UNIVERSIDAD CATOLICA SILVA HENRIQUEZ

ADQUISICIÓN DEL LENGUAJE ALGEBRAICO EN ALUMNOS/AS DE PRIMER AÑO MEDIO: UNA MIRADA DESDE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA.

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:
SAAVEDRA, DANIEL ALFREDO

PROFESOR GUÍA:
CECILIA ROJAS PARDO

SANTIAGO, CHILE
2009

AGRADECIMIENTOS.

Creo que esto es lo más complicado, muchas personas ocuparon un lugar importante en mi desarrollo personal y profesional, desde mi paso por la Federación de Estudiantes por el año 2005, pasando por diversas actividades en las cuales las conversaciones sobre política y educación nos llenaban de ideas y proyectos: Un festival Víctor Jara, una peña solidaria o simplemente una cerveza en el lugar común de muchos compañeros y compañeras, el barquito. Sin embargo, lo anterior no podría haber sido posible por el trabajo, la comprensión y el amor incondicional de mis padres, Magaly y Daniel, los cuales me ayudaron en los momentos más difíciles, me orientaron con sabios consejos, me ensañaron lo que es la vida y lo que cuesta conseguir las metas, todo lo anterior acompañado de un amor gigantesco que aún no sé como retribuir. Parte fundante de ese amor se complementa con el cariño de mis hermanos Cristhián, Magaly y Belita, gracias por su compañía y cariño.

En el camino aparecieron hombres y mujeres verdaderamente maravillosos y maravillosas, me ensañaron lo que es la amistad y el compromiso, entre ellos y ellas están: María Roxana –flaca-, Gustavo, Sarita, Mireya, Majo, Rucsio, Panchito, Natalia, Juan –toco-, Alexis; no sé, lo más seguro es que he olvidado algunos nombres, a todos ellos y ellas ¡Muchas gracias compañeros y compañeras!...debo recalcar que no aplico dicha palabra como algo ya transformado en un modismo, sino más bien que la siento desde lo más profundo de mi corazón, son parte de mi familia.

Ahora bien, guardo este espacio especial para darle las gracias a mi compañera de vida, mi querida Katte, quien me enseñó y me enseña lo más hermoso del amor. Su incondicional compañía en los momentos difíciles, su paciencia infinita para revisar cada borrador, sus palabras de aliento y tranquilidad en momentos en que las ideas escasean, me sirvieron para seguir adelante y hacer que cada fuerzo se pudiera imprimir en este humilde pero significativo trabajo; agradezco tu amor y tus abrazos, cada café, cada canción, cada palabra… se traducen en un te amo mi querida compañera!!...nos espera el mundo, sea México, Argentina o cualquier lugar…contigo feliz.

Por otro lado, quiero manifestar que esta investigación tiene nombre y apellido, para ti mi querida lela, gracias por quedarte conmigo, no me dejaste, no te fuiste…gracias por protegerme y cuidarme… ¡te amo! Gracias Dios mío por darme la fuerza y la fe para seguir adelante y ser cada día mejor persona, gracias por ayudarme a conseguir cada día mis anhelos.

Para Aida Ibacache
Con amor y gratitud por tus enseñanzas y cuidados

INDICE

INTRODUCCION

El presente estudio pretende analizar la adquisición del concepto de Lenguaje Algebraico en el primer año de Enseñanza Media del colegio Boston College, desde la ciencia de la Didáctica Matemática, puesto que ésta permite un mayor y mejor entendimiento de los procesos y fenómenos didácticos, dando origen a lineamientos que permitan mejorías en el estudio de las matemáticas. En virtud de ello es que se utiliza como metodología la Ingeniería Didáctica debido a que permite analizar de manera local los fenómenos que se desprenden de la enseñanza.

De esta forma, la siguiente investigación se divide en cinco capítulos, siendo el primero de ellos el Planteamiento del Problema, en que se explicitan las causas que llevan a plantear la interrogante guía de este estudio: ¿Cuáles son las realizaciones didácticas[1] con las que los/las alumnos/as de Primer año Medio del colegio Boston College adquieren el concepto de Lenguaje Algebraico?

En el segundo capítulo se da cuenta del Marco de Referencia, en el cual se exponen los elementos conceptuales relevantes para entender la realidad de la problemática abordada.

El tercer punto abarca el Diseño Metodológico, el cual se enmarca dentro del Paradigma Interpretativo con un enfoque cualitativo, puesto que se investiga desde un Estudio de Caso respecto de la adquisición del Lenguaje Algebraico en los/las alumnos/as del colegio antes mencionado, sin embargo, dentro de este Paradigma se inserta la metodología de la Ingeniería Didáctica con el fin de recabar los antecedentes propios de la Matemática Educativa.

En el cuarto capítulo se dan a conocer los Resultados de la Investigación, los cuales se presentan de acuerdo a las fases que postula la Ingeniería Didáctica para el análisis de los datos, es decir, Análisis preliminar, Diseño de una situación y su análisis a priori, Experimentación, y la última fase corresponde a Análisis a Posteriori y Validación.

Finalmente se exponen las Conclusiones de este estudio con las cuales se busca contribuir a la reflexión de la disciplina.

---

[1] Según Artigue (1995), el concepto de "realizaciones didácticas" corresponde a la concepción, realización, observación y análisis de las secuencias de enseñanza.

CAPITULO I:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la concepción de la unidad educativa que se tenía en Chile, por lo menos a nivel de Estado, antes de la segunda mitad del siglo XX, preponderaba la idea de transmitir conocimientos, por sobre la de producirlos. Esto queda nítidamente reflejado en los fundamentos de la Reforma Educacional chilena, vigente desde el año 1996, donde se plantea que “Uno de los grandes cambios que se ha producido a nivel mundial en las concepciones de la política educacional es trasladar la importancia que tradicionalmente se le ha dado a la enseñanza hacia la importancia del aprendizaje y sus procesos (…) no basta en este nuevo milenio con cumplir con el plan de estudio, hoy lo que importa en última instancia –motivo por el cual se organiza todo un complejo sistema educativo- es que el estudiante aprenda (…). Hacer efectivo este nuevo enfoque significa cambiar cualitativamente la educación y requiere un nuevo tipo de proceso de transformación” (MINEDUC. 2005: S/P). Es así como hoy se plantea la necesidad de un accionar desde un paradigma constructivista que permita la producción del conocimiento como eje central del desarrollo intelectual del sujeto, lo cual implica un giro determinante respecto de la comprensión, teorización y práctica de la educación como proceso que permite al sujeto adquirir las habilidades y destrezas necesarias para desenvolverse dentro de una sociedad que se encuentra en constante transformación global.

Parte fundamental del sistema educativo es que las entidades educacionales comprendidas como parte de un campo institucional, han visto cómo se han estandarizado e institucionalizado ciertas metodologías, materiales didácticos y objetos curriculares en diversos sub-sectores de aprendizaje, siendo el de matemática uno de los cuales ha experimentado transformaciones esenciales de carácter metodológico y didáctico en función de este giro cualitativo de la educación.

Es así como Chile ha mostrado cierto interés en participar en diversas pruebas internacionales para evaluar el desempeño de los/las alumnos/as en las matemáticas escolares, siendo primordial el análisis del rendimiento en función de los contenidos y habilidades adquiridos por ellos/as en el sistema escolar; una de estas pruebas es el “Estudio internacional de tendencias de Matemáticas y Ciencias” (TIMSS), cuyo objetivo principal es el de verificar si los/las alumnos/as manejan habilidades aprendidas en la escuela en referencia a las ciencias y las matemáticas. Los resultados arrojados por esta evaluación en el año 2003 referida a alumnos/as de octavo año básico, muestran que Chile obtiene un promedio de 387 puntos en matemáticas, muy inferior al promedio internacional que corresponde a 467 puntos; esto se refleja en que los/las alumnos/as mostraron una nula capacidad de organizar información en relación a problemas no rutinarios, mostrando de esta manera un bajo dominio del conocimiento matemático. (MINEDUC. 2004). Por otra parte, la prueba internacional Programme for International Student Assessment, PISA, mide principalmente la *alfabetización* de jóvenes de 15 años en tres áreas, las cuales son: Lectura, Matemáticas y Ciencias; en donde se resalta "la *alfabetización* Matemática como la capacidad del individuo para identificar y entender la función de las matemáticas en el mundo, para emitir juicios fundados y para utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos" (OCDE en MINEDUC. 2007:37). Sin embargo, la aplicación de esta prueba a estudiantes chilenos de 15 años en el año 2006 muestra que nuestro país obtiene en promedio 411 puntos en comparación con los 498 puntos en promedio que obtienen los/las estudiantes de los otros 56 países participantes, en donde el nivel de desempeño de los/las estudiantes chilenos/as se traduce en que "(…) más de la mitad de los estudiantes en Chile no han desarrollado competencias que les permitan enfrentar situaciones problemáticas de vida que impliquen el uso de las matemáticas. Su razonamiento matemático sólo se aplica a contextos muy familiares; podrían usar procedimientos rutinarios, siguiendo instrucciones y no siendo capaces de proponer modos alternativos de resolver" (MINEDUC. 2007:39).

Ahora bien, a nivel nacional se aplica un instrumento evaluativo denominado "Sistema de medición de calidad de la educación", SIMCE, cuyo objetivo principal es evaluar si los/las alumnos/as, tanto de cuarto y octavo año básico, como también los/las alumnos/as de segundo medio, han alcanzado los objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios correspondientes al currículo nacional en diversas áreas disciplinares; sin embargo, si se analizan los resultados obtenidos por los/las alumnos/as de segundo año medio a nivel nacional en el año 2008, el promedio del subsector de matemática fue de 250 puntos en comparación con los 252 puntos del año 2006, es importante mencionar también que esta prueba evaluó los contenidos y habilidades referidas a cinco ejes temáticos, los cuales son: Números, Álgebra, Funciones, Probabilidad y Geometría. Cabe destacar que dentro de estos cinco ejes el Álgebra conlleva una importancia particular en el desarrollo de significados en la educación matemática, por lo que se hace necesario profundizar en los aspectos que a ella refieren. En virtud de lo anterior, es que dentro de la prueba SIMCE 2008 correspondiente al eje temático de Álgebra y referido a los contenidos, se evalúa *"(…) la comprensión del sentido de las letras en el lenguaje algebraico y de las relaciones matemáticas que se pueden expresar a través de este lenguaje; el desarrollo de operaciones con expresiones algebraicas, fraccionarias y no* *fraccionarias; la búsqueda de patrones; la interpretación y análisis de fórmulas; la resolución de problemas que involucran el uso de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, además de la interpretación de las soluciones obtenidas y la evaluación de su pertinencia.*" Además, esta evaluación enfatiza las habilidades referidas a *"la estructuración y generalización de conceptos matemáticos, es decir, la traducción e interpretación de situaciones matemáticas; la búsqueda y desarrollo de expresiones, patrones y regularidades; el encadenamiento lógico de razonamientos; la generalización y la particularización. Esto último implica descifrar e interpretar lenguaje simbólico, comprendiendo su relación con el lenguaje natural"* (MINEDUC. 2009: 10).

De esta manera, en los últimos años se ha generado desde la matemática educativa[2], diversas investigaciones con el carácter de identificar las dificultades que tienen los/las profesores/as y los/las alumnos/as de Educación Media sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en especial del Lenguaje Algebraico en las escuelas y los obstáculos que se generan en función de la transición de la aritmética al álgebra, considerando la escasa comprensión de las ideas fundamentales del contenido, ya que "El aprendizaje del álgebra elemental no se ajusta a las necesidades de una sociedad moderna en la cual las máquinas hacen los procesos rutinarios y las personas toman decisiones, analizan fallos y se preparan para las innovaciones" (Olfos, Soto, Silva. 2007:82).

Dentro de esta misma línea investigativa, se abordan aspectos en los cuales el/la profesor/a, a la hora de enseñar álgebra, se centra principalmente en utilizar los símbolos en forma totalmente mecánica donde el uso de la letra se manifiesta como número generalizado, dando como resultado que los/las alumnos/as no manejen una significación ni mucho menos una relación en torno a la realidad, generando de esta manera un escaso desarrollo del pensamiento matemático de tipo inductivo, argumentativo, conjetural o demostrativo. (Olfos *et al*., 2007).

Por otro lado, la problemática existente sobre el Lenguaje Algebraico entre los/las alumnos/as de primer año de educación media se relaciona principalmente con que la "traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático no sólo consiste en representar con símbolos los conceptos matemáticos, sino que también involucra al pensamiento lógico-matemático para establecer las relaciones que puedan existir entre ellos y su consiguiente representación matemática. Por ello, la traducción parece constituir la base sobre la cual se establece el tránsito del lenguaje natural al

[2] La matemática educativa se entiende como una disciplina del conocimiento que se ocupa principalmente del estudio de los fenómenos didácticos relacionados con el saber matemático.

matemático y viceversa, y de ahí su gran importancia en el planteamiento y resolución de problemas" (Olazábal. 2005:13).

Siguiendo con este orden de ideas, las investigaciones que se orientan al análisis de secuencias de enseñanza en el aula en torno a la introducción del álgebra escolar, no son muy disímiles; es así como los resultados obtenidos en una investigación, desarrollada por Raimundo Olfos, que abarcó dos aulas de octavo año básico y dos aulas de primer año medio concluyó que "El uso de letras en fórmulas, expresiones y ecuaciones es trabajado sin profundidad teórica (…)" agrega "La preocupación de los docentes por la manipulación de expresiones simbólicas por sobre la comprensión del significado y del uso que pudiera dársele al álgebra llevó probablemente a este estado frecuente en que una proporción importante del alumnado no se siente bien estudiando álgebra y no la alcanza a dominar" (Olfos. 2004:4).

Por otro lado, un número importante de investigaciones en torno a la problemática de la enseñanza y del aprendizaje del álgebra, específicamente del Lenguaje Algebraico, convergen en la importancia de las representaciones semióticas de los conceptos algebraicos y cómo éstos van adquiriendo significado en función de la construcción y del reconocimiento de símbolos en el álgebra, ya que , "Una de las grandes dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, y del álgebra en particular, reside en la capacidad para llevar adelante cambios de registro. Identificando unos cambios de registro más complejos que otros" (Duval en Olfos. 2004:2). En este sentido, "las representaciones semióticas, como producciones constituidas por el empleo de símbolos, son relativas a un sistema particular se signos (lenguaje, escritura algebraica, gráficos cartesianos, etc.)" (Ferrari. 2002: 16).

Bajo este contexto teórico, es necesaria la distinción por parte del docente sobre la estructura simbólica del álgebra, es decir, una distinción entre *significado y significante,* en donde la primera hace referencia a la concepción mental de un objeto o idea, mientras la segunda se refiere a un objeto material que se utiliza para hacer referencia al significado; ya que en matemática se utilizan diversos significantes. (Olfos. 2004).

Ahora bien, a partir de los antecedentes mencionados se puede inferir que existe una problemática en relación a la reticencia que tienen los/las alumno/as de Educación Media sobre el aprendizaje del álgebra y en especial del Lenguaje Algebraico, para esto se considera el marco contextual de la calidad de educación en Chile, donde se podría acentuar el análisis en relación con la formación y/o práctica de profesores/as en matemáticas, en torno a la forma en que se estructuran los procesos de enseñanza y aprendizaje llevados a cabo en la sala de clases sobre un contenido matemático. En función de ello es que una investigación realizada por la Universidad de Chile, a cargo del programa de investigación en educación, concluyó categóricamente que "las clases de matemáticas son uniformes, predecibles y no ayudan a desarrollar la curiosidad por los números (…) existen sólo dos tipos de trabajo en aula, independiente del lugar, la edad de los docentes y las condiciones del establecimiento: uno consiste en explicaciones y preguntas del profesor desde el pizarrón y en el otro los alumnos trabajan una guía y el docente pasea por los puestos entregando explicaciones individuales. Ninguna de los dos métodos (…) consigue motivar a los estudiantes" (Araya *et al.,* en prensa. 2008: S/P).

De esta manera, "El papel del profesor no es sólo "pasar la materia". Este debe relacionar lo que enseña con los objetivos fundamentales y contenidos mínimos propuestos en el currículo. El profesor debe tener un entendimiento profundo de los programas de estudio, de modo que sus prácticas sean coherentes con el espíritu mismo de los programas y así su actividad se articule en el contexto de la educación que se le desea dar a los alumnos". (Olfos. 2004:4).

Ahora bien, las investigaciones anteriormente referidas, aportan diversos resultados en los cuales preponderan las dificultades existentes en torno a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente el álgebra escolar, prevaleciendo la clase expositiva y/o tradicional como fuente generadora de conocimiento, dando consigo una ausencia importante de "aprendizajes significativos"[3] en matemáticas, produciendo más bien aprendizajes memorísticos en relación a un conjunto de fórmulas, símbolos y operaciones; sin embargo, resulta pertinente analizar, reflexionar y complementar desde la Ingeniería Didáctica, como metodología de investigación, aquellos resultados esgrimidos de dichas investigaciones, ya que va permitir reforzar y potenciar ciertas interpretaciones que se puedan desprender de este estudio, en torno a favorecer el aprendizaje de los/las alumnos/as bajo un escenario en que éste/a último/a genere adquisiciones significativas del conocimiento matemático, permitiendo orientar diversas estrategias de enseñanza contextualizando las necesidades del currículo nacional referidas a desarrollar mejoras en el estudio de las matemáticas. Asimismo, la revisión

[3] Según Ausubel (1983) en Manterola (2003), el Aprendizaje Significativo corresponde a que los nuevos contenidos pueden relacionarse de un modo sustantivo con los conocimientos previos del alumno y cuando se tiene una actitud favorable hacia el contenido que permite darle significado propio.

bibliográfica de dichas investigaciones permitirá orientar la presente investigación concibiendo aspectos cognitivos de los/las alumno/as que permitan analizar obstáculos implicados en el aprendizaje, ya que la comprensión semántica y sintáctica del Lenguaje Algebraico llevarán a éste/a último/a a una integración conceptual de los procedimientos -como actividad central del proceso didáctico[4]-, evitando la visión sesgada que se tiene del Lenguaje Algebraico en torno a su aplicación carente de sentido e instrumento simbólico, puesto que, “El álgebra no sólo es manipulación o manejo de símbolos de manera independiente al significado de éstos. El álgebra es también y por sobre todo un lenguaje que permite representar fenómenos y posibilita resolver problemas. Problemas ligados a la estadística a la geometría a la aritmética y al cálculo. Todos estos problemas ligados a los más variados contextos científicos, técnicos, lúdicos y cotidianos.” (Olfos. 2004: 4).

Es este concepto de Lenguaje Algebraico el que se analizará en el Colegio Boston College, sede La Florida. Este establecimiento educacional particular subvencionado cuenta con mil diecinueve alumnos matriculados en el año 2009, repartidos entre primer año de Enseñanza Básica y cuarto año de Enseñanza Media, existiendo dos cursos por nivel. Es relevante señalar que los resultados obtenidos por este establecimiento en el SIMCE 2008 aplicado a sesenta y tres alumnos/as de segundo año medio, fueron de 281 puntos, es decir, el promedio 2008 del establecimiento comparado con el promedio nacional del mismo año es más alto en 31 puntos. Considerando dichos antecedentes y para efectos de esta investigación se trabajará con el primer año medio A.

En concordancia con lo anterior es que se hace necesario analizar secuencias de enseñanza visualizando primordialmente la praxis de un profesor de matemática y el accionar de sus alumnos/as en torno a la forma en que estos últimos conjeturan nociones iníciales en la construcción y adquisición del Lenguaje Algebraico. Además, interesa contextualizar las dificultades que surgen de la relación entre enseñanza y aprendizaje del objeto de estudio; por lo tanto, nuestra pregunta de investigación es:

¿Cuáles son las realizaciones didácticas en el cual los/las alumnos/as de Primer año Medio del colegio **Boston College** adquieren el concepto de Lenguaje Algebraico?, lo anterior se responderá mediante el diseño de elementos que aporten a la construcción de una Ingeniería Didáctica, considerando las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva.

[4] Según Chevallard (1997), el proceso didáctico hace referencia a cada vez que alguien sea llevado a estudiar algo.

JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

Al considerar lo planteado por la Reforma Educacional chilena referida al cambio cualitativo que debe tomar la educación, surge la idea de que los/las estudiantes chilenos/as deben desarrollar, desde la unidad educativa, ciertas habilidades y competencias que les permitan desenvolverse en función de las necesidades y requerimientos que hace la sociedad, todo lo anterior bajo el supuesto de que el conocimiento es uno de los factores influyentes en el desarrollo de un país. Es así que la matemática, como ciencia, está presente en todas las áreas del saber y por esto es prioritaria para cualquier avance, ya sea aquellos relativos a la disciplina, como aquellos que distan de ella y son trascendentales que se relacionen con el desarrollo de la sociedad, ya que la constante evolución y complejización de las relaciones sociales trae consigo nuevos desafíos, los cuales pueden ser entendidos con la ayuda de la matemática, en la medida en que ella entrega herramientas que permiten influir en la sociedad y seguir aumentado la gama de conocimientos en relación al campo de acción de la actual Reforma Educacional. Además, el aprendizaje de las matemáticas "permite enriquecer la comprensión de la realidad, facilita la selección de estrategias para resolver problemas y contribuye al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo" (MINEDUC. 1998:83).

Ahora bien, las constantes transformaciones, que aún hoy se encuentran en desarrollo, han permitido generar ciertas evoluciones respecto de los subsectores de aprendizaje, siendo matemática uno de los más afectados por la reforma, debido a la fundamentalidad de tal y a los déficit esgrimidos en sus resultados, -sobresaliendo aquellos de pruebas estandarizadas como el SIMCE- trayendo consigo constantes cuestionamientos subordinados a los instrumentos metodológicos y teóricos de enseñanza que utilizan los/las profesores/as de matemáticas en relación a la entrega de contenidos puestos en escena en la práctica educativa, ya que desde el currículo nacional se plantea que la enseñanza de las matemáticas, en el contexto escolar, se debe caracterizar principalmente por favorecer la capacidad del/a alumno/a a trabajar ciertos significados de manera más holística, y no caer en la aplicación constante de reglas y mecanismos sin sentido, favoreciendo de esta manera el pensamiento creativo, crítico y autónomo del que se habló anteriormente (MINEDUC. 1998).

Sin embargo, Douady plantea que el aprendizaje de las matemáticas se puede abordar bajo dos aspectos esenciales; uno de ellos se refiere a "la disponibilidad funcional de algunas nociones y teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones (…) las nociones y teoremas matemáticos involucrados tienen un status de **herramientas** (…) las situaciones o los problemas en los cuales evolucionan las nociones matemáticas generan **significado**"; el segundo aspecto se refiere a que "*Saber* matemáticas también significa identificar las nociones y los teoremas como elementos de un corpus reconocido social y científicamente (…) Por esto, las nociones y los teoremas matemáticos en cuestión tienen un status de **objeto**" (Douady. 1995: 63).

No obstante, si se consideran ciertos elementos predominantes abordados en diversas investigaciones, desde la matemática educativa, referidas al proceso de enseñanza y aprendizaje sobre un contenido matemático, se hace patente la necesidad de trabajar ciertas nociones que permitan analizar y describir ciertas relaciones cognitivas de los/las alumnos sobre cómo y qué matemática aprenden en las escuelas bajo un escenario didáctico, ya que "(…) no hay evidencia histórica de una metodología *exitosa* ni de ningún acercamiento teórico que dé una explicación de la naturaleza del tránsito entre los resultados de la investigación didáctica y su puesta en escena en el sistema de enseñanza" (Farfán. 1997:9).

A partir de estas distinciones, se hace necesario contextualizar la investigación y analizar las dificultades que poseen los/las alumnos de primer año medio sobre el concepto de Lenguaje Algebraico, ya que éste es uno de los conceptos en las matemáticas escolares que presenta mayor conflicto en relación a la poca significación de su sistema simbólico. Como primer punto de partida, se sustentará el análisis en la construcción de significados, como procesos cognitivo, en base a dos componentes principales; las cuales son: (i) La componente semántica (ii) La componente sintáctica; en donde la primera se refiere básicamente al rol de herramienta que tienen ciertas nociones matemáticas aplicadas a un cierto contexto; la cual generan, como se dijo anteriormente, construcción de significados. La segunda componente, se sustenta en la utilización por parte de los/las estudiantes de ciertas nociones matemáticas en la construcción de relaciones simbólicas de un objeto matemático.

En virtud de lo anterior, se considerará como eje articulador de esta investigación, la Ingeniería Didáctica, la cual permite a un nivel local, analizar la complejidad de los fenómenos que subyacen de la realización didáctica bajo la relación de enseñanza y aprendizaje de la unidad de Lenguaje Algebraico en torno a como los/las alumnos/as de Primer año Medio adquieren dicho concepto, ya que el contexto en que interviene la Ingeniería Didáctica es siempre dinámico, por lo que se hace imperativo generar, desde la matemática educativa, procesos concordantes que permitan en el/la alumno/a la construcción de conocimiento. Asimismo, otro punto relevante para esta investigación versa hacia la importancia que posee el Lenguaje Algebraico en las matemáticas, esencialmente en el rol fundamental que posee este concepto en la estructura curricular nacional, su alto grado de dificultad y su posterior evolución en cursos superiores, como también pretende extender y provocar cierto interés tanto para investigadores/as como docentes a la significación del estudio del álgebra escolar y su implicancia en la práctica docente, generando de esta manera un mayor entendimiento de los procesos que subyacen de la relación entre enseñanza y aprendizaje del concepto de estudio, proponiendo desde un escenario tanto teórico como práctico sólidas bases que permitan entender las dificultades que poseen los/las alumnos/as al adquirir dicho concepto en el contexto escolar.

A continuación, se darán a conocer los objetivos que guiarán esta investigación.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Objetivo General:

- Conocer las realizaciones didácticas de los/las alumnos/as de primer año de enseñanza media enfocado en la adquisición del concepto de Lenguaje Algebraico, con el fin de aportar elementos que permitan el diseño de una Ingeniería Didáctica.

Objetivos Específicos:

1. Identificar y analizar las fases Epistemológica, Didáctica y Cognitiva de la Ingeniería Didáctica que conllevan a la construcción del Lenguaje Algebraico en los/las alumnos/as de primer año de Educación Media.

2. Identificar el mecanismo de enseñanza que utilizará el profesor para desarrollar el contenido de Lenguaje Algebraico a los/las alumnos/as.

3. Determinar mediante la observación de las secuencias de enseñanza el proceso que conlleva a los/las estudiantes de primer año de educación media a la adquisición del concepto de Lenguaje Algebraico.

4. Diseñar y entregar elementos que aporten al diseño de una Ingeniería Didáctica para la construcción del concepto de Lenguaje Algebraico en los/las alumnos/as de primer año de enseñanza media.

A continuación se expone el Marco de Referencia de la presente investigación.

CAPITULO II:

MARCO DE REFERENCIA

Para efectos de esta investigación, se abordarán dos teorías fundamentales en el desarrollo de la didáctica de las matemáticas, pertinentes a la construcción del término **Ingeniería Didáctica**. De esta forma se pretende lograr una aproximación a una reflexión de carácter teórica, precisando las relaciones existentes entre profesor/a, alumno/a y saber en torno al sistema didáctico.

En primer lugar, el término Ingeniería Didáctica nace en la década de los `80, bajo la tutela de la escuela didáctica francesa, amparándose, principalmente en dos estructuras teóricas y metodológicas: *La Teoría de las Situaciones Didácticas* de Guy Brousseau y *La Teoría de Transposición Didáctica* de Yves Chevallard. Es importante mencionar además que la noción de "ingeniería" se sustenta en que el investigador debe participar en la construcción, diseño e implementación de las situaciones didácticas.

Según Douady, "(…) el término de ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un *profesor-ingeniero,* con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos" (Douady.1995: 61). De esta forma la ingeniería didáctica se entiende desde una dualidad: como *producto,* ya que es una consecuencia del análisis *a priori*; y también como un *proceso*, puesto que se relaciona con la forma que tiene el profesor de dar a conocer dicho producto, contextualizándolo a las necesidades de los/las alumnos/as de la clase.

1.- Metodología de la investigación de la Ingeniería Didáctica

La ingeniería didáctica como metodología de la investigación se caracteriza principalmente por ser "un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase" (Artigue.1995: 36), lo cual permite generar una intervención directa en la sala de clases, en relación a una concepción, realización, observación y análisis de secuencia de enseñanza. De esta forma, se instituyen dos tipos de niveles en torno a la ingeniería didáctica, los cuales son: *macro-ingeniería y micro-ingeniería,* donde una de las características más importantes de la ingeniería didáctica como instrumento metodológico, es que se centra en que la validación de las observaciones de los estudios de caso es de carácter interna, donde existe una confrontación entre el *análisis a priori y el análisis a posteriori.* (Artigue. 1995)

1.1.- Fases de la Ingeniería Didáctica

La ingeniería Didáctica se caracteriza principalmente por cuatro fases fundamentales, las cuales son:

1. Análisis preliminar.
2. Diseño de la situación didáctica y su análisis *a priori.*
3. Experimentación.
4. Análisis *a posteriori* y validación.

A continuación se expondrán brevemente las características de estas fases.

1.1.1.- Análisis preliminar

Los análisis preliminares conforman la primera etapa de esta metodología, donde después de plantearse los objetivos específicos que guiarán la investigación, se ejecuta una observación y se determinan los componentes y las relaciones al interior del sistema didáctico. Estos componentes se dividen en tres grandes dimensiones: La dimensión *epistemológica* que dice relación con el saber matemático a investigar considerando su desarrollo histórico; la dimensión *cognitiva* se encuentra coligada a las concepciones que poseen los/las alumnos/as que deben apropiarse del saber en cuestión y su evolución en el proceso de aprendizaje; y finalmente la dimensión *didáctica* relacionada con la transmisión de tal saber dentro del sistema de enseñanza tradicional, tomando como eje central el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En virtud de lo anterior, es que estos análisis preliminares tienen carácter de dinámicos puesto que el/la investigador/a podrían profundizarlos a medida que avanza el estudio y en función de las necesidades de éste.

1.1.2.- Diseño de una situación didáctica y su análisis *a priori*

En esta segunda fase de la ingeniería didáctica, el/la investigador/a realiza el diseño de la ingeniería, tomando en consideración las restricciones de ciertas variables que no se consideran en el análisis epistemológico, didáctico y cognitivo; estas variables toman el nombre de *"variables de comando"*.

Ahora bien, "el análisis a priori se debe considerar como un *análisis de control de significados"* (Artigue. 1995: 44), esto está estrechamente ligado con la concepción sobre las variables de comando, ya que éstas y al igual que el análisis a priori, tienen por objetivo controlar y manipular ciertos comportamientos y significados que tienen los/las alumnos/as en torno al conocimiento matemático, bajo tal consideración esta fase descansa en un conjunto de hipótesis que van marcando el camino del investigador sobre cómo los/las alumnos se desenvuelven, resuelven y afrontan los problemas que la situación diseñada les presenta; la ratificación de estas hipótesis es mediante la confrontación con el análisis a posteriori que concierne a la cuarta fase.

Además, esta fase alcanza un análisis de tipo descriptivo y otro de tipo predictivo en torno a las características del diseño de una situación a - didáctica que se le entrega a los/las alumnos/as.

1.1.3.- Experimentación, Análisis a posteriori y Validación

En la etapa de *experimentación* se realiza la ejecución de las situaciones didácticas diseñadas por el/la investigador/a, registrando los sucesos más relevantes en la secuencia de la clase.

En el *análisis a posteriori* se analiza la información entregada por la experimentación, mediante las observaciones de las secuencias de enseñanza y las producciones de los/las estudiantes en clases. Además, el análisis de los datos entregados se complementan generalmente con otros recursos que realizó el/la investigador/a durante la secuencia de enseñanza, como por ejemplo cuestionarios, entrevistas individuales y/o grupales, etcétera. (Artigue, 1995).

En el caso de la *validación* de la hipótesis que el/la investigador/a formuló en la investigación - como se habló anteriormente - es mediante la confrontación entre análisis a priori y el análisis a posteriori, es decir, entre las predicciones y expectativas que se tenían en un comienzo y los resultados obtenidos de las situaciones de enseñanza en torno a un conocimiento matemático.

2.- Transposición Didáctica

Ahora bien, si se considera la teoría de la Transposición Didáctica, se puede señalar inicialmente y desde una perspectiva epistemológica que la palabra transponer significa "poner a alguien o algo más allá, en lugar diferente del que ocupaba" (RAE. 2009); bajo esta conjetura se hace visible el concepto de Transposición Didáctica, definiéndose como "(…) el paso del saber sabio al saber enseñado" (Chevallard. 1991:16); de esta manera se empieza a articular un análisis en torno al funcionamiento del sistema didáctico influenciado por las exigencias curriculares que entrega el sistema educativo, produciéndose una dicotomía entre saber sabio y saber enseñado, ya que, "el saber que produce la transposición didáctica será por lo tanto un saber exiliado de sus orígenes y separado de su producción histórica en la esfera del saber sabio, legitimándose, en tanto saber enseñado, como algo que no es de ningún tiempo ni de ningún lugar (…)"(Chevallard. 1991: 18). Esta idea es manejada por diversos autores que reconocen la problemática existente en torno al sistema de enseñanza y como éste excluye ciertas nociones "importantes" en la construcción de un conocimiento matemático; por ejemplo, Brousseau (1986) postula un concepto que él denomina *génesis ficticia*, que se relaciona principalmente con ciertos "saberes" se enseñan de forma simplificada y generalizada, desligándose de esta manera de su compleja construcción científica, con el fin de hacer más fácil su enseñanza.

Se puede afirmar en función de lo planteado por Chevallard (1991), que la transformación de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza se denomina Transposición Didáctica; sin embargo, en dichas transformaciones entra en juego la relación existente entre objeto de saber y objeto de enseñanza, ya que no necesariamente "un objeto de saber sólo se identifica y designa como objeto a enseñar a partir del momento en que el problema didáctico de su transposición en objeto de enseñanza estuviera (potencialmente) resuelto: el trabajo de la transposición didáctica es un trabajo que se continúa *después* de la introducción didáctica del objeto de saber" (Chevallard. 1991:57).

Además, para que se generen estas transformaciones es necesario considerar que para un científico -por ejemplo- el comunicar sus descubrimientos llevará a descontextualizarlos y despersonalizarlos, perdiendo toda raíz epistemológica; de esta manera, la entrega del saber en las escuelas, por medio del profesor, se traduce que en que los/las alumnos/as produzcan una re-contextualización y en una re-personalización del saber, bajo esta lógica se genera lo que Chevallard plantea como *noosfera*, donde "los representantes del sistema de enseñanza, con o sin mandato, se encuentran directa o indirectamente, con los representantes de la sociedad" (Chevallard. 1991:28), produciéndose una especie de validación del conocimiento que se entrega en la escuela por medio del currículo educacional.

3.- Teoría de las Situaciones Didácticas.

Las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau se sitúan bajo los aportes de la Teoría Constructivista del conocimiento y en la Teoría Psicogenética entregada por Jean Piaget en relación al proceso de adaptación con el medio físico que tiene un/una niño/a. Esta adaptación se traduce en un desarrollo progresivo de equilibrio entre dos procesos: asimilación y acomodación. Bajo esta referencia teórica, Manterola plantea que "La acomodación supone no sólo una modificación de los esquemas previos en función de la información asimilada, sino también una nueva asimilación o reinterpretación de los datos o conocimientos anteriores en función de los nuevos esquemas construidos" (Manterola. 2003:122).

De esta manera, Piaget da un primer acercamiento en torno al aprendizaje que lleva a cabo un/una niño/a, ya que el desarrollo de tipo cognitivo no se traduce en aprendizajes de tipo puntual, sino más bien bajo continuas adaptaciones entre asimilación y acomodación de las estructuras mentales en torno a un objeto, ya que el aprendizaje para Piaget se inicia principalmente cuando el/la niño/a reconoce un problema - desequilibrio en la organización mental - , ya que es aquí donde el/la niño/a va a generar diversas estructuras cognitivas que se traducirán en la búsqueda de soluciones acertadas y erróneas; este proceso dinámico de acomodación permitirá la construcción del conocimiento bajo la lógica del equilibrio.

Desde esta perspectiva, Brousseau postula que "(…) el aprendizaje se logra por medio de una adaptación del sujeto que aprende al medio creado por una situación, haya o no intervención del docente en el transcurso del proceso" (Brousseau. 2007:18).

Sin embargo, Brousseau (2007) advierte que el proceso psicogenético descrito por Piaget en el que el aprendizaje se desarrolla al margen del contexto social que tiene un individuo, es decir, bajo un escenario natural e involuntario puede desligar al docente de un compromiso de tipo didáctico, cayendo en uno de los grandes cuestionamientos que tiene Piaget en torno a las teorías empiristas, donde el aprendizaje se centra principalmente en las experiencias que tiene el/la niño/a, evitando de esta manera toda intuición que pueda tener el sujeto en torno a una situación. Es así como cobra importancia que el aprendizaje se enmarque bajo una lógica en que las relaciones didácticas faciliten la estimulación al/la alumno/a para la construcción y adquisición de un saber.

Bajo esta estructura teórica, cabe señalar que para Brousseau la enseñanza se sustenta en la relación de tres ejes fundamentales, que se encuentran estrechamente ligados entre sí: (i) el/la alumno/a, (ii) el saber matemático y (iii) el sistema educativo; este último personificado por el/la profesor/a, el cual es el responsable de suscitar y organizar el saber matemático; dando como resultado que el/la alumno/a adquiera conocimientos aceptados socialmente; todo este esquema descansa bajo la vinculación que tienen estos tres ejes con un medio, considerado como un sistema de relaciones didácticas.

Además, se puede desprender de esta triada la dialéctica existente entre sujeto y objeto - entendiéndose como sujeto al/la alumno/a y objeto al saber matemático – ya que “saber matemáticas no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, es *ocuparse de problemas* en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones” (Chevallard. 1997:213).

Lo anterior permite visualizar el papel que juegan las situaciones en torno a la construcción del conocimiento, la cual se traduce en los aportes que puede generar el docente en función de desarrollar metodológica y sistemáticamente actividades que permitan equilibrar sus conocimientos anteriores con los “nuevos”, es decir, que en un estado final de una situación el/la alumno/a pueda llegar a un método de razonamiento que le permita contextualizar su saber en distintas situaciones, dando como resultado la evolución de dichos conocimientos bajo un proceso dinámico de enseñanza y aprendizaje.

3.1.- Situación didáctica, Situación a-didáctica, Situación fundamental.

Bajo las nociones que se plantearon anteriormente respecto de las adaptaciones que el sujeto realiza con el medio como el sujeto realiza ciertas adaptaciones con el medio, se pueden abordar las situaciones didácticas en relación al aprendizaje que tiene un/una alumno/a, es decir, “alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje. (Brousseau. 2007:30).

Sin embargo, es importante distinguir entre “situación” y “medio”, la primera se caracteriza por ser “un modelo de interacción de un sujeto con cierto tipo de medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar un estado favorable” y el segundo se considera como “un subsistema autónomo, antagonista del sujeto” (Brousseau. 2007: 16-17); de esta manera se describe a los medios como herramientas que permiten enseñar un conocimiento puntual, dichas herramientas se traducen en la educación formal como textos de estudio, material concreto, etcétera.

Por lo establecido anteriormente, nace desde una perspectiva más científica, el concepto “Didáctica de las Matemáticas” cuyo objeto de estudio son las *situaciones didácticas*, entendiéndose éstas como “un conjunto de relaciones establecidas explicita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución” (Brousseau en Gálvez. 2002: 42).

Entonces, se puede constatar que las situaciones didácticas se sitúan bajo la lógica de explicar los fenómenos didácticos desarrollados en clase, que permiten a el/la alumno/a apropiarse de un conocimiento matemático concreto. Ahora bien, la importancia de todo este conjunto de construcciones que operan en el ordenamiento sistemático de una clase, es el de “(…) intervenir de manera racional en el sistema educativo, controlando *a priori* el proceso y las variables puestas en juego, es decir, conjeturando con sustento los efectos esperados y siendo dúctiles para efectuar los cambios que sean pertinentes en tal procedimiento” (Ferrari. 2001:43).

Respecto de lo anterior, se hace necesario centrarse en la idea de que en el desarrollo del aprendizaje que tiene un/una alumno/a interviene principalmente una estructuración de sus conocimientos en relación a una situación - comúnmente concebida como un problema matemático - inducida por el/la profesor/a, ante lo cual el/la alumno/a “acepta” dicha situación basándose principalmente en que esta va a favorecer la construcción y adquisición de un nuevo conocimiento que le va a permitir encontrar una solución a dicho problema. De esta manera las situaciones didácticas se tendrían que representar bajo un escenario totalmente intencionado, donde el/la alumno/a tiene el propósito de aprender algo, favoreciendo de esta manera distintas actividades intelectuales que van a permitir la apropiación de un conocimiento matemático; bajo esta mirada se podría reafirmar la relación existente entre sujeto y objeto de la cual hablamos anteriormente.

Ahora bien, cuando el/la alumno/a es capaz de apropiarse de forma efectiva de un conocimiento matemático concreto que pueda aplicar fuera de cualquier situación de aprendizaje y en ausencia de una situación intencional por parte del docente, se puede plantear la existencia de una *situación a-didáctica*, que siguiendo a Brousseau (2007) implica que el/la alumno/a contextualice sus conocimientos, para poder así generar sus propias apreciaciones en torno a buscar soluciones óptimas sobre un problema matemático.

Dentro de las situaciones a-didácticas, se encuentra la noción de "*variable de una situación matemática*", que se define como cambios en la decisión que toma un/una alumno/a a la hora de poner en juego ciertas ideas para resolver un problema de carácter matemático de forma óptima. Sin embargo, una *variable de una situación a-didáctica* se entiende como *variable didáctica* si esta última, por medio de la intervención y manipulación que el profesor hace de la situación, genera ese cambio de "estrategia" en el alumno, dando como resultado de esta intervención llegar al saber matemático deseado.

De esta forma, Chevallard plantea que, "la modificación de los valores de las variables didácticas de esta situación a-didáctica permite engendrar un *tipo de problema* a los que corresponden *diferentes técnicas o estrategias de resolución* (…) donde *aprender un conocimiento matemático* significa *adaptarse a una situación a-didáctica específica de dicho conocimiento*, lo que se manifiesta mediante un cambio de estrategia del jugador (…)" (Chevallard. 1997: 216).

Bajo estas consideraciones, Brousseau plantea el término de *situación fundamental*, el cual se desarrolla principalmente bajo la lógica de que "cada conocimiento puede caracterizarse por una o más situaciones a-didácticas (…)" (Brousseau. 1986: 14); esto se orienta principalmente en la forma en que se gesta la construcción de un conocimiento matemático que puede adquirir un/una alumno/a relacionado con el enfrentamiento que él/ella ejecuta en cada problema presentado en una situación a-didáctica, ya que, dentro del contexto local de una sala de clases y bajo la relación explícita entre profesor/a y alumno/a, no siempre éste podrá resolver exitosamente una situación a-didáctica, de esta manera el/la profesor/a deberá generar, con fines didácticos, una o varias situaciones a-didácticas que estén en simetría con el alumno, solo de esta manera se podrá adquirir el conocimiento enseñado, según Brousseau (2007).

Además, Brousseau postula y advierte que “El alumno no distingue al principio, en la situación que vive, lo que es de naturaleza a-didáctica y lo que es de origen didáctico. La situación a-didáctica final de referencia, la que caracteriza el saber, puede estudiarse de forma teórica. Pero en la situación didáctica, tanto para el maestro como para el alumno, es una especie de ideal hacia el que se trata de converger: el enseñante debe sin cesar ayudar al alumno a despojar en cuanto sea posible la situación de todos los artificios didácticos para dejarle el conocimiento personal y objetivo” (Brousseau. 1986:14-15).

3.1.1.- Fases de una situación a-didáctica.

Brousseau en el desarrollo de las situaciones a-didácticas postula un esquema teórico que permite analizar las situaciones en que se ve envuelto un estudiante para la construcción del saber matemático, este desarrollo se sustenta mediante cuatro ejes fundamentales, los cuales son: *Situación de Acción, Formulación, Validación e Institucionalización:*

- ***Situación a-didáctica de Acción***: En este punto se expone a el/la alumno/a a un problema, donde no existe intervención del profesor/a, sólo se desarrolla una interacción implícita entre el/la alumno/a y la situación, con lo que el estudiante debe ser capaz de buscar, organizar y plantear diversas acciones de carácter intelectual que le permitan encontrar la solución más óptima al problema, a su vez, en esa constante búsqueda de planteamientos aparecen lo que Chevallard llama *nociones protomatemáticas,* que son definidas como “*nociones-herramienta* de la actividad matemática: “normalmente” no son *objetos de estudio* para el matemático” (Chevallard. 1991:58), es decir, concepciones abstractas que tiene un/a alumno/a y que muchas veces las aplica para resolver un problema.
- ***Situación a-didáctica de Formulación*:** En este punto sólo interviene el/la alumno/a bajo un escenario explícito, donde éste tiene que ser capaz de expresar conceptos bajo secuencias lógicas a sus pares, que le permitan argumentar sus primeras conjeturas sobre el problema planteado. Aquí, se desarrollan lo que Chevallard nombra como *nociones de tipo paramatemáticas,* que las define como concepciones “que se utilizan

conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos que sirven para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas” (Chevallard. 1997: 223).

- ***Situación a-didáctica de Validación:*** Al igual que el punto anterior, sólo interviene el/la alumno/a bajo un modelo explícito, mas con la diferencia que ya existe una posible solución, pero ésta tiene que ser justificada bajo demostraciones de carácter empírica y bajo un ordenamiento sistemático de las ideas, ya que de otra manera, los /las alumnos/as tienen que argumentar la validez de sus resultados para así generar un convencimiento de sus pares. En esta situación aparece lo que Chevallard llama *nociones de tipo matemáticas,* que se refieren principalmente a “objetos de conocimiento construido, susceptibles de ser enseñados y utilizados en las aplicaciones prácticas. Las nociones matemáticas son, por tanto, objeto de estudio en sí misma (…)” (Chevallard. 1997: 223).

- ***Situación a-didáctica de Institucionalización:*** En este punto participan tanto el/la alumno/a como el/la profesor/a, donde este último lleva el conocimiento que fue construyendo el estudiante en las tres etapas anteriores a una institucionalización, es decir, el profesor reconoce el aprendizaje del alumno y éste identifica, transforma y establece el conocimiento a un plano mayor permitiéndole una aceptación y validación de carácter social.

4.- Contrato didáctico

El sustento teórico de las Didácticas de las Matemáticas, como fue establecido anteriormente, se centra en la teoría constructivista del conocimiento y en los aportes de la teoría psicogenética de Jean Piaget, es por esta razón que se le da una importancia primordial a las características del trabajo del/a alumno/a en relación con el medio y su adquisición del saber, dejando un poco de lado la participación del docente en los fenómenos didácticos. Sin embargo, desde una mirada Brousseauniana, se plantea como punto de partida analizar los cambios del sistema didáctico en función de las relaciones implícitas entre profesor/a y alumno/a, haciendo referencia a la teoría de las situaciones didácticas; de esta manera, para aclarar dichas relaciones es necesario considerar ciertos tipos de contratos anteriores al didáctico.

Ahora bien, para Chevallard (1997) existe una primera instancia dentro del contexto escolar, la cual llama *contrato pedagógico*, cuya finalidad es regularizar ciertas interacciones, entre profesor/a y alumno/a, que no dependen del contenido de estudio; por otro lado, se plantea que en este tipo de contrato se "(…) precisan las obligaciones recíprocas entre alumno, sociedad y profesores" (Brousseau. 2007: 69).

Bajo estas dimensiones, el *contrato didáctico* se mantiene dentro de un contexto social marcado por las regulaciones que tiene la escuela, definiendo de esta manera el rol funcional que posee el/la alumno/a y el/la profesor/a sobre el saber matemático en el contexto escolar; es así como, "Se pasa del *contrato pedagógico* al *didáctico* cuando la relación entre dos (profesor y alumno) se convierte realmente en una relación de tres: el alumno, la obra a estudiar y el profesor como director de estudio" (Chevallard. 1997: 205), así pues el *contrato didáctico* toma un rol dinámico en la relación entre enseñanza y aprendizaje.

Por tanto, los roles que son utilizados en las situaciones didácticas se manejan bajo la lógica de explicar lo que el/la profesor/a quiere transmitir a el/la alumno/a, de esta manera se espera que el/la educando conjeture una respuesta deseada sobre el conocimiento a enseñar mediante la recuperación de conocimientos anteriores o en vías de construcción, apareciendo así la noción de "hacer matemáticas" en función de buscar y resolver nuevos problemas referidos al saber matemático a enseñar; de esta manera "El maestro debe por tanto efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la devolución de un buen problema. Si esta devolución se lleva a cabo, el alumno entra en el juego y se acaba por ganar, el aprendizaje se ha realizado" (Brousseau. 1986:15).

Ahora bien, si se considera el conocimiento como fin último de las situaciones de aprendizajes, es necesario establecer la importancia que conlleva una situación propuesta por el/la docente, es decir, una situación que se enmarque bajo la lógica en la cual el/la alumno/a se haga cargo de su propia construcción conceptual y metodológica de un saber, en donde la "respuesta inicial" de este se sustenta en estructuras de significados adquiridos por el/ella anteriormente; sin embargo, el/la alumno se da cuenta que dichos conocimientos son insuficientes para resolver exitosamente el problema planteado, generando así una acomodación de conocimientos, ya que "(…) el trabajo del docente consiste, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o modifique como respuestas a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro" (Brousseau. 1997: 66).

Por lo establecido anteriormente, se plantea la necesidad de que el/la alumno/a maneje cierta independencia sobre lo que quiere enseñar el/la profesor/a, para esto se necesita una construcción epistemológica cognitiva intencional, la cual genera un traspaso de responsabilidad del/a profesor/a al/a alumno/a en torno a la resolución y obtención de un posible resultado al problema planteado, ya que "no basta "comunicar" un problema a un alumno para que ese problema se convierta en *su* problema y se sienta el único responsable de resolverlo. Tampoco basta que el alumno acepte esa responsabilidad para que el problema que resuelve sea un problema universal, libre de presupuestos subjetivos" (Ibid: 67); de esta manera, ese "traspaso" de responsabilidad es lo que Brousseau llama *devolución.*

Por otro lado, es necesario aclarar que la relación existente entre profesor/a y alumno/a dentro del *contrato didáctico,* no es algo previamente establecido por las partes, ya que lo importante es que el/la alumno/a reconozca y dé sentido a las condiciones que lo llevarán a la adquisición de un conocimiento nuevo, es por esta razón, que el estudiante desconoce en su totalidad los procesos que lo van a llevar a generar dicho conocimiento. En este sentido, la relación existente entre el/la profesor y el/la alumno se sustenta en que éste último, como actor principal de la situación didáctica, puede o no aceptar el problema propuesto por el/la profesor/a, como también puede o no resolverlo, con lo cual el/la docente debe generar los espacios pertinentes para ayudarle y/o justificarle la elección del problema, estableciéndose de esta manera una relación netamente implícita sobre el rol que tiene el educador y el educando ; de esta manera, " Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato. Lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte de este contrato que es específica del "contenido": el conocimiento matemático buscado." (Brousseau. 1986:15).

En estas condiciones, resulta complejo detallar las responsabilidades existentes entre el/la educador/a y el/la educando, ya que el foco de análisis se centra en los acontecimientos que llevan a la ruptura del contrato didáctico; sin embargo, Brousseau analiza ciertas consecuencias de dichas responsabilidades, que se detallan en los siguientes puntos (Ibid):

- El profesor se supone que crea las condiciones suficientes para la apropiación de conocimientos y debe "reconocer esta apropiación cuando se produce.

- Se supone que el alumno puede satisfacer estas condiciones.
- La relación didáctica debe “continuar” cuesto lo que cueste.
- El profesor asegura así las adquisiciones anteriores y las condiciones nuevas dan al alumno la posibilidad de la adquisición

Cabe destacar también, que Brousseau (1986) advierte que si el/la alumno/a fracasa en la adquisición del saber matemático a enseñar, se produce un proceso en el cual éste no ha hecho lo que se esperaba y el profesor por su parte no ha realizado implícitamente lo que tenía que hacer, ya que las relaciones funcionales que tienen el/la educador y el/la educando en función de enseñar y adquirir un conocimiento matemático no se caracterizan por conocer los medios que posibilitan la construcción de saberes nuevos ni la forma en que dicho saber funciona considerando las dificultades propias que conllevan a la adquisición de un conocimiento; frente a esto se hace referencia a que “si el contrato no se establece más que sobre reglas de comportamiento del alumno o del profesor, su respeto escrupuloso condenará la relación didáctica al fracaso (…) En particular las cláusulas de ruptura y de realización del contrato no pueden ser descrita con anterioridad. El conocimiento será justamente lo que resolverá la crisis nacidas de esas rupturas que no pueden estar predefinidas” (Brousseau. 1986:16).

Es así como el *contrato didáctico* nos da las herramientas necesarias para explicar y analizar las relaciones dinámicas entre profesor/a y alumno/a en la sala de clases, identificando las características propias que surgen dentro del proceso didáctico, entiendo este como un proceso metodológico para el aprendizaje de un conocimiento matemático.

5.- Obstáculo Epistemológico

La primera aproximación en torno a la noción de obstáculo referida al proceso de enseñanza y aprendizaje sobre la construcción y adquisición de un conocimiento, se puede relacionar con lo planteado por Bachelard, ya que para él "No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad, la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones (…) se conoce contra un conocimiento anterior" (Bachelard en Brousseau. 2007:45).

Por otro lado, si se consideran como base los fundamentos teóricos de la *Teoría de las Situaciones Didácticas*, se puede abordar el análisis de los obstáculos epistemológicos en función de la construcción de conocimiento que tiene un sujeto sobre un conocimiento matemático y la capacidad mental de éste para identificar, organizar y analizar diversas situaciones que permitan la adquisición de un nuevo conocimiento sobre concepciones anteriores, ya que "se aprende en relación con un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal constituidos" (Bachelard en Soussan. 2003:39). Además, "Cuando los alumnos abordan una nueva noción, (…) ésta siempre hace referencia a conocimientos anteriores, estructurados o no, en la mente de cada uno. Esta asociación espontánea al abordar un nuevo conocimiento, debe ser, no obstante, programada y orientada durante su estructuración "(Soussan. 2003:40); de esta manera, las representaciones anteriores que tiene un/una alumno/a sobre un conocimiento, entrarán en conflicto con los nuevos conocimientos entregados por el/la profesor/a, generando como consecuencias que el/la alumno/a en la elaboración del nuevo conocimiento adquiera ciertas habilidades de razonamiento o que el nuevo conocimiento sea totalmente desarticulado, de esta manera se producirá en el/la alumno/a ciertas dificultades y errores que de una u otra manera obstaculizarán su proceso de aprendizaje.

Ahora bien, para Brousseau "Un obstáculo es un "conocimiento" (…) este conocimiento da resultados correctos o ventajas apreciables en determinado ámbito, pero se revela falso o completamente inadaptado en un ámbito nuevo o más amplio". Agrega "Un obstáculo se manifiesta a través de errores, pero esos errores en un mismo sujeto están unidos entre sí por una fuente común: una manera de conocer, una característica, coherente aunque no correcta, un "conocimiento" anterior que tuvo éxito en todo un dominio de acciones" (Brousseau. 2007:45).

Sin embargo, si se analiza la idea anterior referida a que *un obstáculo se manifiesta a través de errores,* se puede identificar en una primera instancia el trabajo de el/la profesor/a en función de la forma en que éste da a conocer el nuevo contenido, ya que es indispensable que el/la docente estructure ciertas situaciones que permitan al/la alumno/a generar una confrontación de conocimientos (anteriores y nuevos), permitiendo así la identificación, por medio de situaciones didácticas, de las dificultades que posee el/la alumno/a. Además, se debe considerar que dentro del plano cognitivo del sujeto, los obstáculos referidos no se superan inmediatamente, ya que estos están supeditados a la consolidación conceptual que realizó el/la alumno/a anteriormente.

Bajo estas consideraciones, se presentan dentro del sistema didáctico tres tipos de obstáculos, los cuales, según Brousseau (2007) son de origen *Ontogénico, Didáctico y epistemológico*; donde el obstáculo de origen Ontogénico se relaciona principalmente con las limitaciones del sujeto de carácter neurofisiológicas. Los obstáculos de origen Didáctico son aquellos que están ligados al proceso de enseñanza y aprendizaje bajo la institucionalidad del sistema educativo y los obstáculos de origen Epistemológico son aquellos que no se pueden obviar, ya que son constitutivos del conocimiento mismo.

De esta forma, se puede señalar la importancia de que el/la profesora/a genere ciertas situaciones que permitan al/la alumno/a estructurar complejas redes conceptuales que fue adquiriendo en procesos de enseñanza anteriores, ya que la consolidación de nuevos conocimientos permitirán tanto al/la alumno/a como el/la profesor/a identificar ciertos errores adquiridos anteriormente; además, permitirá la consolidación de ciertos saberes estructurados en función de la superación de los obstáculos de un contenido matemático.

En el próximo capítulo se da a conocer el Diseño Metodológico concerniente a esta investigación.

CAPITULO III:

DISEÑO METODOLÓGICO

Antes de comenzar este apartado, se hace necesario resaltar la idea antes mencionada que dice relación con que la Ingeniería Didáctica posee una metodología de la investigación propia "(…) que se ubica (…) en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna" (Artigue. 1995: 37), lo que permite incluir esta metodología particular en la metodología de investigación cualitativa como a continuación se presenta.

1.- Paradigma de la Investigación

El Paradigma Interpretativo, derivado de la fenomenología y hermenéutica, busca la esencia de las cosas, los significados, los sentidos que las personas otorgan a los fenómenos, los cuales se dan en una realidad relativa, construida a través de las interacciones sociales en la vida cotidiana. El interés está centrado en comprender a las personas desde sus propias visiones y perspectivas, trabajando con la interpretación de los significados que ellas puedan otorgar a los fenómenos, en este caso, educativos.

La presente investigación está directamente relacionada con el paradigma interpretativo, puesto que lo que se pretende lograr, es conocer las realizaciones didácticas a nivel local mediante la observación y el análisis de las secuencias de enseñanza intentando reconocer a través de los diversos significados atribuidos, la obtención del concepto del Lenguaje Algebraico.

2.- Enfoque de la Investigación

Al posicionarse dentro del paradigma interpretativo, esta investigación se enmarca dentro del enfoque cualitativo, el cual *"…utiliza un proceso interpretativo más personal en orden de comprender la realidad"* (Ruiz 2003: 12). Por su parte, Taylor y Bogdan (1998) señalan que en la investigación cualitativa es esencial apreciar la realidad tal como la experimentan los sujetos de investigación.

Desde este enfoque la información es recogida de forma flexible, con el objeto de obtener los significados que las personas otorgan frente a una situación o tema determinado, en el caso de esta investigación, para conocer la significación que los/as alumnos/as le otorgan al concepto de Lenguaje Algebraico.

Siguiendo a Stake (1998), es pertinente señalar que el estudio es de carácter instrumental, ya que los informantes se referirán a un hecho que no es parte esencial de ellos, sino a un fenómeno externo, que permite conocer la adquisición del concepto de Leguaje Algebraico.

3.- Método de Investigación

El tipo de método que será utilizado en la investigación será el “Estudio de Caso”, el cual corresponde a un estudio microsocial de una particularidad donde existen cualidades especificas. *“(…) el cometido real del estudio de casos es la particularización, no la generalización. Se toma un caso particular y se llega a conocerlo bien y no principalmente para ver en qué se diferencia de los otros, sino para ver qué es, qué hace”* (Stake 1998: 20).

Considerando a Stake (1998), es importante señalar que el estudio es de carácter intrínseco ya que se pretende conocer la significación que los/as alumnos/as le otorgan al concepto de Lenguaje Algebraico desde su propia experiencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Esta investigación a su vez, posee la característica de ser múltiple, puesto que la situación a investigar es posible de ser apreciada en diversos contextos, ya que la unidad II de Lenguaje Algebraico se estipula dentro del Marco Curricular Nacional aplicado a Primer año de enseñanza media.

4.- Técnicas de recolección de datos

Para la realización de esta investigación, se emplearán tres técnicas de recolección de datos.

En primera instancia se utilizará la Observación No Participante, puesto que ella permite la no injerencia en el desarrollo del fenómeno, examinando la realidad tal cual ocurre en la sala de clases.

Por otra parte se utilizará la Entrevista Semiestructurada (cfr. Anexo A), ya que se basa en una serie de preguntas que el investigador previamente ha definido, pero también permite la introducción de preguntas adicionales en la medida en que en la conversación surjan temas importantes para la investigación o que ayuden a aclarar mayormente las respuestas. De esta forma la Entrevista Semiestructurada permitirá recolectar información respecto de cómo los estudiantes de primer año medio perciben y usan los registros de determinados objetos matemáticos conocidos en las guías de trabajo y que están incluidos en el currículo oficial.

Finalmente y en concordancia con la metodología de la Ingeniería Didáctica se utilizarán tres Guías de Trabajo (cfr. Anexo B), cuyo fin último es recopilar, analizar e interpretar las respuestas de los/las alumnos/as que surjan de la aplicación de la situación a didáctica; dicha información será transversal para las demás fases de estudio de esta investigación.

5.- Criterios de selección de informantes

Debido a que esta investigación tiene un carácter particular que la enmarca dentro del interpretativismo, no se trabaja con muestras previamente diseñadas, sino que más bien se definen ciertas características que permiten identificar a quienes sean idóneos para la entrega de la información.

Es por ello que según lo definido en el planteamiento del problema y para efectos de esta investigación, las características necesarias de los informantes son:

1. *Alumnos/as de establecimientos educacionales que se encuentren dentro del sistema educativo formal*: La pertenencia a este sistema implica normativas establecidas por el Ministerio de Educación lo cual conlleva a que estos establecimientos educacionales se rijan por los contenidos mínimos obligatorios.

2. *Alumnos/as que se encuentren cursando Primer año de enseñanza media*: puesto que la unidad II de lenguaje algebraico que se pretende investigar, corresponde a los contenidos mínimos obligatorios para este año de Enseñanza Media.

3. *Accesibles para el investigador*: La accesibilidad implica mayor factibilidad de la investigación, tanto desde la perspectiva del tiempo, es decir, que los/as alumnos/as se encuentren desarrollando la unidad de Lenguaje Algebraico durante esta investigación, como desde la perspectiva del espacio, lo que conlleva a que los/as alumnos/as sean parte de un establecimiento educacional que se interese por un estudio de esta envergadura.

6.- Criterios de validez de la investigación

La validez corresponde, según Pérez Serrano (1998), al criterio que se determina por el razonamiento lógico que se obtiene al contrastar los datos con la realidad empírica. En consecuencia, para efectos de adquirir certeza respecto de la interpretación del estudio, se utilizarán los siguientes criterios de validez:

6.1.- Triangulación de informantes

La triangulación según Ruiz (2003), es concebida como una estrategia metodológica que permite enriquecer perspectivas que confluyen en una diana común, así la triangulación de informantes permitirá validar la información. Concordante con Ruiz, Taylor plantea que *"La triangulación suele ser concebida como un modo de protegerse de las tendencias del investigador y de confrontar y someter a control recíproco relatos de diferentes informantes"* (Taylor y Bodgan 1998: 92).

6.2.- Saturación

Se debe reunir la información que sea necesaria para avalar la veracidad de la investigación, lo cual se consigue, según Pérez (1998) *"…revisando el proceso (...) para comprobar si los resultados se mantienen".* Este criterio se ejecutará a través de la recolección de información hasta el punto en que ésta se comienza a repetir, es decir, se realizará a través de la repetición de la técnica de recolección de datos a diversos grupos hasta lograr la saturación.

6.3.- Validación Interna

La Ingeniería Didáctica se sustenta principalmente en que la validación de sus resultados, es decir, la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori es de carácter interno, ya que el investigador prestará atención a la conducta del sujeto en la medida que ésta sea relativa a la situación observada; de esta manera, "(…) esta situación y su potencial cognitivo deben ser caracterizados de antemano comparando en análisis a priori con lo observado. Esta posición de validación sólo puede tener lugar si las situaciones que involucran la ingeniería son estrictamente controladas en lo relativo a los contenidos tratados, su puesta en escena, el papel del profesor, la administración del tiempo, etc." (Farfán. 1997:14)

Dentro de la siguiente sección se explican los Análisis y Resultados de la presente investigación.

CAPITULO IV:

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Descripción de los elementos para la construcción de una Ingeniería Didáctica

1.- Fase I: Análisis preliminar

Uno de los aspectos relevantes de la Ingeniería Didáctica, es el de analizar y diagnosticar la estructura de enseñanza de un contenido matemático y la forma en que ésta influye en el aprendizaje de un/una alumno/a en función de las relaciones de carácter didácticas puestas en escena sobre dicho contenido, en el caso particular de esta investigación se contemplará en una primera instancia, y en concordancia con la metodología de la Ingeniería Didáctica, las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica, desde una perspectiva general, es decir, se ahonda en aspectos globales referidos a la unidad II de Lenguaje Algebraico. De esta manera, se pretende desarrollar una descripción en torno a la historicidad del concepto de estudio, para dar paso a la incorporación de ciertos antecedentes relacionados con la adaptación del currículo en función de los planes y programas propuestos por el MINEDUC; asimismo, durante el transcurso de la investigación se pretende articular trasversalmente y de forma sistemática las cuatro fases de la Ingeniería Didáctica planteadas en el marco de referencia.

1.1.- Dimensión epistemológica

El conocimiento matemático proviene de la apropiación de la sabiduría socialmente existente e históricamente acopiada, es un aprehender el mundo de los objetos y fenómenos de la realidad apropiados por las generaciones anteriores; sin embargo, a pesar de la desaparición de algunas civilizaciones que impulsaron todo un pensamiento lógico-deductivo, aún se puede contar con sus aportes; de ahí la importancia que surge, desde la didáctica de las matemáticas, del análisis de la dimensión epistemológica en el estudio didáctico del álgebra.

Es así como una primera aproximación en torno al desarrollo histórico-cultural de las matemáticas son el lenguaje numérico y los orígenes de la numeración, en donde se hace una primera conjetura en relación al pensamiento matemático abstracto, haciendo una diferencia al lenguaje estructurado de los seres humanos con el de los animales; por ejemplo, el Australopitecus (mono del sur), poseía un leve sentido de percepción numérica, lo cual se refleja en la capacidad de distinguir pequeñas cantidades y no confundirse con la facultad de contar, de esta forma la evolución del lenguaje para expresar ideas matemáticas, se fue articulando por medio de los signos para representar números, ya que “ (…) es mucho más fácil cortar muescas en un palo que establecer una frase bien modulada para establecer un número concreto” (Boyer. 1999:23). De esta forma diversas culturas adoptaron ciertos signos para representar los números, algunas lo hicieron haciendo referencia a su alfabeto como fueron las culturas griegas, hebreas y árabes. (Rey. 1997).

Siguiendo con este orden de ideas, el conjunto de signos representado por medio del lenguaje primitivo dio las pautas para que ciertas culturas trabajaran desde una concepción abstracta de la naturaleza a una más concreta, es decir, agrupaban elementos o cosas concretas de la forma: “dos peces o dos masas en vez de simplemente “dos” (…) para representar a todos los conjuntos de dos objetos” (Boyer. 1999:23).

Ahora bien, si se considera el periodo de la matemática prehelénica, aparecen las contribuciones al álgebra, en base a una visión más retórica[5], de las culturas babilónicas (≈2000 a.C.), y egipcias (≈1700 a.C.), donde ambos resolvieron problemas donde intervenían ecuaciones tanto lineales como cuadráticas; por ejemplo, los egipcios mediante problemas planteados en *el papiro de Rhind* en el año 1850 a.C., contribuyen al desarrollo del Lenguaje Algebraico, ya que si se observa el ejercicio número treinta y uno de dicho papiro, donde se plantea literalmente lo siguiente:

“Una cantidad, sus $\frac{2}{3}, \frac{1}{2} su \frac{1}{7}$, su totalidad asciende a 33”

Si se acude al conocimiento matemático que deberían poseer los/as estudiantes de primer año de enseñanza media, este problema podría ser resuelto realizando una simple ecuación donde se tendría que trasladar un lenguaje semántico a un lenguaje netamente matemático, obteniendo lo siguiente:

$$\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{x}{7}+x=33$$

Sin embargo, los egipcios no solamente se ocuparon de problemas de carácter aritméticos, sino más bien de problemas algebraicos, puesto que éstos “(…) no se refieren a objetos concretos y específicos como pan o cerveza, ni tampoco piden el resultado de operaciones con números conocidos, sino que piden lo equivalente a resolver ecuaciones lineales de la forma $x+ax=b$ ó $x+ax+bx=c$ *c*, donde *a, b* y *c* son números conocidos y “x” es desconocido; a este número desconocido o incógnita se le llama “*aha”* o “montón”. (Boyer. 1999:37).

[5] Según Malisani (1999), álgebra retórica se relaciona principalmente a que los enunciados y soluciones se escribían en lenguaje natural.

Por otro lado, estos aportes científicos sirvieron para que el matemático griego Diofanto de Alejandría (≈250 d.C), fuera el primero en trabajar problemas aritméticos bajo una lógica abstracta, a fin de fijar abreviaturas basándose en el alfabeto griego para indicar operaciones e incógnitas; algunos autores hablan de este período como el del álgebra sincopada[6], en donde se considera la incógnita como número.

De esta forma surgen también, desde una mirada más relacionada con el álgebra simbólica[7], los aportes del matemático Francés François Viète (1540-1603), ya que fue el primero en disponer de un sistema de notación, donde hace referencia al uso de las letras tanto en las fórmulas algebraicas como también para expresar cantidades, por ejemplo potencias e incógnitas. Además, utilizó los signos para caracterizar operaciones, en donde la "utilización de distintos tipos de letras para datos e incógnitas permitía identificar bien el objeto que se estaba trabajando. Con letras designando los datos –lo que actualmente designaríamos parámetros- se podían discutir las condiciones de existencia y unicidad de los problemas *vía* cálculo algebraico" (Sessa, 2005:59).

En virtud de lo anterior es que a continuación se presenta un cuadro referido a las "Fases de la evolución del Lenguaje Algebraico" (Malisani. 1999:25).

[6] Según Malisani (1999), álgebra sincopada se relaciona principalmente en la aparición de símbolos para abreviar la escritura de los cálculos.
[7] Según Malisani (1999), álgebra simbólica se considera como el lenguaje actual del álgebra.

Cuadro Nº1

Fases	Lenguaje Natural	Geometría	Aritmética	Ejemplos
Álgebra retórica 1	SI	-Argumentación con instrumento pre-euclídeos. -Resolución de un problema a la vez	Lenguaje de soporte procedural.	Babilonios, egipcios, chinos.
Álgebra retórica 2	SI	-Argumentación completa con instrumentos euclídeos. -Resolución de un problema a la vez	Lenguaje de soporte procedural.	Griegos clásicos: Euclides.
Álgebra sincopada 1	SI	-Resolución de un problema a la vez	Introducción de abreviaturas para la incógnita y sus potencias.	Diofanto, hindúes.
Álgebra sincopada 2	SI	-Resolución de un problema a la vez	Introducción de nombres o abreviaturas para la incógnita o sus potencias.	*Tratatto d´Algibra (*Anónimo del Siglo XIV), Árabes.
Álgebra sincopada 3	SI	-Argumentación con instrumento pre-euclídeos. -Resolución de un problema a la vez	Introducción de nombres o abreviaturas para la incógnita, sus potencias y algunas relaciones	Fibonacci, Algebristas del 1500
Álgebra sincopada 4	SI	-Argumentación con instrumento euclídeos y algebraicos. -Resolución de clases de problemas expresados mediante fórmulas	Introducción de una notación particular para la incógnita, sus potencias y algunas relaciones de uso frecuente.	Bombelli
Álgebra simbólica	NO	-Argumentación con instrumento euclídeos y algebraicos. -Resolución de clases de problemas expresados mediante fórmulas	Introducción de símbolos para la incógnita, sus potencias, los coeficientes genéricos y algunas relaciones de uso frecuente.	Vièete

Cabe señalar, que para esta investigación, la fase epistemológica no se acotará solamente al análisis del devenir histórico-cultural de la unidad de estudio, más bien apuntará a la observación de los posibles obstáculos que conlleva la adquisición del Lenguaje Algebraico en alumnos/as de Primer año Medio, dichos resultados se sustentan transversalmente en el análisis a priori y su posterior validación.

Ahora bien, al considerar brevemente un análisis en torno al devenir del concepto de Lenguaje Algebraico, es necesario identificar ciertas dificultades que podrán tener los/las alumnos/as de primer año medio del colegio Boston College en torno a la adquisición del concepto en estudio, es decir, obstáculos epistemológicos que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto ya mencionado anteriormente, considerando que ciertas dificultades que subyacen de la relación entre enseñanza y aprendizaje se asocian a los niveles semánticos y sintácticos y al nivel de abstracción y complejización que posee el Lenguaje Algebraico; además, es posible encontrar ciertos obstáculos relacionados con el desarrollo histórico del álgebra en función de su sistema simbólico y los procesos cognitivos que desarrolla un/una alumno/a para la adquisición del concepto.

En relación a lo anterior, cabe destacar que la evolución histórica del Lenguaje Algebraico permite identificar la importancia de utilizar y reconocer correctamente los signos algebraicos, generando de esta manera un desarrollo cabal sobre el pensamiento algebraico y no caer en una ambigüedad de significados que caracteriza mucho al lenguaje simbólico; de esta forma el/la alumno/a podrá contextualizar los significados referentes al lenguaje aritmético y el nuevo lenguaje representado por el álgebra, sobre la utilización de nuevas herramientas para resolver cierto tipo de problemas.

De esta manera, nos podemos encontrar con dificultades referidas a la poca comprensión, significación y manipulación del uso de símbolos y las letras tanto en problemas verbales como en expresiones algebraicas, bajo las estructuras semánticas y sintácticas; además, se podrían identificar ciertas dificultades en la transferencia del conocimiento aritmético al nuevo conocimiento entregado, el conocimiento algebraico.

Cabe destacar, que ciertas concepciones y significaciones que pueda tener un/una alumno/a en torno al concepto de Lenguaje Algebraico descansan en que "La identificación de las principales concepciones matemáticas relativas a un objeto dado, se apoyan en el estudio del desarrollo histórico y constituyen un marco de referencia, indispensable, para el análisis de las concepciones de los alumnos respecto a ese objeto" (Farfán. 1997: 24).

1.2.- Dimensión Cognitiva

Bajo la lógica cognitiva, es posible acentuar el análisis de esta investigación desde dos miradas, la primera se refiere a la "forma" en cómo se estructura la enseñanza del Lenguaje Algebraico en las escuelas y cómo el/la educador/a maneja los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de dicho tema, y la segunda se encuentra referida a las habilidades cognitivas de carácter conceptual y operacional, ya que como se plantea en el desarrollo curricular propuesto por el Ministerio de Educación (MINEDUC), se podría inferir como un primer proceso cognitivo el que el/la alumno/a identifique la aritmética como fundamento del álgebra, sustentado en las propiedades de las operaciones, estructura de problemas de carácter verbal y en las operaciones de generalización; formando de esta manera un entendimiento de los procedimientos tanto sintácticos como semánticos del Lenguaje Algebraico.

Ahora bien, si se considera un escenario más operacional referido a la abstracción que debe tener un/una alumno/a en torno a la formalización de los conceptos sobre la notación algebraica, emerge la problemática referida al lenguaje simbólico como eje central y a la habilidad de adquirir ese simbolismo matemático como propio, ya que es aquí donde se producirían obstáculos de carácter cognitivos a la hora de entender y aplicar dicho simbolismo, es decir, diferenciar y desarrollar la transición entre la operatoria aritmética y la algebraica, puesto que esta última adquiere otro significado en la matemática. En otras palabras, no es otra cosa más que adquirir un sentido concreto y específico de los símbolos que permitan dar mayor importancia y significación a la estructura del Lenguaje Algebraico, lo cual implica considerar el contexto histórico de esta unidad al momento de desarrollarla en el aula, permitiendo así la creación de nuevas estrategias de enseñanza, evitando caer en un saber transpuesto, en referencia a la transposición didáctica.

Sin embargo, "los alumnos deben aprender el Álgebra como un conjunto de competencias incluyendo la representación de las relaciones cuantitativas, como un estilo del pensamiento matemático, el pensamiento algebraico, que da cuerpo a la construcción y a la representación del modelo de regularidad, permite razonar, proyectar y conjeturar" (Chambers en Palarea. 1998:6).

Todo lo anterior describe, que el análisis de la dimensión cognitiva constituye el proceso en el cual el investigador responsable podrá describir el funcionamiento de las diversas representaciones y asimilaciones que realiza el/la alumno/a en función de las diversas redes conceptuales que aplica el/la educando para la adquisición del nuevo objeto matemático; además, permite analizar la transmisión de conocimiento que realiza el profesor vía el proceso de enseñanza, centrándose en el desarrollo cognitivo del/a alumno/a y en los obstáculos epistemológicos que impiden de una u otra manera el aprendizaje del Lenguaje Algebraico.

1.3.- Dimensión didáctica

Numerosas investigaciones han planteado, como factores influyentes, que ciertas dificultades asociadas a la poca significación del sistema simbólico del Lenguaje Algebraico, resulta de la adaptación del currículo y las estrategias metodológicas empleadas por el docente para la enseñanza de la misma en la sala de clases, es decir, relaciones inherentes a la estructura curricular de la institución , es por esta razón que se darán a conocer en este apartado los principales tópicos propuestos por el MINEDUC en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje del Lenguaje Algebraico.

Ahora bien, la revisión de los programas de estudio de primer año de educación media del sector curricular matemática del MINEDUC, en referencia a la unidad II sobre Lenguaje Algebraico, postulan como orientación didáctica que los/las alumnos/as puedan generalizar ciertas situaciones que abarquen un trabajo con números o con formas geométricas para luego, mediante el Lenguaje Algebraico, describir dichas generalizaciones, puesto que se hace referencia a que las letras toman en primera instancia un rol de número o categorías de número para luego pasar a ser variables; otro punto se centra en el álgebra como lenguaje dentro de una estructura semántica y sintáctica y su significado en relación a las operaciones aritméticas; además, se plantea la importancia de buscar ciertas regularidades en figuras que se puedan presentar en la vida diaria; de esta manera el/la alumno/a podrá encontrar un “sentido” al concepto de Lenguaje Algebraico. (MINEDUC. 1998).

En relación a este marco curricular, los programas de estudio del MINEDUC (1998), plantean una serie de aprendizajes y contenidos que debieran tener los/las alumnos/as en la escuela durante el transcurso de la unidad de Lenguaje Algebraico; los cuales son:

Tabla Nº1

Aprendizajes Esperados Unidad II "Lenguaje Algebraico"
1. Utilizan letras para representar números. Evalúan expresiones algebraicas.
2. Representan categorías de números por medio de expresiones algebraicas: Múltiplos de...; factores de...; mayores que...; números pares, etc.
3. Traducen al lenguaje algebraico relaciones cuantitativas en las que utilizan letras como incógnita. Plantean y resuelven problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.
4. Conjeturan y generalizan acerca de patrones numéricos o geométricos utilizando expresiones literales.
5. Generalizan la notación de potencias y utilizan procedimientos convencionales para el cálculo de multiplicación y división de potencias.
6. Suman y restan monomios, binomios y polinomios. Reducen términos semejantes y aplican la convención de uso de paréntesis.
7. Conjeturan y demuestran propiedades numéricas asociadas a múltiplos, factores y divisibilidad.
8. Resuelven ecuaciones con coeficientes numéricos y literales. Analizan la existencia de sus soluciones.

Tabla Nº2

Contenidos Unidad II "Lenguaje Algebraico"
Sentido, notación y uso de las letras en el lenguaje algebraico.
Potencias de base positiva y exponente entero. Multiplicación de potencias.
Operatoria algebraica. Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis. Reducción de términos semejantes. Sintaxis del lenguaje algebraico.
Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad.
Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita. Análisis de los datos, las soluciones y su pertinencia.
Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

2.- Fase II: Diseño de una situación didáctica y su análisis *a priori*

Si se considera el análisis a priori como una fase primordial de la investigación, en donde sus resultados permiten generar una mejor organización del objeto matemático estudiado, y posteriormente realizar una confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, resulta necesario acentuar que el diseño de las situaciones didácticas para la presente investigación contempló, en primer lugar, la observación sistemática de seis clases llevadas a cabo por un profesor de matemáticas al primer año medio "A" del colegio Boston College; de dicha observación se desprende lo siguiente: La gestión de la clase por parte del docente, la aparición de algunas nociones referidas al contrato didáctico como también a la transposición didáctica, el tratamiento de tópicos principales y la aplicación práctica que se le dará al contenido de Lenguaje Algebraico, como también a la organización y orientación de la clase en torno a las guías de estudio entregadas por el docente y textos utilizados en el transcurso de la unidad.

Además y en concordancia con los elementos expuestos anteriormente se diseñaron, por parte del investigador responsable, tres situaciones a-didácticas traducidas en "Guías de Trabajo", con el fin de estudiar y analizar los diferentes registros, respuestas y estrategias utilizadas por los/las alumnos/as de primer año medio del colegio Boston College ante diversos problemas propuestos, para poder así obtener información de ciertas habilidades de carácter conceptual y operacional adquiridas por ellos/as durante el transcurso de la secuencia de enseñanza en la cual se desarrolló la unidad II de Lenguaje Algebraico; es decir, se pretende articular la información en torno a lo expuesto tanto en la dimensión epistemológica como la cognitiva, ya que la resolución de las guías de trabajo por parte de los/las alumnos/as podrá permitir observar las posibles apariciones de ciertos obstáculos tanto epistemológicos, didácticos y/o ontogénicos, es decir, obstáculos que se manifiestan de manera inherente al concepto de Lenguaje Algebraico en función de su comprensión de la estructura semántica y sintáctica, como también a obstáculos presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje que se establecen en el proceso didáctico, asimismo se espera observar las concepciones de los/las alumnos/as que subyacen del tratamiento que realiza el docente en relación al contenido matemático que va a ser enseñado, visualizando la estructura de la enseñanza del Lenguaje Algebraico en el aula observada, es decir, la interacción existente entre el docente y el/la alumno/a en torno al saber, bajo la orientación teórica del contrato didáctico.

Sin embargo, resulta necesario explicitar que la confección de las guías de trabajo, se relaciona íntimamente con las observaciones realizadas, es decir, que las aplicaciones de las situaciones a-didácticas se adaptan incorporando exclusivamente los contenidos expuestos por el profesor en el transcurso de la unidad (cfr. Tabla Nº3); de esta manera, el investigador interviene en la aplicación del instrumento en tres ocasiones, las cuales se condicionan a la indagación y análisis de la información que se desprende de la resolución de dicho instrumento metodológico, en torno visualizar las estrategias implicadas en la resolución de problemas y obstáculos presentes en la significación del concepto de Lenguaje Algebraico.

Por otro lado, cabe señalar nuevamente que para complementar el diseño de las situaciones a-didácticas se llevó a cabo una entrevista semiestructurada con preguntas predefinidas que pretendían ahondar sobre aspectos relevantes del desarrollo de las guías de trabajo realizadas por los/las alumnos/as; dichas entrevistas quedaron registradas mediante formato auditivo y escrito

En consecuencia, para el diseño de las guías de trabajo se consideraron los siguientes enfoques curriculares, planteados como objetivos en cada actividad la cual permiten articular lo planteado anteriormente en la dimensión didáctica:

- Utilizan letras para representar números. Evalúan expresiones algebraicas.
- Traducen al Lenguaje Algebraico relaciones cuantitativas en las que utilizan letras como incógnita. Plantean y resuelven problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Conjeturan y generalizan acerca de patrones numéricos o geométricos utilizando expresiones literales.
- Suman y restan monomios, binomios y polinomios. Reducen términos semejantes y aplican la convención de uso de paréntesis.
- Resuelven ecuaciones con coeficientes numéricos y literales. Analizan la existencia de sus soluciones.

A continuación se presenta la Tabla Nº3, que contempla, como se mencionó anteriormente, las observaciones realizadas a la secuencia de enseñanza y su posterior análisis con las guías de trabajo, en la cual se distinguen solamente los contenidos que abordó el profesor durante el desarrollo de la unidad de estudio; sin embargo, los aprendizajes esperados que no fueron concebidos por el docente, se explicitan como “NO SE OBSERVA”.

Tabla Nº3

Aprendizajes Esperados y Actividades relacionadas con la Unidad II “Lenguaje Algebraico”	
Aprendizajes Esperados (MINEDUC)	Contenidos Guías de trabajo
1. Utilizan letras para representar números. Evalúan expresiones algebraicas	Guía de trabajo 1 Guía de trabajo 2
2. Representan categorías de números por medio de expresiones algebraicas: Múltiplos de...; factores de...; mayores que...; números pares, etc.	NO SE OBSERVA
3. Traducen al lenguaje algebraico relaciones cuantitativas en las que utilizan letras como incógnita. Plantean y resuelven problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.	Guía de trabajo 1 Guía de trabajo 3
4. Conjeturan y generalizan acerca de patrones numéricos o geométricos utilizando expresiones literales.	Guía de trabajo 3
5. Generalizan la notación de potencias y utilizan procedimientos convencionales para el cálculo de multiplicación y división de potencias.	NO SE OBSERVA
6. Reducen términos semejantes y aplican la convención de uso de paréntesis.	Guía de trabajo 2
7. Conjeturan y demuestran propiedades numéricas asociadas a múltiplos, factores y divisibilidad.	NO SE OBSERVA
8. Resuelven ecuaciones con coeficientes numéricos y literales. Analizan la existencia de sus soluciones.	Guía de trabajo 1

2.1.- Análisis *a priori*

En este apartado se pretende realizar un análisis a priori en función de la manera en que el profesor debería aplicar ciertas herramientas metodológicas y didácticas en relación a la transmisión del saber y la puesta en escena en la sala de clases del contenido de Lenguaje Algebraico; para esto se espera, en una primera instancia, que el profesor considere las recomendaciones pedagógicas que propone el MINEDUC como también las recomendaciones provistas por el texto de estudio de primer año medio, lo cual permitiría que el/la alumno/a realice una construcción coherente y significativa de los conceptos matemáticos expuestos.

De esta manera se espera que el profesor realice una organización de actividades que incorporen aspectos significativos para el/la alumno/a, es decir, la organización de ciertas situaciones considerando el conocimiento matemático adquiridos por ellos/as anteriormente y posibles dificultades que se pueden presentar en las estrategias puestas en juego por los/las alumnos en la resolución de problemas.

Lo anterior implica, y se espera, que el profesor realice la enseñanza de la unidad II de Lenguaje Algebraico ajustándose a los planes y programas propuestos por el MINEDUC y al texto de estudio entregado por dicha institución; para esto se espera que le profesor realice lo siguiente:

- Desarrollar en el/la alumno/a la capacidad de entender e interpretar la formalización de la escritura simbólica del álgebra, en el sentido de manejar ciertas concepciones referidas al paso del conocimiento aritmético al conocimiento algebraico, como también manejar ciertos elementos matemáticos referidos a los procesos de generalización en el sentido de que el álgebra requiere un mayor nivel de abstracción.

- Desarrollar un conocimiento epistemológico del Lenguaje Algebraico, es decir, generar un espacio de conversación con los/las alumnos/as sobre la evolución en la historia de la matemática del Lenguaje Algebraico que permitan una familiarización del concepto.

- Generar actividades donde la utilización de letras representen números o categorías de número, para esto se espera que el profesor <u>no</u> genere en los/las alumnos/as una construcción simbólica del Lenguaje Algebraico desprovista de significado, por lo que sería necesario que se propongan variados ejemplos referidos a explicar que el Lenguaje Algebraico está presente en otras áreas disciplinarias, como en la física, la biología, la química, dando a conocer que ciertas fórmulas conocidas universalmente se expresan mediante el Lenguaje Algebraico. De esta manera se espera que el profesor evite el trabajar ciertas expresiones algebraicas de forma mecánica. En consecuencia, se deberían presentar algunos ejemplos como los siguientes:

$$E = mc^2, \quad V = \frac{d}{t}, \quad A = \frac{b \bullet h}{2}, \text{ etc.}$$

- Precisar la importancia de la estructura sintáctica del Lenguaje Algebraico, para esto sería necesario que el profesor genere actividades donde los/las alumnos/as puedan traducir enunciados verbales al Lenguaje Algebraico trabajando cierta nomenclatura básica de tal concepto referida a la cuarta parte de…, el doble de…, el cuadrado de…el cociente de…, etc.

- Por otro lado, se espera que el profesor incentive en los/las alumnos la formación del sentido algebraico mediante la estructura semántica y sintáctica de este, referida a la generalización de la operatoria aritmética mediante ejemplos de la vida cotidiana, como también se debería visualizar mediante expresiones algebraicas la regularidad de ciertos patrones numéricos y geométricos presentes en la matemática. Además, el profesor debería involucrar ciertos ejemplos de carácter verbal donde el/la alumno/a le de sentido el trabajar, mediante una ecuación, a las letras como variable generando de esta manera la importancia de una construcción del lenguaje algebraico en función de expresar simbólicamente la generalización de ciertos problemas y sus soluciones

Ahora bien, en una segunda parte del análisis a priori se pretende explorar, mediante guías de trabajo las estrategias puestas en juego por los/las alumnos/as en la resolución de diversos problemas como también los obstáculos que pudieran aparecer en virtud de dichas respuestas.

A continuación, se mostrarán las secuencias de las guías de trabajo aplicadas a los/las alumnos/as de primer año medio del colegio Boston College, dando a conocer los principales propósitos que sustentan los objetivos de cada actividad diseñada.

2.2.- Análisis *a priori* “Guía de trabajo Nº1”.

La “Guía de Trabajo 1” (cfr. Anexo B), se elabora abordando cinco problemas, con el fin último de recabar información sobre habilidades tantos conceptuales como operacionales del/a alumno/a, en donde los contenidos tuvieron como referencia dos objetivos fundamentales: (i) Traducir del lenguaje natural al Lenguaje Algebraico y viceversa (ii) Resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita. Además, la organización de las preguntas se orienta principalmente a la introducción del uso del Lenguaje Algebraico, fundamentado en las nociones que la mayoría de los/las alumnos/as manejan respecto de la unidad, debido a cierta familiaridad de aprendizajes que se han adquirido con anterioridad y que permiten abordar la unidad de Lenguaje Algebraico.

En relación a lo anterior, las preguntas se estructuran de la siguiente manera:

Pregunta Nº1:

Expresa en lenguaje algebraico lo siguiente:

- Un número disminuido en doce equivale al triple del número aumentado en ocho.
- La raíz cuadrada de un número
- La suma de los cuadrados de dos números
- La suma de tres números consecutivos equivale a quince
- El antecesor de un número.

Pregunta Nº2:

Traduzca del lenguaje algebraico al lenguaje natural lo siguiente:

- $3x+\frac{x}{4}$
- $x-1$, x, $x+1$
- x^3-2x
- $\frac{a-b}{2}$

Para responder las preguntas número uno y número dos, los/las alumnos/as deberían tener ciertas competencias que les permitirían *abordar el problema*, dichas competencias se observan en la traducción del lenguaje natural al algebraico y viceversa, como también la generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos, es decir, reconocer el Lenguaje Algebraico en su forma sintáctica en la aplicación de la notación algebraica referida a las letras como cantidad desconocida y número generalizado.

Por otro lado, los/las alumnos/as deberían tener ciertas competencias que le permitan *resolver correctamente los problemas* planteados; para esto, el/la alumno/a deberá reconocer ciertas herramientas conceptuales asociadas a palabras de "uso común" que van tomando cierto tecnicismo a la hora de trabajar la traducción del lenguaje verbal al algebraico, algunos de estos aspectos referidos al uso de cierta notación son:

- Adición: Sumar, aumentar, más, incrementar, etc.
- Sustracción: Diferencia, menos, disminuir, etc.
- Multiplicación: Veces, por, doble, triple, etc.
- División: entre, cociente, razón, mitad, quinta parte, etc.

En relación a lo anteriormente escrito, se espera que la mayor parte de los/las alumnos/as traduzcan el enunciado de un lenguaje verbal a un Lenguaje Algebraico bajo el reconocimiento y comprensión del significado de la estructura sintáctica de este último, es decir, que los/las alumnos/as sean capaces de concebir las letras, en una primera instancia, como número.

Consecuentemente, se hace necesario analizar las posibles respuestas que pudieran tener los/las alumnos/as referidas a las guía de trabajo 1.

Para la pregunta número uno, se podría esperar la aparición de ciertas dificultades presentes en la poca comprensión y manipulación de la escritura simbólica en su función sintáctica del Lenguaje Algebraico, es decir, dificultades presentes en la significación de los símbolos y las letras referidos a la traducción del lenguaje verbal al algebraico, es decir, el paso del álgebra sincopada a la simbólica; como por ejemplo:

Un número disminuido en doce equivale al triple del número aumentado en ocho*;* en este caso particular se podría manifestar un error en la forma de aplicar y visualizar la notación algebraica referida a lo siguiente, el signo menos (-) con la palabra *disminuir,* como también el signo igual (=) y más (+) con las palabras *equivale y aumentado* respectivamente. De esta manera, se espera que los/las alumnos/as traduzcan el enunciado de la siguiente manera:

$$p-12=3p+8$$

- ***La raíz cuadrado de un número;*** en torno a este enunciado se podrían esperar algunas respuestas referidas a considerar lo siguiente:

  $\sqrt{x^2}$, así como también, podrían articular el enunciado de la siguiente manera: $\sqrt{x}$

- ***La suma de los cuadrados de dos números****;* en este caso se podría esperar que los/las alumnos/as no interpreten correctamente el enunciado verbal referidos a *…dos números,* apelando a que son dos números iguales, como también podrían mostrar su confusión al usar exponente por coeficiente, es decir, la palabra *cuadrado* con "*el doble";* de esta manera las posibles respuestas podrían condicionarse a:

  $x^2 + x^2$

  $2x+2y$

  $2x + 2x$

  $(x + y)^2$

  En función de lo anterior, se esperaría también que algunos/as alumnos/as traduzcan el enunciado a la siguiente expresión algebraica:

  $x^2 + y^2$

- ***La suma de tres números consecutivos equivale a quince****,* en este caso se podría esperar que los/las alumnos/as no identifiquen una adecuada interpretación en un plano algebraico en el contexto de la significación de las letras como número, es decir, errores presentes en la caracterización de la operatoria aritmética, desprendiéndose posibles respuestas como por ejemplo:

  $x+x+x=15$

  $a+b+c=15$

  $1x+2x+3x=15$, *etc.*

  Por otro lado, se podría esperar que cierto grupo de alumnos/as reconozcan tres números consecutivos como:

  $a+a+1+a+2=15$

  $a-1+a+a+1=15$

  entre otros

  Además, se podría esperar que los/las alumnos/as realicen un cálculo "mental" buscando tres números que sumados den quince, es decir, no elaboran un simbolismo algebraico en su fase sintáctica, apoyándose solamente en un lenguaje aritmético en la cual participan números y operaciones.

- ***El antecesor de un número;*** se podría esperar en esta pregunta, que los/las alumnos/as identifiquen el antecesor de un número como un número negativo, es decir, que la letra representa un número positivo y el antecesor un sigo negativo (-). Por ejemplo, - y
  Se espera además, que los/las alumnos identifiquen el antecesor de un número como:
  $z-1$

  No contesta

Ahora bien, para la pregunta número dos de la "Guía de trabajo Nº1, en la cual se les pedía a los/las alumnos/as realizar una traducción del Lenguaje Algebraico al natural, se podrían esperar las siguientes respuestas:

- $3x+\frac{x}{4}$, x^3-2x; en estos casos, ciertas preguntas pueden estar ligadas a la poca significación y comprensión que subyacen al no considerar la letra como número generalizado, así, algunos/as alumnos/as podrían traducir la primera expresión como *el triple de x más x dividido en cuatro;* en el caso de la segunda expresión se podría esperar la siguiente traducción: *x elevado a tres menos el doble de x.*
  Sin embargo, algunos/as alumnos/as podrían identificar ciertas palabras referidas al simbolismo del Lenguaje Algebraico, realizando las siguientes traducciones para la primera y segunda expresión respectivamente: *el triple de un número aumentado en su cuarta parte, el cubo de un número menos el doble del mismo número*

  $\frac{a-b}{2}$; En este caso, se podría esperar que algunos/as alumnos/as realizaran la siguiente traducción: *a menos b divido en dos.*
  Por otro lado, se podría esperar que algunos/as alumnos/as realizaran la siguiente traducción: *la mitad de la diferencia de dos números cualquiera.*

  No contesta.

En cuanto a la pregunta número tres de la “Guía de Trabajo Nº1”, se tiene lo siguiente:

¿Qué representa p en la siguiente ecuación?

(p+1) + (p+2) + (p+3) = 1500.

En el caso de esta pregunta se espera que los/las alumnos/as tengan un nivel de comprensión de carácter conceptual referido al enunciado. Además, se espera que los/las alumnos/as generen una abstracción que les permita reconocer, representar y dar sentido al uso de las letras, evitando un desarrollo mecánico sin reconocimiento ni significación de las letras en el álgebra; de esta manera, algunas de las posibles respuestas de los/las alumnos/as podrían ser las siguientes:

- Resuelven la ecuación y calculan el valor de *p;* ya que en este caso particular los/las alumnos/as podrían actuar de forma mecánica y autómata en función de resolver la ecuación, en contraposición con lo planteado por el enunciado en el cual se hace alusión a *qué representa p.* Lo anterior cobra sustento en relación al contrato didáctico, ya que se manifiesta la aplicación de técnicas por sobre “pensar el problema”.

- Sin resolver la ecuación podrían responder que *p* representa tres números consecutivos; lo anterior resulta de que los/las alumnos/as atribuyen que p+1, p+2, p+3 corresponde a tres números consecutivos, pudiendo hacer alusión a lo expuesto por el docente al desarrollar ese tipo de problemas, generando una tendencia a generalizar coincidencias de manera inadecuada, lo cual indicaría que los alumnos/as no consideran que las letras ,en álgebra, pueden ir variando de significado en función de los problemas que se presentan.

- Podrían indicar que *p* es un número o una incógnita; siendo que además se puede considerar a las variables como número generalizado-la cual puede tomar distintos valores-, incógnita –la letra puede tomar un rango de valores no especificados, ya que se espera una comprensión que permita integrar dichas apreciaciones como parte del objeto matemático
- No contesta

Ahora bien, en relación a la pregunta número cuatro se tiene lo siguiente:

Diego y Patricio tienen entre los dos 57 bolitas y Patricio tiene 11 más que Diego, ¿cuántas bolitas tiene cada uno?

En términos generales, para esta pregunta los/las alumnos/as deberían manejar ciertas habilidades de carácter operacional y conceptual que les permitan identificar variables y estructurar expresiones algebraicas presentes en enunciados verbales, es decir, dar sentido y significación a las letras como variable. Asimismo, para resolver correctamente la pregunta propuesta el/la alumno/a deberá percibir con la lectura del enunciado la traducción de éste a un Lenguaje Algebraico, de manera precedente el/la alumno/a tendrá que plantear y resolver el problema mediante el uso de una ecuación de primer grado. Sin embargo, los/las alumnos/as podrían abordar la pregunta de las siguientes formas:

- Unas respuestas pueden sustentarse mediante ensayo y error, buscando los números de forma aritmética para que cumplan con el enunciado.

- Algunos/as alumnos/as pueden establecer de manera equivocada las variables puestas en juego por el problema, ya que podrían considerar la cantidad de bolitas de Patricio con las de Diego como:

  $P = 11D$

  $P = D - 11$

  $P = 57D - 11$

  $P + D + 11 = 57$

- Por otro lado, ciertos/as alumnos/as podrían abordar de manera correcta el planteamiento, es decir, considerarían lo siguiente:

  $P = D + 11$ ó $D = P - 11$; de esta manera, podrían articular lo siguiente:

  D + P = 57, como P = D + 11, reemplazando

  D + D + 11 = 57

  2D + 11 = 57 / -11

  2D + 11 – 11 = 57 – 11

  2D = 46 / ½

  2D * ½ = 46 * ½

  D = 23

  Entonces, como Diego tiene 23 bolitas, Patricio tendrá 34 bolitas.

- No contesta

Para la pregunta número cinco se tiene lo siguiente:

Encontrar el número cuya sexta parte más su novena parte es quince.

La pregunta número cinco mantiene cierta analogía con la pregunta anterior, en la cual los datos entregados por el problema permiten al/la alumno/a realizar una traducción directa de las expresiones algebraicas, en donde se deberá traducir de un registro verbal a uno algebraico, permitiendo así que el/la alumno/a plantee y resuelva el problema propuesto en una ecuación con una incógnita. Asimismo, se podrán esperar las siguientes respuestas referidas al planteamiento de la ecuación:

- $6x + 9x = 15$

  $6x + 9 = 15$

  $6 + 9 = 15$

  $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = 15$

  $\frac{1}{6}x + \frac{1}{9} = 15$

  $\frac{x}{6} + 9 = 15$

  $\frac{x}{6} + 9x = 15$

- Conjuntamente, se podría esperar que los/las alumnos/as realicen una correcta traducción del enunciado, pero teniendo errores del tipo aritmético a la hora de resolver la ecuación, es decir, no dominan las operaciones con fracciones. Por ejemplo:

  $\frac{x}{6} + \frac{x}{9} = 15 \rightarrow \frac{x+x}{6+9} = 15$

  $\frac{x}{6} + \frac{x}{9} = 15 \rightarrow \frac{x \bullet x}{6 \bullet 9} = 15$

- También podría ser que los/las alumnos/as buscaran mediante ensayo y error dos números que divididos por 6 y por 9 respectivamente de como resultado quince.

- Igualmente, existe la posibilidad de que los/las alumnos/as respondieran la pregunta planteada de la siguiente manera:

$$\frac{c}{6}+\frac{c}{9}=15$$

$$\frac{9c+6c}{54}=15/\bullet 54$$

$$15c=810/\frac{1}{15}$$

$$c=54$$

Entonces, el número buscado es 54

- No contesta

2.3.- Análisis *a priori* "Guía de trabajo Nº2".

En cuanto a la "Guía de trabajo 2" (cfr. Anexo B), cabe destacar que el diseño de dicha actividad se sustenta principalmente en recabar información referida al dominio operatorio y conceptual puestos en juego por los/las alumnos/as sobre la manipulación de ciertos procedimientos algebraicos; asimismo, y en correspondencia con los objetivos planteados en la actividad, los/las alumnos/as deberán reducir términos semejantes, evaluar expresiones algebraicas, determinar el grado y la clasificación de expresiones algebraicas; además, deberán aplicar el uso correcto de paréntesis en expresiones algebraicas. De manera más concreta, se tiene lo siguiente:

Para la pregunta uno, se les pide a los/las alumnos/as reducir términos semejantes para las siguientes expresiones algebraicas:

- $2dt+3p^3-7td+9t^5$

  $2ab-3b+2a-ba-4a$

  $52q-37q+16r-28r$

En relación a lo anterior, los/las alumnos/as deberían identificar, en una primera instancia, que dos términos son semejantes si sus factores literales son iguales. Asimismo, se podría esperar algunas respuestas de los/las alumnos/as tales como:

- $2dt+3p^3-7td+9t^5$,

  $2ab-3b+2a-ba-4a$, en estos casos está la opción de que no identifiquen los factores literales comunes, es decir, no consideran que ***dt*** es igual que ***td,*** como también no distinguen que ***ab*** es igual a ***ba***

- Por otro lado, se podría esperar que sumen o resten los coeficientes numéricos pero que multipliquen los factores literales iguales, es decir:

  $2dt+3p^3-7td+9t^5 \rightarrow 4d^2t^8+3p^3$

- Al mismo tiempo, se presentaría la posibilidad de que algunos/as alumnos/as sumen o resten todos los coeficientes numéricos y conservan el factor literal común, es decir:

  $2ab-3b+2a-ba-4a \rightarrow ab-2a-3b$

  $2dt+3p^3-7td+9t^5 \rightarrow -5dt+3p^3+9t^5$

  $52q-37q+16r-28r \rightarrow 15q-12r$

- También, se podría considerar que algunos/as alumnos/as aborden las preguntas planteadas de la siguiente manera:

  $2dt+3p^3-7td+9t^5 = -5dt+3p^3+9t^5$

  $2ab-3b+2a-ba-4a = ab-2a-3b$

  $52q-37q+16r-28r = 15q-12r$

- No contesta

Para la pregunta número dos, se mantiene cierta similitud con la pregunta anterior, referida al reconocer y reducir términos semejantes. Sin embargo, se enfocará el análisis en torno al desarrollo operacional de los ejercicios planteados en función de la sustitución de valores numéricos a las expresiones algebraicas. De esta manera, se les pide a los/las alumnos/as lo siguiente:

En las siguientes expresiones algebraicas reduce los términos semejantes y luego reemplaza en cada una: a = 2 y b= 7

- $3a^2-8a^2b-7a^2b+3a^2b$

  $\frac{2}{7}b-\frac{1}{5}b^2+\frac{1}{14}b$

  $5a^2-2ba-7a^2+4ab$

Las posibles respuestas de los/las alumnos frente a la pregunta, pueden centrarse en obstáculos referidos al proceso y cálculos utilizados para resolver los ejercicios; como también el no considerar la prioridad de algunas operaciones, es decir:

- $a^2 - 8a^2b - 7a^2b + 3a^2b = 3 \bullet 2^2 - 8 \bullet 2^2 \bullet 7 - 7 \bullet 2^2 \bullet 7 + 3 \bullet 2^2 \bullet 7$

$$= 6^2 - 16^2 \bullet 0 \bullet 14^2 + 10 \bullet 14^2$$

- En el siguiente caso, $\frac{2}{7}b - \frac{1}{5}b^2 + \frac{1}{14}b$, podría ser que algunas respuestas se relacionen con lo siguiente: Multiplican tanto el numerador como el denominador con el valor a reemplazar, es decir:

$$\frac{2}{7}b - \frac{1}{5}b^2 + \frac{1}{14}b = \frac{2}{7} \bullet 7 - \frac{1}{5} \bullet 7^2 + \frac{1}{14} \bullet 7$$

$$= \frac{14}{49} - \frac{49}{245} + \frac{4}{98}$$

Respecto de la pregunta número tres, se pide a los/las alumnos/as ***determinar el grado y la clasificación de las siguientes expresiones algebraicas:***

- $\frac{x^2 + y^3 - z^4}{2}$

  $a^2 - b^3 + c^4 - a^2b^3c^4$

  $(\frac{3}{4}x)^2 + \sqrt{5}$

Es importante destacar que el/la alumno/a debiese manejar ciertos conceptos referidos a que el grado de un término algebraico es la suma de los exponentes de su factor literal y que el grado de una expresión algebraica es el mayor de los grados entre sus términos. Además, debería reconocer la clasificación de las expresiones algebraicas según el número de términos de ésta, es decir:

- Monomio: tiene un solo término
- Binomio: tiene dos términos
- Trinomio: tiene tres términos
- Polinomio: tiene cuatro o más términos.

En función de lo anterior, se aguardarían las siguientes respuestas por parte de los/las alumnos/as:

- Para la expresión $\frac{x^2 + y^3 - z^4}{2}$, algunos/as alumnos/as no identificarían que una expresión algebraica está separada por una o más operaciones matemáticas, clasificando la expresión algebraica como monomio; asimismo, podrán considerar que el grado de la expresión es nueve.

- $a^2 - b^3 + c^4 - a^2b^3c^4$; sobre esta expresión algebraica algunos/as alumnos/as podrían sumar todos los exponentes indicando que el grado de la expresión es dieciocho.

- $(\frac{3}{4}x)^2 + \sqrt{5}$; en esta expresión algunos/as alumnos/as reconocerían la expresión como un binomio de grado dos.

Para la pregunta cuatro, se podría suponer que los/las alumnos/as utilicen de manera incorrecta los paréntesis, es decir, no consideren que si hay un signo negativo (-) que antecede a un paréntesis se cambian todos los signos de los términos que aparecen dentro del paréntesis. Por ejemplo:

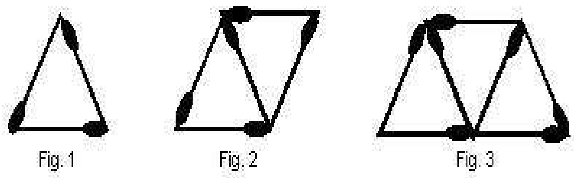
- $a^2 - (2a^2 + a^2 + 2a^2) \rightarrow a^2 - 2a^2 + a^2 + 2a^2$

2.4.- Análisis *a priori* "Guía de trabajo Nº3".

Acerca de la "guía de trabajo 3" (cfr. Anexo B), se plantearon como objetivos de la actividad traducir al Lenguaje Algebraico relaciones cuantitativas; como también realizar generalizaciones de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos; todo lo anterior descansa bajo los fundamentos de la importancia de utilizar correctamente la notación algebraica como una herramienta que permite al/la alumno/a la resolución de ciertos problemas en función de la formulación y generalización, ya que esta última es fundamental para la abstracción en el desarrollo, comprensión y significación del simbolismo matemático; de esta manera y en concordancia con el análisis a priori, existirían las siguientes posibles respuestas por parte de los/las alumnos/as:

Para la pregunta número uno, se solicita a los/las alumnos/as lo siguiente:

Observa bien la figura:



a) Dibuja la figura 4.
b) Dibuja la figura 8
c) ¿Cuántos fósforos se usaron en la figura 1, 2, 3 y 4?
d) Encuentra una fórmula para la figura **n.**

En relación a esta pregunta, se podría esperar que algunos/as alumnos/as no reconozcan ni identifiquen el patrón geométrico de la figura, es decir, no reconocen el primer término de la sucesión y su diferencia constante con las otras figuras, como también se podría esperar que no consideren el uso de las letras y expresiones algebraicas para simbolizar la fórmula bajo un contexto de generalización; asimismo de podrán esperar las siguientes respuestas, tanto correctas como incorrectas, para la fórmula:

- $n+2$
  $2(n+1)$
  $2n+2$
  $2n+1$

Para la pregunta número dos, se tiene lo siguiente:

Explicar por qué si se eligen dos números cualesquiera que sumen 3.000 y se realizan con ellos las siguientes cuentas el resultado que se obtiene es siempre 21.049. **Explica tu respuesta**

1) Multiplicar los dos números elegidos.
2) Ahora, tienen que sumar 7 a cada uno de los números elegidos y multiplicar los nuevos números obtenidos
3) Luego, tienen que restar el resultado obtenido en **b)** menos el resultado obtenido en **a)**.

En relación a esta pregunta, se podrían dar las siguientes opciones de respuestas:

- Algunos/as alumnos/as realizarían y encontrarían mediante ejemplos numéricos que el resultado que se obtiene es 21.049.

- Otros/as alumnos/as podrán generalizar el enunciado de la siguiente forma:

$$1)\, a \bullet b$$
$$2)\, (a+7) \bullet (b+7) = a \bullet b + 7a + 7b + 49$$
$$3)\, a \bullet b + 7a + 7b + 49 - a \bullet b = 7(a+b) + 49 \,/\, reemplazando$$
$$7 \bullet (3000) + 49 = 21.049$$

3.- Fase III: Experimentación:

Este apartado pretende principalmente dar a conocer las observaciones más relevantes realizadas de las secuencias de enseñanza tanto a los/las alumnos/as de primer año medio del colegio Boston College como también determinar el nivel de profundidad en que el profesor trabaja el concepto de Lenguaje Algebraico y la aplicación de instrumentos metodológicos en el desarrollo de la unidad.

Las observaciones de las secuencias de enseñanza y la aplicación de las guías de trabajo se desarrollaron entre los meses de Abril y Mayo del año 2009, en donde la planificación de la unidad se vio constantemente interrumpida por actividades extra programáticas del colegio; es por esta razón, que la unidad de Lenguaje Algebraico se trabajó en seis clases, durante las cuales se dispuso, por parte del profesor de matemáticas, dos guías (cfr. Anexo C) abarcando diversos ejes temáticos. Cabe señalar, que dichas interrupciones repercutieron notablemente en la entrega integral de los contenidos referidos a la unidad de estudio; de esta manera, se podrían manifestar con antelación importantes consecuencias en las actividades futuras del/a alumno/a relativas a la evolución y manejo de conceptos y operatoria básica que subyacen de dicha unidad, ya que el desarrollo de los contenidos fue bastante uniforme, sin profundización de las adaptaciones curriculares propuestas por el MINEDUC empobreciendo un aprendizaje significativo; además, se podría inferir que el tratamiento regular de la información desembocará en un análisis parcial y ciertamente limitado, por parte del investigador responsable, ya que se centrarán en las peculiaridades de la metodología de enseñanza entregadas por el docente y los fenómenos didácticos que se originan en la sala de clases, todo lo anterior implicado en el proceso didáctico.

Dentro de este marco, las estructuras de las clases se orientaron en una primera instancia y con la ayuda de una guía, a introducir el Lenguaje Algebraico en su dimensión semántica, aludiendo a vocablos del tipo: *el doble de…, el triple de…el antecesor de…, el sucesor de…, un número aumentado en…, un número disminuido en…, el producto de un número…, el cociente de un número…;* posteriormente, se plantearon actividades donde los/las alumnos/as realizaron una traducción del lenguaje natural al algebraico dentro de las cuales intervenían las palabras anteriormente nombradas. Una gran mayoría de ellos/as aplicó correctamente estos elementos en ejemplos propuestos por el profesor; sin embargo, un aspecto relevante de esta primera aproximación al tema versa respecto de que varios alumnos/as se dieron cuenta que en todos los ejemplos realizados por el profesor se utilizaba la letra X, en donde uno de los alumnos (Sebastián) le pregunta al profesor:

S: *-¿Qué es la X?,*

P: *- X es un número cualquiera.*

S: *-¿Y cuándo se utiliza?…lo que pasa es antes era todo con números…pero ahora hay letras…yo sabía que las letras se ocupaban en ecuaciones*

P: *- Sí, lo que pasa Sebastián es que en esta unidad es totalmente nueva…en el álgebra se combinan letras con números, las letras son como un número cualquiera, no lo conocemos, es para generalizar situaciones… en todo caso, puedes aplicar cualquier letra del abecedario… ¿me entiendes?*

S: *Más o menos.*

(El profesor continúa con la clase). (Extracto de la observación Nº1).

La clase prosigue con ejercicios sencillos referidos a la resolución de problemas donde se involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Nótese, que el docente no profundizó la percepción del alumno –nociones protomatemáticas- en torno a la significación que conlleva el trabajo con letras en el Lenguaje Algebraico, ya que la pregunta no fue considerada como fuente de discusión para el conjunto de la clase, generándose de esta manera la noción de génesis ficticia bajo los fundamentos teóricos de la Transposición Didáctica, ya que la entrega simplificada del contenido en particular se centró en la consolidación de la técnica por sobre el proceso de construcción de conocimiento como parte fundante del desarrollo cognitivo en relación a hacer matemática.

En la clase siguiente, los/las alumnos/as siguen trabajando con problemas que hacen referencia con la traducción de enunciados del lenguaje natural al algebraico y con el planteamiento de ecuaciones de primer grado; no obstante, se debe señalar que el profesor explica que *“el Lenguaje Algebraico sirve para generalizar situaciones y para plantear ecuaciones que ayudan a la resolución de problemas”* (extracto de la observación Nº2).

Como consecuencia de las primeras observaciones, el investigador responsable intervino en el aula presentando a los/las alumnos/as la “Guía de trabajo 1”, cuyas preguntas y objetivos se aclararon verbalmente; además, la resolución de la guía de trabajo por parte de los/las alumnos/as se hizo por escrito; de esta manera, se aplicó la guía a 25 alumnos/as con una duración de 40 minutos, en la cual el tiempo se dividió en 15 minutos para las preguntas uno y dos, 5 minutos para comentar con su compañero/a de banco las respuestas obtenidas en las preguntas anteriores. De modo similar, los/las alumnos/as se reunieron en grupos de tres para contestar las preguntas cuatro y cinco en un tiempo de 20 minutos, el objetivo de juntar en grupos a los/las participantes fue con el fin último de recabar información referida a las estrategias utilizadas y visualizar las dificultades en torno a la resolución de los problemas planteados; además, conviene destacar que los/las alumnos/as debieron realizar mediante las situaciones a-didácticas planteadas por el investigador lo referido a las fases de acción, validación y formulación, en este sentido, los/las alumnos/as, en una primera instancia, se vieron expuestos a buscar, organizar y plantear diversas estrategias para encontrar la solución al problema -nociones protomatemáticas-, aplicando los contenidos desarrollados por el profesor en las clases anteriores; posteriormente, debieron conjeturar dichas estrategias en secuencias lógicas -nociones paramatemáticas-; por último, debieron explicar y argumentar las respuestas obtenidas, respecto de lo cual el investigador planteo en la guía de trabajo que los/las alumnos/as expusieran y explicaran sus respuestas en la pizarra frente a sus compañeros/as - nociones matemáticas-, dichas nociones y producciones realizadas por los/las estudiantes se analizarán más a fondo en la fase IV de esta investigación.

Sin embargo, un suceso relevante que marcó la aplicación de la “guía de trabajo 1” fue que a un grupo de alumnas les generó cierto desconcierto la pregunta número tres, puesto que no sabían si tenían que resolver la ecuación o solamente definir lo que significa la “letra”, asimismo, el grupo de alumnas le pidió al investigador que les dijera a que respuesta se debería llegar.

¿Qué representa p en la siguiente ecuación?

(p+1) + (p+2) + (p+3) = 1500

De esta manera, el análisis que se puede desprender de dicha intervención se sustenta en lo planteado por contrato didáctico, es decir, que el/la alumno/a debe ser capaz de conjeturar posibles respuestas apelando a conocimientos anteriores o en vías de construcción que le permitan “hacer matemática”, ya que “lo importante es que el alumno reconozca y dé sentido a las condiciones que lo llevarán a la adquisición de un conocimiento nuevo, es por esta razón, que el estudiante desconoce en su totalidad los procesos que lo van a llevar a generar dicho conocimiento” (Brousseau.1986:15). Conviene comentar, que el investigador no respondió la pregunta realizada por el grupo de alumnas, sino más bien se limitó a explicar los objetivos de la situación a didáctica.

Posteriormente, el investigador entrevistó a un grupo de alumnos/as de manera individual para que explicaran más a fondo los desarrollos realizados en las preguntas cuatro y cinco; el análisis de la información obtenida en dichas entrevista se especificará en la fase IV de esta investigación.

En la clase siguiente, el profesor elaboró un material complementario referido a estudiar términos, grado y clasificación de expresiones algebraicas, resaltando las definiciones entregadas por la guía. Asimismo, se trabajó principalmente con los ejercicios propuestos por dicho material, resolviendo dudas de carácter más bien procedimentales; bajo está línea el profesor acentuó la importancia de término algebraico como el *producto de una o más variables y una constante literal o numérica,* dentro del trabajo con la guía varios/as alumnos/as tuvieron dificultades con el grado de un término y la clasificación de expresiones algebraicas, dichas dificultades se visualizaron en la no identificación del grado en términos algebraicos tales como $2x$, el profesor se limitó a decir que cuando no aparece el exponente, el término algebraico es de grado uno; por otro lado, varios/as alumnos/as tuvieron dificultades al reconocer la clasificación de ciertas expresiones algebraicas; por ejemplo, el profesor planteó un ejercicio en la pizarra donde una parte de los/las alumnos/as clasificó la siguiente expresión algebraica, $\frac{x^2+y}{4}$, como monomio, y otro grupo como trinomio; de esta manera, el profesor intervino diciendo a los/las alumnos/as:

P:- ¿Por qué es un monomio?

(Sebastián contesta)

S:- porque tiene solamente un término…es toda la fracción

P:- ¿y por qué es un trinomio?

(Camila contesta)

C:- Porque tiene tres términos

P:- ¿Cuáles?

C:- El x^2 *, la y, el 4*

P:- No, lo que pasa es que una expresión algebraica puede estar separada por una suma o resta…en este caso podemos escribir la expresión algebraica anterior como: $\frac{x^2}{4}+\frac{y}{4}$ *…entonces, la expresión tiene dos términos: el primero de ellos es* $\frac{x^2}{4}$*, en donde su coeficiente numérico es ¼ y su factor literal es* x^2*, lo mismo pasa con el* $\frac{y}{4}$*, ya que su coeficiente numérico es ¼ y su factor literal es "y"…para reconocer un término algebraico este tiene coeficiente numérico y factor literal.*

¿Se entendió?

A:- Si

(Continúan trabajando en la guía) (Extracto de la observación Nº3.)

En la clase siguiente, el profesor continúa trabajando con la guía, centrando la atención de los/las alumnos/as en leer las definiciones sobre lo que significa la *evaluación de expresiones algebraicas, reducción de términos semejantes y uso de paréntesis*; de esta manera, inicia la clase con un ejemplo referido a evaluar expresiones algebraicas, escribiendo el siguiente ejemplo en la pizarra:

"*Calcular el valor numérico de la siguiente expresión algebraica,* $3ab$ *considerando que a=3 y b=2*"

Se ofrece un alumno (Yerko) para salir a la pizarra:

Y:- ¿Tengo que reemplazar solamente?

P:- Si

Y:- Ah!

Y:- 332…esa es la respuesta.

P:- No Yerko…lo que pasa es que en álgebra se trabaja mucho con letras y en esos casos no es necesario que se escriba el signo de multiplicación; en el ejemplo, el tres está multiplicado con a y con b, entonces el ejercicio queda de esta manera:

$3 \bullet (3) \bullet (2) = 18$ …*¿entendiste?*

Y:- Sí

(Los/las alumnos/as trabajan en ejercicios propuestos de la guía entregada por el profesor, este último se pasea puesto por puesto resolviendo dudas) (Extracto de la observación Nº4).

Luego de unos minutos, el profesor retoma la guía y lee la definición referida a términos semejantes; sin embargo, un grupo de alumnos/as no presta mayor atención a la explicación que está realizando el profesor sobre el tema, aún así el docente continúa la clase explicando que *"dos términos son semejantes si sus factores son iguales";* de esta manera, realiza un par de ejemplos y les pide a los/las alumnos/as que continúen trabajando con la guía. El profesor retoma la clase, explicando el uso de paréntesis; además, realiza una observación en torno a ciertos elementos que se deben considerar para trabajar con ejercicios referidos a la eliminación de paréntesis. Se plantea nuevamente que los/las alumnos/as trabajen en su guía, el profesor mantiene la dinámica de pasar puesto por puesto resolviendo dudas.

Cabe destacar que al describir la actividad matemática desarrollada por el docente, difiere claramente con las concepciones referidas a las situaciones didácticas, es decir, el considerar metodológicamente actividades que permitan articular sus conocimientos teóricos anteriores en torno a los conocimientos que se están desarrollando, ya que el/la alumno/a al no generar un tratamiento significativo de la información entregada por el profesor en relación a concebir la generalización de la operatoria aritmética, producirá una inconsistencia en la evolución de sus conocimientos, en donde el/la alumno/a estará casi abandonado/a a la hora de encarar errores que se vislumbren en el desarrollo de la unidad, ya que se evidencia, mediante las observaciones, que las dudas realizadas por los alumnos no generó reflexión por parte del profesor en la perspectiva que si dichos cuestionamientos pudieran verse implicados bajo otros contextos del trabajo algebraico.

Ahora bien, en la semana siguiente, el investigador intervino nuevamente en la sala de clases aplicando la "guía de trabajo 2" a 24 alumnos/as; del mismo modo que la aplicación de la guía de trabajo anterior, los/las alumnos/as tuvieron un tiempo de 45 minutos; previamente a la resolución de dicha guía, el investigador responsable explico verbalmente y por escrito el objetivo de ésta; así, la resolución por parte de los/las alumnos/as se hizo de forma escrita.

En términos generales, la aplicación de la guía de trabajo 2 se centró principalmente en conocer los resultados obtenidos en cada ítem por los/las alumnos/as; para luego realizar un análisis más sistemático de sus respuestas; cabe destacar que la profundización del análisis desprendido de las respuestas se ahondará con profundidad en la fase IV de esta investigación.

Sin embargo, un aspecto relevante que surgió en la aplicación de la guía fue que un grupo de alumnos manifestó que la pregunta número uno no se podía realizar, puesto que en tal pregunta se plantea lo siguiente:

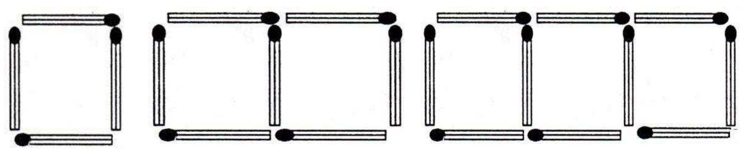
"Reducir términos semejantes a las siguientes expresiones algebraicas"

$2dt + 3p^3 - 7td + 9t^5$

"…esa expresión no se puede realizar, porque el profesor no ha explicado cuando hay términos cambiados" .Dicho argumento planteado por un grupo de alumnos, se materializa a lo referido a contrato didáctico, ya que si se consideran los "acuerdos" existentes entre profesor/a y alumno/a en el ámbito escolar, este último debe buscar, utilizar y plantear diversos elementos que le permitan resolver el problema

planteado bajo ciertos conocimientos adquiridos anteriormente o como se planteó en el marco de referencia, en vías de construcción; así, el profesor no debería hacer indicaciones sobre problemas que los/las alumnos/as ya conocen, es decir, un traspaso de responsabilidad, ya que los alumnos disponen de ciertas herramientas conceptuales necesarias para resolver el problema planteado. Cabe destacar, que si "(…) el profesor enseñan los resultados al alumno, entonces éste no puede establecerlos por sí mismo y, por tanto, no aprende matemáticas" (Chevallard. 1997: 220).

En la clase siguiente, el profesor introdujo el tema de regularidades matemáticas, en lo referido a patrones geométricos, realizando el siguiente ejemplo:



Por una parte, el profesor solicitó a los/las alumnos/as que elaboraran una tabla, identificando el número de cuadrados con el número de fósforos para que posteriormente se dieran cuenta de la secuencia que sigue la figura; de esta manera, el profesor explicó que para formar una nueva figura se necesitaban tres palitos más que la anterior, así, la descripción de la figura la realizó mediante una fórmula matemática, es decir, $F= 3n + 1$, con n = cuadrados. Asimismo, el profesor realizó una pequeña evaluación formativa preguntando cuántos palitos de fósforos se necesitaban para la figura 200, en donde una gran parte de los/las alumnos/as reemplazó correctamente en la fórmula, dando como resultado que se necesitaban 601 palitos de fósforos para formar 200 cuadrados. Luego, el profesor dibuja algunas figuras en la pizarra y les solicita a los/las alumnos/as encontrar la fórmula para cada caso.

En la clase siguiente, el profesor retoma algunas ideas del contenido expuesto anteriormente e introduce el tema de secuencias numéricas, iniciando la clase con el siguiente ejemplo:

"Considera la siguiente sucesión: 3, 5, 7, 9, 11, 13…"; en referencia al ejemplo, el docente solicita a los/las alumnos/as que centren su atención en observar la diferencia entre 5 y 3, 9 y 7, 13 y 11; de este modo, los/las alumnos/as responden que la diferencia en cada caso es dos. Luego, el profesor distingue que la diferencia constante es dos y que el primer término de la sucesión es 5, dando la siguiente fórmula: $2n+1$, donde n es un número natural. Luego, el profesor escribe

varios ejercicios en la pizarra para que los/las alumnos/as apliquen las nociones recién adquiridas.

Ahora bien, a partir de las observaciones de las dos últimas clases, el investigador intervino nuevamente en la sala de clases presentando la “guía de trabajo 3”, la cual se aplicó a 23 alumnos/as con un tiempo de 40 minutos, divididos en 15 minutos para la pregunta uno, 5 minutos para discutir con su compañero/a de banco las respuestas obtenidas en dicha pregunta; además, el investigador les solicitó a los/las alumnos/as reunirse en siete grupos de tres personas y un grupo de dos personas para realizar la pregunta dos en un tiempo de 20 minutos. Al igual que la aplicación de las guías anteriores, el investigador responsable explicó verbalmente y por escrito los objetivos de la actividad, precisando que cada respuesta fuera desarrollada en forma ordenada y por escrito.

De la misma forma que en la “guía de trabajo 1”, se les propone a los/las alumnos/as un problema en que este último debe actuar buscando y aplicando ciertas estrategias que le permitan encontrar una posible solución al problema planteado en referencia a sus nociones previas -situación a-didáctica de acción-; además, el/la alumno/a debe ser capaz de conjeturar y expresar con sus compañeros/as sus primeros acercamientos y estrategias ejecutadas para la resolución del problema - situación a-didáctica de formulación-; de forma precedente, el/la alumno/a debe exponer, argumentando y justificando la validez de la(s) respuesta(s) que obtuvo en función de las herramientas y estrategias utilizadas. Lo anterior implica, que el/la alumno/a debe realizar una validación de su(s) respuesta(s) a sus pares.

En síntesis, estas fueron las situaciones más relevantes que encaminaron y estructuraron las observaciones de las secuencias de enseñanza. Describiremos enseguida la fase IV de esta investigación referida al análisis a posteriori y validación.

4.- Fase IV: Análisis a posteriori y Validación

En este apartado se pretende analizar e interpretar la información recogida durante la experimentación en relación a la adquisición del contenido de Lenguaje Algebraico en alumnos/as de Primer año Medio del colegio Boston College, acentuando la exploración en el contraste entre los análisis a priori y a posteriori.

En una primera instancia, se analizarán los resultados de las respuestas de las “Guías de trabajo 1, 2 y 3” que fueron aplicadas, como se mencionó anteriormente a 25, 24 y 23 alumnos/as respectivamente, desprendiéndose de los datos que ahí se pudieron recabar, la confrontación del análisis a priori con el análisis a posteriori, dicha información se complementa con las entrevistas realizadas a los/las alumnos/as (cfr. Anexo A). Luego, se analizará la entrega de contenidos por parte del profesor, durante la experimentación y observación de la unidad de estudio.

Cabe resaltar, que las respuestas realizadas por los/las alumnos/as en las tres guías de trabajo, se articularán mediante tablas dando a conocer la cantidad de alumnos/as que establecieron cada respuesta.

En la “Guía de trabajo 1” aplicada a los/las alumnos/as y respecto de la pregunta número uno que hace referencia a traducir del lenguaje natural al algebraico, conviene comentar que para los enunciados *Un número disminuido en doce equivale al triple del número aumentado en ocho* y *la raíz cuadrada de un número* se pudo constatar que la totalidad de alumnos/as realizó correctamente la traducción de ambos enunciados; sin embargo, para los enunciados posteriores se tiene lo siguiente:

Tabla Nº4

La suma de los cuadrados de dos números	
Respuestas	Número de alumnos/as
$x^2 + y^2$	5
$x^2 + x^2$	7
2^2	2
xy^2	1
□+□	4
No contesta	6
	Total= 25

Tabla Nº5

La suma de tres números consecutivos equivale a quince	
Respuestas	Número de alumnos/as
$3x = 15$	5
$x + x + x = 15$	5
$x + x + 1 + x + 2 = 15$	2
$a + b + c = 15$	3
$x + y + z = 15$	4
$xyz = 15$	1
$4 + 5 + 6 = 15$	1
No contesta	4
	Total= 25

Tabla Nº6

El antecesor de un número	
Respuestas	Número de alumnos/as
$-x$	4
$x - 1$	17
x	1
$x, 15$	1
No contesta	2
	Total= 25

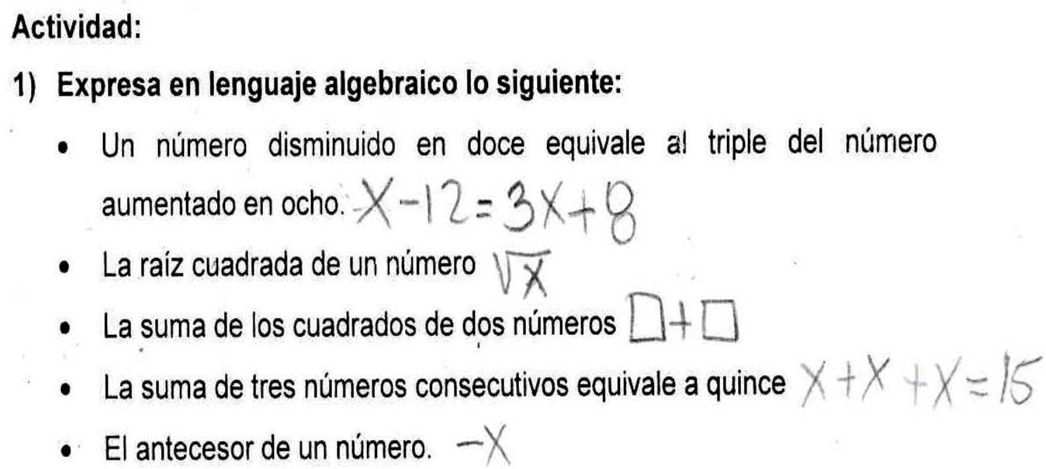
Tal y como lo presentan las tablas Nº 4, 5 y 6, se ha podido constatar una gran diversidad de respuestas, asimismo y manteniendo una clara correspondencia con el análisis realizado en la fase III de esta investigación, se puede inferir que la gran mayoría de las respuestas se caracterizaron por la confusión en la traducción del lenguaje natural al algebraico en relación a la poca interpretación, manipulación y simbolización referida a considerar las letras como número generalizado y por la gran cantidad de respuestas en blanco; de esta manera, los/las alumnos/as presentan dificultades en torno a la notación algebraica asociada a la poca significación de su estructura semántica que subyace del uso incorrecto de símbolos y terminología algebraica; además, se desprende de la información recogida, y en función de una perspectiva cognitiva con una base referida a habilidades conceptuales, que algunos/as alumnos/as no interpretan ni manipulan abstracciones aludidas al reconocimiento del significado de los símbolos, es decir, ciertas limitaciones que quedan patentes en la ausencia de sentido de los símbolos y las letras bajo un contexto de generalización.

Lo anterior se complementa con las respuestas dadas a conocer en las tablas Nº4 y Nº5: xy^2, $xyz = 15$, en donde ambas hacen alusión a la operatoria de la multiplicación en contraposición con lo planteado en el enunciado que se refiere a *la suma*; además, se debe considerar que en álgebra se omite el signo de multiplicación cuando los factores que están en juego son letras o letras y números; asimismo, se podría extrapolar lo anterior en referencia a la discontinuidad existente entre la aritmética y el álgebra, ya que el alumno realizó una omisión del signo de la adición, generalizando coincidencias. Sin embargo, la revisión de la guía de trabajo Nº1 constató que fue el mismo alumno quien realizó dichas producciones, en donde se podría plantear de forma preliminar que se está en presencia de un obstáculo del tipo ontogénico, ya que se percibe error de sintaxis, es decir, el alumno no tiene claro que la estructura del Lenguaje Algebraico en su fase sintáctica no siempre mantiene correspondencia con la operatoria aritmética, expresando el binomio $x^2 + y^2$ como un monomio de la forma xy^2; lo anterior mantiene correspondencia con lo planteado en la dimensión didáctica.

Además, en la tabla Nº6 se visualiza la siguiente respuesta: $-x$, en donde queda de manifiesto un obstáculo didáctico de origen cognitivo, ya que se encuentra ligado a la enseñanza realizada por el docente en relación a la notación de números consecutivos, es decir, el alumno solamente demanda procesos en los cuales concibe el *antecesor de un número* en función de la relación de orden en la recta numérica de los números naturales; por ejemplo, se podría manifestar que el alumno determine que el antecesor de $(x-3)$ es $(x-2)$ y no $(x-4)$. Lo anterior encuentra sustento en lo planteado por la teoría psicogenética de Piaget en relación al proceso de equilibrio entre asimilación y acomodación como producto de las experiencias anteriores del alumno, ya que en un primer paso éste último maneja el pasaje de un conocimiento a otro dentro de una misma situación –en un plano aritmético, por ejemplo: el antecesor de 5 es 4, el antecesor de 450 es 499, etc.- pero en el caso del Lenguaje Algebraico en el cual se demanda un mayor grado de abstracción y generalización, puesto que intervienen operaciones con números y letras, cantidades positivas y negativas, no se produce una reorganización de los conocimientos anteriores -acomodación- en el pasaje de un conocimiento más complejo, manifestándose de esta manera respuestas inadecuadas que no tienen cabida en el aprendizaje del nuevo objeto matemático.

Por otro lado, es necesario detenerse en torno a las respuestas presentadas por los/las alumnos/as respecto del enunciado: *la suma de los cuadrados de dos números,* en la cual cuatro de ellos/as realizaron la siguiente traducción: □+□ ; con lo cual es posible constatar que dichas respuestas se articulan en la dicotomía existente entre representaciones mentales[8] y representaciones semióticas sobre el objeto matemático presentado, ya que si se considera que un objeto matemático puede generarse a través de diferentes registros, se puede constatar que los alumnos aplicaron un registro geométrico por sobre el algebraico en función de sus producciones y/o concepciones anteriores.

Fig.Nº1 (Ejercicios número uno, Guía de trabajo 1).



Actividad:

1) Expresa en lenguaje algebraico lo siguiente:

- Un número disminuido en doce equivale al triple del número aumentado en ocho. $X-12=3X+8$
- La raíz cuadrada de un número $\sqrt{X}$
- La suma de los cuadrados de dos números □+□
- La suma de tres números consecutivos equivale a quince $X+X+X=15$
- El antecesor de un número. $-X$

---

[8] Según Duval (1999) las representaciones mentales corresponden a un conjunto de imágenes y concepciones que tiene un individuo sobre un objeto, una situación y sobre aquello que le está asociado.

Ahora bien, para la pregunta número dos referida a traducir del lenguaje algebraico al natural se obtienen las siguientes respuestas:

Tabla Nº7

Traducir del lenguaje algebraico al lenguaje natural: $3x+\frac{x}{4}$	
Respuestas	Número de alumnos/as
El triple de un número aumentado en su cuarta parte	18
Tres equis más equis partido por cuatro	3
$3\bullet 1+\frac{1}{4}$	2
No contesta	2
	Total= 25

Tabla Nº8

Traducir del lenguaje algebraico al lenguaje natural: $x-1$, x, $x+1$	
Respuestas	Número de alumnos/as
El antecesor de un número, el número, el sucesor de un número	11
Un número disminuido en uno, el número, el número aumentado en uno	6
Equis menos uno, equis, equis más uno	3
$1-1,\ 1,\ 1+1$	2
No contesta	3
	Total= 25

Tabla Nº9

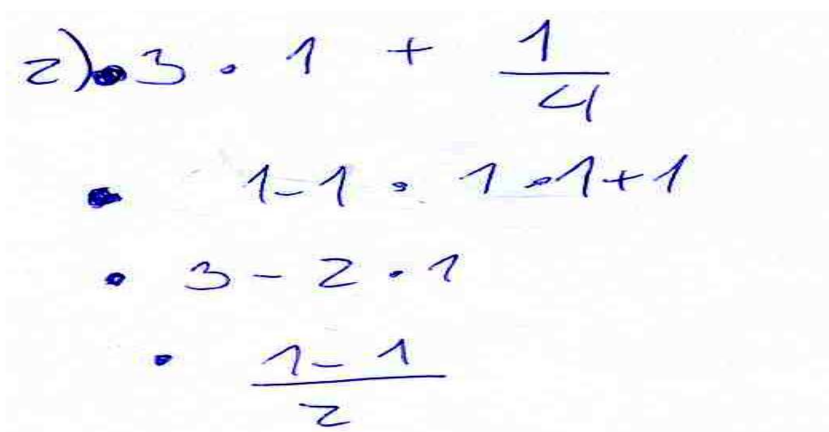
Traducir del lenguaje algebraico al lenguaje natural: $x^3 - 2x$	
Respuestas	Número de alumnos/as
El cubo de un número menos su doble	13
Equis elevado a tres menos dos equis	3
El triple de un número menos dos equis	1
El triple de un número menos otro número multiplicado en dos	1
Un número multiplicado tres veces por si mismo, se le resta el doble de ese número	1
$1^3 - 2 \bullet 1$	2
No contesta	4
	Total= 25

Tabla Nº10

Traducir del lenguaje algebraico al lenguaje natural: $\frac{a-b}{2}$	
Respuestas	Número de alumnos/as
La mitad de la diferencia de dos números	13
a menos b partido en dos	5
$\frac{1-1}{2}$	2
No contesta	5
	Total= 25

A partir de la lectura de las tablas Nº 7, 8, 9 y 10, es posible apreciar respuestas que no fueron abordadas por el investigador en el análisis a priori, dichas respuestas aluden a que algunos/as alumnos/as conciben e incorporan elementos numéricos que den respuestas a las situaciones planteadas, haciendo referencia a que las expresiones algebraicas siempre deben tener una solución numérica, con lo cual se percibe la ausencia de sentido y significado que implica el trabajar con letras y/o símbolos, puesto que los/las alumnos/as buscan estrategias referidas al lenguaje numérico basando su uso en la aritmética y no realizan una manipulación de la abstracción que conlleva el trabajo de la letra como número generalizado. Se hace notar entonces que no existe una transición de la operatoria aritmética a la algebraica en la actividad matemática propuesta, generando una ruptura cognitiva para la adquisición y construcción del objeto de conocimiento; de esta manera, las respuestas se conciben en la poca articulación y entendimiento de la aritmética como fundamento del álgebra, en relación a establecer e identificar transformaciones bajo diversos sistemas de representación, generando errores sintácticos en el pasaje del lenguaje algebraico al natural; dichos errores se atribuyen en la poca comprensión y uso del Lenguaje Algebraico. Algunas respuestas, se describen a continuación:

Fig. Nº2 (Ejercicio número dos, Guía de trabajo 1).



Lo anteriormente descrito, tiene relación con que los/las alumnos/as identifican que una operación aritmética debe desarrollarse en su totalidad, es decir, un/una alumno/a identifica que 1 + 1 es una operación incompleta, para eso el/ella identifica que el resultado final sería 2; de esta manera, el/la alumno/a extrapola dicho análisis en el trabajo algebraico, la cual considera, por ejemplo, que a + b es una expresión incompleta y por esa razón debe asignar valores numéricos que satisfacen una solución única.

Por otro lado, algunas respuestas tienen su correspondencia con el análisis realizado en la fase III, en lo relacionado a dificultades sintácticas que conlleva la poca adquisición en torno a reconocer y aplicar ciertas palabras que permiten realizar una correcta traducción en función de las conversiones entre los diferentes registros considerados por las preguntas.

De la pregunta número tres, se tiene lo siguiente:

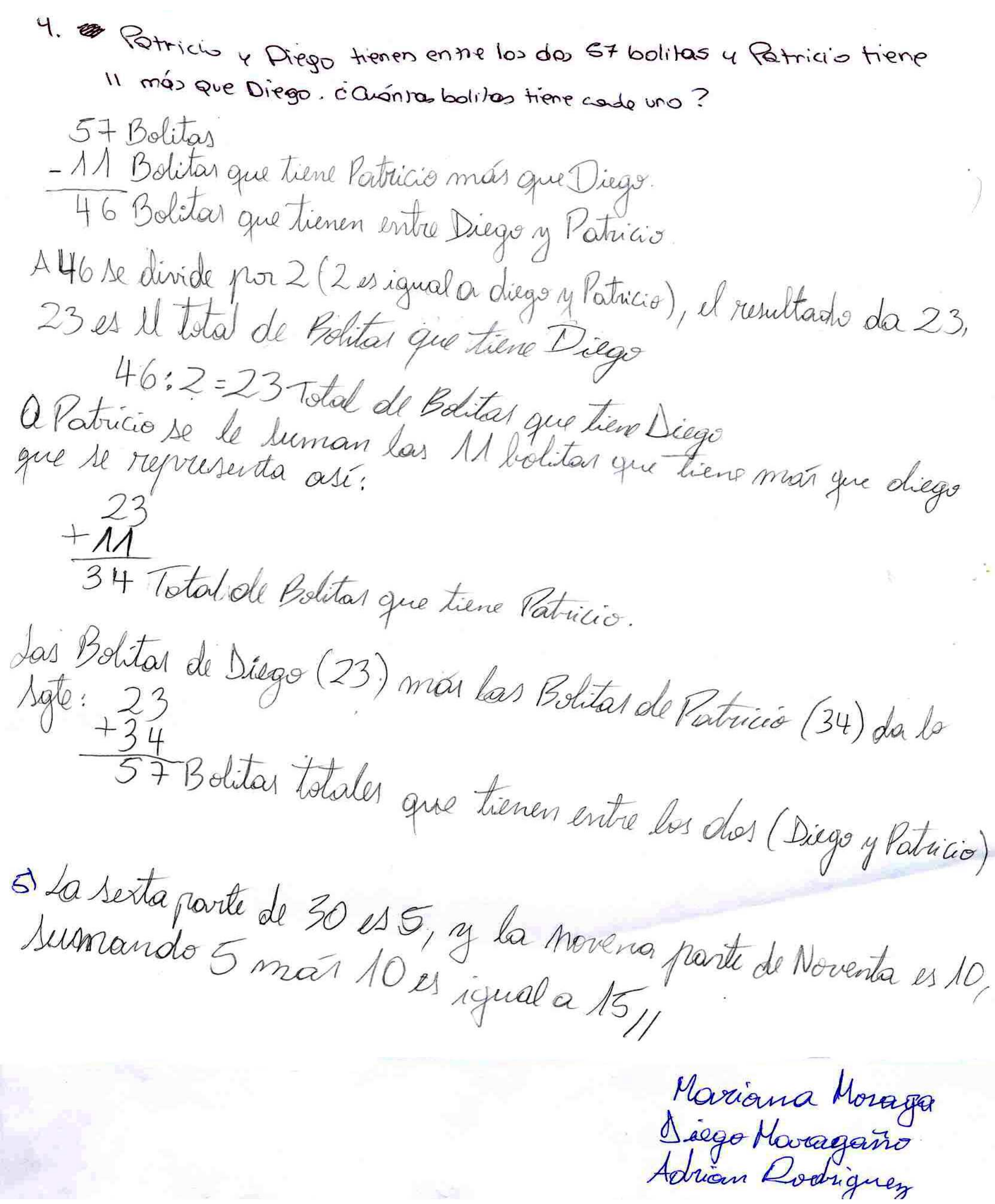
Tabla Nº11

¿Qué representa p en la siguiente ecuación? $(p+1) + (p+2) + (p+3) = 1500$	
Respuestas	Número de alumnos/as
p representa una incógnita	7
p representa un número	3
p= 498	10
p representa la suma de tres números consecutivos	1
No contesta	4
	Total= 25

En relación a esta tabla, se puede observar que una gran mayoría de los/las alumnos/as, y en concordancia con el análisis a priori realizado anteriormente, se inclinó por resolver la ecuación y dar una respuesta numérica por sobre una comprensión adecuada del enunciado que implicaba reconocer la letra como un número que puede tomar, en este caso, un valor específico; lo cual se condice con lo planteado anteriormente en referencia al trabajo mecánico al cual son sometidos los/las alumnos/as en el contexto escolar propendiéndose a una escueta significación de la manipulación simbólica en el Lenguaje Algebraico, ya que tiende a fortalecerse y privilegiarse en los/las alumnos/as la resolución de ecuaciones por sobre el sentido y la pertinencia de lo solución que subyace de las condiciones del problema. Sin embargo, es previsible que la gran mayoría de los/las alumno/as hayan resuelto la ecuación, ya que este/a último/a se encuentra familiarizado y con cierta dependencia a la técnica rutinaria de ecuaciones, situación muy arraigada en la cultura escolar, considerando unas de las clausulas implícitas del contrato didáctico (Chevallard. 1995) y (Olfos.2007), en la cual se manifiesta que en el contexto escolar nacional se institucionaliza la utilización de símbolos en forma mecánica, no incentivando un razonamiento matemático; lo anterior hace referencia a que cuando a un/una alumno/a se le presentan ciertos problemas en el proceso didáctico, no debe disponer inmediatamente de técnicas que le permitan resolver el problema, sino más bien centrar la atención en “pensar los problemas”; lo anterior encuentra sustento en traspasar la responsabilidad del trabajo matemático que socialmente recae al docente a los/las alumno/as –evolución del contrato didáctico-.

Ahora bien, las producciones realizadas por los/las alumnos/as en torno a las preguntas número cuatro y cinco, en donde debían reunirse en siete grupos de tres personas y un grupo de cuatro personas, arrojaron resultados importantes de mencionar, puesto que las respuestas para la pregunta número cuatro referida a: *Diego y Patricio tienen entre los dos 57 bolitas y Patricio tiene 11 más que Diego, ¿cuántas bolitas tiene cada uno?,* se caracterizaron por la carencia de sentido y significación de las letras como variable y la no estructuración del enunciado verbal a expresiones algebraicas referidas a la traducción del lenguaje natural al algebraico en torno al planteamiento y resolución de una ecuación de primer grado, ya que todos los grupos conformados realizaron el siguiente desarrollo:

Fig. Nº3 (Ejercicio número cuatro, Guía de trabajo 1)


4. Patricio y Diego tienen entre los dos 57 bolitas y Patricio tiene 11 más que Diego. ¿Cuántas bolitas tiene cada uno?

57 Bolitas
-11 Bolitas que tiene Patricio más que Diego.
46 Bolitas que tienen entre Diego y Patricio.

A 46 se divide por 2 (2 es igual a diego y Patricio), el resultado da 23, 23 es el total de Bolitas que tiene Diego

46 : 2 = 23 Total de Bolitas que tiene Diego

a Patricio se le suman las 11 bolitas que tiene más que diego que se representa así:

23
+11
34 Total de Bolitas que tiene Patricio.

Las Bolitas de Diego (23) más las Bolitas de Patricio (34) da lo Sgte.:

23
+34
57 Bolitas totales que tienen entre los dos (Diego y Patricio)

5) La sexta parte de 30 es 5, y la novena parte de Noventa es 10, sumando 5 más 10 es igual a 15 //

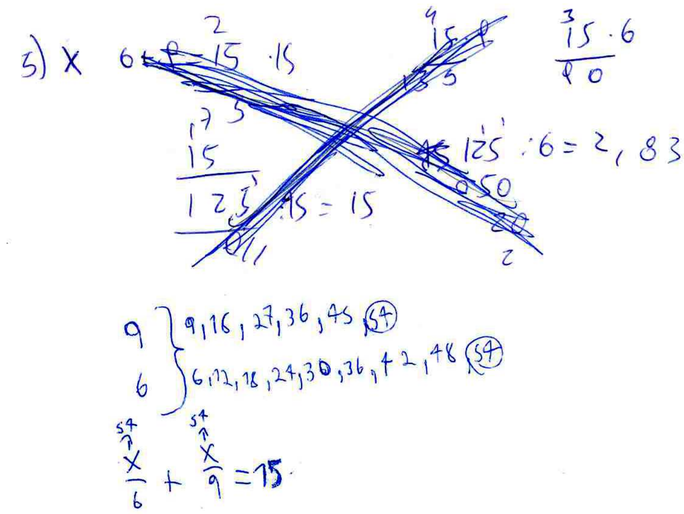
Mariana Moraga
Diego Moragaño
Adrian Rodriguez

Tratándose de un problema conocido por ellos/as, resulta sobresaliente la baja habilidad e inconsistencia de los/las alumnos/as al manipular simbólicamente las variables puestas en juego por el problema, bajo un escenario tanto conceptual como operacional, ya que al ser una actividad en donde los grupos debían confrontar y argumentar sus respuestas en público no se observó mayormente que las posiciones dadas a conocer fueran fuente de discusión o rechazo de ciertas respuestas erróneas; asimismo, se podría inferir que dicha inconsistencia se sustenta en obstáculos cognitivos adquiridos por ellos/as en cursos anteriores, en la cual la poca relevancia al trabajo con ecuaciones ligadas a la poca reflexión de las soluciones, obstaculiza el entendimiento y adquisición del Lenguaje Algebraico a posteriori, ya que el trabajo con ecuaciones lineales conlleva ciertos aprendizajes adquiridos por los/las alumno/as previamente, en donde se debe articular cierto dominio de los términos algebraicos en torno a reducir y operar con términos semejantes, llevando consigo operaciones algebraicas o aritméticas; asimismo, lo anterior se complementa por lo planteado en la dimensión epistemológica, en la cual se hace referencia a la evolución del Lenguaje Algebraico en el pasaje del álgebra retórica, sincopada y simbólica en función de acentuar la importancia entre la distinción de las letras como incógnita en la resolución de ecuaciones, permitiendo desarrollar expresiones algebraicas, con lo que se da origen a la interpretación, simbolización y manipulación de las letras en diferentes contextos algebraicos.

Lo anterior da cuenta de la nula articulación existente entre la manipulación de los objetos algebraicos puestos en juego desde una perspectiva sintáctica y semántica, manifestándose el desarrollo aritmético como eje articulador de sus representaciones, generando un uso inadecuado de los registros semióticos. A su vez, las respuestas obtenidas ponen en evidencia la poca significación e interpretación de la escritura simbólica del Lenguaje Algebraico, bajo un escenario donde los/las alumnos/as debían interpretar la información en función de ciertas convenciones propias de las expresiones simbólicas algebraicas.

En relación a la pregunta cinco, las respuestas obtenidas se caracterizaron nuevamente por la aplicación de valores numéricos que satisfacen las condiciones del problema, dicho análisis mantiene correspondencia con lo anteriormente planteado en torno a la ruptura existente entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Cabe señalar que sólo un grupo de tres personas realizó correctamente el problema, aplicando estrategias referidas a traducir del lenguaje natural al algebraico, como también manipular dicha traducción para la resolución de la ecuación planteada. A continuación, se darán a conocer algunas respuestas realizadas por los/las alumnos/as sobre la pregunta número cinco:

Fig. Nº4 (Ejercicio número cinco, Guía de trabajo 1)



En cuanto a la "Guía de trabajo Nº2", se pudieron observar una pluralidad de respuestas, generando cierta comprobación con el análisis a priori realizado por el investigador; cabe señalar, que se realizará la confrontación en referencia a ciertas preguntas, ya que la guía tenía por fin último el analizar las estrategias y manipulaciones puestas en juego por los/las alumnos/as en torno al dominio operatorio y conceptual de algunas expresiones algebraicas. De esta manera y como parte fundante de dicho análisis, los/las alumnos/as respondieron lo siguiente a la pregunta número uno:

Tabla Nº12

Reducir términos semejantes: $2dt+3p^3-7td+9t^5$	
Respuestas	Número de alumnos/as
$3p^3+9t^5-5dt$	3
No hay términos semejantes: $2dt+3p^3-7td+9t^5$	19
$4dt^5+3p^3$	1
No contesta	1
	Total= 24

Tabla Nº13

Reducir términos semejantes: $2ab-3b+2a-ba-4a$	
Respuestas	Número de alumnos/as
$2ab-3b-ba-2a$	15
$2ab-3b+2a-ba-4a$	2
$6a-2ab-ba-3b$	4
$-4ab$	1
$5a-2ab-3b$	1
No contesta	1
	Total= 24

Tabla Nº14

Reducir términos semejantes: $52q-37q+16r-28r$	
Respuestas	Número de alumnos/as
$15q-12r$	13
$15q+12r$	6
$18q+12r$	1
$25q+12r$	1
$89q+34r$	1
$22q-12r$	1
No contesta	1
	Total= 24

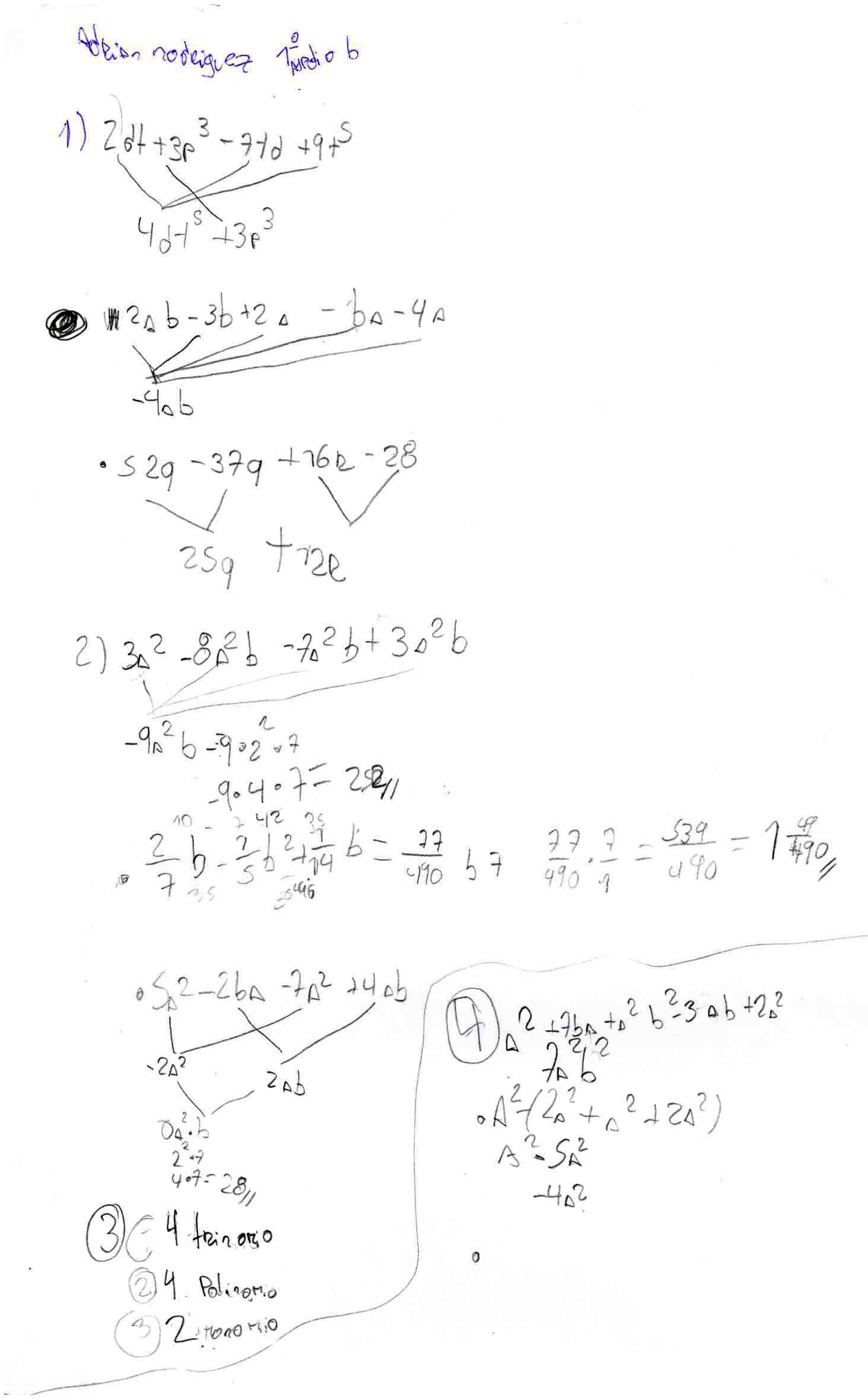
En la información entregada por las tablas Nº12, 13 y 14, queda de manifiesto, al igual que lo planteado por el análisis a priori, que los/las alumnos/as no generan una comprensión conceptual sobre la propiedad conmutativa, en la cual se debe considerar que las letras en álgebra permiten generalizar las propiedades numéricas; ahora bien, en el contexto de las respuestas de los/las alumno/as se visualiza que no distinguen términos conmutados, es decir, que *dt* es igual a *td*, como también no identifican que *ab* es igual a *ba;* con ello se deduce la falta de sentido al trabajar con expresiones algebraicas. Sin embargo, dicho obstáculo se desprende de la falta de actividades asociadas a problemas que conlleven el análisis de los sistemas numéricos en función de la valorización de la actividad algebraica, ya que el hecho de presentar ejemplos referidos a la utilización de la propiedad conmutativa, es decir, $a \bullet b = b \bullet a$;en donde a=1 y b=2, quedando:

$$a \bullet b = b \bullet a$$
$$1 \bullet 2 = 2 \bullet 1$$
$$2 = 2$$

, podría generar un mayor entendimiento si reconocen lo anterior con el reemplazo de las números por letras. Además, se desprende de las lectura de las tablas, ciertos aspectos que no fueron abordados por el investigador en la fase III, ya que los/las alumnos/as evidencian errores referidos a operaciones en el conjunto de los enteros, Z

Ahora bien, en lo que se refiere a la valorización de las expresiones algebraicas y clasificación de estas, se encontraron errores, al igual que la pregunta anterior, respecto del trabajo en Z y de la determinación del grado de las expresiones, lo anterior se encuentra sujeto al análisis a priori realizado anteriormente. En cambio, es necesario detenerse en las respuestas que surgieron a la hora de *reducir los paréntesis de expresiones algebraicas, ya* que gran parte de los/las alumnos/as dejo las respuestas en blanco y/o incompletas, como también realizó los cálculos obviando el signo menos (-) anterior al paréntesis en la reducción de estos, realizando las operaciones tal cual se presentaban en los ejercicios; además, y como consecuencia de dicho procedimiento realizan erradamente la reducción de términos semejantes, produciéndose errores de carácter conceptual y operacional.

Fig. Nº5 (Ejercicio número uno, Guía de trabajo 2)



1) $2dt + 3p^3 - 7td + 9t^5$

$4dt^5 + 3p^3$

$2ab - 3b + 2a - ba - 4a$

$-4ab$

$\cdot\ 52q - 37q + 76e - 28$

$25q + 72e$

2) $3a^2 - 8a^2b - 7a^2b + 3a^2b$

$-9a^2b - 9 \cdot 2^2 \cdot 7$

$-9 \cdot 4 \cdot 7 = 252$

$\frac{2}{7}b - \frac{7}{5}b^2 + \frac{7}{14}b = \frac{77}{490}\ b\ 7 \quad \frac{77}{490} \cdot \frac{7}{1} = \frac{539}{490} = 1\frac{49}{490}$

$\cdot\ 5a^2 - 2ba - 7a^2 + 4ab$

$-2a^2 \quad 2ab$

$0a^2 \cdot b$

$2^2 \cdot 7$

$4 \cdot 7 = 28$

3) 4 trinomio

2) 4 Polinomio

3) 2 monomio

4) $a^2 + 7ba + a^2b^2 - 3ab + 2a^2$

$7a^2b^2$

$\cdot\ A^2 - (2a^2 + a^2 + 2a^2)$

$A^2 - 5A^2$

$-4a^2$

En cuanto a la "Guía de trabajo 3", la cual tiene relación con que los/las alumnos/as debían traducir al Lenguaje Algebraico relaciones cuantitativas y además, realizar una generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos, se obtuvo lo siguiente:

En la pregunta uno, referente a encontrar una fórmula para la figura n, se determinaron las siguientes respuestas:

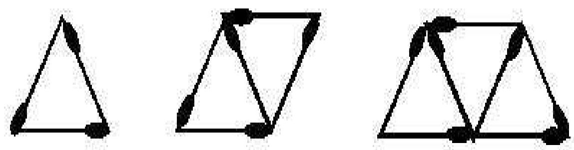


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Tabla Nº15

Encuentre una fórmula para la figura n	
Respuestas	Número de alumnos/as
$2n+1$	21
$2(n+1)$	2
	Total= 23

Respecto de la pregunta número dos, en la cual los/las alumnos/as debían reunirse en siete grupos de tres personas y un grupo de dos personas, se obtuvieron las siguientes respuestas:

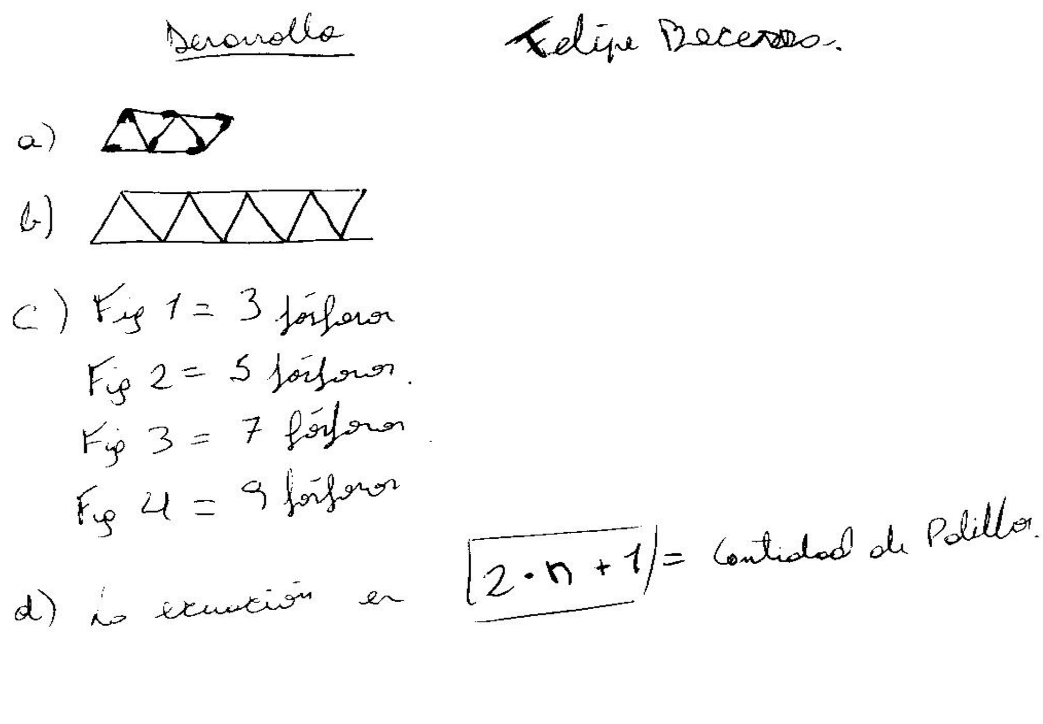
Tabla Nº15

Pregunta dos	
Respuestas	Número de alumnos/as
Ejemplos numéricos que satisfacen los enunciados	17 (cinco grupos de tres personas y un grupo de dos personas)
$1)a \bullet b$ $2)(a+7)\bullet(b+7)=a\bullet b+7a+7b+49$ $3)a\bullet b+7a+7b+49-a\bullet b=7(a+b)+49/\mathit{reemplazando}$ $7\bullet(3000)+49=21.049$	6 (dos grupos de tres personas)
	Total= 23

En la información entregada por la tablas Nº15 y 16, se mantiene una correspondencia explícita sobre el análisis a priori, ya que en la pregunta uno se resalta la capacidad de los/las alumnos/as en deducir el patrón geométrico de la figura dada; de esta manera, se observa que la deducción del método general mediante una fórmula y su posterior simbolización produce en el/la alumno/a la significación de las letras como número generalizado, en función de obtener la cantidad de fósforos en relación con el número de triángulos.

En cambio para la pregunta número dos, se mantiene lo planteado en torno al análisis en la fase III de esta investigación, ya que los/las alumnos/as no son capaces de abordar la resolución del problema bajo un contexto de abstracción, generalización y formulación de la estructura simbólica del Lenguaje Algebraico, apuntando directamente a aspectos aritméticos en las operaciones referidas al problema, es decir, que para las operaciones propuestas en el problema algunos/as alumnos/as las abordan como tal, operaciones con número para obtener números, no está vigente el tratamiento algebraico en lo referido a operar letras con letras, ya que se emplea nuevamente la estrategia numérica como estrategia de resolución pero carente de validación y argumentación en un sentido simbólico; así como también, está presente la ausencia de sentido y uso de la utilización del Lenguaje Algebraico como herramienta que permite generalizar sobre objetos numéricos ciertas situaciones presentes en la matemática. Dichas respuestas, se consignan a continuación:

Fig. Nº6 (Ejercicio número uno, Guía de trabajo 3)



Desarrollo Felipe Becerra.

a)

b)

c) Fig 1 = 3 fósforos
Fig 2 = 5 fósforos.
Fig 3 = 7 fósforos
Fig 4 = 9 fósforos

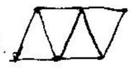
d) La ecuación es $\boxed{2 \cdot n + 1}$ = Cantidad de Palillos.

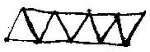
Fig. Nº7 (Ejercicio número uno, Guía de trabajo 3)

Mariana Moraga.
1º EMB.

Desarrollo

figuras.

a. 

b. 

c. figura 1 = 3
figura 2 = 5
figura 3 = 7
figura 4 = 9

d. $2(n+1)$

Fig. Nº8 (Ejercicio número dos, Guía de trabajo 3)

Diego Maragaño, Camila Guzmán, Valentina Godmaz

1) $X \cdot y$

2) $(x+7)(y+7) = X \cdot y + X \cdot 7 + 7 \cdot y + 7 \cdot 7$

$= Xy + 7x + 7y + 49.$

3) $Xy + 7X + 7y + 49 - Xy =$

$7X + 7y + 49$

Comprobación:

$X = 2960 \qquad y = 40.$

$7 \cdot 2960 + 7 \cdot 40 + 49 =$

$20720 + 280 + 49 =$

$21.049.$

Nosotros pensamos que los 2 números pedidos había que reemplazarlos con palabras (x e y). Luego a ambos había que sumarle 7, para después multiplicarlos todos.
Finalmente resolver la operación algebraica y restarle el resultado del ejercicio nº 1.

Fig.Nº9 (Ejercicio número dos, Guía de trabajo 3)

~~2271049~~

Alvaro Rojas
Matías Alumaja
Cristián Rodriguez

1) $1500 \cdot 1500$

$$\begin{array}{r} 750 \\ 15 \\ \hline 2250000 \end{array}$$

2) $1507 \cdot 1507$

$$\begin{array}{l} 10549 \\ 7535-- \\ 1507--- \\ \hline 2271049 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{r} 2271049 \\ -\ 2250000 \\ \hline 21.049 \end{array}$$ //

A continuación y en virtud de lo señalado al inicio de este apartado, se dará a conocer la confrontación del análisis a priori con el análisis a posteriori en torno a las observaciones al profesor de matemática, desde una perspectiva didáctica en función del desarrollo de la unidad de Lenguaje Algebraico.

Durante la fase de experimentación, se visualizó que el profesor no consideró las recomendaciones curriculares y didácticas propuestas por el MINEDUC, así como tampoco trabajó con el texto de estudio, desarrollando metodológicamente la unidad bajo la construcción y aplicación de guías elaboradas por él.

Sin embargo, el docente desarrolla la unidad demostrando un claro dominio de los contenidos, estableciendo ciertas relaciones referidas a que el Lenguaje Algebraico se encuentra presente en otras disciplinas científicas; con ello, se produce un primer acercamiento al desarrollo del pensamiento algebraico en los/las alumnos/as, cumpliéndose uno de los puntos señalados en el análisis a priori; por otro lado, en el proceso didáctico no se hizo referencia al desarrollo epistemológico del Lenguaje Algebraico, haciéndose visible el concepto de Transposición Didáctica, produciéndose una dicotomía entre saber sabio y saber enseñado; ya que, si dicho proceso se estructura obviando la fase epistemológica, puede dar como resultado que los/las alumnos/as no re-significan las ideas fundantes en torno a la estructura semántica y sintáctica del Lenguaje Algebraico; asimismo, se puede sub entender que dicha omisión repercute en las problemáticas encontradas en el análisis de las respuestas de los/las alumnos/as, ya que no se plantea la relación dialéctica que existe entre el pensamiento aritmético y el algebraico y su posterior desarrollo. Además, es posible constatar el poco desarrollo de actividades que permiten a los/las alumnos/as la significación, interpretación y manipulación de la escritura simbólica del álgebra, ya que el desarrollo y organización de la unidad se ajustó a trabajar con guías elaboradas por el profesor en las cuales se privilegia el criterio de automatizar y mecanizar una técnica por sobre la descripción y significación referida a que el álgebra requiere un mayor nivel de abstracción en concordancia con su estructura semántica y sintáctica. En relación a lo anterior, se perpetua en los/las alumnos/as la ambigüedad de significados que conlleva la escueta adquisición del Lenguaje Algebraico, generando ciertos errores que se conciben bajo el alero de la poca significación de las letras como número generalizado y/o variables.

Por otro lado, es necesario destacar la noción de contrato didáctico desarrollada en la sala de clases en función de la organización de los contenidos bajo la relación entre enseñanza y aprendizaje, ya que una de las características del curso fue el constante murmullo y falta de atención a las explicaciones del profesor; de esta manera, y en consideración al fundamento teórico propuesto por Chevallard (1997), dichos murmullos se condicen con la ruptura del contrato didáctico en relación a la aplicación, por parte del profesor, de ciertas técnicas ajenas a los/las alumnos/as.

Para finalizar resulta importante destacar, desde la fase didáctica, la omisión, como se dijo anteriormente, por parte del profesor a las orientaciones didácticas que se establecen en el Programa de Estudio, en relación de acentuar el desarrollo de la unidad a la importancia del uso y sentido de las letras en diversos contextos numéricos; como también, el desarrollo sintáctico de las letras en problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita, la cual permite analizar las soluciones y su pertinencia, ya que, el énfasis del trabajo matemático realizado por el docente se articuló alrededor de problemas priorizando las técnicas de cálculo, en desmedro de la reconstrucción de ideas y sentido del Lenguaje Algebraico, generando una gama de dificultades en torno a la discontinuidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje entre la aritmética y el álgebra, en la construcción de dominios cognitivos que conlleva la manipulación de expresiones algebraicas en un plano de generalización y la creación de habilidades que permitan generar los cambios de registro. Asimismo, la omisión del devenir histórico-cultural del Lenguaje Algebraico en torno a la noción de Transposición Didáctica, va producir que los/las alumnos/as no descontextualicen ni despersonalicen el saber puesto en juego en la sala de clases, ya que el conocimiento adquirido por el/la alumno/a no se condice con los requisitos que actualmente impone la sociedad en función de acreditar los aprendizajes como un producto social y cultural, bajo la lógica global del trabajo impulsado por el profesor en relación a la validación del conocimiento que se entrega en la escuela por medio del currículo educacional, es decir, el condicionamiento que conlleva la relación entre escuela y sociedad bajo las exigencias implicadas en la noosfera que empuja a la producción de conocimiento.

CAPITULO V:

CONCLUSIONES

En el contexto de la Matemática Educativa, se han esgrimido diversas problemáticas en torno a la adquisición de un contenido matemático bajo un conjunto de factores que tienden a organizar y justificar los fenómenos implicados en los procesos didácticos que se originan en la situación escolar, tales aproximaciones derivan de las problemáticas existentes entre la enseñanza y el aprendizaje de un objeto matemático.

Es así como en esta investigación, una de las ideas que converge, mediante la aplicación de las situaciones a didácticas a los/las alumnos/as, es la insuficiencia en la comprensión del uso y significado que conlleva el trabajar el Lenguaje Algebraico en diversas situaciones, en donde la organización de los problemas presentados permitió analizar los objetos matemáticos bajo múltiples aristas, observando en niveles iniciales la no adquisición de la unidad de estudio. Análogamente, se constató la aparición de ciertas nociones relacionadas a Transposición Didáctica, Contrato Didáctico y Obstáculos Epistemológicos, dichas apreciaciones se explicarán a continuación.

En primer lugar, la aplicación de ciertos elementos teóricos y prácticos para la posterior construcción de una Ingeniería Didáctica, permitió observar el escaso entendimiento por parte de los/las alumnos/as de Primer año Medio del colegio Boston College, en torno al uso y sentido de las letras como número generalizado. A su vez, al observar las secuencias de enseñanza en la cual se desarrolló la unidad se observó la poca comprensión, desde la dimensión cognitiva, en referencia a considerar el álgebra como aritmética generalizada, ya que el desarrollo de la unidad apuntó a enfatizar la técnica algebraica por sobre la construcción de un conocimiento significativo, es decir, no hubo un tratamiento en torno al análisis epistemológico de la naturaleza del concepto en función de resaltar la importancia de los símbolos como herramienta que permite manipular abstracciones en diversos contextos. De esta manera y manteniendo cierta correspondencia con lo expuesto en la dimensión cognitiva, se pudo concluir que no se cumplió a cabalidad el desarrollo cognitivo del/a alumno/a en relación a identificar como un primer paso del proceso didáctico la aritmética como fundamento del álgebra; ya que al observar y analizar sistemáticamente las diversas respuestas que sustentaron las situaciones a-didácticas diseñadas por el investigador, se generó un escaso entendimiento de los procedimientos tantos sintácticos como semánticos del Lenguaje Algebraico

Ahora bien, dichas limitantes se relacionan fundamentalmente por diversos factores didácticos, los cuales teóricamente se sustentan, en primer lugar, en la poca aplicación de actividades en las clases de matemáticas en las que se desarrolló la unidad de estudio, ya que si se consideran en un plano general los planteamientos teóricos referidos a la noción de Contrato Didáctico, bajo la relación dinámica existente entre profesor, saber matemático y alumnos/as, se puede señalar que el "tipo" de problemas presentados por parte del profesor a los/las alumnos/as no satisface las necesidades referidas a confrontar conocimientos anteriores con conocimientos en vías de construcción, es decir, que al presentarle al/la alumno/a por primera vez ciertos problemas concernientes a la nueva unidad, el/la educando cognitivamente aplicará conocimientos anteriores que le permitan resolver el problema planteado, manipulando ciertas estrategias y técnicas aprendidas anteriormente; de esta manera, la función principal del docente es confrontar dichos conocimientos, ya que el/la alumno/a debe explorar en una primera instancia ciertas estrategias que le permitan darse cuenta que con sus conocimientos anteriores no es capaz de resolver, produciendo cierto desconcierto en torno a que este último, debe realizar ciertas acomodaciones para su posterior entendimiento y adquisición del saber en desarrollo.

Cabe señalar, que la no inclusión y profundización por parte del profesor de actividades en la cual el/la alumno/a pueda desarrollar nociones protomatemáticas, paramatemáticas y nociones matemáticas del objeto matemático en estudio, obstaculizará en el educando la acción, formulación, validación e institucionalización de ciertas conjeturas que pueda obtener en torno a una situación didáctica específica, ya que parte fundante de la adquisición de un conocimiento matemático se relaciona con la reflexión que realiza el/la alumno/a sobre la actividad matemática; de esta manera, el conjunto de construcciones que operan en el proceso didáctico, llevarán ineludiblemente a obstáculos epistemológicos que subyacen del nulo tratamiento a las complejas redes conceptuales que adquiere el/la alumno/a en el sistema escolar bajo las relaciones de enseñanza y aprendizaje; asimismo, el docente al no trabajar en base a concepciones anteriores, hace predecible la dificultad de articular estrategias metodológicas que permitan la superación de conocimientos mal constituidos, específicamente de obstáculos didácticos, ya que estos tienen directa relación con la institucionalidad del sistema educativo, es decir, que el no tratamiento de ciertas actividades, como se dijo anteriormente, propendería a comprender estos errores como producto de la capacidad académica del/la alumno/a y no de un cambio en el proceso de la actividad matemática.

Lo anterior tiene sentido y se confirma, con la información recabada durante la implementación de las guías de trabajo, en donde sobresalen ciertos obstáculos ligados a la ausencia de sentido por parte de los/las alumnos/as acerca de la notación simbólica utilizada en el momento de traducir del lenguaje natural al algebraico y viceversa, errores sintácticos en las transformaciones, como también, ciertas respuestas que ponen de manifiesto la poca manipulación del pensamiento algebraico en expresiones algebraicas en torno a la generalización, es decir, manipular ciertas operaciones aritméticas con letras. Asimismo, se hace visible la poca relevancia que subyace al trabajo con ecuaciones y su posterior análisis de la solución; además, se hace visible que los/las alumnos/as tienen dificultades al concebir el álgebra como una aritmética generalizada, en donde, su falta de percepción del objeto de estudio, los/las lleva a utilizar herramientas numéricas como estrategia que les permite resolver los problemas algebraicos, es decir, escasa habilidad al concebir el uso del Lenguaje Algebraico en diferentes registros.

Un aspecto importante de resaltar es que el profesor al omitir el análisis del devenir Histórico–Cultural del concepto de Lenguaje Algebraico, provoca lo que anteriormente se mencionó como "génesis ficticia" puesto que descontextualiza este proceso provocando que los alumnos no generen la transición entre la aritmética y el álgebra, producto de una enseñanza simplificada, ya que desde esta perspectiva se desarrollan los nociones apuntando hacia ciertos matices de tales, mas no se explican en la totalidad fundamental necesaria para el entendimiento holístico del concepto; en coherencia con lo anterior, se puede señalar que al observar e identificar el mecanismo de enseñanza que utilizó el profesor al desarrollar parcialmente el contenido de Lenguaje Algebraico, queda de manifiesto la concepción de "transmitir conocimientos por sobre la de producirlos", ya que los resultados esgrimidos en el transcurso de esta investigación muestran que el aprendizaje de un cierto contenido matemático resulto ser el fin último de la acción educativa comandada por el docente, en la cual se le atribuye a este último toda la responsabilidad que gira en torno a la enseñanza, a su vez no se genera lo planteado por Brousseau en referencia a la evolución del contrato didáctico asociado a transmitir la responsabilidad matemática a los/las alumnos/as, incidiendo de esta manera en la dependencia que posee el/la alumno/a hacia el profesor en función del saber; además, el tratamiento limitado de la unidad de estudio, desde la perspectiva de la dimensión epistemológica, se materializó en que los/las alumnos/as desarrollaron concepciones y significaciones del concepto de Lenguaje Algebraico limitadas, ya que no hubo mayor referencia a analizar la distancia existente entre el saber sabio y el saber enseñado, es decir, bajo el contexto de la no inclusión de una de las dimensiones más importantes en la actividad matemática, el estudio del desarrollo histórico como parte fundante del objeto de estudio. A su vez, es posible completar dicha apreciación en torno a la consideración que se tiene del desarrollo histórico del álgebra como fuente de información que permite analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar.

En concordancia con lo anterior, y si se considera la relación dinámica que existe entre el/la alumno/a, el saber matemático y el/la profesor/a, se puede concluir que la construcción de conocimiento por parte del/a alumno/a se realiza mediante experiencias anteriores que posee este/a último/a y que es el docente el encargado de estructurar, a un nivel local, dichas concepciones, ya que estas representaciones ciertamente limitadas y poco precisas corresponden a la cultura científica que adquiere el/la alumno/a en el proceso didáctico.

Para finalizar es importante mencionar que la presente investigación se conforma como el primer eslabón de la construcción de una Ingeniería Didáctica y su posterior aplicación, debido a que en esta categoría inicial se pudo apreciar a un nivel local las metodologías utilizadas por el profesor y la introducción del objeto de estudio, sin embargo, se espera que con estos hallazgos se produzca correlacionalmente, una aplicación futura de la Ingeniería Didáctica que permita de manera global analizar las dificultades que puedan presentan los/las estudiantes en la evolución del concepto en cursos superiores, así como también analizar las metodologías utilizadas por los/las docentes, y ejecutar una categorización de los obstáculos que se presenten en estos niveles, con lo cual se podría perfilar una recomendación curricular respecto de las estrategias idóneas para generar en los/las alumnos/as aprendizajes significativos referidos al Lenguaje Algebraico.

Por lo anterior, surge la necesidad de materializar en la práctica docente, dichos planteamientos teóricos dados a conocer durante esta investigación, es decir, en las adaptaciones escolares; en donde se propugna enfatizar el papel de reorganizar y reconstruir la enseñanza a fin de facilitar el aprendizaje significativo de las matemáticas en los/las alumnos/as, ya que, uno de los énfasis que ha puesto la Didáctica de las Matemáticas es el de entregar al/la profesor/a, herramientas tanto teóricas como prácticas que permitan centrar la atención en las problemáticas que subyacen del conocimiento matemático del/a alumno/a y su posterior evolución; de esta manera, la adquisición significativa del proceso de estudio de este/a último/a van a permitir que el Contrato Didáctico entre en la etapa de evolución, permitiendo de esta manera que el/la educador/a traspase al educando la responsabilidad de hacer matemáticas, bajo la relación implícita que tiene la Didáctica de las Matemáticas con la teoría constructivista del conocimiento.

BIBLIOGRAFÍA

- **Libros**

- Artigue, Michèle; Douady, Régine; Moreno, Luis; Gómez, Pedro. (1995). “Ingeniería Didáctica en Educación Matemática”. Editorial Grupo Iberoamérica. México, D. F. México.
- Boyer, Carl. (1999). “Historia de la Matemática”. Editorial Alianza. Madrid. España.
- Brousseau, Guy. (2007). “Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas”. Editorial Libros del Zorzal. Buenos Aires. Argentina.
- Chevallard, Yves. (1991). “La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado”. Editorial Aique. Buenos Aires. Argentina.
- Chevallard, Yves; Bosch, Marianna; Gascón, Josep. (1997). “Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje”. Editorial Horsori. Barcelona. España.
- Duval, Raymond. (1999). “Semiosis y Pensamiento Humano: Registro semióticos y Aprendizajes intelectuales”. Editorial. Universidad del Valle. Cali. Colombia.
- Farfán, Rosa María. (1997). “Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio”. Editorial Grupo Iberoamérica. México, D.F. México.
- Manterola, Marta. (2003). “Psicología Educativa: Conexiones con la sala de clases”. Editorial Universidad Católica Raúl Silva Henríquez. Santiago. Chile.
- Ministerio de Educación. (1998). “Matemática. Programa de Estudio. Primero medio”. Santiago. Chile.
- Parra, Cecilia; Saiz, Irma. (2002). “Didáctica de las matemáticas: Aportes y reflexiones”. Editorial Paidós Educador. Buenos Aires. Argentina.
- Pérez Serrano, Gloria. (1998). “Investigación Cualitativa. Retos e interrogantes”. Editorial La Muralla. Madrid. España
- Rey, Julio. (1997). “Historia de la matemática”. Vol. 1 “De la antigüedad a la Baja Edad Media”. Editorial Gedisa. Barcelona. España.
- Ruiz Olabuénaga, José Ignacio. (2003). “Metodología de la Investigación Cualitativa”. Capitulo N°1 “La Investigación Cuali tativa”. Editorial Universidad de Deusto. España.
- Sessa, Carmen. (2005). “Iniciación al estudio didáctico del Álgebra”. Editorial Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina.
- Soussan, Georges. (1991). “Enseñar las ciencias experimentales: Didáctica y Formación”. Editorial UNESCO. Santiago, Chile.

- Stake, Robert. (1998). “Investigación con Estudio de Casos”. Editorial Morata, S. L. Madrid. España.
- Taylor, S.J: Bodgan, R. (1998). “Introducción a los métodos Cualitativos de Investigación”. Editorial Paidós. Buenos Aires. Argentina.

- **Documentos presentados en congresos, conferencias o reuniones.**

- Olfos, Raimundo. (2004). “Aportes de la investigación a la enseñanza del álgebra elemental”. En: XVII Jornadas Nacionales de Educación Matemática. SOCHIEM. Valparaíso. Chile. Noviembre 2004.
- Olfos, Raimundo. (2005). “La iniciación al álgebra: una tradición que no cambia”. En: XVIII Encuentro Nacional de Investigadores en Educación CPEIP.MINEDUC. Santiago. Chile. Noviembre 2005.
- Olfos, Raimundo; Soto, Daniela; Silva, Héctor. (2007). “Renovación de la enseñanza del álgebra elemental: Un aporte desde la didáctica”. En: XIX Encuentro Nacional de Investigadores en Educación. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Santiago. Chile. Noviembre 2007.

- **Tesis**

- Olazábal, Ana María. (2005). “Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto. Tesis no publicada para optar al grado de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa. CICATA-IPN. México, D.F. México.
- Palarea, Mª de las Mercedes. (1998). “La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años”. Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas. Universidad de la Laguna, Departamento de Análisis Matemático. La laguna. España.
- Ferrari, Marcela. (2001). “Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo”. Tesis no publicada para optar al grado de Maestra en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. DME, Cinvestav-IPN. México, D.F. México.

- **Recursos Electrónicos**

- Araya, Roberto. (2008). Artículo "Clases de matemáticas en Chile: predecibles y sin participación de los alumnos". En http://www.latercera.cl/contenido/28_2954_9.shtml.
- Brousseau, Guy. (1986). "Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas". En: http://lem.usach.cl/
- Malisani, Elsa. (1999). "Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento Algebraico: Visión Histórica". En: http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf
- Ministerio de Educación. (2004). "Chile y el aprendizaje de matemáticas y ciencias según TIMSS: Resultados de los estudiantes chilenos de 8º básico en el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias 2003" En: http://www.simce.cl/index.php?id=103&no_cache=1
- Ministerio de Educación. (2005). "Reforma Educacional Chilena". En: http://www.mineduc.cl/reforma/index.htm
- Ministerio de Educación. (2007). "PISA 2006: Rendimientos de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemática". En: http://www.simce.cl/fileadmin/Documentos_y_archivos_SIMCE/PISA2006/PISA_2006.pdf
- Ministerio de Educación. (2009). "SIMCE: Resultados Para docentes y directivos". En: http://www.simce.cl/fileadmin/Documentos_y_archivos_SIMCE/informe_resultados/informe_escuela_2_2008_tipo.pdf
- Ministerio de Educación. (2009). "Resultados nacionales SIMCE". En: http://www.simce.cl/fileadmin/Documentos_y_archivos_SIMCE/Informes_Resultados_2008/Informe_Nacional_2008.pdf