho cuadro expuesto anteriormente, donde la justificación de los contenidos necesarios que las estudiantes debiesen dominar para el desarrollo de dicha ecuación está sustentado por el análisis realizado.

CAPITULO VI

6 Como aplicar el método de Runge-Kutta para el desarrollo de Ecuaciones Diferenciales No Lineales

Si consideramos las teorías antes mencionadas “Vygotsky y su Teoría Sociocultural”, y “Brousseau con su Teoría de Situaciones Didácticas”, nos encontramos con las herramientas necesarias para lograr plasmar una orientación hacia el acercamiento de una metodología para la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales no Lineales por el método de Runge-Kutta. Entendiendo la Teoría Sociocultural, sabemos que los factores sociales en los cuales están inmersas estas estudiantes nos serán de ayuda para empezar una aproximación al objetivo de este capítulo. Por ejemplo, refiriéndose a los avances tecnológicos actuales, no es de extrañar que las estudiantes se desenvuelvan mejor en un ambiente tecnológico (uso de celulares, computadores, tablets, etc.).

Es importante señalar que por el carácter de esta muestra (electivo matemáticas, III y IV medio) presentan especial interés en las matemáticas, por lo tanto podríamos relacionar que estas estudiantes se sentirían cómodas en un ambiente tecnológico y matemático a la vez.

Como se mencionó en el capítulo III, “se aprecia el desarrollo intelectual de los niños y jóvenes como una estrecha relación entre lo cognoscitivo y lo cultural”. Sobre esto es que se sustenta todo lo anterior, y en base a él se que determinamos que un buen aprendizaje se realizara en la medida en que la relación de lo cognoscitivo y lo cultural se mesclas, creando un estado de balance, ojalá perfecto. Además, hemos planteado que los estudiantes desean aprender nuevos términos y conceptos, capaces de sustentar la necesidad por aprender y perfeccionarse, y teniendo en cuenta que lo que ellos saben no tiene peso no significado para su futuro desarrollo en el plano social.

Ahora bien, lo anterior no puede quedar solo en palabras si es que no se ocupara para poder fomentar el aprendizaje de los jóvenes. Aquí rescatamos el concepto de

andamiaje de Vygotsky, el cual nos indica según el capítulo III que es el “tratamiento que realizar el participante más experto en el problema para lograr adecuarlo al entendimiento del novato”. Según esto, debemos realizar un tratamiento a la información a enseñar, para nosotros los profesores, contenidos curriculares, y en el caso particular de esta tesis las Ecuaciones Diferenciales no Lineales por el método de Runge-Kutta.

Para lograr este andamiaje, es que no sustentaremos en la teoría de Brousseau sobre Situaciones Didácticas, principalmente porque esta se caracteriza por tomar un saber sabio y transfórmalo en un saber institucionalizado.

Según esta teoría, debemos realizar un tratamiento al concepto de ecuaciones diferenciales por desarrollo numérico. Para esto es que hemos analizado una ecuación en particular a través del método de Runge-Kutta. De esta manera sabremos que saberes son los adecuados para comenzar con el tratamiento de esta temática. Los conceptos necesarios para el desarrollo de nuestro tema de estudio son:

- Derivadas.
- Ecuaciones, operatoria de ecuaciones.
- Funciones, gráfico, tabulación y evaluación de ellas.
- Vectores, operatoria de vectores.
- Matrices, operatoria de matrices.

Estos conceptos, en su mayoría deben estar impregnados en el subconsciente de las estudiantes seleccionadas, y en el caso contrario, se debería introducir a ellos. El análisis de los contenidos vistos, las planificaciones y los Planes y Programas realizados, con anterioridad sirven como sustento para poder concluir que estos contenidos ya están en la gran mochila de conocimientos de nuestras alumnas seleccionadas. Por lo tanto, el primer cometido de este método ya está cumplido, hemos definido el saber a enseñar y visto los elementos que nos permitirán enseñarlo.

Disponiendo de lo anterior se puede elaborar una estrategia capas de enseñar este método de desarrollo para ecuaciones diferenciales.

Al momento de elaborar la estrategia, el lector debe tener en cuenta los elementos descritos en el marco teórico de esta investigación para el desarrollo de la Teoría de Situaciones Didácticas. Por ejemplo, debe responder a las tres interrogantes al momento de realizar una transposición didáctica. Responder a las preguntas ¿Qué voy a enseñar?, ¿para qué enseñarlo? y ¿Cómo lo enseñare?, nos facilitara la realización de la transposición y nos dará un fin al aprendizaje el cual deseamos transmitir⁹.

Así como se deben considerar estas preguntas al momento de planificar una estrategia, el profesor que use este sistema para enseñar el tema acá descrito deberá tener siempre presente la finalidad de esta teoría. Entrar en un juego de situaciones Didácticas y A-didácticas nos permite corroborar que el estudiante ha logrado aprender. Es por esto y todo lo demás que después de que el lector revise todo lo expuesto en esta investigación le desafiamos a poder hacer suyo lo acá visto, y se sirva de todas las herramientas entregadas para corroborar el fin transversal de este trabajo, enseñar Ecuaciones Diferenciales por desarrollo numérico a través del método de Runge-Kutta

⁹Estas preguntas deben tomarse como arquetipo para realizar una transposición didáctica

CAPITULO VII

7 Conclusiones

En los paradigmas actuales de la educación ya no se puede pensar en el alumno como un actor pasivo en el proceso de enseñanza – aprendizaje, su rol se transforma en un estudiante que selecciona, relaciona, organiza y vincula sus conocimientos previos con los nuevos. Solo se hablará de aprendizaje significativo cuando lo que se aprende se relaciona con lo que ya se conoce en esquemas de pensamiento. En este contexto aprender un contenido, significa atribuirle un significado, construir una representación mental o modelar teóricamente un contenido (Díaz y Hernández, 1999).

El objetivo fundamental de este estudio es la investigación de la posibilidad de que los estudiantes de un Establecimiento Educacional determinado de Enseñanza Media adquieran un tópico matemático fuerte como lo son las Ecuaciones Diferenciales, analizando los contenidos que fueran necesarios, tanto para el desarrollo como para lograr el aprendizaje significativo de este Tópico. Se enfocó principalmente en el desarrollo de la Ecuación Diferencial No Lineal por Método Numérico de Runge - Kutta ya que es un método relativamente fácil de aplicar y con resultados más exactos.

El sustento principal de esta investigación nos llevó a analizar los Planes y Programas del MINEDUC (2012, sin ajuste curricular), el cual respalda las conjeturas establecidas al inicio de esta investigación. Como podemos apreciar, los contenidos vistos por las estudiantes del establecimiento educacional determinado, se rigen de acuerdo a los planes y programas y según dicho análisis a los libros de clases, las estudiantes poseen los contenidos y herramientas necesarias para la adquisición de este tópico matemático llamado Ecuaciones Diferenciales.

Como docentes, en el final de nuestro proceso de formación, sabemos de la complejidad y el desafío que implica crear un espacio para la enseñanza de un tópico fuerte como son las Ecuaciones Diferenciales, las cuales generalmente se imparten en el ámbito de la Enseñanza Universitaria, pero ¿Por qué no correr el riesgo de que este tópico pueda ser enseñando en la Enseñanza Media?. Generalmente en las asignaturas

de Electivo de Matemáticas se observan en sus contenidos conceptos tales como: matrices, límites, continuidad, derivadas e integrales, las cuales preceden y son necesarias para la comprensión del término “Ecuación Diferencial”, es por ello que optamos por la investigación en los contenidos y planificaciones de Tercer y Cuarto año Medio, electivo matemáticas, con mayor dedicación e ahincó posible.

Se puede inferir de todo este proceso de investigación que las estudiantes poseen las herramientas y recursos necesarios para el desarrollo y aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales, por el método observado en esta Tesis. Pero lo importante de esta tesis, es que marca, como guía, la forma para abordar esta temática. Nos entrega ideas claves al momento de planificar, así como nos da datos curiosos y certeros sobre las EDO's.

BIBLIOGRAFIA

Antunes, C. (2003). *Vygotsky en el Aula ¿Quién Diría?*. 1ra Edición. Brasil: Petrópolis.

Alfaro, V. (2005). *Métodos Numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales Ordinarias*. Escuela de Ingeniería Eléctrica. Costa Rica.

Beltrán, J. (1998). *Procesos, estrategias y técnicas de Aprendizaje*. España: Síntesis.

Burden, R.L. y J.D. Faires (1998). *Análisis Numérico*. Sexta Edición. Editorial Thompson. México.

Cáceres, A. (2009). *Estrategias de Aprendizaje de Matemáticas en estudiantes de tercer semestre de preparatoria*. México: Mérida De Yucatán

Calvo, M. (1998). *Los Métodos de Runge – Kutta en la resolución numérica de las ecuaciones Diferenciales*. Discurso de ingreso leído por académico electo. Zaragoza. España.

Canché, F. (2001). *Influencias de las técnicas de enseñanza – aprendizaje en el aprovechamiento escolar de los alumnos de segundo grado de educación secundaria*. Tesis de licenciatura en educación Media en el área de las Matemáticas. Escuela Normal Superior de Yucatán, Mérida, México.

Curotto, M. (2010). *La Metacognición en el aprendizaje de las Matemáticas*. Revista electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y tecnología. Volumen 2, Número 2.

Chavarría, J. (2006). *Teoría de las situaciones didácticas*. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.

Chevallar, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. España: Barcelona.

Díaz, B., Hernández, F. (1999). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. México

Flores, C. (1996). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el Bachillerato. Cuba: Ciudad de la Habana.

Fregona, D., Orús, P. La noción de *medio* en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemáticas.

García, A. (2001). Métodos Numéricos tipo Runge- Kutta- Nystrom para la Integración Eficiente de Problemas Oscilatorios. Universidad de Valladolid. España.

Good, T. y Brophy, J. (1997). Psicología Educativa Contemporánea. México: McGraw-Hill.

Hernández, R., Fernández, C y Baptista, P. (2003). Metodología de la Investigación. México: McGraw-Hill.

Manterola, M. (2003) Libro: Psicología Educativa, conexiones con la sala de clase. Ediciones UCSH. Santiago de Chile.

MINEDUC. Programa de Estudio Matemática, Primer año Medio. Unidad de Curriculum y Evaluación. 2010. Santiago de Chile.

MINEDUC. Programa de Estudio Matemática, Segundo año Medio. Unidad de Curriculum y Evaluación. 2011. Santiago de Chile.

MINEDUC. Programa de Estudio Matemática, Tercer año Medio. Unidad de Curriculum y Evaluación. 2012. Santiago de Chile.

MINEDUC. Programa de Estudio Matemática, Tercer año Medio Formación Diferenciada. Algebra y Modelos Analíticos. Unidad de Curriculum y Evaluación. 2012. Santiago de Chile.

MINEDUC. Programa de Estudio Matemática, Cuarto año Medio Formación Diferenciada. Funciones y procesos Infinitos. Unidad de Curriculum y Evaluación. 2012. Santiago de Chile.

Nápoles, J., Negrón, C. (2002). La historias de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias contadas por sus libros de textos. Revista Electrónica de Didácticas de las Matemáticas. Universidad de la Cuenca del Plata. Argentina.

Núñez, M., Preiss, D., Ponce, L. Demanda Cognitiva en la clase de Matemáticas Chilenas. Boletín de Investigación Educacional.

Palacios, J., Marchesi, A., Coll, C. (2007). Desarrollo Psicológico y educación. 1. Psicología evolutiva. 2da. Edición. España: Madrid.

Pozo, I. (1990). Estrategias de Aprendizaje. En C. Coll., J. Palacios y A. Marchesi Editorial. Madrid: Alianza.

Plaza, J. (2010 / 2011). Dinámica y control del oscilador de Duffing. Universidad Rey Juan Carlos. España: Madrid.

Roa, R. (2000). Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada. Tesis Doctoral. España: Granada.

Rosado, M. (2004). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. México: Distrito Federal.

Soler, H. (2011). Propuestas metodológica de trabajo docente para promover las competencias matemáticas en el aula basada en un Modelo de Competencias Matemática (MCM). FONIDE. Santiago de Chile.

Shaffer, D., Kipp, K. (2007). Psicología del desarrollo: infancia y adolescencia. Séptima edición. Estados Unidos: Georgia.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las Matemáticas innovación educativa. Volumen 9, Número 46. Instituto Nacional Politécnico. México.

Zill, D. Ecuaciones Diferenciales con Aplicación de Modelado. Sexta edición.
Editorial Internacional Thompson.

ANEXOS

ANEXOS N° 1

PLANIFICACIONES

Como evidencia a los datos anteriores, se adjuntan las planificaciones correspondientes al II semestre de las asignaturas de III y IV año Medio Electivo de Matemáticas.

Planificación II semestre III año Medio Electivo Matemáticas

<small> Colegio N° 10000 Villa del Unidad Técnica Pedagógica </small>			
Profesora: Jocelyn Jofré Morales		Subsector: Matemática	
Curso: 3º Medio Electivo		Planificación Área Científica II Semestre 2012	
Unidades Temáticas: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Profundización de la Geometría analítica ➤ Matrices y determinantes. 	Objetivos Fundamentales: Conocer y utilizar conceptos y lenguaje matemático asociados a expresiones analíticas y gráficas de las rectas y cónicas Analizar, asociar y construir estrategias para la resolución de problemas o desafíos que involucren Matrices aplicadas a la resolución de sistemas de ecuaciones.		
CONTENIDOS	APRENDIZAJES ESPERADOS	EVALUACION	FECHA TERMINO
Geometría Analítica: Ecuación de la recta Punto medio Distancia entre dos puntos Distancia punto recta Posición relativa entre 2 rectas Vectores en el plano. Suma y Producto de vectores	Conocer y utilizar procedimientos de cálculo algebraico en el estudio de la geometría analítica.	Desarrollo guía de ejercicios	Agosto 17
Cónicas: Ecuación de la circunferencia	Analizar gráficamente la ecuación de la circunferencia desde su representación algebraica	Desarrollan ejercicios propuestos en la pizarra	Agosto 24
La parábola	Analizar gráficamente la ecuación de la parábola desde su representación algebraica	Participación en clase	Agosto 31
La elipse	Analizar gráficamente la ecuación de la elipse desde su representación algebraica	Desarrollan ejercicios propuestos en la pizarra	Septiembre 7
La hipérbola	Analizar gráficamente la ecuación de la elipse desde su representación algebraica	Desarrollan ejercicios propuestos en la pizarra	Septiembre 28
Matrices y Determinantes: Propiedades de las matrices Adición y producto de matrices	Reconocen el concepto de matriz Calculan adición y productos de matrices aplicando sus propiedades	Laboratorio de Computación Utilización de un Software educativo.	Octubre 12
Transpuesta de una matriz	Resuelven matrices logrando obtener su transpuesta aplicando sus propiedades.	Desarrollo de ejercicios: Propuestos.	Octubre 26
Determinante de una Matriz Propiedades de los determinantes	Relacionan las propiedades de la adición y multiplicación de Matrices con las de Determinantes de una matriz.	Desarrollo guía de ejercicios	Noviembre 09
Determinante de Orden 2 Determinante de Orden 3	Conocen y aplican las propiedades de los determinantes en la resolución de matrices 2x2 y 3x3.	Desarrollo de ejercicios	Noviembre 16
Regla de Cramer	Conocen y aplican las propiedades de los determinantes en la resolución de ecuaciones 2x2 y 3x3.		Noviembre 23

Esta planificación corresponde a la asignatura de III año Medio electivo matemática, en ella podemos observar y verificar que los contenidos enseñados a las estudiantes están acorde a las necesidades para la adquisición del tópico matemático que es objeto principal de investigación de esta tesis, que es el desarrollo de la Ecuación diferencial No lineal por método numérico.

Planificación II semestre III año Medio Electivo Matemáticas

Unidad Técnico Pedagógica			
Colegio M ^a Luisa Villalón		Subsector: Matemática	
Profesor: Ana Salomo		Curso: IV Medio Electivo	
Unidades Temáticas:		Objetivos Fundamentales:	
<ul style="list-style-type: none"> > DERIVADAS > FUNCIONES POLINOMIALES > LOGICA MATEMATICA Y TEORIA DE CONJUNTO 		<ul style="list-style-type: none"> > Analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas o desafíos que involucren funciones, relaciones entre geometría y progresiones. > Conocer y utilizar conceptos y lenguaje matemático asociados a modelación matemática y procesos infinitos. 	
CONTENIDOS	APRENDIZAJES ESPERADOS	EVALUACION	FECHA TERMINO
- DERIVADAS	Reconoce el concepto de derivada de una función. Calcula derivadas simples aplicando el concepto de derivada como un límite. Identifica las propiedades básicas de las derivadas y las aplica para calcular derivadas de funciones. Calcula la derivada de funciones compuestas sencillas usando la regla de la cadena. Dada una función aplica la derivada para calcular máximos, mínimos y analiza puntos de inflexión.	GUIA DE EJERCICIOS PRUEBA	21 de septiembre
- FUNCIONES POLINOMIALES	Conocen los polinomios de una variable, los distinguen de otras expresiones algebraicas, reconocen su grado y asocian sus raíces reales con las intersecciones de su gráfico con el eje x. Relacionan las propiedades de la adición y multiplicación de polinomios con coeficientes enteros con la adición y multiplicación de los números enteros. Conocen y aplican los teoremas del resto y del factor en la transformación de polinomios por factorización y en la resolución de ecuaciones.	GUIA DE EJERCICIOS PRUEBA	12 de octubre
- INTEGRALES	Suma de Riemann Áreas bajo la curva Integrales Inmediatas	GUIA DE EJERCICIOS	16 de noviembre

En esta planificación también podemos observar y verificar que los contenidos entregados son acorde a las necesidades de los conocimientos y herramientas que deben poseer las estudiantes para cumplir el objetivo de esta investigación.

Si bien en las planificaciones adjuntas hemos podido constatar que los contenidos fueron enseñados a las estudiantes, también debemos tener presente de qué manera se evalúan estos contenidos. A continuación se adjuntan algunas evaluaciones realizadas durante el segundo semestre del presente año, en las asignaturas de III y IV año Medio electivo.

ANEXOS N° 2

EVALUACIONES

Prueba de Matrices III año Medio Electivo



Colegio Mª Luisa Villalón
Sector Matemática
Profesora: Jocelyn Jofré

Prueba de Matemática Electivo III año Medio: Matrices

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____ Nota: _____

Aprendizajes esperados:

Comprenden conceptos básicos sobre Matrices

Aplican Propiedades de suma, resta y multiplicación de matrices para hallar la matriz solución correspondiente.

Instrucciones:

* Lee atentamente las preguntas antes de contestar.

* No se permiten celulares prendidos dentro de la sala de clases, ni salidas al baño.

* Tiempo estimado para contestar la prueba es de 80 min.

* La prueba cuenta con 42 puntos, donde la nota de aprobación corresponde al 60% del puntaje total.

❖ **Desarrollo:** En cada uno de los ejercicios determina lo solicitado

1. En cada ejercicio empleando propiedades de matrices, calcule lo solicitado y encuentre la matriz solución. (4 puntos cada uno)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

- a) $A + B$
- b) $B - A$
- c) $4A + 2C - B$
- d) $C + A$

2. Aplicando multiplicación de matrices obtén la matriz resultado (5 puntos cada uno)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

- a) $A * B$
- b) $B * A$
- c) $C * D$
- d) $D * C$

Prueba de Derivada IV año Medio Electivo



Colegio Mª Luisa Villalón
Sector Matemática
Profesoras: Ana María Salomo

PRUEBA DE MATEMÁTICAS IV ° Medio electivo. DERIVADAS

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____ Nota: _____

Aprendizajes esperados:
Aplican propiedades de derivadas

Instrucciones:

- Lee atentamente las preguntas antes de contestar.
- No se permiten celulares prendidos dentro de la sala de clases, ni salidas al baño.
- Tiempo estimado para contestar la guía es de 40 min.
- La prueba cuenta con 27 puntos, donde la nota de aprobación corresponde al 60% del puntaje total.

I. Obtener la derivada de las siguientes funciones por **Definición**.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$.
(3 puntos)

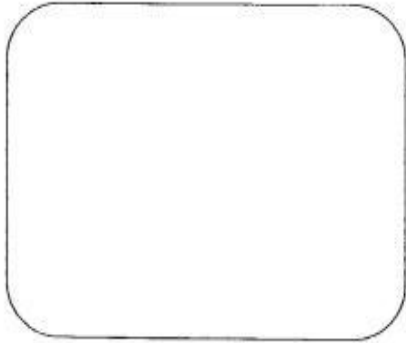
b) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$. (3 puntos)

c) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ en $x = 2$.

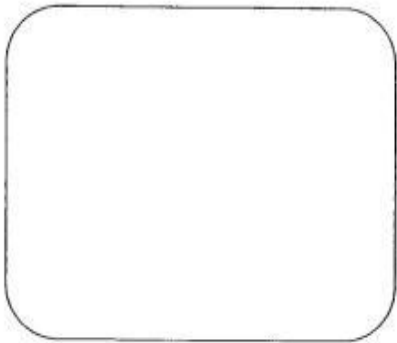
II. Obtener la derivada de las siguientes funciones, aplicando fórmulas: (3 puntos cada una)

a) $y = \frac{3+x}{3+x^2}$

b) $y = 7 \cdot \sqrt[3]{x}$



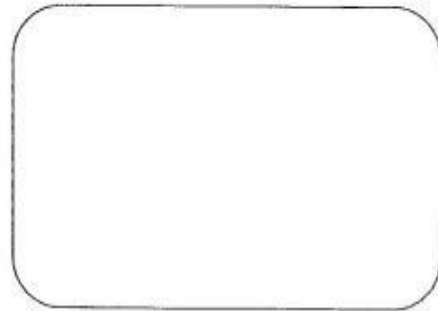
c) $y = \frac{3x^4 - x^2 + 5x + 2}{7}$



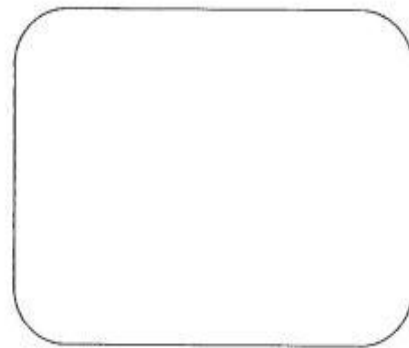
d) $Y = (5x^2 - x^2 + 4x + 2) \cdot (3x^2 - 7)$



e) $f(x) = \frac{3x^3 + x + 2}{5x^2 + 1}$



f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$



Prueba de Integrales IV año Medio Electivo



Colegio Mª Luisa Villalón
Sector Matemática
Profesoras: Ana María Salomo

PRUEBA DE MATEMÁTICAS IV ° Medio electivo: Integrales Definidas e indefinidas

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____ Nota: _____

Aprendizajes esperados:

Aplican propiedades de las integrales y el Teorema Fundamental del Cálculo.
Encontrar el valor numérico de la integral.

Instrucciones:

- Lee atentamente las preguntas antes de contestar.
- No se permiten celulares prendidos dentro de la sala de clases, ni salidas al baño.
- Tiempo estimado para contestar la guía es de 70 min.
- La prueba cuenta con 39 puntos, donde la nota de aprobación corresponde al 60% del puntaje total.

I. Obtener la integral de las siguientes funciones.

a) $\int 4x^6 + 2x^3 - 13x \, dx$
(3 puntos)

b) $\int (\sqrt{x} - 2) \, dx$ (3 puntos)

c) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x} \, dx$

d) $\int (3x^3 - 5x^2 + 3x + 4) \, dx$

e) $\int x^3 - x^7 - x^{13} + x \, dx$

f) $\int x^5 + x^2 - x^3 + x \, dx$

g) $\int_0^3 (-x^2 + x - 1) \, dx$

h) $\int_0^1 (2x - 3) \, dx$

i) $F(x) = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) \, dx$

j) $\int_{-1}^0 (x^4 - x^2) \, dx$

Como observamos las evaluaciones presentan los contenidos explicitados en las planificaciones. Las evaluaciones son de desarrollo, los conceptos fundamentales son Matrices, Derivadas e Integrales los cuales son contenidos esenciales a la hora de poder enseñar el concepto de Ecuación Diferencial.

Todo lo expuesto anteriormente nos sirve para confirmar que es posible identificar los contenidos que son necesarios para la adquisición del desarrollo de un tópico matemático fuerte como son las Ecuaciones diferenciales. Para esto fue óptimo realizar un análisis histórico de contenidos vistos por las estudiantes desde el I año de su Enseñanza Media a IV año Medio, incluyendo III y IV año Medio Electivo, el cual es el núcleo de nuestra investigación, ya que en estas asignaturas es donde se encuentran los contenidos más necesarios para la enseñanza y aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales No Lineales por Método Numero Runge Kutta Orden Cuatro.

ANEXOS N° 3

REGISTRO DE LIBROS DE CLASES

A continuación se adjuntan fotografías de los libros de clases analizados a través de pauta de observación, estas se clasifican de acuerdo a los años (2010, 2011 y 2012).

Año 2010, I año Medio A - B

Docentes: Natalia Jarra P. / Macarena Zúñiga.

Profesor Sr. **NATALIA JARRA PARRA** N° Horas: **5**
 Subsector: **MATEMÁTICA**
 Unidad: **POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO**

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
12/03	- Desarrollo de PDN	06/04	Conexión de la potencia
16/03 (2H)	- Aplicación DE PRUEBAS DE DIAGNÓSTICO	08/04 (1H)	Testeo de Potencias para la potencia
18/03 (1H)	- FECHAS DE Pruebas y LAB. Introducción a las potencias	12/04 (2H)	Definición de notación decimal desarrollan ejercicios
27/03 (2H)	Ejemplos y primeros respectivamente	13/04 (2H)	Notación decimal y notación científica
27/03 (2H)	Ejercitación de potencias en Libro de texto de Computación	19/04 (2H)	Resuelven problemas en notación científica y decimal (Repos para pruebas)
23/03 (2H)	Continuación de propiedades de Potencias desarrollan ejercicios.	20/04 (2H)	Evaluación N°2: Control de notación decimal y científica
25/03 (1H)	Desarrollan Guías de ejercicios potencias para pruebas	22/04 (1H)	Control de fechas: Rehezo
29/03 (2H)	Repaso para prueba de potencias	24/04 (2H)	Con sus los alumnos
30/03 (2H)	PRUEBA COEF. 1: Potencias IDENTIFICAR y aplicar propiedades	27/04 (2H)	Clasificación de números en conjuntos numéricos (Operación en \mathbb{R})
01/04 (1H)	Repos de ejercicios	29/04 (2H)	Racionales
05/04 (2H)	Potencias en números racionales desarrollan ejercicios		

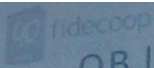
COLEGIO MARIA LUISA VILLALON U.T.P. SANTIAGO

OBJETIVOS CONTENIDOS ACTIVIDADES

Profesor Sr. **NATALIA JARA PARZA** Nº Horas: **5**
 Subsector: **MATEMÁTICA**
 Unidad: **CONJUNTOS NUMÉRICOS**

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
03/05 (2H)	Transformación de decimal a fracción. Aproximaciones	20/05 (1H)	Evaluación coef 1: Operación en \mathbb{Q} y Patrones Numéricos
04/05 (2H)	Repass prueba Números Racionales	24/05 (2H)	Unidad: Álgebra números básicos, términos semejantes
06/05 (1H)	Evaluación coef 1: Conjuntos Numéricos y números Racionales	25/05 (2H)	Termino de Guía de ejercicio, valorización de expresiones
		27/05 (2H)	Quiz de Álgebra: Términos semejantes reemplazo de valores.
10/05 (2H)	Operación en \mathbb{Q} y Regularidades Numéricas		
		JUNIO	
11/05	Día de la alumna	01/06 (2H)	LABORATORIO DE COMPUTAC: CONTROL en THAT QUIZ: Multiplicación de Ternos y binarios.
13/05 (1H)	Guía de ejercicios: Operación en los números Racionales y regularidades numéricas	03/06 (1H)	Actividad en clases: de términos semejantes
14/05 (2H)	Desarrollo de Guía de ejercicios: Operación en \mathbb{Q} y Patrones num	07/06 (2H)	Actividad en clases: GRADO de polinomios, suma y resta de polinomios
16/05 (2H)	Continuación Patrones numéricos en Potencias y Decimales		

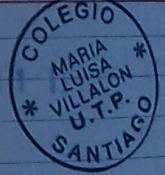
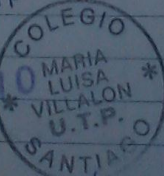




OBJETIVOS CONTENIDOS ACTIVIDADES

Profesor Sr. Natalia Jara Pama
 Subsector: matemática
 Unidad: Funciones

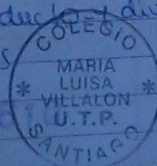
Nº Horas: 5

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
15/11 (2H)	- Determinan Funciones a través de su representación	02/12 (1H)	Revisión de Pruebas Formativa
16/11 (2H)	- Tablas y gráficas	07/12 (2H)	Laboratorio de Computación: Trazo de "esbozo" "álgebra y Funciones"
18/11 (1H)	Gráfico de Funciones idéntica, la pendiente.	09/12 (1H)	Reposo Funciones
23/11 (2H)	Prueba "introducción a las Funciones"	13/12 (2H)	Ejercicios de Repaso Funciones y sus gráficas
25/11 (1H)	Identifican Funciones Afín y Lineal.	14/12 (2H)	Conclusiones Finales Funciones y sus gráficas
29/11 (2H)	Definición de ec. principal y general de la recta. Composición de Funciones	Finalización año escolar 15/Dic/2010	
30/11 (2H)	Conceptos básicos de probabilidad. ejercicios de repaso para la SIP		
			
30/11 (2H)	Pruebas Formativas; ensayo Prueba SIP.		

Profesor Sr. Macarena Zúñiga Herbage
 Subsector: Educación Matemática
 Unidad: Álgebra

Nº Horas: 5

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
27/04 (2)	Regularidades numéricas	19/05 (2)	Aplicación Prueba Terminos semejantes
28/04 (2)	Repaso para la prueba.	21/05 (1)	Feriado legal
30/04 (1)	Prueba de Matemáticas Aproximación y regularidades	25/05 (2)	Multiplicación y división algebraicas
4/05 (2)	Álgebra. Introducción	26/05 (2)	Guía de ejercicios
5/05 (2)	Terminos semejantes	28/05 (1)	Desarrollo de guía de Ejercicios
7/05 (1)	Ejercicios terminos seme- jantes	1/06 (2)	Desarrollan guía de ejercicios. dudas prueba
11/05 (2)	Celebración del día de la alumna.	2/06 (2)	Terminan guía
12/05 (2)	Eliminación de parentesis. Desarrollan guía de ejercicios	4/06 (1)	Aplicación Prueba Multiplicación y división de polinomios.
14/05 (1)	Control Terminos semejantes	8/06 (2)	Realizan Trabajo indivi- dual de Producto y división de polinomios
18/05 (2)	Repaso para prueba Muestras A. Terminos semejantes y eliminación		



Profesor Sr. Macarena Zúñiga Herbage
 Subsector: Educación Matemática
 Unidad: Álgebra

Nº Horas: 5.

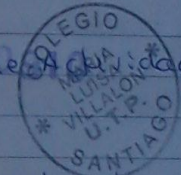
FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
9/06 (2)	Ecuaciones ejemplos y ejercicios	2/07 (1)	licencia
11/06 (1)	Planteamiento de problemas utilizando ecuaciones de 1er grado	6/07 (2)	Tecnización 1er caso Factorización por término común 2do caso Factorización de diferencia de cuadrados
15/06 (2)	Guía de ejercicios Ecuaciones y problemas	7/07 (2)	Ejecución de Factorización
16/06 (2)	Guía de ejercicios Ecuaciones de 1er grado y Problemas	27/07 (2)	Productos notables
18/06 (1)	Terminan guía de ejercicios Ecuaciones 1er grado.	28/07 (2)	Ejercicios productos notables $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
22/06 (2)	Ecuaciones, problemas de matemática		
23/06 (2)	Repasso SIP. Ecuaciones	30/07 (1)	Ejercicios cuadrado de binomio.
25/06 (1)	Partido Chile - España Cambio de Actividad	03/08 (2)	Ejercicios cuadrado de binomio
29/06 (2)	Aplicación Tarea Ecuaciones y problemas de 1er grado	04/08 (2)	Aplicación cuadrado de Binomio, trabajo para el día viernes 06/08
30/06 (2)	Corrección Tarea	06/08 (1)	Terminan Tarea cuadrado de Binomio



Profesor Sr. Macarena Zúñiga Herbage
 Subsector: Educación Matemática
 Unidad: Álgebra

Nº Horas: 5

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
30/08 (2)	suma por diferencia ejercicios y ejemplos	1/09 (2)	Ejercicios de cubo de Binomio
31/08 (2)	Realizan ejercicios de repaso para prueba suma por su diferencia y cuadrado de Binomio	3/09 (1)	Control cubo de Binomio
13/08 (1)	Terminan trabajo acumulativo	4/09 (2)	Desarrollan guía de ejercicios Productos notables
14/08 (2)	Aplicación Prueba Productos notables Nº 1	8/09 (2)	Terminan guía de Productos notables
18/08 (2)	Producto de 2 binomios con un término en común Ejemplos y ejercicios	10/09 (1)	Desarrollan Afiche Bicentenario
20/08 (1)	Ejercicios producto de 2 binomios con término común	14/09 (2)	Aplicación Prueba Productos Notables
24/08 (2)	Control acumulativo producto de 2 binomios con un término en común	15/09 (2)	Cambio de Actividades
25/08 (2)	Cuadrado de trinomio ejemplos y ejercicios	17/09 (1)	Ferizado Legal
27/08 (1)	Ejercicios de cuadrado de Trinomio	21/09 (2)	Laboratorio de Computación para Polinómica
31/08 (2)	Cubo de Binomio ejemplos	22/09 (2)	Factorización Términos en común. Entrega de guía de ejercicios



Año 2011, II año Medio A - B

Docentes: Natalia Jarra P. / Jocelyn Celedón.

Natalia Jarra Parra
Educación Matemática
Fracciones Algebraicas

N° Horas: 5 Horas

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
<u>Abril</u>		19/04 (2H)	Multiplicación de Fracciones Algebraicas
04/04 (2H)	Comparación de Fracciones	25/04 (2H)	Prueba de Matemática "Fracciones Algebraicas"
04/04 (1H)	Desarrollo de ejercicios Fracciones algebraicas simplificaciones	25/04 (1H)	División de Fracciones algebraicas
05/04 (2H)	Simplificación de Fracciones algebraicas (con productos notables)	26/04 (2H)	División de Fracciones algebraicas. Trabajos en el Libro de Numeros - Laboratorio de Computación (Excel y Teoría)
11/04 (2H)	Análisis de Fracciones "Positivas"	<u>Mayo</u>	
12/04 (2H)	- Multiplicación de Fracciones algebraicas - Reposo para la prueba	02/05 (2H)	Descomposición de un n^2 en Factores primos. Mínimo común múltiplo por medio de este proceso.
18/04 (2H)	Guía de ejercicios: "Fracciones Algebraicas"	02/05 (1H)	Corrección de la Prueba "Fracciones Algebraicas"
18/04 (1H)	Quiz "Fracciones Alg." - Demostración - Simplificación		

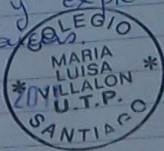
Profesor Sr.
Subsector:
Unidad:

Nablia Jara Parra
Educación Matemática
Fracciones Algebraicas

Nº Horas: 5 HORAS

Profesor Sr.
Subsector:
Unidad:

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
03/05 (2H)	mínimo común múltiplo: de números y expresiones algebraicas.	17/05 (2H)	Prueba: "Descomposición de un nº en factores primos y M.C.M."
09/05 (2H)	m.c.m. de Fracciones Algebraicas.	23/05 (2H)	Adición y Sustracción de Fracciones Algebraicas
09/05 (1H)	Quiz: m.c.m. de Fracciones Algebraicas.	23/05 (1H)	Corrección de ejercicios.
10/05 (2H)	Suma de Fracciones con expresiones algebraicas.	24/05 (2H)	THAT Quiz: Adición y Sustracción de Fracciones Algebraicas.
16/05 (2H)	Repasso Pruebas: - Guía de ejercicios MCM - Descomposición de un número en Factores primos	30/05 (2H)	DTA: Preguntas tipo PSU: "Fracciones Algebraicas"
16/05 (1H)	Suma de Fracciones con m.c.m.	30/05 (1H)	Quiz: Fracciones Algebraicas
		31/05 (2H)	Sustracción Fracciones Algebraicas.



OBJETIVOS CONTENIDOS ACTIVIDADES

Profesor Sr. Jocelyn Celedón
 Subsector: Educación Matemáticas
 Unidad: Productos Notables

N° Horas: 5

Profesor Sr.
 Subsector:
 Unidad:

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
	<u>Marzo</u>		
Vier 04/03 (1h)	Se corrige la prueba SIP (diagnóstica) para repasar y aclarar dudas de contenidos aprendidos anteriormente	Vier 19/03 (1h)	Repaso Ptos notables y factorización
Lu 07/03 (2h)	Se repasan contenidos necesarios para abordar la nueva unidad. H.C.M. y propiedades de potencias se ejercitan dichos contenidos	Lu 21/03 (2h)	Se desarrolla guía de ejercicios para repasar contenidos de la prueba
Ma 08/03 (1ra y 2da)	1ra H: Se continúa ejercitando con potencias y nos racionales 2da H: Se realiza una actividad acumulativa (potencias y R)	Ma 22/03	1h: Se continúa trabajando con la guía. 1h: Se revisa la guía y se aclaran últimas dudas
Vier 11/03 1h	Se repasan productos notables sus distintos fórmulas y se ejercitan	Vie 25/03 (1h)	Prueba Coef 1: "Potencias, fracciones y pts notables"
Lun 14/03 (2h)	Se refuerzan los contenidos estudiados la clase anterior	Lu 28/03 (2h)	Corrección Prueba Introducción Unidad: Expresiones algebraicas fraccionarias. Simplificación fracciones algebraicas. Ejemplos
Ma 18/03	(1h) Se realiza una serie de ejercicios de productos notables y factorización. (2h) Se continúa ejercitando los ejercicios de la clase anterior	Ma 29/03 (2h)	1h: Se continúa con simplificación de fracciones algebraicas 2h: Serie de ejercicios de simplificación de fracciones



Vie
01/04
(1h)

Lu
04/04
(2h)

Ma
05/04
(2h)

Profesor Sr. Joseph Celedón
 Subsector: Educación Matemática
 Unidad: Expresiones Algebraicas Fraccionarias

N° Horas: 5

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
<u>Abril</u>			
Vie 01/04 (1h)	Se repasan multiplicaciones de expresiones algebraicas	Vie 15/04 (1h)	Se continua trabajando con los págs del libro de taller. (pág 29 y 30)
Lu 04/04 (2h)	1h: Acto Cívico del IV° B. 2h: Multiplicación y división de expresiones algebraicas fraccionarias Ejemplos.	Lu 18/04 (2h)	Restricciones de fracciones se estudia para que valores una fracción algebraica se indetermina
Ma 05/04 (2h)	1ra h: Se desarrollan multiplicaciones y divisiones con expresiones algebraicas fraccionarias en la pizarra. 2da h: Ellas desarrollan ejercicios del contenido anterior	Ma 19/04 (2h)	1h: Trabajan con ejercicios de expresiones algebraicas fraccionarias 2h: Continúan con págs del libro de taller (28, 29, 30)
		Vie 22/04	Feriado Santo
Vi 08/04 (1h)	Se trabaja pág 23 del libro del ministerio. Se resuelve actividad.	Lu 25/04 (2h)	Prueba Coef. 1 "Fracciones Algebraicas"
Lu 11/04 (2h)	Análisis y Comparaciones de fracciones. Se identifica cuando una fracción algebraica es positiva o negativa	Ma 26/04 (2h)	1°: Mínimo Común Múltiplo "Descomposición de números primos" 2°: MCM calculado con productos de factores primos
Ma 12/04 2h	2h: Se resuelve actividad de libro de taller (Bicentenario, pág 29 y 30)	Vi 29/04 (1h)	Continuación H.C.M ejercicios

Año 2012, III año Medio A - B

Docentes: Ana María Salomó / Jocelyn Jofré.

N° Horas: 3

fidcoop

OBJETIVOS CONTENIDOS ACTIVIDADES

Profesor Sr. Ana Salomó y.
Subsector: Educación Matemáticas
Unidad: La raíz Cuadrada

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
5/03 (1h)	Posada de Planificación.	2/05 (2h)	Resolución Cuadrática, sus soluciones y aplicación. Definición de discriminante.
7/03 (2h)	Reajuste contenidos de 2º media.	7/05 (1h)	Ejercitación de ecuación cuadrática. Pág 59 y 63 del libro Santillana.
12/03 (1h)	Revisión Prueba SEP	9/05 (2h)	Guía Evaluada con nota: Ecuación Cuadrática.
14/03 (2h)	Unidad N°1: "La raíz Cuadrada" definición y propiedades.	14/05 (1h)	Desarrollo de la función cuadrática.
19/03 (1h)	Continuación de Propiedades y Fija Prueba. y racionalización de raíces cuadradas.	16/05 (2h)	Identificación y construcción.
21/03 (2h)	Racionalización de raíces cuadradas.	21/05 (1h)	Similitud y recta de una parábola. Foros.
26/03 (1h)	Ejercitación Pág 44 del libro.	23/05 (2h)	Ejercitación de función y ecuación cuadrática en nota acumulativa.
28/03 (2h)	Ejercitación de racionalización cubica y Revisión de los contenidos para Prueba.	29/05 (1h)	Ejercitación y revisión de ejercicios evaluados.
2/04 (1h)	Control tipo Prueba.		
4/04 (2h)	Entren y resuelven ecuaciones con radicales.	30/05 (2h)	Aplicación del eje de simetría y vértice y máximos y mínimos de una función cuadrática.
9/04 (1h)	Reducción de ejercicios tipo Prueba.		Encuentro de Seguridad escolar.
11/04 (2h)	Primer Prueba: Pares.	4/06 (1h)	Ejercitación de función cuadrática.
16/04 (1h)	Reajuste de ecuaciones con radicales.	6/06 (2h)	Primer Ensayo PSU.
18/04 (2h)	Guía Evaluada Pares (2)	11/06 (1h)	Se trabajó el libro como repaso de la unidad pag 123, 124, 125, 126 y 127.
23/04 (1h)	Entrega y revisión de ejercicios Evaluados en la guía de Pares.		
25/04 (2h)	Comienzo Unidad N°2: Ecuaciones Cuadráticas y función Cuadrática. Se trabajó Pág 79 libro (discriminante).		

28 MAYO 2012

COLEGIO MARIA LUISA VILLALBA S.A.P. SANTIAGO

COLEGIO MARIA LUISA VILLALBA S.A.P. SANTIAGO

127 ABR. 2012

OBJETIVOS CONTENIDOS ACTIVIDADES

Profesor Sr. Mary E. Cosillo G
 Subsector: Educación Matemática
 Unidad: Inecuaciones / Trigonometría

Nº Horas: 7

Profesor Sr.
 Subsector:
 Unidad:

FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES	FECHA	OBJETIVOS, CONTENIDOS O ACTIVIDADES
	Junio	20	Sistemas de Inecuaciones
		(1h)	obj: mediante desarrollo identificar la variable x y graficar el resultado
02	Ferias Locales		
(1h)			
04	Exposición FERIA PASTOR	22	Inecuaciones binómicas
(2h)	EXHIBICIÓN	(2h)	obj: mediante desarrollo de inecuaciones enventarse su solución y graficar en el geogebra.
9-20	VIA LAS COBES DE ZURICUA		
	Julio		
23	Unidad IV: Triángulos rectángulos	27	Refuerzo. Ejercicios
(1)	Leer y desarrollar contenido Unidad conocimiento previo concepto razón	(1h)	Para prueba día revisión obj: Identificar, valores en desarrollo de ejercicios
25	Concepto de desigualdad. ejemplos.	29	Prueba: Desigualdad des-
(2)	aplicación	(2h)	Inecuaciones
30	Repaso: Ecuaciones Cuadráticas		SEPTIEMBRE
(1)	Para bolo, graficar, Ventas razones	03	Unidad de Trigonometría
		(1h)	razones trigonométricas uso de Pitágoras.
	Agosto	05	Razones Trigonométricas
01	Desigualdades, Inecuaciones	(2h)	de ángulos notables 30°, 45°, 60°
(2h)	Inecuación y ecuación buscando la desigualdad Correspondiente.		obj: Identificar en los triángulos los ángulos y valores según sus lados los ángulos pedidos.
06	Ejecución Inecuación		
(1h)	Ec. d una imógnite		
08	Prueba. Ec. cuadráticas		
(2h)			
10	Ejecución evaluador, entrega	10	Ejecución de los ángulos
(1h)	de nota y Revisión de	(1h)	en Triángulos rectángulos
	Nota	12	Acto cívico. Fiestas Patrias.
		(2h)	
		24	Identificación Trigonometría
		(1h)	Identificación de funciones

