FACULTAD DE EDUCACIÓN
Escuela de Educación en Matemáticas
e Informática Educativa

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. UN DISEÑO CURRICULAR FUNDADO EN UN ANÁLISIS A PRIORI, PARA EL TRATAMIENTO EN AULAS DE ENSEÑANZA MEDIA.

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTES:
CANELO ESCOBAR, ANDREA FRANCESCA
CARTES RODAS, MARÍA JOSÉ
CIFUENTES ESPINOZA, DANIELA ALEJANDRA

PROFESOR GUÍA:
ALONSO QUIROZ MEZA

SANTIAGO, CHILE
AÑO 2014

AGRADECIMIENTOS

Primeramente agradecer a mi familia, pilar fundamental para poder llegar a esta instancia tan importante en mi vida, gracias por estar siempre ahí en los momentos difíciles dándome apoyo y orientando mi camino a lo largo del tiempo. Gracias por enseñarme de la vida y lo valioso que puede llegar a ser el amor verdadero, nada de esto sería posible sin su compañía e inmenso amor. Los amo infinito.

Madre, gracias por todos y cada uno de los esfuerzos realizados para conmigo, sé que no ha sido nada fácil pero sin embargo has hecho un muy buen trabajo, la mujer que soy y los logros que he conseguido los debo a ti y me siento infinitamente agradecida, te amo muchísimo.

Amigos muchísimas gracias por todos aquellos momentos vividos, por hacer esta etapa mucho más amena, siempre estando ahí con una palabra de aliento o simplemente una sonrisa que quita los males. Me hicieron creer en la amistad verdadera, esa que va más allá de las palabras.

Agradecer también a aquellas personas que estuvieron en el desarrollo de este proceso, profesores/as que dispusieron de su tiempo para entregarnos más que sólo conocimiento técnico, haciendo de nosotros mejores personas y mejores docentes. Mencionar también a una persona muy especial, tú, siempre apoyándome en cada locura y decisión, confiando y creyendo en mí, incluso más que yo misma. Tqm.

A mis compañeras de tesis, fue realmente un placer poder compartir este trabajo con ustedes y conocer las hermosas personas que son. El esfuerzo no fue en vano, se los aseguro.

Y por último agradecer a la vida por darme la oportunidad de vivir esta experiencia tan extraordinaria y poner en mi camino a personas que se han convertido en parte de mí, Amiga las palabras sobran, simplemente gracias por todo, Te quiero mucho!

"La educación es lo que queda una vez que olvidamos todo lo que se aprendió en la escuela"

Albert Einstein

Andrea Canelo Escobar.

AGRADECIMIENTOS

Feliz de lograr este sueño agradezco a las personas más importantes para mí, a ustedes con todo mi amor y cariño:

Carlos Cartes y Hermy Rodas, Papá y Mamá, ustedes son lo más importantes de mi vida, gracias por su incondicionalidad, por su cuidado y amor eterno. Por guiarme de la mano toda mi vida, por la confianza entregada para lograr mi carrera, me faltarán siempre las gracias para los dos, los amo con todo mi corazón, ustedes son mi vida, mis modelos a seguir. Por siempre su regalona. Eternamente Gracias

Mis hermanas Hermyz y Jacqueline, gracias por cuidarme y regalonearme siempre, son realmente las mejores. A mi cuñado Germán por ser mi segundo papá, gracias por todo, mis sobrinos-hermanos Tomás y Valentina, mis bebés, gracias por darme tanta alegría y amor en la vida. Los amo.

Mis Familias Cartes Acuña y Rodas Salgado, Abuelos, Tíos y Tías, Primos, Sobrinos. Gracias por acompañarme siempre, por entregarme tanto amor y tanta unión, todos ustedes forman parte de mi mayor tesoro, sean del norte, centro o sur, todos están en mi corazón. La familia es para siempre.

A mi media naranja Rodrigo, agradezco tu amor puro, tu compañía, tu paciencia y alegría, por acompañarme en cada momento difícil y siempre ayudarme a salir adelante. A la Familia Ríos por hacerme una más de ustedes y hacerme sentir tan querida. # Te amo $8x8^{8}$.-

A mis amigos, por estar siempre ahí. Por compartir tantas risas, tantos momentos, tantos abrazos. Todos ustedes son la familia que escogí. Gracias por ser tan valiosos. Mis investigadoras Andrea y Daniela, ha sido un placer enorme conocerlas. Las adoro

A la Jefa de carrera y profesores de la Universidad por su humildad, apoyo y valiosa enseñanza, por ser guías constantes en la realización de mi sueño.

Mis angelitos de cuatro patitas Harry, Mía y Max.

Finalmente a mi Ángel Guardián Isolda, gracias por alumbrar mi camino y cuidarme desde arriba. Me enseñaste que el amor es eterno. Te amaré por siempre.

"Camina con los pies en la tierra, pero teniendo la mirada y el corazón en el cielo"

Don Bosco

María José Cartes Rodas.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a toda mi familia, que si no fuera por el apoyo incondicional que me dieron para poder estudiar, seguir adelante y lograr mis metas y sueños, nada de esto sería posible. Por ello, especialmente quiero agradecer a mi mamá, la cual siempre estuvo ahí para alegrarse por mis triunfos y apoyarme en los momentos más difíciles. También, no puede quedar afuera un hombre muy importante para mí, el cual me heredo las dos virtudes más grandes, la paciencia y perseverancia, él es mi papá, que a pesar de no encontrarse con nosotros físicamente, sé que nunca me ha dejado sola en este largo camino. Y por último, agradecer a mi hermano, compañero fiel, apoyándome en cada uno de los pasos que doy.

En segundo lugar, debo agradecer a mis amigos, los de la vida, los de siempre, los que en todo momento han sido un gran apoyo en esta aventura que decidí emprender, donde debo destacar a mi mejor amigo, mi compañero, de risas y llantos, en las buenas y en las no tanto, el que nunca dudó que esta etapa llegaría a su fin, infinitas gracias.

No menos importante, quiero agradecer a mis compañeros de Universidad, ya que ellos amenizaron cada uno de mis días, siempre teniendo una sonrisa al momento de saludar para después compartir unas cuantas sonrisas más. Donde a lo largo de este periodo, dejaron de ser sólo compañeros, generándose una linda amistad, por eso gracias.

También debo agradecer a los profesores de esta casa de estudios, los cuales ayudaron a que todo esto sea posible, guiándonos en nuestra formación tanto académica como humana, de corazón, gracias.

Y por último, pero no por eso menos importante, quiero agradecer a mis compañeras, mis amigas, Canela y Negri, con las que más allá de compartir este trabajo, compartimos risas, compartimos secretos, compartimos amistad, amistad de verdad, de la que no espera algo a cambio, por eso quiero agradecerles, de verdad, cada momento que pasamos en este término de esta etapa. Gracias.

“Lo que somos se lo debemos al afecto. Los días de nuestra existencia ocurren gracias al cariño”.

Dalai Lama

Daniela Cifuentes Espinoza.

ÍNDICE

RESUMEN

El presente trabajo es una investigación sobre la situación actual de la enseñanza que realizan algunos profesores de matemáticas de educación media sobre el objeto sistemas de ecuaciones lineales.

La educación en los colegios en la actualidad, es una práctica social compleja y en particular en matemáticas, asignatura que provoca cierto desagrado y a veces muchas dificultades a los estudiantes.

La enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en las aulas muchas veces carece de sentido para los estudiantes debido que no logran integrar los conocimientos de una manera significativa, lo cual conlleva a no lograr el fin último que es el aprendizaje. Es entonces cuando nace esta propuesta de investigación, al formular la pregunta ¿qué se puede hacer para cambiar esta situación?

Es por tanto que en este proyecto de investigación se pretende realizar un diseño curricular para apoyar al profesor en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, el cual cubra las necesidades y exigencias de los estudiantes y sirva de guía para llevar a cabo eficazmente los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Palabras claves: Matemáticas; álgebra; sistema de ecuaciones lineales; enseñanza; teoría de situaciones didácticas; planificación del profesor; metodología de enseñanza; diseño curricular.

ABSTRACT

The present paper is a research about the current situation of the teaching that the mathematics teachers do on the content of the systems of linear equations.

The education at schools in these days is a complex social practice and in particular in mathematics, subject that provokes certain disdain and sometimes a lot of trouble for the students.

The teaching of the systems of linear equations in the classrooms lacks of sense for the students because they can't integrate the knowledge in a significant way, which leads to not achieve the ultimate goal that is the learning; It is when this research proposal born, when we ask the question: What can we do to change this situation?

It is for that this research project aims to conduct a curriculum design to support the teacher in teaching systems of linear equations, which covers all the needs and demands of students and help to guide them to achieve a strong teaching-learning process.

Key words: Mathematics, systems of linear equations; teaching; didactic situations theory; teaching plan; teaching methodology; curriculum design; mathematical modeling.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales son: "El problema central del álgebra lineal" (Strang, 1982). Por lo cual, el estudio y la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales tienden a ser necesarios y esenciales en la formación de los estudiantes, ya que su aplicación va en distintas áreas del conocimiento, en las matemáticas la encontramos dentro de la geometría o en la investigación de operaciones, como también los encontramos en la ingeniería, en las ciencias, en la computación, etc.

El presente trabajo hace un estudio de la dificultad que se presenta en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, por parte de algunos profesores de Chile, lo cual se expresa por la falta de significado y el temor o poco afecto hacia las matemáticas que poseen los estudiantes en general, así también este trabajo de investigación está enfocado en proporcionar estrategias de enseñanza y una propuesta didáctica para mejorar la enseñanza en el aula de los sistemas de ecuaciones lineales, donde los profesores puedan evidenciar un mejoramiento de su práctica educativa con respecto a la enseñanza de éstos.

A través del Ministerio de Educación se propone en el programa de estudio de matemática de segundo año medio, que la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales se debe llevar a cabo por medio del análisis y su correspondiente construcción a través de la resolución de modelos y también de los métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales, a pesar de que el ministerio pretende ambiciosamente una enseñanza completa de estos, sólo se lleva a cabo de manera mecanicista.

Con respecto al Marco Curricular[1] (MINEDUC, 2009, p. 145), "la matemática ofrece un conjunto amplio de procedimientos de análisis, modelación, cálculo, medición y estimación del mundo natural y social, que permite establecer relaciones entre los más diversos aspectos de la realidad. El conocimiento matemático forma parte del acervo cultural de la sociedad; es una disciplina cuya construcción empírica e inductiva surge de la necesidad y el deseo de responder y resolver situaciones provenientes de los más variados ámbitos, tanto de la matemática misma como del mundo de las ciencias naturales, sociales, del arte y la tecnología; su construcción y desarrollo es una creación del ser humano, ligada a la historia y a la cultura". La

---

[1] http://curriculumenlinea.mineduc.cl/sphider/search.php?query&t_busca=1&results&search=1&dis=0&category=1

formación matemática debe enfatizar el desarrollo del pensamiento creativo y crítico, es por tanto que el Marco Curricular (MINEDUC, 2009) potencia el uso de contextos reales, el aprendizaje significativo, el desarrollo de las habilidades, de capacidades cognitivas, de desarrollo personal, también modelamiento de situaciones, se incluye el uso de tecnologías digitales, de Internet y de software especializados, de apelar al interés de niños, niñas y jóvenes y de facilitar las tareas de exploración, aunque con el paso del tiempo, la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en las salas de clases se mantiene de tal manera que sólo se lleva a cabo su aprendizaje de manera mecánica, enfatizando propiedades, fórmulas y cálculos de estos, no siendo entonces reflejado lo declarado por el Marco Curricular actual.

A los estudiantes difícilmente se le plantean problemas reales que sean significativos para ellos, por lo tanto crea un rechazo, al no identificar el sentido que conlleva su aprendizaje y la falta de contextualización[2] que ven en los problemas planteados por el profesor, especialmente en lo que corresponde al modelamiento de situaciones fuera del contexto escolar, la cual puede ayudar al profesor a alcanzar otras áreas del saber matemático.

Por tanto se ve la necesidad de establecer una propuesta para mejorar la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales por parte de los profesores, donde debemos tomar en cuenta todos los procesos que conllevan para una enseñanza eficiente, partiendo por un buen proceso de resolución, la realización de un buen análisis con la reflexión de este mismo, así como también el planteamiento de problemas reales y significativos con los cuales los estudiantes puedan verse involucrados y llamar su atención, tal como se plantea en el Marco Curricular actual. Se toma en consideración además, que al entrar en vigencia las nuevas Bases Curriculares de Enseñanza Media, el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales será a partir del nivel de primero medio, otorgando un mayor desafío pedagógico a los profesores.

Para evidenciar lo anterior planteado se ha organizado la exposición de este trabajo de investigación en cinco capítulos.

En el Capítulo I, denominado planteamiento del problema, se describe el problema de investigación y su justificación, se plantea la respectiva pregunta de investigación del estudio, también se entrega una respuesta parcial a esta y se exponen los antecedentes

[2] S entiende como “el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y cultura” (Shulman, 2005, p. 11)

teóricos de investigaciones anteriores relacionadas con la enseñanza por parte de los profesores de matemáticas de los sistemas de ecuaciones lineales.

En el Capítulo II, se describe el marco teórico que guía este trabajo plasmando pensamientos e investigaciones de distintos autores.

En el Capítulo III, se define el enfoque de investigación utilizado en este estudio, se describe el diseño metodológico a utilizar, se plantea también el universo y los sujetos al cual se le realizará el instrumento de recogida de datos a emplear.

En el Capítulo IV, se presentan los resultados obtenidos que surgen de la aplicación del instrumento a emplear en este estudio, se realiza la recogida de datos, caracterización del conocimiento y el contraste por parte de las investigadoras a partir de las respuestas entregadas por los seis docentes seleccionados de la investigación. Se genera la elaboración de una propuesta curricular junto con sus fortalezas y debilidades en modo de ayuda a los docentes, esto basado a través del desarrollo de los objetivos específicos de la exploración. Se finaliza este capítulo, presentando algunas recomendaciones al profesorado de matemática en general, para la utilización de la propuesta presentada sobre la mejora del tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales en las aulas de clases.

Capítulo V, se presentan las conclusiones que se desprenden de la pregunta de investigación junto a la verificación de los supuestos planteados por las autoras. Se finaliza entregando proyecciones para futuros estudios realizados respecto a esto, en búsqueda de ser de gran utilidad para quien lo necesite.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas de esta investigación y anexos conformados por las cartas dirigidas a los distintos profesores encuestados, los resultados de la encuesta empleada, la validación del instrumento a través del juicio de expertos, programas de estudio etc.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1. Antecedentes teóricos y/o Empíricos observados

Posterior a la problemática señalada, se deben tener presente estudios relacionados al tema en cuestión, anteriormente mencionado. Por esto se debe citar, primeramente, a Sandra Segura de Herrero que realizó una investigación, la cual "consiste en diseñar y poner a prueba una secuencia de enseñanza de *calidad* que vuelva asequibles el aprendizaje y solución de los objetos sistemas de ecuaciones lineales" (Segura, 2004, p. 1), donde ella trabaja con una secuencia didáctica la cual "no asocia el objeto sistema de ecuaciones lineales con los métodos de resolución, por lo cual evita que se confunda el objeto con los algoritmos" (Segura, 2004, p. 30). Además concluye que "el trabajo con los tres registros de representación facilita que el alumno identifique al objeto en todos los registros ya que se emplean en forma indistinta para simbolizarlo" (Segura, 2004, p. 30). Además tal como afirma Segura, también podemos destacar el aporte de Figueroa (2013), la cual recomienda a los futuros profesores que quieran diseñar una secuencia didáctica, tener en cuenta "en el diseño de las actividades para los sistemas de ecuaciones lineales, enfatizar en las conversiones- en ambos sentidos- entre los registros gráfico y algebraico" (Figueroa, 2013, p. 166).

Además Figueroa postula que se deben "incluir en las actividades situaciones que induzcan al alumno a pasar por las fases de acción, formulación, validación e institucionalización con actividades individuales y grupales de dificultades graduadas" (Figueroa, 2013, p. 165). Cabe destacar que estas etapas fueron desarrolladas por Guy Brousseau.

También recomienda que se debe "estimular el desarrollo de la capacidad de crear problemas a partir de un registro algebraico" (Figueroa, 2013, p. 166). Y por último hace referencia a la utilización de software matemático, en este caso específico GeoGebra. Estos consejos que entrega la autora, emergen de una investigación, la cual está enfocada al contenido sistemas de ecuaciones lineales, con base en la Teoría de Situaciones Didáctica[3], basándose en la teoría de registros de representación semiótica.

A demás surge la necesidad de "generar más y mejores metodologías de enseñanza de las ecuaciones de primer grado que realmente se ocupen de propiciar la adquisición de aprendizajes significativos y con ello duraderos" (Maffey, 2006, p. 128). Dado que si mejoran, se facilitará el entendimiento de los sistemas de ecuaciones lineales.

[3] Teoría desarrollada por Guy Brousseau.

2. Justificación e Importancia

Esta propuesta de investigación nace a partir de la interrogante, ¿estamos los docentes realmente capacitados para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales? ¿Basta solo dominar el contenido? Al tratar de responder estas preguntas se cree que no se tienen las herramientas suficientes para el entregar el contenido y las habilidades de pensamiento matemático desde una mirada integral.

Tal como lo señala Gómez (1999) en el siguiente apartado:

> "El trabajo diario de los profesores les obliga a tomar partido, debiendo situarse ante las diversas alternativas y adoptar decisiones que afectan a los siguientes frentes:
>
> - *Currículum:* ¿Qué programa? ¿En qué partes ha de poner énfasis? ¿Cómo se debe segmentar y secuenciar?
> - *Profesores:* ¿Cuál es su papel? ¿Cuál es su responsabilidad? ¿Cómo debería juzgar a sus alumnos? ¿Qué métodos deben poner en práctica?
> - *Alumnos:* ¿Qué se puede esperar de ellos? ¿Qué pueden aprender y cómo? ¿Qué necesitan? ¿Qué saben? ¿Qué han de hacer en la clase?
>
> Lo que ocurra será resultado del acierto o error en la toma o aplicación de estas decisiones. Aunque muchos profesores crean que pueden tomar la mejor decisión sin necesidad de conocimientos teóricos, el hecho es que implícita o explícitamente es la teoría lo que determina el currículum y su puesta en práctica" (Gómez. B, 1999, p. 74).

A partir de esta información, se puede establecer que la importancia de esta investigación será dar respuesta a algunas de estas interrogantes que señala el autor, creando un diseño curricular fundado, estableciendo los componentes que se deben tener en cuenta al momento de diseñar la unidad, para así ser un real aporte a los colegas en sus prácticas docentes y además en la formación del conocimiento y razonamiento matemático, específicamente en los sistemas de ecuaciones lineales.

Cuando se habla de componentes, las investigadoras hacen referencia a que el profesor no sólo debe enseñar contenidos, sino que:

> "También son necesarios un análisis semiótico, una reflexión fenomenológica, una perspectiva histórica y, en su caso, epistemológica, una valoración de contextos en los que se presenta cada concepto y de sus usos y significados, y un revisión de los materiales y recurso con los que puedan mostrarse" (Rico, 2000, p. 51).

Por ello, este diseño curricular pretende guiar al docente en el tratamiento de este objeto matemático, dado que no hay referencias de cómo abordar el contenido de mejor manera, tal como señala Gómez (1999), dejando en las manos de cada profesor el cómo enseñar. Por lo cual este estudio es de gran relevancia para la tarea docente, ya que con esto cada uno de los profesionales de la educación podrá reflexionar sobre su trabajo y así justificar lo que están haciendo para mejorar su práctica.

3. Definición del Problema

Esta investigación se presenta con un objetivo claro y definido, establecer a través de un análisis a priori un diseño curricular para el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales en las aulas de enseñanza media. Es por tanto que la pregunta de investigación del presente trabajo es la siguiente.

4. Pregunta de Investigación

¿Cuáles serían los componentes esenciales que se deben tomar en cuenta, para la elaboración de un diseño curricular, para la enseñanza efectiva de los sistemas de ecuaciones lineales?

5. Limitaciones

Como en cualquier investigación siempre se presentan diversos tipos de limitaciones al momento de llevar a cabo el estudio, estas pueden ser dentro del propio entorno donde se llevará a cabo la investigación o también al exterior, por lo cual se clasificaran en dos tipos: internas y externas.

5.1. Limitaciones Internas

Son aquellas limitaciones que dependen de lo interno de la investigación, es decir, las distintas dificultades que ocurrieron a lo largo de la investigación, como por ejemplo establecer y organizar un horario acorde para todas las investigadoras, como también una organización con el profesor guía.

5.2. Limitaciones Externas

Limitación externa se entiende como aquello que está fuera del alcance de las investigadoras, es decir, se basará en el contexto de la investigación y será controlado por las demás personas, en este caso dependerá del tiempo y disponibilidad que los docentes darán para la resolución del cuestionario, como también del tiempo de espera que toma el trámite de permiso para ingresar a los seis distintos establecimientos de Santiago a realizar la investigación. Además se debe mencionar que los docentes encuestados se negaron a entregar sus planificaciones para poder realizar algún tipo de análisis.

Por otra parte como limitación externa se encuentra la poca disponibilidad de textos con la que cuenta la Universidad para el desarrollo de la investigación, la cual es muy limitada, siendo esta la primera fuente de búsqueda de información de las investigadoras, por esto se recurre a buscar distintas referencias bibliográficas en otras universidades, bibliotecas, etc. Alargando el tiempo de organización de antecedentes para el presente estudio.

Otra limitación que surgió al final de la investigación es el acontecer actual de la Universidad, dada la ocupación pacífica de esta, por esto los docentes validadores tardaron más del tiempo acordado en aprobar el instrumento de recogida de la información, lo que provocó un retraso en el desarrollo de la investigación.

6. Supuestos de Investigación

Entendiendo por supuestos de investigación como una posible respuesta tentativa a la pregunta de investigación del presente estudio.

Por ello, se cree que actualmente los docentes sólo realizan clases tradicionalistas, donde enseñan los sistemas de ecuaciones lineales meramente como un algoritmo, dejando de lado el sentido real que tiene este objeto matemático, generando que carezca de sentido este aprendizaje para el estudiante.

Además de lo mencionado anteriormente, las realizadoras de esta investigación creen que a pesar de estar estipulados en los programas de estudios los conocimientos mínimos que se deben enseñar, difícilmente se desarrollan de manera completa, con énfasis y enfoque curricular propuesto. A partir de esta idea, se debe considerar que el programa de estudio de matemática determinado por el MINEDUC, de segundo año medio, en la tercera unidad *Álgebra,* se presentan siete aprendizajes esperados, de los cuales los dos últimos apuntan al tema en cuestión, sistemas de ecuaciones lineales.

AE 06: Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente.

- Determinan y verifican la solución grafica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, manualmente.

- Determinan y verifican la solución grafica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, usando un software gráfico.
- Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución.
- Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante reducción.
- Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante igualación.
- Fundamentan acerca de cuál es el método más eficiente para resolver un sistema de ecuaciones lineales dado y determinan su solución.
- Discuten acerca de la existencia y pertinencia de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

AE 07: Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Modelan una situación, usando un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Relacionan un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con el contexto de un problema.
- Interpretan la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas según el contexto del problema asociado.
- Identifican la función exponencial en contextos diversos.
- Modelan situaciones diversas, cuyo modelo resultante sea una función exponencial. Por ejemplo, la reproducción bacteriana.
- Identifican la función raíz cuadrada en contextos diversos. (Ministerio de Educación, 2011, pp. 63-64)

Con esto se puede apreciar que la propuesta educacional presentada en el programa de estudio del Ministerio de Educación de Chile es ambiciosa, ya que busca presentar el contenido de manera integral, pasando por diversos registros como el gráfico y el algebraico, además pretende que el estudiante se cuestione acerca de la existencia de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales. También se puede apreciar que el primer indicador del aprendizaje esperado 07 es modelar una situación utilizando los sistemas de ecuaciones lineales y finalmente se aspira a que los estudiantes puedan interpretar en distintos contextos las soluciones de dichos sistemas.

En base a este antecedente, no necesariamente se puede afirmar que los docentes cumplen a cabalidad cada uno de los puntos estipulados en el programa, por ello se cree que los docentes de matemáticas no tienen la suficiente preparación para poder lograr un aprendizaje en los estudiantes, sin caer en técnicas tradicionalistas y mecanicistas.

Donde un factor que se debe considerar es el tiempo que disponen los profesores para la preparación de sus clases, tal como afirma PRELAC sobre la "urgencia de crear las condiciones necesarias para que los docentes pasen de su rol tradicional de "instrumentalizadores de currículos" a autores y protagonistas como garantía de que las escuelas y las aulas sean los escenarios reales de los cambios educativos" (Robalino, 2005, p. 14).

Este supuesto no es mero capricho de las investigadoras, ya que basándose en la propia experiencia, tanto como estudiantes de secundaria o universitaria y también en sus propias prácticas profesionales, se pudo presenciar que el profesor no cumple con todos los indicadores presentados en el programa de estudio y difícilmente se logran los aprendizajes mínimos esperados por el Ministerio de Educación, además se recurre a prácticas obsoletas. Con prácticas obsoletas, se hace referencia a teorías sustentadas en paradigmas como el tradicional, mecanicistas y memorísticos.

Cuando se habla del no cumplimiento de todos los indicadores, se refiere específicamente a que en algunos casos no se hace el traspaso al registro gráfico, como se pudo ser testigo al observar una clase, y además se destaca el indicador *modelan una situación, usando un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas,* el cual en las prácticas docentes, en general, es prácticamente nulo.

Por otro lado, se debe tener en cuenta, en base a la apreciación de las investigadoras, que los años de práctica docente influyen bastante en el cómo se enseñan los contenidos. Donde se espera que los docentes con mayor experiencia estén mejor preparados que los profesores *nóveles*[4]. Esta creencia es en base a dos puntos, primero:

> "El profesor en formación y durante sus prácticas, desarrolla ideas de cómo enseñar el contenido matemático, sobre todo de cómo enseñar a resolver problemas, e ideas de cuál es la manera más óptima para generar aprendizaje, esto, sobre la base de procedimientos que adquiere en su propia

[4] Entiéndase como profesores nóveles a docentes que tengan a lo más 5 años de experiencia en trabajo en aulas.

experiencia, sin dejar de lado sus creencias y concepciones" (Báez, 2007, p. 5).

Y segundo, se debe a los resultados de la prueba inicia del año 2013 ya que los resultados fueron los siguientes:

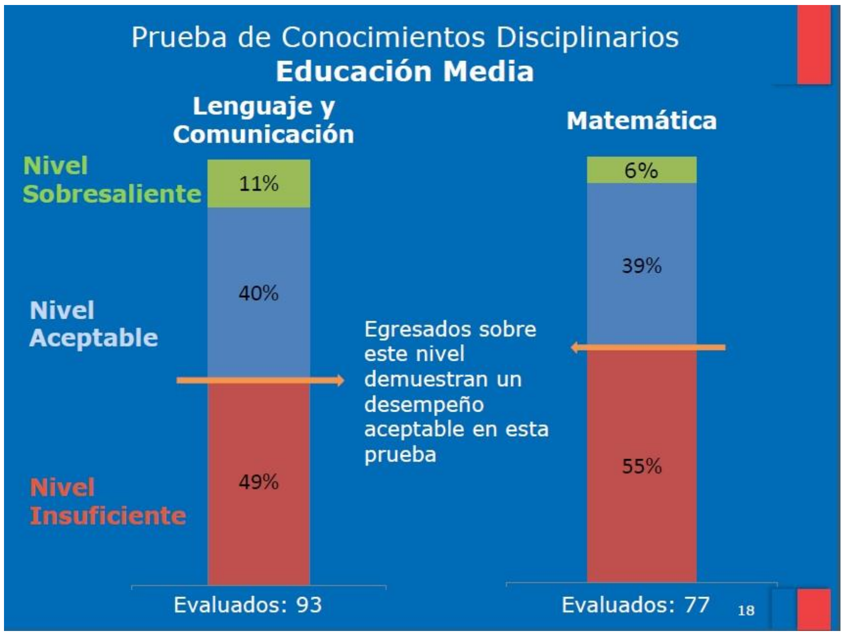


Figura 1. Resultados prueba inicia[5]

Con este antecedente, se puede afirmar que los profesores nóveles están menos preparados en el ámbito disciplinar, ya que el 55% de los profesores evaluados pertenecen a nivel insuficiente, lo que implica que más de la mitad de los docentes que rindieron esta prueba no son competentes a nivel de conocimiento en el área de las matemáticas, pero esto no implica directamente que los docentes no tengan conocimientos pedagógicos, ya que en la prueba inicia también se explicita que:

[5] Figura 1 extraída de: http://www.mineduc.cl/usuarios/mineduc/doc/201308221629100.RESULTADOS_EVALUACION_INICIA.pdf

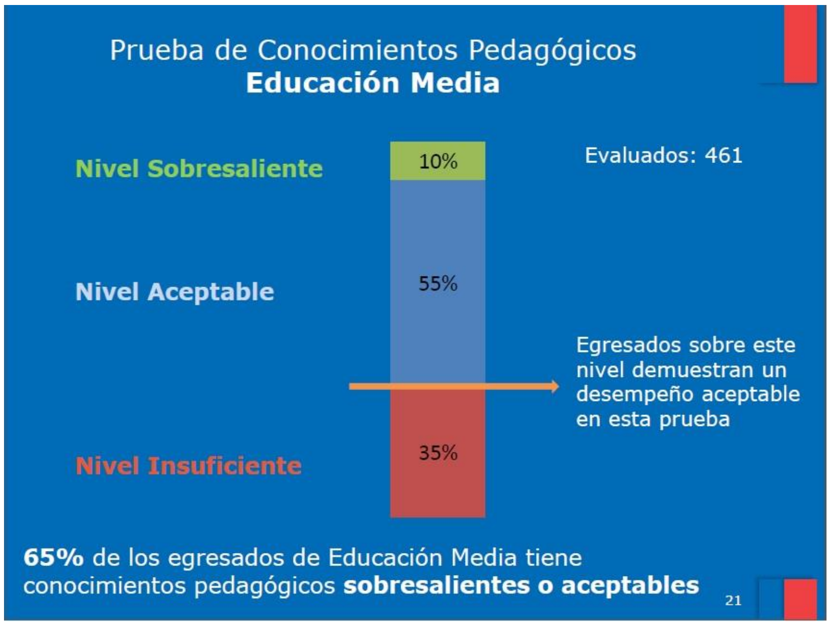


Figura 2. Resultados prueba inicia[6]

Con esto se aprecia que el porcentaje de evaluados con nivel insuficiente bajó considerablemente, donde se debe tener en cuenta que en la estadística están contemplados docentes de diversas áreas del conocimiento, como lenguaje, historia, geografía y ciencias sociales, biología, física y química. También se debe tener en cuenta que los docentes de las diversas áreas salieron en su mayoría mal evaluados en lo disciplinar, alcanzando un promedio de un 72,8%, contemplando las 5 áreas mencionadas anteriormente, con nivel insuficiente.

En base a estos antecedentes se afirma sólo que los docentes nóveles, en su mayoría, no están preparados en base a los contenidos, pero no se puede ser tan categóricos al hablar en base a los conocimientos pedagógicos, dado a que no está especificado que porcentaje de cada una de las áreas corresponde a los niveles insuficientes, aceptable o sobresaliente. Esto mismo se afirma en una investigación realizada en México, como se puede apreciar en el siguiente apartado:

> "En cuanto a las investigaciones que han estudiado la práctica desde un enfoque disciplinar y pedagógico, se ha constatado que hay docentes de matemáticas que no tienen la preparación adecuada para manejar con éxito la enseñanza, y si han cursado dicha preparación, por lo general se limitan a enseñar contenidos como los presenta un libro de texto -abarcando el mismo grado de profundidad- o sus notas de clase" (Báez, 2007, p. 2).

[6] Figura 2 extraída de: http://www.mineduc.cl/usuarios/mineduc/doc/201308221629100.RESULTADOS_EVALUACION_INICIA.pdf

7. Objetivos

El foco de este trabajo de investigación es la elaboración de un diseño curricular para apoyar las prácticas laborales de los docentes y así mejorar el tratamiento que se da a los sistemas de ecuaciones lineales en las aulas de la enseñanza media, por lo tanto se desprenden los siguientes objetivos generales y específicos a tratar en la presente investigación.

7.1. Objetivo General

Elaborar un diseño curricular fundado en un análisis a priori, sistematizado en fases para la enseñanza efectiva de los sistemas de ecuaciones lineales en aulas de educación media.

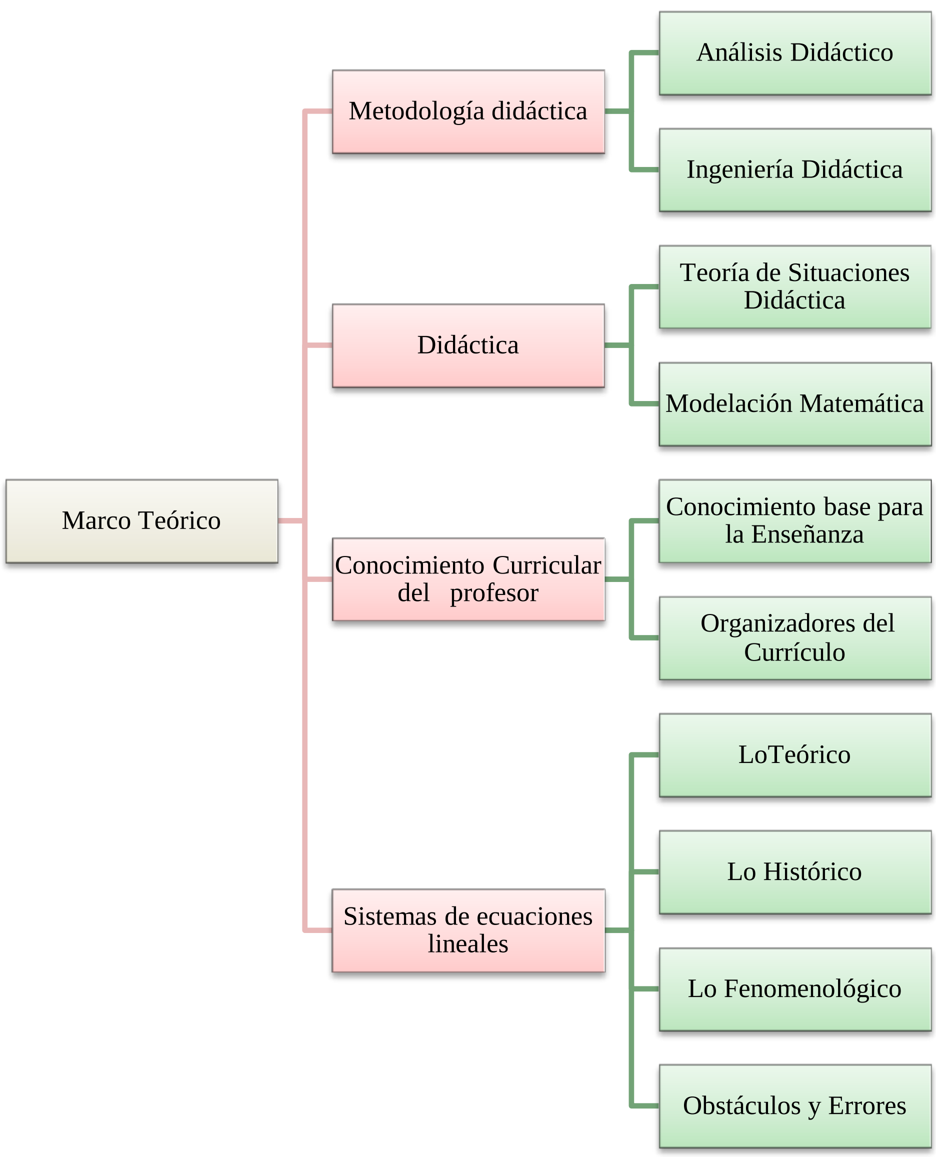
7.2. Objetivos Específicos

- Caracterizar el conocimiento para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, con base en las categorías de Lee Shulman.
- Contrastar el conocimiento de los profesores con la caracterización anterior.
- Contrastar el programa de estudio y el texto del estudiante entregado por el Ministerio de Educación.
- Proponer un diseño curricular para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales con base en la Modelación Matemática, a partir de la información recopilada en los objetivos anteriores.
- Detectar fortalezas y debilidades del diseño curricular propuesto.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

El marco teórico es donde se desarrolla todo el sustento teórico de la investigación, el cual está desglosado en cuatro ejes principales, metodología didáctica, didáctica, conocimiento curricular y por último el tópico específico matemático en el cual se centra la investigación. Por tanto a continuación se presenta un esquema, el cual muestra cómo se compone el marco.

Cada uno de estos puntos ya mencionado, además se descomponen en conocimientos más específicos, tan como lo muestra el esquema, los cuales serán profundizados a medida que se avance en la lectura.



1. Análisis Didáctico

El término análisis se refiere a la "conceptualización de las actividades que el profesor de matemáticas debería realizar para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas" (Gómez, p. 2). Donde "son cuatro las áreas básicas referenciales a considerar como fuentes de información científica: Historia y Epistemología de la Matemática, Aprendizaje y Cognición, Fenomenología y Enseñanza y estudios curriculares en relación con el conocimiento matemático en estudio" (Gallardo, p. 2).
"El análisis didáctico tiene sentido como procedimiento para la planificación local de una unidad didáctica o una hora de clase" (Gómez, p. 2). Donde el fin de realizar este tipo de análisis son dos, primero es conocer los distintos significados del concepto en cuestión, que en este caso es los sistemas de ecuaciones lineales. Y segundo, se debe seleccionar cuál será el objeto de instrucción.

Otra definición que se puede destacar de análisis didáctico hace referencia a un "procedimiento de diseño, desarrollo y evaluación para un tema matemático concreto, fundamentado en la noción de currículo, sostenido por los organizadores curriculares y, en nuestro caso, orientado mediante un enfoque funcional de las matemáticas escolares" (Lupiañez, 2009, pp. 34-35).
Con esto, se puede notar que un análisis didáctico, tal como lo dice su nombre, es un análisis exhaustivo sobre un contenido en específico, por tanto "el análisis didáctico se caracteriza por su especificidad a un concepto matemático concreto. Solamente cuando se profundiza en esa especificidad, es posible reconocer los múltiples significados del concepto" (Gómez, p. 2).

2. Ingeniería Didáctica

Primeramente cabe destacar que este término ingeniería didáctica nació en Francia a comienzo de los años ochenta. Esta es una metodología de investigación que "se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, 1995, p. 36).

Además, realizando una comparación con otro tipo de metodologías, la segunda característica que resalta la autora es su forma de validación, ya que esta se ubica "en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori" (Artigue, 1995, p. 37).

Con estas dos características ya mencionadas, se debe conocer que la ingeniería didáctica consta de cuatro fases delimitadas de manera temporal: “la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación*”* (Artigue, 1995, p. 38).

Para entender de mejor manera cada una de estas fases, se explicará el fin que busca cada una de ellas.

- Fase 1: En esta etapa, la autora destaca que no sólo se trata de los conocimientos didácticos que se conocen previamente, tanto a nivel particular como general, sino que también consta de una serie de análisis preliminares, entre los más frecuentes que destaca son: análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan la evolución y por último el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva (Artigue, 1999, p. 38).
- Fase 2: Esta etapa se basa primordialmente en un conjunto de hipótesis, donde “tradicionalmente, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y otra predictiva” (Artigue, 1999, p. 45).
- Fase 3: En esta etapa se puede apreciar, tal como lo dice su nombre, es la fase donde se experimenta y se puede realizar una recogida de datos en base al objeto en estudio.
- Fase 4: Esta es la última fase que se desarrolla en la ingeniería didáctica, donde la primera etapa es el análisis a posteriori el cual consiste en “el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella” (Artigue, 1999, p.48).

Y la segunda y última etapa es la de validación de las hipótesis formuladas en la investigación, la cual consiste “en la confrontación de los dos análisis, el a priori y el a posteriori” (Artigue, 1999, p. 48).

3. Teoría de Situaciones Didácticas

Esta teoría surgió en Francia en manos de Guy Brousseau. Donde lo primero que se debe tener en cuenta es que, esta teoría no se relaciona con técnicas o teorías tradicionalistas, dado que el "saber matemático no es solamente aprender definiciones y teoremas" (Brousseau, p. 4); entendiendo con técnicas tradicionalistas a la "relación estudiante-profesor, en la cual, el profesor simplemente provee (o deposita) los contenidos, instruye al estudiante, quien captura (o engulle) dichos conceptos y los reproduce tal cual le han sido administrados" (Chavarría, 2006, p. 33). Esta teoría más bien aboga por la construcción del conocimiento donde "el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento. Así, Situación Didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio didáctico" (Chavarría, 2006, p. 33).

Dentro de esta teoría se deben reconocer dos dimensiones presentes, como lo son la situación a-didáctica y la situación didáctica.

Al hablar de situación a-didáctica, nos referimos a:

> "Proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica" (Chavarría, 2006, p. 33).

Es decir, el docente no tiene una intervención directa en el desarrollo que realizan los estudiantes, donde el propósito es institucionalizar los conocimientos posteriormente.

Por otra parte, la situación didáctica "comprende el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento" (Chavarría, 2006, p. 33). Con esto, cabe destacar, que la situación didáctica engloba la situación a-didáctica.

> "En resumen, la interacción entre los sujetos de la Situación Didáctica acontece en el medio didáctico que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento (situación didáctica) y pueda el estudiante, a su vez, afrontar aquellos problemas inscritos en esta dinámica sin la participación del docente (situación a-didáctica)" (Chavarría, 2006, p. 33).

Además se debe tener conciencia que, bajo este paradigma la dinámica de trabajo es bajo la dinámica de juego, donde se deben establecer las reglas que hay que cumplir. Por ello se debe establecer el contrato didáctico, el cual “refiere a la consigna establecida entre profesor y alumno, de esta forma, comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente” (Chavarría, 2006, p. 34).

Teniendo en cuenta estos términos se puede entender que existen distintos tipos de situaciones didácticas, donde cada una de ellas debe desembocar en una situación a-didáctica. Estas tipologías son cuatro, las cuales se presentan a continuación:

- Situación de acción, consiste en que el estudiante trabaje de manera individualmente en el problema presentado por el profesor. “Es decir, el estudiante individualmente interactúa con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos” (Chavarría, 2006, p. 35).
- Situación de formulación, está enfocada principalmente en la socialización de las ideas de los estudiantes, es decir, consiste en un trabajo en grupo, donde deben compartir sus experiencias para la construcción del conocimiento. Se debe tener en cuenta también que la importancia de esta situación es que todos los integrantes de grupo deben participar.
- Situación de validación, tal como lo dice su nombre, esta situación es cuando un interlocutor toma en cuenta las ideas entregadas por los grupos o de manera individual y en base a esa interacción se entrega el producto obtenido. “Es decir, se valida lo que se ha trabajado, se discute con el docente acerca del trabajo realizado para cerciorar si realmente es correcto.” (Chavarría, 2006, p. 35).

  En esta etapa los estudiantes deben lograr buscar pruebas para demostrar que sus afirmaciones son correctas.
- Situación de institucionalización, en esta fase el estudiante ya ha construido su conocimiento, por lo cual “el docente en este punto retoma lo efectuado hasta el momento y lo formaliza, aporta observaciones y clarifica conceptos ante los cuales en la situación a-didáctica se tuvo problemas” (Chavarría, 2006, p. 35).

4. Modelación Matemática

La modelación matemática[7] se propone como una práctica de matematización en el aula que posibilita la emergencia del trabajo cooperativo, en oposición al trabajo individual. Corresponde a una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra (Arrieta y Díaz, 2013). Es una de las cuatro estrategias que el currículum chileno contempla que se desplieguen en el aula, en el subsector de matemáticas, junto con resolución de problemas, comunicación y heurísticas.

Además se debe considerar que “distintas perspectivas dan lugar a diferentes visiones tanto de la aplicación de la modelación en el aula como de la investigación acerca de su uso. Todas comparten, de alguna manera, el énfasis en la utilidad de la modelación en la enseñanza de las matemáticas dado que los resultados de investigación muestran que, cuando se aprenden directamente los conceptos de las matemáticas no es fácil aplicarlos a la solución de problemas” (Trigueros, 2009, p. 77).

En Holanda hace aproximadamente 30 años, en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas surgió un movimiento de reforma conocido como enseñanza realista de las matemáticas. Según Trigueros (2009) dicha postura cree a las matemáticas como una actividad humana, por lo tanto, se despliega a partir de modelos originados de situaciones en un contexto específico real, de fantasía o formal. Lo importante en esta perspectiva es que estos contextos pueden ser reales para los estudiantes.

Por otra parte se menciona que “como metodología de aplicación se presentan al estudiante situaciones en contexto con las cuales trabaja para que conforme requiera matematizar la situación y convertirla en un modelo, “reinvente” las matemáticas. Los modelos funcionan entonces como puentes que conducen hacia una mayor comprensión de las matemáticas con la finalidad de que su conocimiento progrese y evolucione” (Trigueros, 2009, p. 78).

“En otras perspectivas cercanas a la de las matemáticas realistas el uso de ejemplos auténticos —tomados de problemas de la industria o de las ciencias— juega un papel esencial. Se afirma que “el proceso de modelación se concibe como un todo y no como algo parcial, cuyo objetivo es el desarrollo de acercamientos a la forma en que

[7] La palabra modelación es una “contracción” de los términos modelización y educación.
Modelación = modelización + educación (Bassanezi y Salett, 1997, p. 14)

se trabaja en las matemáticas aplicadas y no el desarrollo de conceptos" (Camarena citado en Trigueros, 2009)

Barbosa (citado en Trigueros, 2009) postula que existe otra manera de ver el problema de la modelación, este se considera como un contexto de aprendizaje en el que se estimula a los estudiantes a cuestionar e investigar situaciones referidas a la realidad a través del uso de las matemáticas, que les ofrece una oportunidad para debatir tanto el papel de éstas en la sociedad como la naturaleza de los modelos matemáticos. Se considera un modelo matemático a cualquier representación de la situación a través de las matemáticas.

Para la teoría de modelos y modelación[8] la matemática es una ciencia donde predomina la búsqueda de patrones. El aprendizaje de ésta se lleva a cabo en un ambiente que promueva y favorezca el proceso de reflexión y cuestionamiento, que conduzcan a la comprensión de los fenómenos a través del uso de herramientas matemáticas. Dado esto Trigueros señala que:

"Por ello, se ha desarrollado criterios que los problemas a presentar a los estudiantes deben satisfacer para lograr lo que se considera más importante: que los alumnos desarrollen ideas matemáticas poderosas que les permitan analizar la situación a la que se enfrentan y que puedan, posteriormente, ser aplicadas como herramienta conceptual para resolver otros problemas que en apariencia no están relacionados con el que han trabajado, pero que pueden tratarse con las mismas ideas matemáticas" (Trigueros, 2009, p. 79).

A continuación se presentaran dos grandes perspectivas sobre la modelación matemática:

4.1. Perspectivas de la Modelación Matemática

Existen dos grandes tendencias sobre el concepto de la modelación en educación matemática, una de estas está definida como "un método de enseñanza y aprendizaje que puede ser objeto de enseñanza o un medio para enseñar matemáticas" (Córdoba, 2011). La otra se entiende como: "un proceso o actividad en la que un problema, situación o fenómeno por fuera de la matemática es traído al dominio matemático para ser resuelto o explicado" (Córdoba, 2011).

[8] Lesh, R. and Doerr, H. M. (Eds.). (2003). Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Seguido se realizara una recapitulación de las diferentes perspectivas que siguen los lineamientos anteriormente mencionados.

4.1.1. Modelación como Método de Enseñanza y Aprendizaje

- Forma de resolución de problemas de la vida real en la que no solo se tiene en cuenta la solución del mismo sino que exige la utilización de un gran número de habilidades matemáticas y no llega solo a una respuesta especifica sino a un rango de respuestas que describen la conducta del fenómeno considerado y da al resultor sentido de participación y control de los procesos de solución (Castro y Castro, 2000, citado en Córdoba, 2011).
- "Método de enseñanza y de investigación el cual se vale de la esencia de la modelación que consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad a un lenguaje matemático: el modelo matemático" (Biembengut y Hein, s.f. citados en Córdoba, 2011)

- "Método de enseñanza-aprendizaje que utiliza el proceso de modelación en cursos regulares" (Bassanezi y Biembengut, 1997, citados en Córdoba, 2011)

4.1.2. Modelación como Proceso

- "Proceso en el cual un problema no matemático es resuelto a través de la aplicación de las matemáticas" (Kaiser, y Maab, 2007, citados en Córdoba, 2011).

- "Proceso que tiene su esencia en la construcción de modelos matemáticos abstractos. En este eslabón del proceso de solución de problemas el sujeto expresa en un lenguaje matemático los elementos e interrelaciones del problema dado, aplicando los conocimientos adquiridos" (Diéguez y otros, 2003, citados en Córdoba, 2011).

- "Estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un "micromundo" (contexto dotado de relaciones y significados) que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real" (Villa, 2007, citado en Córdoba, 2011).

4.2. Socioepistemología de la Modelación Matemática

La socioepistemología entiende la modelación matemática como:

"Una práctica que se comparte y se ejerce en comunidades específicas y en contextos particulares, y que al ser ejercida por estudiantes y profesores (actores del sistema didáctico) permite la resignificación de conocimiento matemático escolar lo cual a su vez modifica esas prácticas bien sea incorporando nuevos elementos, enriqueciendo los ya existentes o aportando nuevos significados, y modifica también a los individuos involucrados" (Córdoba, 2011, p. 65).

Para Ferrari y Farfán (citados en Córdoba, 2011) la modelación corresponde a una práctica social que tiene como centro originar herramientas y representaciones sociales que permiten producir conocimiento, modificarlos y modificarnos.

Las prácticas de modelación, como una aproximación teórica desde la perspectiva socioepistemológica, corresponden a prácticas sociales que se desarrollan en algún contexto particular e interactuando con fenómenos de la vida, son en estas situaciones, los modelos construidos por los estudiantes, las herramientas necesarias para comprender o predecir el comportamiento de dichos fenómenos (Córdoba, 2011).

En conclusión, según Córdoba, la modelación es "una práctica que refleja una cierta intencionalidad humana".

Para objetos de la investigación, el concepto de modelación será entendido como: "Una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra. La práctica de modelación permite tender puentes entre lo que se hace en la escuela y lo que se hace en comunidades no escolares. En esta práctica el modelo no existe independiente de la actividad humana. Se manifiesta como modelo en tanto se usa para intervenir en otra entidad que, a partir de este momento, se llama lo modelado" (Arrieta y Díaz, 2013, p. 1).

Como señalan los autores antes mencionados, en la escuela se priorizan maneras de resolver problemas que siguen algunas pautas formales por sobre las formas cotidianas de resolverlos. Así, entonces, cobra sentido proponer prácticas que se desplacen desde ambientes escolares a no escolares, que funcionen como puente entre las esferas de prácticas. Una de ellas es la modelación (Arrieta y Díaz, 2013, p. 7).

La modelación desde esta configuración se constituye como una práctica que establece puentes entre la escuela y su entorno (Arrieta y Díaz, 2013, p. 7).

Por otra parte, Trigueros desarrolla una investigación donde se presentan algunas posturas acerca del uso de la modelación en el aula, así como los resultados de ciertas experiencias específicas (el cual incluye un modelo que se desarrolla a través de los sistemas de ecuaciones) de su aplicación en la enseñanza universitaria, donde se da cuenta de las posibilidades y limitaciones de esta metodología de enseñanza.

Algunas de las limitaciones expuestas hace referencia a que "si bien es imposible garantizar un aprendizaje significativo de todos los estudiantes, lo que sí se advirtió fue el cambio gradual en sus concepciones. El simple hecho de poner al descubierto algunas de sus ideas ya representó una ventaja, si a ello se suma la posibilidad de discusión, trabajo y reflexión, la prerrogativa de este tipo de trabajo se aprecia mucho mejor" (Trigueros, 2009, p. 85).

Finalmente en la investigación mencionada anteriormente Trigueros señala que "en general, se puede decir que el trabajo en los modelos proporcionó una excelente oportunidad para desarrollar eficazmente los conocimientos de los alumnos, además de ampliar su visión de lo que significan las matemáticas en la solución de problemas reales" (Trigueros, 2009, p. 85).

5. Conocimiento base para la Enseñanza

En este apartado se hablará, tal como lo dice su título, del conocimiento base que necesita dominar un docente para la enseñanza, bajo la mirada de Lee Shulman, este postula que "los estándares por los que se debe juzgar la educación y el desempeño de los profesores es posible elevarlos y sistematizarlos con mayor claridad" (Shulman, 2005, pp. 4-5). Con esto el autor busca establecer categorías enfocadas en distintas áreas de la enseñanza, es decir, se pretende que el profesor tome conciencia de que no sólo debe ser un maestro de lo disciplinar, sino que también se deben tener en cuenta otras temáticas como por ejemplo la didáctica de la disciplina, el contexto donde está inmerso, entre otras, las cuales se detallarán a continuación.

El autor postula que existen categorías mínimas que debe dominar el docente, estas son:

- *Conocimiento del contenido;*

- *Conocimiento didáctico general*, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;
- *Conocimiento del currículo*, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como “herramientas para el oficio” del docente
- *Conocimiento didáctico del contenido:* esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;
- *Conocimiento de los alumnos* y sus características
- *Conocimiento de los contextos educativos*, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y
- *Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y sus fundamentos filosóficos e históricos* (Shulman, 2005, p. 11).

Al conocer estas categorías Shulman (2005) además postula que el conocimiento didáctico del contenido es el que nos permite diferenciar a un especialista de alguna disciplina de un pedagogo.

Shulman (2005) aparte de desarrollar conocimientos que necesita dominar un profesor previo a la enseñanza, propone “pasos a seguir” para la acción docente en el aula, el cual consta de 6 fases, las cuales ayudan a organizar el proceso de la planificación y lo que debe tener en cuenta el profesor al momento de la preparación, la ejecución de la clase, la evaluación y un momento posterior que consiste en la reflexión de la acción docente, sintetizadas en el siguiente cuadro:

Comprensión
De objetivos, estructuras de la materia, ideas dentro y fuera de la disciplina.

Transformación
Preparación: Interpretación y análisis crítico de textos, estructuración y segmentación, creación de un repertorio curricular y clarificación de los objetivos.

Representación: Uso a partir de un repertorio de representaciones que incluye analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones, explicaciones, etc.

Selección: Escoger a partir de un repertorio didáctico incluye modalidades de enseñanza, organización, manejo y ordenamiento.

Adaptación y ajuste a las características de los alumnos: considerar los conceptos, preconceptos, conceptos erróneos y dificultades, idioma, cultura y motivaciones, clase social, género, edad, capacidad, aptitud, intereses, concepto de sí mismo y atención.

Enseñanza
Manejo, presentaciones, interacciones, trabajo grupal, disciplina, humor, formulación de preguntas, y otros aspectos de la enseñanza activa, la instrucción por descubrimiento o indagación, además de las formas observables de enseñanza en la sala de clases.

Evaluación
Verificar la comprensión de los alumnos durante la enseñanza interactiva. Evaluar la comprensión de los alumnos al finalizar las elecciones o unidades. Evaluar nuestro propio desempeño y adaptarse a las experiencias.

Reflexión
Dar, reconstruir, representar y analizar críticamente nuestro desempeño y el de la clase, y fundamentar las explicaciones en evidencias.

Nuevas maneras de comprender
Nueva comprensión de los objetivos, de la materia, de los alumnos, de la enseñanza y de sí mismo. Consolidación de nuevas maneras de comprender y aprender de la experiencia.

Figura 3. Modelo de razonamiento y acción pedagógicos[9]

6. Organizadores del Currículo de Matemática

Algunos autores mencionan que el desempeño de los docentes de matemáticas necesita una organización conceptual que integre y coordine el dominio sobre esta disciplina con el conocimiento sobre desarrollo de capacidades cognitivas de los estudiantes y con el campo de fenómenos y problemas, cuya interpretación y solución se orientan a las matemáticas escolares. Por ejemplo, Rico señala que:

"La puesta en práctica del currículo escolar de matemáticas mediante el diseño, elaboración y gestión de propuestas didácticas y otros materiales curriculares necesita bases teóricas sobre las que estructurar el conocimiento profesional del educador matemático" (Rico, 2000, p. 16).

Desde un planteamiento más usual, son varias las informaciones y datos que se deben tener en cuenta cuando se inicia la planificación de una unidad didáctica. Por ello, se considerarán algunos organizadores propuestos por Rico (2000), que son necesarios para dicha planificación, y se realizará una descripción de cada uno de los ellos.

Un primer organizador para cada unidad didáctica, "es la ubicación y tratamiento de cada uno de los tópicos que se consideran en el Currículo del Ministerio y en el de la correspondiente Comunidad Autónoma en la que cada profesor se encuentre trabajando. Con esta información se trata, obviamente, de situar cada una de los temas o unidades dentro de la legislación editada por el Ministerio y las correspondientes Consejerías de Educación Autonómicas" (Rico, 2000, p. 52).

[9] Cuadro extraído de (Shulman, 2005, p.20)

Un segundo organizador debe exhibir punto por punto la distribución de los contenidos de cada uno de los temas, teniendo en cuenta la organización cognitiva de los conocimientos matemáticos que ha adoptado el Currículo de Matemáticas. “Se trata de la organización de los contenidos matemáticos de cada una de las unidades mediante su clasificación en conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes” (Rico, 2000, p. 52). El tratamiento que realiza el currículo nacional sirve de referencia, pero no se puede adoptar como un esquema rígido sino que se debe analizar y tratar de ampliar y enriquecer, ya que las perspectivas y prioridades no se encuentran concluidas por la propuesta ministerial.

Un tercer organizador está dado por el análisis fenomenológico de los conocimientos matemáticos. Es conveniente conocer cuáles son los fenómenos que se encuentran en la base de los contenidos tratados en cada unidad. “Las situaciones en las que se presentan y emplean los diferentes conceptos y procedimientos y las funciones que en cada caso se destacan, constituyen una dimensión importante para el análisis y tratamiento didáctico del conocimiento matemático, como ya puso Freudenthal de manifiesto” (Rico, 2000, p. 53).

“Las necesarias conexiones con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento, las diferentes utilizaciones que se hacen de los conocimientos matemáticos, son otros tantos fenómenos que conviene considerar en el momento de seleccionar y organizar los contenidos y de diseñar las secuencias metodológicas, ejemplos, motivaciones y materiales para su transmisión” (Rico, 2000, p. 53).

Un cuarto organizador debe tener en cuenta los aspectos visuales y simbólicos del conocimiento matemático y de su aprendizaje. Esta fuente de información se denomina modelos y representaciones[10].

“Mediante las representaciones las personas organizan la información sobre un concepto u operación para poder pensar sobre ellos, expresar su comprensión, y utilizarla en situaciones y problemas prácticos o en situaciones escolares convencionales. Los modelos para la presentación y desarrollo de un determinado concepto; también las representaciones matemáticas se utilizan para modelizar fenómenos naturales o sociales” (Rico, 2000, p. 53).

[10] Hace referencia al modo en que los sujetos expresan sus conocimientos con notaciones simbólicas o mediante algún tipo de gráfico.

Un quinto organizador, denominado errores y dificultades, tiene el propósito de dar a conocer al docente los efectos de investigaciones realizadas en torno a las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes.

“También se observa que hay determinados conocimientos que lleva más tiempo comprender o en los que hay mayor número de alumnos que no comprenden correctamente; estos conocimientos son lo que consideramos difíciles o de mayor dificultad. Al realizar la programación de un tema el profesor debe disponer de información sobre cuáles son aquellos puntos que van a tener una dificultad especial, así como aquellos errores o conocimientos insuficientes que sus alumnos pueden encontrar” (Rico 2000, p. 54).

No basta sólo con esa información sino que también se debe saber cómo establecer los errores de sus alumnos y qué tratamiento se debe seguir para corregir sus carencias. Aunque en el campo de las técnicas correctivas es poco lo que se conoce, es ventajoso disponer de información ya contrastada.

Un sexto organizador está constituido por los materiales[11] y recursos. Donde los recursos proveen situaciones, o ayudas para trabajar en una situación, en las que el concepto estudiado se emplea significativamente y permite desarrollar algunos procedimientos. “Dentro de los recursos actuales encontramos los materiales derivados de las nuevas tecnologías de los que conviene hacer mención explícita cada vez que resulte adecuado” (Rico, 2000, p. 54).

7. Sistemas de Ecuaciones Lineales

7.1. Lo Teórico

El término lineal proviene de línea recta que es la expresión más simple de una ecuación y que puede escribirse de la forma:

$$a_1x + a_2y = b$$

donde a_1, a_2 (*coeficientes*) y b (*término independiente*) son constantes, tal que x e y no son simultáneamente cero. Dicha ecuación se llama *ecuación lineal de incógnitas x* e *y*. En general una ecuación lineal es cualquiera de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \dots\dots\dots + a_nx_n = b$$

[11] Los materiales son concreciones de modelos realizadas por casas comerciales o por el profesor.

donde las variables x_1, $x_2 \ldots x_n$ (*incógnitas*) aparecen elevadas a la primera potencia y no son funciones trascendentes ($lnx, \cos x, e^x$, etc.) ni existen productos, ni raíces de las variables. A menudo tenemos necesidad de resolver varias ecuaciones lineales al mismo tiempo, una colección finita de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2 \ldots x_n$ se llama un *sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas:*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = b_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas o simplemente, sistema 2x2 de ecuaciones lineales, es la agrupación de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

$$a_1x + b_1y = k_1$$
$$a_2x + b_2y = k_2$$

Se llama solución de un sistema de 2x2, a cualquier pareja de valores de x e y que sea solución de ambas ecuaciones a la vez. Las soluciones de este tipo de sistemas son los puntos de corte de las rectas que representan cada una de las ecuaciones del sistema.

7.1.1. Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales y Tipos de Solución

Al momento de desarrollar o buscar la solución de un sistema de ecuaciones lineales siempre se tendrá solo uno de los tres casos siguientes:

a) Sistemas con una solución

Las ecuaciones del sistema son rectas secantes, las cuales se cortan en un punto (x, y) correspondiente a la solución del sistema.

Los coeficientes numéricos de x e y; de las dos ecuaciones no son proporcionales

Por ejemplo:

$$2x + 4y = 4$$
$$x + y = 2$$

b) Sistemas sin solución

Las ecuaciones del sistema son rectas paralelas, las cuales no poseen ningún punto en común y por tanto no tiene solución.

Los coeficientes numéricos de x e y; de una ecuación son proporcionales a la otra, mientras que sus términos independientes no lo son entre ellos.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{c} 2x + 4y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right|$$

c) Sistemas con infinitas soluciones

Las ecuaciones del sistema son rectas coincidentes, las cuales poseen todos los puntos en común, por tanto son todos ellos son solución.

Los coeficientes numéricos de x e y; además del término independiente de una ecuación son proporcionales a los de la otra.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{c} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 2 \end{array}\right|$$

7.1.2. Métodos de Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2

Se distinguen métodos algebraicos de resolución de sistemas:

a) Sustitución | c) Reducción | e) Cramer

b) Igualación | d) Método gráfico | f) Gauss

a) Método de Sustitución

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra.

Ejemplo:

Resolver el sistema $\left.\begin{array}{c} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{array}\right|$

Paso 1:

Despejamos de la primera ecuación a x

$$x = 1 - y$$

Paso 2:

Sustituimos a $x = 1 - y$

$$x - y = 1$$
$$(1 - y) - y = 1$$

Paso 3:

$$(1 - y) - y = 1$$
$$1 - 2y = 1$$

Reducimos la ecuación anterior:

$$1 - 1 = 2y$$
$$0 = 2y$$
$$donde\ y = 0.$$

Paso 4:

Ahora, sustituimos el valor de $y = 0$, en la ecuación del paso 1, $x = 1 - y$

$$x = 1 - (0) = 1.$$

Paso 5:

Por tanto la solución del sistema es:

$$x = 1$$
$$y = 0$$

b) Método de Igualación

En este método se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones.

Ejemplo:

Resolver el sistema

$$\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 2 \end{array}$$

Paso 1:

Despejamos de ambas ecuaciones a x

$$x = \frac{3 - y}{2}$$
$$x = \frac{2 - 2y}{3}$$

Paso 2:

Igualamos ambas ecuaciones del paso anterior

$$\frac{3 - y}{2} = \frac{2 - 2y}{3}$$

Paso 3:

Despejamos a y de la ecuación anterior

$$\frac{3 - y}{2} = \frac{2 - 2y}{3}$$
$$3(3 - y) = 2(2 - 2y)$$
$$9 - 3y = 4 - 4y$$
$$9 - 4 = -4y + 3y$$
$$5 = -y$$
$$de\ donde\ y = -5.$$

Paso 4:

Ahora, sustituimos el valor de $y = -5$, en cualquier la ecuación del paso 1

$$x = \frac{3 - y}{2}$$
$$Entonces\ x = \frac{3 - (-5)}{2} = 8/2 = 4.$$

Paso 5:

Por lo tanto la solución del sistema es:

$$x = 4$$
$$y = -5$$

c) Método de Reducción

En este método se multiplican las ecuaciones por un número conveniente, para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas pero con distinto signo. Al sumar las ecuaciones resulta una ecuación con una sola incógnita.

Ejemplo:

Resolver el sistema $\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 2x - 3y = 5 \end{array}\right|$

Paso 1: Obsérvese que tenemos en ambas ecuaciones a x, y $2x$ por lo tanto, si multiplicamos a la primera ecuación por -2	$-2x + 2y = 2$ $2x - 3y = 5$
Paso 2: Sumando ambas ecuaciones del paso anterior obtenemos	$2y - 3y = 2 + 5$, por lo tanto $y = -7$.
Paso 3: Ahora, sustituimos el valor de $y = -7$, en cualquier ecuación del paso 1	$x = y - 1$. Por lo tanto $x = (-7) - 1 = -8$.
Paso 4: Por lo tanto la solución del sistema es	$x = -8$ $y = -7$

d) Método Gráfico

Consiste en la gráfica de cada una de las ecuaciones del sistema.

El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones (2x2) mediante el método gráfico se resuelve en los siguientes pasos:

1. Se despeja la incógnita y en ambas ecuaciones.
2. Se construye para cada una de las dos ecuaciones de primer grado obteniendo la tabla de valores correspondientes.
3. Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.
4. En este último paso hay tres posibilidades:
   a) Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas (x, y). “Sistema compatible determinado”.

b) Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas solucione que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. “Sistema compatible indeterminado”.

c) Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. “Sistema incompatible”.

Ejemplo:

Entre Cinthia y Juan tienen 600 cartas de Mitos y Leyendas, Juan tiene el doble de cartas que Cinthia ¿Cuántas cartas Mitos y Leyendas tiene cada uno?

Llamaremos “x” al número de cartas Mitos y Leyendas de Cinthia e “y” a las cartas de Juan. Expresaremos el problema mediante ecuaciones:

Si ambos tienen 600 cartas, nos proporciona entonces la ecuación $x + y = 600$.

Si Juan tiene el doble de cartas Mitos y Leyendas que Cinthia, corresponde que $y = 2x$.

<u>Paso 1</u>:

Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$\begin{array}{c} x + y = 600 \\ 2x - y = 0 \end{array}$$

<u>Paso 2</u>:

Para resolver el sistema por el método gráfico se despeja la incógnita de ambas ecuaciones y se tendrá:

$$\begin{array}{c} y = -x + 600 \\ y = 2x \end{array}$$

<u>Paso 3</u>:

Se calcula la tabla de valores de cada recta, y se lleva a cabo la representación de estas

$y = -x + 600$

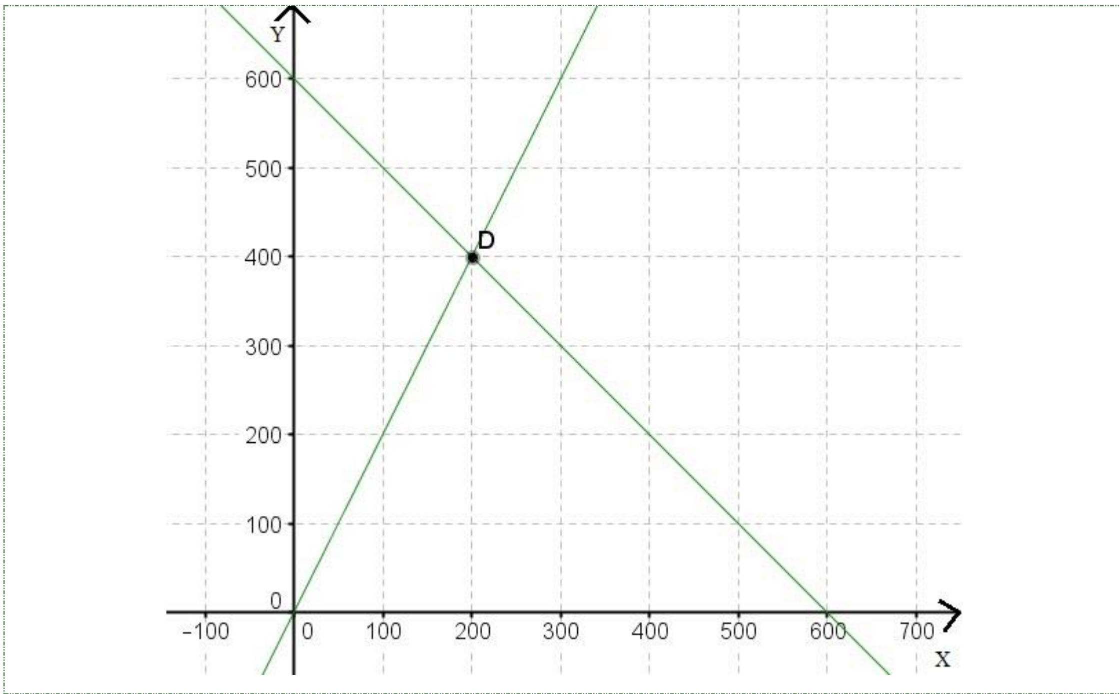
X	Y
200	400
600	0

$y = 2x$

X	Y
100	200
200	400

<u>Paso 4</u>:

Con estas tablas de valores para las dos rectas y eligiendo las escalas apropiadas en los ejes “X” y “Y”, podemos ya representar gráficamente:



Descripción de la gráfica:

Si observamos la gráfica, vemos claramente que las dos rectas se cortan en el punto (200,400), luego la solución del sistema es $x = 200$ e $y = 400$

La respuesta del problema planteado es que:

$$x = 200\ (\,Cartas\ Mitos\ y\ Leyenda\ de\ Cinthia\,)$$

$$y = 400\ (\,Cartas\ Mitos\ y\ Leyenda\ de\ Juan\,)$$

e) Cramer

Primeramente se puede mencionar que "este método es de los más inmediatos, además de que nos ayuda desde el principio a reconocer si un S.E.L. tiene solución única o no" (Soto, 2010, p. 1). Para ello se debe tener en cuenta, antes de poder solucionar un problema sistemas de ecuaciones lineales, apoyándose con este método, la definición del término determinante de una matriz. Soto (2010) explica de manera simple el modo de resolución:

Sean a, b, c, d número reales, el arreglo de números $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ se utiliza para denotar al determinante de la matriz[12] $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y su valor es igual a $ad - bc$.

[12] Se entiende como: "una matriz A de tamaño m x n es un arreglo rectangular de mn números reales, o inclusive complejos, ordenados en m renglones y n columnas" (Guerra, 2012, p. 17)

Por tanto, se debe tener en cuenta que la definición formal de determinante se puede considerar, según el artículo Matrices y determinantes, como la suma de "los productos que se obtienen al multiplicar n elementos de la matriz de todas las formas posibles, con la condición de que en cada producto exista un único elemento de cada fila y un único elemento de cada columna", pero considerando el caso de la enseñanza en aulas de colegios, sólo consideraremos el planteamiento entregado por Soto, dado que este investigación se limita al trabajo de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas .

Entonces, para poder dar respuesta a un sistema de ecuaciones lineales, lo primero que se debe hacer es llevar el sistema a una forma matricial. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{array}\right| \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & m \\ c & d & n \end{array}\right)$$

Luego, se deben calcular tres determinantes, para posteriormente poder encontrar el valor de las variables x e y.

<u>Determinante principal</u>:	$\Delta_p = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
<u>Determinante auxiliar en x</u>:	$\Delta_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & c \end{vmatrix} = cm - bn$
<u>Determinante auxiliar en y</u>:	$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} = an - cm$

Al utilizar este método, será posible encontrar los valores de las variables ya mencionadas, siempre y cuando el valor del determinante principal sea distinto de cero.

Esto se debe a que el valor lo encontraremos de la siguiente manera:

<u>Valor de x</u>:	$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta_p}$
<u>Valor de y</u>:	$y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_p}$

A continuación se presentará un ejemplo de lo expuesto anterior:

Ejemplo:

Calcular el siguiente sistema de ecuaciones lineales, por medio del método de Cramer

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x-y=2 \end{array}\right|$$

<u>Paso 1</u>: Traspasar el sistema presentado, a su forma matricial	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$
<u>Paso 2</u>: Calcular los distintos determinantes que se pueden utilizar para la resolución del problema.	Determinante principal: $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -3$ Determinante auxiliar en x: $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -5$ Determinante auxiliar en y: $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -4$
<u>Paso 3</u>: Al tener los valores de los determinantes, ahora sólo se debe establecer la razón que nos permite conocer el valor de cada una de las variables	El valor de x: $\frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$ El valor de y: $\frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

f) Gauss

El método de Gauss, según el artículo *Álgebra* (s.f).

> "Consiste en obtener una matriz de coeficientes triangular de un sistema de ecuaciones equivalente al que se quiere resolver que es cuadrado, aplicando sucesivamente y convenientemente las operaciones con las ecuaciones (combinaciones lineales) para obtener sistemas equivalentes. Es una generalización del método elemental de reducción. Al final se obtiene un sistema equivalente en donde la última ecuación contiene una incógnita, la penúltima ecuación contiene a la anterior incógnita y a otra más, la antepenúltima ecuación contiene a las dos anteriores incógnitas y a una tercera, y así sucesivamente."

No menos relevante son las operaciones mencionadas en el extracto, ya que son la herramienta principal para triangular la matriz.

- Cambiar filas de lugar.
- Multiplicar una fila por un escalar distinto de cero.
- Sumar a una fila otra fila multiplicada por un número.

Finalmente se debe tener en cuenta que en el aula sólo se limitan a los sistemas de 2 x 2, por lo cual a continuación se presentará un ejemplo mostrando cómo resolver un sistema bajo este método.

Ejemplo:

Resuelva el siguiente sistema de ecuación bajo este método:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}$$

<u>Paso 1</u>:
Primero se debe expresar su forma matricial

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

<u>Paso 2</u>:
Luego se aplica la tercera operación elemental mostrada en el cuadro, la cual consiste en que la primera fila, la se multiplicará por -2, dado que este es el número que nos conviene, y luego se le suma a la fila número 2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

<u>Paso 3</u>:
Al realizar el procedimiento anterior, de la matriz resultante, al traspasarlo a sistema nuevamente, se obtendrá

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ -7y &= 1 \end{aligned}$$

<u>Paso 4</u>:
Por lo tanto de la segunda ecuación se obtiene

$$y = -\frac{1}{7}$$

<u>Paso 5</u>:
Al conocer el valor de un de las incógnitas, basta reemplazar en la primera ecuación, y se obtendrá el valor de la otra variable

$$\begin{gathered} x + 3y = 1 \\ x + 3 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = 1 \\ x - \frac{3}{7} = 1 \\ x = \frac{10}{7} \end{gathered}$$

7.2. Lo Histórico

Según Retamosa (2010), los sistemas de ecuaciones lineales, se encuentran dentro de los problemas matemáticos más antiguos, y se encuentran en distintos tipo de culturas, ya sean la mesopotámica, egipcia, griega, china y japonesa entre otras.

Los babilonios[13], llamaban a las palabras como longitud, área, anchura o volumen como las incógnitas en un sistema. Sus símbolos fueron escritos en tablas de arcilla mojadas cocidas al sol. De las tablillas babilónicas, unas 300 se relacionan con las matemáticas, unas 200 son tablas de varios tipos: de multiplicar, de recíprocos, de cuadrados, de cubos, etc.

Los egipcios dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhind[14], 1650 A.C., y el de Moscú[15], 1850 A.C.), una multitud de problemas matemáticos resueltos con planteamiento, operaciones y soluciones, es gracias a estos es que se conoce bastante de las matemáticas de los egipcios. La mayoría de sus problemas responden a situaciones concretas de la vida cotidiana.

Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Se encuentra en esta cultura un gran aporte de importantes matemáticos y filósofos, en los que se encuentra Pitágoras, Tales, Euclides, Arquímedes, etc. Es por tanto que en esta época (en torno al 600 A.C) que las matemáticas se convierten en una ciencia racional y estructurada ya más madura, que posee propiedades que se demuestran.

Thymaridas (400 A.C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

La matemática china era extremadamente concisa, motivada por problemas como el calendario, negocios, medida de terrenos, arquitectura, impuestos, etc. Dentro de los desarrollos hechos por primera vez en China se incluyen los números negativos, el teorema binomial y métodos matriciales para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Los matemáticos chinos durante los siglos III y IV a.C. continuaron la tradición de los babilonios y dejaron el legado de los primeros métodos del pensamiento lineal. Alrededor del siglo IV a.C. se empleaban los ábacos para calcular, lo que significa que se utilizaba un sistema numérico decimal. El libro chino sobre matemáticas más famoso de todos los tiempos es el *Jiuzhang suanshu* o, como se le llama de forma

---

[13] Antiguo imperio localizado en la región central-sur de Mesopotamia.

[14] El Papiro de Rhind, el principal texto matemático egipcio que se conoce, fue escrito por un escriba (el único personaje que realizaba cálculos en Egipto, al que se le exigía el manejo de la multiplicación) bajo el reinado del Rey Hicso Ekenenre Apopi, hacia el 1600 A.C.

[15] El papiro de Moscú fue escrito en hierática en torno al 1890 A.C por un escriba desconocido. Se desconoce el objetivo con el que fue escrito.

común: Nueve capítulos del arte matemático[16].

Los árabes fueron los verdaderos herederos del conocimiento griego, dentro de los matemáticos árabes se puede nombrar a Al-Khwarizmi, que es conocido por muchos autores como uno de los padres del álgebra debido a sus numerosos avances en las matemáticas.

Los europeos durante la Edad Media y el Renacimiento realizaron algunas aproximaciones a un tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales. Esto aparece reflejado, en la obra de Leonardo de Pisa (1180-1250), conocido como Leonardo Fibonacci, y en Cardano (1501-1576), quien muestra una regla para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, llamada regla de Cramer para la resolución de sistemas lineales 2x2.

En el año 1693, fue Leibniz quien propone la obtención de un método general para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales es por tanto primero quien manejó los determinantes, Leibniz entrega ejemplos de sistemas con coeficientes generales utilizando la notación con subíndices.

Gracias a la popularización de los trabajos destinados a la investigación y desarrollo de los determinantes, los problemas básicos del álgebra basados en sistemas de ecuaciones lineales experimentaron un gran auge. Fueron numerosos matemáticos de los siglos XVIII y XIX los que desempeñaron esta labor, entre los que se pueden citar Jacobi, Vandermonde, Laplace o Cauchy entre otros.

A finales del siglo XIX, más concretamente en el año 1875, Rouché enunció el teorema conocido como Teorema de Rouché-Fröbenius, y posteriormente en 1880 publica una versión más completa del teorema, el cual se convertiría en herramienta fundamental a la hora de discutir los sistemas de ecuaciones lineales.

7.3. Lo Fenomenológico

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen muchas aplicaciones en todos los campos y ciencias y ya desde A.C. se tenían métodos para resolver los sistemas. En la actualidad sirven para resolver problemas aplicados a lo cotidiano debido que las matemáticas son parte fundamental de la vida.

[16] Obra compuesta por el hombre de estado y científico Chuan Tsanom en el año 152 a.C. y en el que se incluyeron sistemáticamente todos los conocimientos matemáticos de la época.

Según Retamosa (2010), se entiende que un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales, es decir aquellas que expresan combinación lineal entre datos desconocidos.

Por lo tanto al resolver lo que se está intentando, es encontrar los valores que satisfacen al mismo tiempo todas las ecuaciones que lo conforman.

Según Moll (2010) el análisis fenomenológico es aquello que intenta a dar respuesta a cuáles son las utilidades de algún tema, como qué tipo de problemas soluciona o en qué situaciones podría estar presente.

Lo cual será la base para la modelización de una gran variedad de fenómenos. Se encuentran por tanto en el estudio de las ciencias e ingeniería, como en otros campos tales como, la economía, la medicina, psicología, investigación de operaciones,... se desarrollan modelos matemáticos (que tiene como soporte base los sistemas de ecuaciones lineales) para ayudar a comprender el origen de ciertos problemas físicos, biológicos, sociales, etc.

Según Moll (2010) las situaciones en las que se presentan los sistemas de ecuaciones lineales pueden ser:

a) <u>Situaciones Personales:</u> Son aquellas situaciones relacionadas con las actividades diarias de los estudiantes.

b) <u>Situaciones Educativas o Laborales</u>: Son situaciones en las el estudiante se encuentra dentro de su entorno de trabajo, de las cuales se le exige al estudiante que utilice sus conocimientos matemáticos aprendidos.

c) <u>Situaciones Públicas:</u> Son aquellas situaciones relacionadas a su entorno social, con el fin de que estos comprendan, conozcan y demuestres sus habilidades matemáticas en las situaciones importantes que puedan ocurrir en su vida pública.

d) <u>Situaciones Científicas</u>: Son aquellas situaciones que incluyen la comprensión de procesos tecnológicos o problemas específicamente matemáticos.

7.4. Obstáculos y Errores

Un obstáculo, según lo que señala Brousseau (1997), se manifiesta a través de los errores, los cuales no son provocados al azar por los estudiantes sino que son reproducibles. Los errores ejecutados por el sujeto son de la misma naturaleza del conocimiento, con objetos, relaciones, significado, imprevisto, etc.

Los obstáculos pueden ser de diversos orígenes e inexplicables y se distinguen según Brousseau (1997) principalmente en los siguientes: ontogenético, didáctico y epistemológico. Los obstáculos de origen ontogenético derivan de las limitaciones de los estudiantes, asociadas con el momento de su desarrollo (crecimiento), debido a que cada uno genera conocimientos apropiados a sus habilidades y metas correspondientes a su edad. Los obstáculos de origen didáctico son aquellos que se generan producto de una elección didáctica dentro de un proyecto o sistema educativo.

Según señala Malisani (1999), los obstáculos reconocidos a lo largo de la historia matemática permiten comprender ciertas dificultades que se evidencian en el aprendizaje de este conocimiento. Además plantea que “el error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la duda o del azar, como suponían las teorías conductistas del aprendizaje, sino que es la consecuencia de un conocimiento anterior que se manifiesta falso o no apropiado a una nueva situación.” (Malisani, 1999, p. 3)

Marroquín (2009) dice que para la comprensión de un concepto es necesario coordinar los diferentes registros de representación así obtener la comprensión integral del concepto. Sin embargo, expone que la conversión entre registros no se realiza de manera espontánea.

Es por tanto que “La presencia de estos errores es un problema complejo y delicado y todo aporte que se haga para analizar o mejorar esta cuestión debe ser de interés para la educación matemática.” (Saucedo, s.f, p. 29)

Se puede afirmar entonces que conocer los errores básicos en el álgebra es importante para todo profesor, ya que es así como este se provee de la información de cómo los estudiantes logran una interpretación de los problemas y de cómo utilizan los distintos procedimientos algebraicos, lo cual ayudará a la mejora o actualización de estrategias para la corrección.

Posibles obstáculos y/o errores en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales, según Díaz (2010):

- Dificultad para la definición de las variables del sistema de ecuaciones lineales y errores en la transcripción del registro verbal al registro algebraico.

- Mala compresión lectora con respecto a un problema planteado.

- Problemas al traspasar el sistema de ecuaciones a su registro gráfico.

- Problemas al ubicar los puntos solución en el plano cartesiano.

- Mala resolución de los sistemas, solución encontrada no pertinente al contexto.

CAPÍTULO III
DISEÑO METODOLÓGICO

1. Investigación Educativa

Para McMillan la investigación educativa “Es un proceso sistemático de recogida y de análisis lógico de información (datos) con un fin concreto” (McMillan, 2007, p. 11). En este caso el fin concreto será: elaborar un diseño curricular para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, por medio de diversas fuentes de información.

2. Paradigma y Enfoque de Investigación

El paradigma escogido para realizar la siguiente investigación es el descriptivo e interpretativo, dado que se funda en un “proceso inductivo” (Hernández, 2006, p. 8). El cual consiste en ir de lo particular a lo general, “es decir, procede caso por caso, dato por dato, hasta llegar a una perspectiva más general” (Hernández, 2006, p. 8).

El enfoque de la investigación es el cualitativo, dado a que “consiste en un estudio en profundidad mediante el empleo de técnicas cara a cara para recoger los datos de la gente en sus escenarios naturales” (McMillan, 2007, p. 44).

Por otra parte Gómez (1999) afirma que la principal característica de esta investigación es que se plantea un problema, pero no se sigue un procedimiento tan estructurado o patentemente definido, a diferencia del enfoque cuantitativo, no existe una hipótesis clara que se desee comprobar, sino que las preguntas van surgiendo a medida que la investigación avanza, donde se van acotando para transformarse en teorías. Generalmente este enfoque se utiliza en un ámbito del conocimiento poco explorado, pudiendo delimitar las preguntas de investigación. Con respecto a la recolección de datos, no recoge datos estandarizados para una medición numérica de la realidad, sino que se encarga más de obtener perspectivas y puntos de vista de los actores, tal como ellos la experimentan o de la interacción social que existe.

Con esto se afirma que la investigación consistirá en un análisis exhaustivo a las prácticas docentes realizada por profesores de enseñanza media en el contenido de sistemas de ecuaciones lineales, donde se pretende que por diversas técnicas, las cuales se detallarán más adelante, se analice cuáles son las competencias que debe dominar el docente para poder enseñar el contenido ya señalado, de manera que el docente se destaque en dichas competencias y así, valga la redundancia, sea un docente competente en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

3. Universo y Sujetos

Esta investigación está enfocada en las prácticas de los docentes de matemáticas en el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales, por lo cual el universo será la unión de conjuntos de profesores de matemáticas de la ciudad de Santiago de Chile, que ejercen su labor docente en diferentes establecimientos, los cuales se encuentran los colegios particulares subvencionados, municipales y particulares privados. Estos profesores están segregados debido a la cantidad de años que llevan ejerciendo su labor docente. En consecuencia el universo será la unión de los profesores nóveles de matemáticas y profesores de *vasta experiencia*[17] especializados en la misma disciplina ya mencionada.

Con esto, los sujetos seleccionados para la investigación serán 6 profesores que desarrollan su práctica docente en diferentes colegios de Santiago, éstos se dividen en tres profesores nóveles y tres profesores con vasta experiencia en aula.

Estos sujetos se escogieron debido a que las investigadoras suponen que los docentes nóveles están menos preparados, al momento de organizar y desarrollar la unidad de sistemas de ecuaciones lineales en aulas de enseñanza media, que los docentes con mayor experiencia, además Shulman postula que:

> "Paralelamente hemos encontrado y examinado casos de profesores experimentados como Nancy (Baxter, en preparación; Gudmundsdottir, en preparación; Hashweh, 1985) para compararlos con los de los novicios. Lo que estos estudios demuestran es que los conocimientos, la comprensión y las habilidades que hemos visto manifestarse, a veces con vacilación y, en ocasiones, con maestría entre los principiantes, a menudo son desplegados con facilidad por los expertos" (Shulman, 2005, p.6).

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, a modo de profundización, los sujetos escogidos para este estudio se eligieron de manera arbitraria, donde la técnica de recogida de datos se llama muestreo comprensible, la cual consiste en "elegir un grupo entero a partir de criterios" (McMillan, 2007, p. 408). Por tanto el criterio que se utilizó fue en base a los años de experiencia de práctica docente que ellos tenían, indistinto del tipo de dependencia del establecimiento donde ellos trabajaban, dado

[17] Cuando se habla de docentes con vasta experiencia, se refiere a profesores con más de 20 años de experiencia en aula.

que la comparación que se realizaba en los textos que fueron revisados por las investigadoras, sólo apuntaban a los años de experiencia de los docentes, obviando otros factores.

4. Fundamentación y Descripción del Diseño

La modalidad de investigación será *interactiva*[18], la cual "consiste en un estudio en profundidad mediante el empleo de técnicas cara a cara para recoger los datos de la gente en sus escenarios naturales" (McMillan, 2007, p. 44).

Dentro de la investigación interactiva existen distintas maneras para recoger información, donde la utilizada en esta investigación será el estudio de casos. Dichos estudios se pueden definir como "estudios que al utilizar los procesos de investigación cuantitativa, cualitativa o mixta; analizan profundamente una unidad para responder al planteamiento del problema" (Hernández, 2006, p. 224). Otro autor postula que "examina un «sistema definido» o un caso en detalle a lo largo del tiempo" (McMillan, 2007, p. 45). Por ello se realizará una serie de análisis al tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales que realizan los profesores en la escuela.

Y desde otra mirada el estudio de caso "se enfatiza su adecuación y pertinencia al estudio de la realidad socioeducativa" (Sandín, M.P, 2003, p. 174). Por eso la utilidad de este tipo de estudio es poder sacar una radiografía de cómo se están enseñando los sistemas de ecuaciones lineales, teniendo como finalidad última ser un aporte en la mejora de estas distintas realidades con las que se encontrarán las investigadoras al realizar el estudio.

Cabe destacar que este estudio se centrará en la confrontación de dos casos, el primer caso es un grupo de tres profesores con vasta experiencia en aulas, y el segundo caso es un conformado por tres profesores nóveles.

5. Fundamentación y Descripción de Técnicas e Instrumentos

Primero se debe tener claro que la recolección de información, "lo que busca en un estudio cualitativo es obtener datos (que se convertirán en información) de personas,

[18] Término utilizado por McMillan, J. Schumacher, S (2005) Investigación educativa (5ª edición) Madrid, España: Pearson Addison Wesley.

seres vivos, comunidades, contextos o situaciones en profundidad; en las propias “formas de expresión” de cada uno de ellos” (Hernández, 2006, p. 583)

Por esto el medio que se utilizará en esta investigación será un cuestionario. Cabe destacar que “los cuestionarios abarcan una variedad de documentos en los que el sujeto responde a cuestiones escritas que sonsacan reacciones, opiniones y actitudes. El investigador elige o construye un conjunto de preguntas adecuadas y le pide al sujeto que las conteste” (McMillan, 2007, p. 50). Es por esto que las preguntas mencionadas son dirigidas con finalidad extraer información del cómo enseñan dos docentes. Este cuestionario se elaboró en base a algunas categorías que propone Shulman. En la cual se consideran: conocimiento del contenido, conocimiento del currículo, conocimiento didáctico del contenido y por último el conocimiento de los contextos educativos.

Para la recolección de información, se les aplicó un instrumento, estructurado con 4 ítems, en donde cada uno está pensado en las distintas áreas que debe dominar el docente, como el conocimiento del currículo, conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido, y por último un ítem enfocado al conocimiento de los contextos educativos. Estas preguntas se plantean con el objeto de descubrir lo que los/las docentes realizan en sus prácticas, las herramientas que ellos utilizan para el desarrollo de éstas, y finalmente, sin ningún tipo de juicio sobre su práctica como tal, sólo queriendo indagar sobre lo que conocen y trabajan respecto a los sistemas de ecuaciones lineales.

A continuación se presentará una tabla donde se muestra cada pregunta del cuestionario elaborado por las autoras, con su respectivo indicador, el cual tiene como propósito explicitar el fin que pretende cada una de las preguntas establecidas.

		Indicador
Pregunta 1		
Conocimiento del Curriculum	a) ¿Usted enseña sistemas de ecuaciones lineales, en qué curso?	El docente conoce el programa de estudio pertinente al nivel en el que se enseñan sistemas de ecuaciones lineales.
	b) Cuando revisa los programas de estudio para la enseñanza de los sistemas de	Genera una secuencia en la enseñanza,

	ecuaciones lineales, ¿En que se fija?	ordenando y clasificando los tópicos de acuerdo a algún criterio.
	c) ¿Qué opinión tiene sobre las actividades que se presentan en el programa de estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales?	Emite un juicio de valor sobre los programas de estudio.
	d) ¿Qué relación cree usted que existen entre lo que presentan los programas de estudio y los textos escolares, sobre la unidad de sistemas de ecuaciones lineales?	Establece una relación entre los programas de estudio y los textos escolares.
	e) De acuerdo a lo que el programa de estudio propone, ¿Qué relación existe entre éste y lo que usted trabaja en el aula?	Establece una relación entre lo presentado por los programas de estudio y la práctica docente.
	f) Entendiendo que la epistemología es la construcción del conocimiento. ¿Utiliza alguna epistemología, ya sea la presentada en los textos de estudio, en el programa de estudio o alguna propia? Descríbala.	El profesor posee orientaciones o directrices curriculares que utiliza para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.
Pregunta 2		
Conocimiento del contenido	a) ¿Qué entiende usted por sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo definiría?	El profesor entrega una definición matemática de un sistema de ecuación lineal.
	b) ¿Conoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones lineales en la historia del desarrollo de las matemáticas? Descríbalo brevemente.	El profesor conoce el origen de los sistemas de ecuaciones lineales y es capaz de exponerlo brevemente.
	c) Indique que métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conoce.	El profesor conoce diversos métodos para

	¿Cuáles enseñas a sus estudiantes? ¿Por qué?	la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales El profesor discrimina cuales métodos utilizar, en base a la complejidad y nivel de los estudiantes
	d) Mencione algunos ejemplos contextualizados donde se pueden aplicar los sistemas de ecuaciones lineales.	El profesor conoce distintas aplicaciones útiles en la vida real para los sistemas de ecuaciones lineales
	e) Presente un sistema de ecuación lineal donde su solución sea única, uno con infinitas soluciones y uno que no tenga solución.	El docente es capaz de crear un sistema de ecuación lineal, dada condiciones iniciales
Pregunta 3		
Conocimiento didáctico del contenido	a) ¿Qué entiende usted por modelación matemática?	El profesor comprende el concepto modelación
	b) Dada la siguiente actividad: *"El oro que se extrae de la tierra es un mineral metálico y de un característico color amarillo cuando está refinado. El oro puro es suave y muy maleable. Para el uso en joyería, el oro se mezcla con otros metales, principalmente cobre y plata, formando una aleación.* *Este procedimiento le proporciona cualidades mecánicas que el oro puro no presenta, como dureza, resistencia y color. Normalmente, se ignora que el oro aleado puede presentar diferentes colores. Así, por cada 1 000 g de aleación, además de 750 g de oro puro, existen las siguientes aleaciones de oro:* • *Oro amarillo: contiene 125 g de plata fina y 125 g de cobre.*	El profesor es capaz de comprender que el ejercicio planteado tiene un sistema de ecuación asociado El profesor es capaz de resolver el ejercicio de manera correcta

	• Oro rojo: contiene 250 g de cobre. *• Oro rosa: contiene 50 g de plata fina y 200 g de cobre.* *• Oro blanco: contiene 100 a 160 g de paladio. El resto es de plata fina.* *• Oro gris: contiene alrededor de 150 g de níquel. El resto es de cobre.* *• Oro verde: contiene 250 g de plata.* *• Oro azul: contiene 250 g de hierro.* *Si se tiene oro verde y oro rojo disponible para fundir, ¿se pueden obtener 50 g de oro amarillo?, ¿por qué?* *Si ahora se necesita obtener 20 g de oro rosa y solo se dispone de oro rojo y verde, ¿cuántos gramos de cada tipo se deben utilizar?"* ¿Cómo resolvería usted el problema dado? Anote cada detalle utilizado para su desarrollo.	
	c) ¿Realiza este tipo de análisis con los estudiantes en la escuela? Entiéndase este tipo de análisis con base en la modelación matemática, bajando el problema al nivel escolar nacional. ¿Por qué? Y si su respuesta fuese negativa ¿qué se lo impide?	Realiza actividades con base en la modelación para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales
Pregunta 4		
Conocimiento de los contextos educativos	a) ¿Usted toma en cuenta el contexto educativo en el que está inmerso? ¿De qué manera lo hace?	Toma en cuenta el contexto donde están inmersos los estudiantes para llevar a cabo su clase. Planifica sus clases en base a cada grupo curso, buscando ejemplos que sean relevantes para los estudiantes
	b) ¿Utiliza situaciones conflictivas, que	El docente aprovecha

	emergen durante la realización de la clase, para generar interés en los estudiantes? Entiéndase por situación conflictiva a cualquier situación que interrumpa el flujo de la clase.	las instancias que se dan en el aula para llamar la atención de sus estudiantes y generar aprendizaje.

Tabla 1. Indicadores de preguntas del cuestionario

Además se pensó en hacer observaciones de clases, respecto al contenido sistema de ecuaciones lineales, pero lamentablemente, en función del tiempo que disponían las investigadoras para la realización del estudio, fue imposible realizar dichas observaciones, debido a que el contenido se enseñó, por parte de los profesores encuestados, el primer semestre del año 2014 y la investigación comenzó el segundo semestre del mismo año, por lo cual este tipo de recogida de datos fue descartada.

Por último mencionar que se realizaría un análisis a las planificaciones para comprobar que la información entregada por los profesores en sus respuestas al cuestionario, fuese verídica. Se debe dejar en manifiesto que solo uno accedió a entregarlas, por lo cual no se pudo realizar el análisis pensado, dado que no existiría una uniformidad en las comprobaciones.

6. Modelo de Instrumento a Emplear

El instrumento a emplear será un cuestionario donde la información presentada por los docentes, ayudará a la conformación de las reflexiones del grupo de investigación, que a partir de lo que ellos/ellas presenten en cada una de las preguntas emitidas, se contrastarán con lo presentado en esta investigación, comparando el marco curricular chileno, teorías que ayudan a un mejor entendimiento de lo que se quiere indagar e información relevante que complemente los conocimientos del tema planteado. Todo con el objeto de analizar y reflexionar el tratamiento que estos profesores de enseñanza media dan a los sistemas de ecuaciones lineales, exponiendo sus conocimientos y dominio de ellos, contrastando una realidad propuesta presentada por el programa de estudio de Ministerio de Educación de Chile, con la intención final de acercarnos a una posible realidad de su enseñanza. Dicho instrumento se puede revisar en **Anexos.**

7. Validez y Confiabilidad

Para darle validez a la investigación, desde un principio la intención fue someter el cuestionario a una validación de expertos. Éstos expertos examinaron el instrumento a partir de sus conocimientos y experiencia.

Lamentablemente al momento de implementar el cuestionario a los docentes, este proceso se desarrolló sin la validación de los evaluadores, ya que las dependencias de la universidad, donde los expertos desarrollan actualmente sus actividades laborales, estuvieron algunas semanas ocupadas por alumnos de esta misma. Lo que provocó un retraso considerable en la entrega de la validación por dichos profesionales, las fechas de entrega se pueden encontrar en **Anexos**. Debido a esto el instrumento no pudo ser sujeto a mejoras, dado que ya se habían realizado los cuestionarios cuando los evaluadores entregaron sus juicios expertos a las investigadoras. No obstante, una de las validaciones entregadas se tomó en consideración para el mejoramiento de uno de los objetivos específicos de la exploración.

Para cada cuestionario los evaluadores reconocieron las categorías de: Muy bien, Bien, Suficiente e Insuficiente. El análisis y las respuestas de los evaluadores pueden ser revisados en los **Anexos**. En este desarrollo participaron tres profesionales de la Educación quienes actualmente desarrollan sus actividades laborales en la Universidad Católica Silva Henríquez, a continuación se describirá la situación académica de cada uno de ellos:

1. **Nombre:** Carlos Gómez Castro

   Título(s) Profesional(es) o Grado: Profesor de Educación Media Tecnológica, Mención en Matemáticas. Universidad de Tarapacá.

   Post Grado:

   Principal(es) Área(s) de investigación en la que se desarrolla:

   - Álgebra

   - Matemáticas Aplicadas

2. **Nombre:** Maritza Silva Acuña

   Título(s) Profesional(es) o Grado:

   - Profesora de Estado en Matemática y Computación. Universidad de Santiago de Chile.

- Licenciada en Matemática y Computación. Universidad de Santiago de Chile.

- Ingeniera en Ejecución Informática. Universidad de Los Lagos.

Post Grado: Magister en Docencia para la Educación Superior. Universidad Andrés Bello.

Principal(es) Área(s) de investigación en la que se desarrolla:

- Prácticas pedagógicas.

- Informática.

3. **Nombre:** Jorge Ávila Contreras

   Título(s) Profesional(es) o Grado: Licenciado en Matemática. Universidad de Santiago de Chile.

   Post Grado:

   - Magister en Ciencias en Matemática Educativa. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional de México (Cicata - Ipn).

   - Candidato a Doctor en Educación Matemática. Universidad de Los Lagos.

   Principal(es) Área(s) de investigación en la que se desarrolla:

   - Complejidad y Dimensión emocional en la Formación de Profesorado de Matemáticas.

   - Pensamiento variacional.

CAPÍTULO IV

DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

1. Recogida de la Información

A continuación se presentan las respuestas textuales entregadas por los docentes entrevistados. En las siguientes tablas se hace la distinción entre los profesores con vasta experiencia (P.E) y los profesores nóveles (P.N).

Pregunta 1

a) ¿Usted enseña sistemas de ecuaciones lineales, en qué curso?

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas
P.E.1	*Si enseño, 2º Medio*
P.E.2	*Si, enseño sistemas de ecuaciones lineales en 2º año medio*
P.E.3	*1º medio, 2º medio, 3º medio y 4º medio*

Tabla 2. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 1.A

Se puede observar que los docentes con vasta experiencia, se adecuan a lo estipulado por el MINEDUC. Todos estos docentes presentan los sistemas de ecuaciones lineales en el año correspondiente al que establece los programas de estudio, donde cabe destacar que uno de ellos (P.E.3) presenta este contenido a todos los cursos de la enseñanza media.

Profesores Nóveles	Respuestas
P.N.1	*Sí, en 2º medio.*
P.N.2	*Si, enseño sistemas de ecuaciones lineales generalmente en 1º M*
P.N.3	*Se enseña en 2do medio, los métodos de resolución de sistema de ecuaciones lineales (sustitución, reducción e igualación), además si existen solución, si es única o son infinitas soluciones, también se hace la relación gráfica de las soluciones.* *En tercero medio (electivo matemático) se utiliza como conocimientos previos para ubicar el punto de intersección de rectas, además también se usan en programación lineal.*

Tabla 3. Respuesta profesores nóveles, pregunta 1.A

Se observa que dos de los profesores se adecuan a lo establecido en los programas de estudio, donde P.N.3 hace hincapié en que también revisa este contenido en el nivel de tercero medio pero a modo de conocimientos previos para una nueva enseñanza.

También se aprecia que uno de ellos (P.N.2), no se ajusta a lo establecido en los programa de estudios, entregando este contenido a sus estudiantes un año antes a lo estipulado por el MINEDUC, sin embargo hay que tener en cuenta que próximamente se realizará un reajuste curricular donde se actualizarán dichos programas, por ello no necesariamente el contenido se enseñara en segundo medio.

b) Cuando revisa los programas de estudio para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿en qué se fija?

La organización interna de cada unidad (incluyendo la que se refiere a los sistemas de ecuaciones lineales) invita a los docentes a poner hincapié en cinco puntos importantes a la hora de trabajar todo el contenido.

1. Contenidos
2. Aprendizajes Esperados
3. Orientaciones didácticas
4. Actividades para el aprendizaje y ejemplos
5. Actividades para la evaluación y ejemplos

Profesores con Vasta Experiencia	**Respuestas**
P.E.1	*En el propósito de cada unidad.*
P.E.2	*En los métodos de solución* *En los problemas de aplicación*
P.E.3	*En que los alumnos conozcan la función lineal, la pendiente y la ecuación de la recta.*

Tabla 4. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 1.B

Se puede apreciar que ninguno de los profesores toma en cuenta todos los puntos presentados anteriormente, se observa que cada uno de estos docentes le da énfasis a diferentes aspectos de ésta organización.

Profesores Nóveles	**Respuestas**
P.N.1	*En lo previo para poder enseñarlo.*
P.N.2	*Utilizo generalmente las orientaciones curriculares del tema, y luego los ejemplos. Modifico algunos problemas, de acuerdo a las necesidades específicas de cada curso.*
P.N.3	*Las orientaciones pedagógicas principalmente, aunque lo utilizo como una guía.*

Tabla 5. Respuesta profesores nóveles, pregunta 1.B

Con respecto a las respuestas emitidas por la muestra de profesores, solo uno de los entrevistados afirma utilizar los objetivos fundamentales para la realización de su práctica en el aula. Debemos señalar que este aspecto del Programa de Estudio corresponde al fin último de lo que se desea lograr en cada unidad trabajada, y por lo mismo, éste es el que dirige al resto de los aspectos señalados.

Sí bien, el resto de los docentes se preocupa de los demás puntos anteriormente señalados, tan solo uno se destaca frente al principal foco de atención en el programa de estudio propuesto.

c) ¿Qué opinión tiene sobre las actividades que se presentan en el programa de estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales?

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas
P.E.1	*Que son pertinentes a la edad y aplicación en la vida real. Además de que son necesarios para la resolución de problemas y aplicar el horizonte del educando.*
P.E.2	*Los problemas que se presentan están muy lejanos a la realidad de los estudiantes.*
P.E.3	*Falta en el alumno de este colegio madurez cognitiva*

Tabla 6. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 1.C

Se puede apreciar que las respuestas entregadas por los docentes P.E.1 y P.E.2 son totalmente contrarias, dado que uno establece que las actividades presentadas en el programa de estudio son pertinentes a la edad y de aplicación en la vida real, lo cual se contrapone a la respuesta entregada por el otro profesor, ya que responde que las actividades están muy lejanas a la realidad de los estudiantes. Por otra parte el docente P.E.3 no responde de manera completa a la pregunta establecida, por tanto su respuesta no se tomará en cuenta en la investigación.

Profesores Nóveles	Respuestas
P.N.1	*Que están descontextualizadas.*
P.N.2	*Creo que en la parte algebraica no hay mayor diferencia con lo que hago en clase. El paso complejo es la modelación, no hay preguntas para la construcción del concepto sistemas de ecuaciones lineales, con solamente 3 preguntas desprovistas de contexto.*
P.N.3	*Creo que sirven para seguir un orden, pero no entrega mucho*

	material para trabajar con los alumnos, las actividades son acorde a lo que deben aprender los chicos, pero no bastan para profundizar en el tema.

Tabla 7. Respuesta profesores nóveles, pregunta 1.C

Los profesores nóveles P.N.1 y P.N.2, concuerdan que las actividades que presentan los programas de estudio están en su mayor parte descontextualizadas para la realidad de los estudiantes, enfocándose sólo en ese punto para poder criticarla. Por otro lado P.N.3 establece que las actividades son acordes a lo que deben aprender los estudiantes en cierto año de escolaridad, indistinto si los problemas planteados están o no contextualizados.

d) ¿Qué relación cree usted que existen entre lo que presentan los programas de estudio y los textos escolares, sobre la unidad de sistemas de ecuaciones lineales?

Profesores con Vasta Experiencia	**Respuestas**
P.E.1	*Estrecha relación, existe pertinencia.*
P.E.2	*La gran mayoría de los libros está de acuerdo con los programas de estudio.*
P.E.3	*No existe coherencia entre los programas de estudios y los textos escolares.*

Tabla 8. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 1.D

Dos de los profesores establecen que existe relación en lo presentado por los programas de estudio y los textos del estudiante, contraponiéndose totalmente con lo que dice el tercer profesor encuestado. Quien afirma que no existe coherencia entre el programa y el texto.

Profesores Nóveles	**Respuestas**
P.N.1	*Ambos tienen el mismo objetivo, pero se desarrollan de distinta manera en los libros de estudio.*
P.N.2	*No mucha ya que en los p y p del ministerio aparecen en 2ºM y los textos de primero solamente trabajan posic. Relativas entre 2 rectas, de acuerdo a la geo. Analítica.*
P.N.3	*Si existe relación entre los contenidos de los planes de estudios y los textos escolares, aunque el texto escolar se refleja una gran exigencia hacia los estudiantes y son un aporte para el aprendizaje de los alumnos.*

Tabla 9. Respuesta profesores nóveles, pregunta 1.D

En general las respuestas entregadas por los profesores encuestados mencionan que existe un tipo de relación entre lo presentado por el programa de estudio y los textos escolares entregados por el MINEDUC.

e) De acuerdo a lo que el programa de estudio propone, ¿Qué relación existe entre éste y lo que usted trabaja en el aula?

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas
P.E.1	*Es aplicable el programa con la ayuda del texto de MINEDUC. Existe una continuidad respecto a lo que se trabaja en cursos anteriores y posteriores (3º Medio)*
P.E.2	*Trabajo con sistemas de ecuaciones lineales sencillos, que los estudiantes entiendan el concepto y que aprendan a aplicarlos a problemas reales*
P.E.3	*Se trata de acondicionar los contenidos del programa al nivel de los alumnos.*

Tabla 10. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 1.E

Ninguno de los profesores menciona directamente qué relación existe entre lo que propone el programa y su trabajo en el aula. Más bien se refieren al "acondicionamiento" de los contenidos y si el programa es o no aplicable.

Profesores Nóveles	Respuestas
P.N.1	*Yo acomodo los contenidos a las necesidades y habilidades de mis estudiantes, el programa piensa en un estudiante "promedio" que realmente no existe.*
P.N.2	*Yo parto con lo del texto de estudio (medio de AB),* *(m =* $\frac{y2-y1}{x2-x1}$*);* *(d =* $\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}$*)* *Y posic. Relativas. Gráficas de líneas rectas, y luego modelación de problemas con rectas y sist. de ec. lineales; algunos problemas de p. lineal.*
P.N.3	*Los programas de estudio dan los contenidos que uno debe pasar en el aula, por ende están fuertemente relacionados, lo cual es importante porque estandariza el aprendizaje, en el sentido que todos estemos pasando el mismo contenido en cualquier colegio.*

Tabla 11. Respuesta profesores nóveles, pregunta 1.E

Con respecto a los profesores nóveles se observan variadas respuestas, donde sólo uno de ellos afirma que sus clases están fuertemente relacionadas con lo que el programa propone, y los otros dos docentes entregan respuestas referidas al como lo hacen y mencionando que acomodan los contenidos a las necesidades y habilidades de los estudiantes.

f) Entendiendo que la epistemología es la construcción del conocimiento. ¿Utiliza alguna epistemología, ya sea la presentada en los textos de estudio, en el programa de estudio o alguna propia? Descríbala

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas
P.E.1	*Aplico lo del texto a partir de problemas contextualizados y de contenidos de años anteriores, los alumnos trabajan problemas que propone el texto*
P.E.2	*Utilizo la presentada en el texto del estudiante. Cada alumno tiene el texto, me guío por él y el estudiante desarrolla las actividades ahí propuestas, con ayuda del profesor*
P.E.3	*Se usa una triangulación de conocimientos.*

Tabla 12. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 1.F

Dos de los tres encuestados mencionan guiar la construcción del conocimiento con apoyo del texto del estudiante, desarrollando las actividades propuestas por éste. El otro docente menciona realizar una triangulación, sin embargo no especifica de qué tipo y qué factores se toman en cuenta para ella.

Profesores Nóveles	Respuestas
P.N.1	*De forma teórica no, pero intento basarme en la entrega de un conocimiento científico que luego se acomoda al grupo en el cual se imparte, de manera que puede ser reducido o amplificado según las necesidades de los estudiantes.*
P.N.2	*Mi modelo de enseñanza se inicia con cotidianeidad; luego del problema realizamos un análisis, con opiniones grupales y juicios de valor. Una vez ubicado el contenido en un contexto aparecen regularidades y reglas, formas algebraica / gráfica de resolución y cambio de representación de las rectas, interpretación de la solución.*

P.N.3	*Personalmente siento que todo va en una misma línea de trabajo, debido que el plan de estudio da las directrices, el texto aporta en el contenido con ejercicios y propuestas de actividades y también está el estilo propio para entregar los contenidos.*

Tabla 13. Respuesta profesores nóveles, pregunta 1.F

Primeramente señalar que los docentes no responden directamente a la pregunta planteada, se limitan a definir su forma de enseñar, mencionando el ajuste de los contenidos, el conocimiento científico, ejercicios de cotidianeidad y trabajos grupales. Por otro lado uno de ellos realiza una triangulación entre el plan de estudio, el texto del estudiante y el estilo propio de cada profesor para la enseñanza.

Pregunta 2

a) ¿Qué entiende usted por sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo definiría?

Profesores con Vasta Experiencia	**Respuestas**
P.E.1	*Conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas que conforman un problema matemático. Consiste en encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen dichas ecuaciones*
P.E.2	*Es un conjunto de ecuaciones lineales, definidas sobre un cuerpo o un anillo conmutativo*
P.E.3	*Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto de ecuaciones lineales. Se representa de la forma* $\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array}$ *donde a, b, c, d, e, f pertenece a los reales y x e y representan las incógnitas.*

Tabla 14. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 2.A

Se aprecia que todos los docentes entregan una definición correcta sobre los sistemas de ecuaciones, cabe destacar que uno de los docentes con vasta experiencia menciona que el conjunto de ecuaciones debe ser sobre un cuerpo o anillo conmutativo, lo que se demuestra que el docente va más allá de lo que se necesita para el tratamiento de los sistemas en el ámbito escolar.

Profesores Nóveles	Respuestas
P.N.1	*Es un conjunto de ecuaciones de primer grado, para el cual se buscan soluciones que satisfagan a todas las ecuaciones a la vez.*
P.N.2	*Entiendo un sist. de ec. lineales como el funcionamiento de varios factores simultáneos para la modelación de una situación lineal.* *Def: Conjunto de ecuaciones que poseen un conjunto solución común.*
P.N.3	*En el contexto algebraico, Como un conjunto de ecuaciones con dos o más variables, las cuales tienen la misma solución e única solución, también existen casos donde existe infinitas solución o bien existen sistemas de ecuaciones que no tienen solución.* *Desde el la óptica del gráfico, es el punto de intersección de dos o más rectas, donde cada una de estas, representa una ecuación en la forma algebraica.*

Tabla 15. Respuesta profesores nóveles, pregunta 2.A

En esta pregunta se observa que los docentes contestaron de manera correcta lo que se entiende por sistemas de ecuaciones lineales.

b) ¿Conoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones lineales en la historia del desarrollo de las matemáticas?, descríbalo brevemente

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas
P.E.1	*No*
P.E.2	*Inicialmente se usaron los sistemas de ecuaciones lineales para cálculos geométricos relacionados con área volumen longitud*
P.E.3	*No lo conozco*

Tabla 16. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 2.B

La mayoría de éstos profesores desconoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones en el desarrollo de la historia de las matemáticas, sin embargo uno de los docentes si conoce dicho surgimiento.

Profesores Nóveles	Respuestas
P.N.1	*No*
P.N.2	*No lo conozco mucho, pero como la mayoría de los temas algebraicos, deben haberse desarrollado inicialmente cerca del mar mediterráneo; y luego haberse desarrollado más en los siglos XVII y XVIII en el sector europeo.*
P.N.3	*Sinceramente desconozco el fundamento histórico y que matemáticos aportaron al desarrollo o al estudio de sistemas de ecuaciones lineales.*

Tabla 17. Respuesta profesores nóveles, pregunta 2.B

Se puede observar en esta pregunta que ningún docente encuestado conoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones lineales en el desarrollo de la historia de las matemáticas.

c) Indique que métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conoce. ¿Cuáles enseña a sus estudiantes? ¿Por qué?

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas	
P.E.1	*Sustitución* *Igualación* *Reducción* *Determinantes*	*Enseño determinantes, es más dinámico, amplia la capacidad del alumno y es necesario para enseñanza superior*
P.E.2	*-Método gráfico* *-Método de sustitución* *-Método de igualación* *-Método de reducción* *Método de determinantes*	*Enseño generalmente estos 4 métodos, porque considero que el estudiante debe entender, comprender, que un sistema se puede resolver por muchos métodos. Que ellos elijan el método a usar.*
P.E.3	*1.Método gráfico* *2.Método algebraico:* *- reducción* *- igualación* *- sustitución* *- cramer* *- gauss* *- matrices*	

Tabla 18. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 2.C

Todos los docentes mencionan los principales métodos utilizados en la escuela y otros de mayor complejidad. Con respecto a cuál enseña a sus estudiantes, a pesar de que el programa propone cuatro métodos, un profesor afirma sólo utilizar el método de determinantes.

Profesores Nóveles	**Respuestas**	
P.N.1	*Sustitución* *Reducción* *Igualación* *Cramer.*	*Enseño todos los métodos en un principio, y evalúo el manejo y conocimiento de todos en una primera instancia para luego dejar a libre disposición la utilización de estos.*
P.N.2	*Reducción* *Sustitución* *Igualación* *Cramer* *Aprox gráfica*	*Los enseño todos; ya que mientras más formas conozcan; mejor. Incluso la aproximación geométrica, ya que entrega referencias (utilizando g. analítica)*
P.N.3	*Son tres métodos de solución que conozco: reducción, igualación y sustitución.*	*En clase explico los tres métodos, porque considero que es importante que conozcan los distintos caminos que pueden tomar para que ellos determinen, a partir de sus experiencias cual es el método que más convenga.*

Tabla 19. Respuesta profesores nóveles, pregunta 2.C

Se puede apreciar que los tres docentes conocen los métodos que se consideran a enseñar por el programa de estudio en la escuela, también se muestra que conocen otros métodos. Y al momento de enseñar sistemas de ecuaciones mencionan utilizar todos los nombrados por ellos.

d) Mencione algunos ejemplos contextualizados donde se pueden aplicar los sistemas de ecuaciones lineales.

Profesores con Vasta Experiencia	**Respuestas**
P.E.1	*Problemas dietas* *Aplicación resolución de triángulos* *Reparticiones herencias* *Economía* *Problemas de logística*

	Distribución
P.E.2	*Principalmente los aplico en la solución de problemas, por lo general de la vida diaria, como también en la geometría analítica, en el cálculo de 2 o más variables*
P.E.3	*Problemas de la vida diaria* *Problemas de programación lineal*

Tabla 20. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 2.D

En esta pregunta se pide a los docentes que entreguen algunos ejemplos contextualizados donde se apliquen los sistemas de ecuaciones, sin embargo ellos no responden de manera correcta a la pregunta, dando respuestas referidas a las áreas en donde se pueden desarrollar dichos ejemplos. Mencionando problemas de logística, economía, programación lineal, distribución, problemas de dietas, reparticiones de herencias, etc.

Profesores Nóveles	**Respuestas**
P.N.1	*Relación entre los hombres y mujeres que forman un curso de tantas personas en comparación a la cantidad de mujeres que asiste al paseo y hombres que asiste al paseo.* *Relación entre el valor de dos productos y el total a pagar, en comparación al valor pagado al comprar cierta cantidad de un producto y el otro y el total pagado.*
P.N.2	*No me los sé de memoria, pero hemos trabajado con ingresos/gastos para poder ahorrar de 2 familias del colegio; o ecuaciones utilizadas por obreros de la construcción.*
P.N.3	*En programación lineal, se transforman los sistemas de inecuaciones a sistemas de ecuaciones, para poder encontrar puntos críticos los cuales permitan encontrar la solución óptima para una función objetivo.*

Tabla 21. Respuesta profesores nóveles, pregunta 2.D

Se observa que uno solo de los docentes encuestados responde de manera correcta a la pregunta, dando a grandes rasgos un ejemplo tipo. Por otra parte los demás docentes sólo mencionan las áreas en donde ellos desarrollan, y afirman que son ejemplos de la vida cotidiana, refiriéndose a programación lineal, ingresos/gastos de dos familias, ecuaciones utilizadas por los obreros de la construcción.

e) Presente un sistema de ecuación lineal donde su solución sea única, uno con infinitas soluciones y uno que no tenga solución.

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas		
P.E.1	Solución única: $2x + 3y = 6$, $x - y = 9$	Sin Solución: $4x - 10y = 2$, $2 - 15y = -6x$	∞ soluciones: $8x + 20y = 4$, $5(x-y) - 4(2-5y) = -x - 5$
P.E.2	Solución única: $2x + 2y + 6z = 10$, $2x - y + 4z = 11$, $-y + z = 3$	Sin Solución: $6x + 4y + 2z = 2$, $7x + 4y + 5z = 3$, $5x + 3y + 3z = 2$	∞ soluciones: $x + 2y = 4$, $2x + 4y = 7$
P.E.3	Solución única: $3x + 3y = 13$, $3x + 2y = 12$	Sin Solución: $\frac{2}{3}x - 8y = 1$, $\frac{1}{4}x - 3y = 2$	∞ soluciones: $\frac{3}{4}x + 2y = 0$, $\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}y = 0$

Tabla 22. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 2.E

En esta pregunta se observa que dos de tres docentes dan correctamente los sistemas de ecuaciones pedidos, por otro lado P.E.2 comete un error en el sistema de infinitas soluciones.

Profesores Nóveles	Respuestas		
P.N.1	Solución única: $x + y = 3$, $2x + 5y = 7$	Sin Solución: $x + y = 3$, $2x + 2y = 5$	∞ soluciones: $x + y = 3$, $2x + 2y = 6$
P.N.2	Solución única: $x + y = 8$, $x - y = 3$	Sin Solución: $y - 3x = -5$, $y = 3x + 8$	∞ soluciones: $2x + y = 3$, $4x + 2y = 6$

P.N.3	Solución única: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$	Sin Solución: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$	∞ soluciones: $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ -4x + 6y = -18 \end{cases}$

Tabla 23. Respuesta profesores nóveles, pregunta 2.E

Todos los profesores encuestados responden de manera correcta y entregan sistemas de ecuaciones lineales adecuados a las solicitudes hechas.

Pregunta 3

a) ¿Qué entiende usted por modelación matemática?

Profesores con Vasta Experiencia	**Respuestas**
P.E.1	*Es como se presenta un problema de la vida diaria o un problema cualquiera en forma algebraica para analizar sus soluciones.*
P.E.2	*Es un área de la ciencia que se encarga de expresar fenómenos de la vida real en forma matemática y así poder usar las herramientas que hay en matemática para obtener una solución al problema.*
P.E.3	*Aplicación de la matemática con distintas realidades, por ejemplo, calcular las distintas pendientes de los cerros que hay en Santiago.*

Tabla 24. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 3.A

Los docentes entregan una definición cercana a lo que las investigadoras consideran como Modelación Matemática.

Profesores Nóveles	**Respuestas**
P.N.1	*Es la utilización de modelos que explican algún fenómeno a través de la matemática.*
P.N.2	*Manera de entender, analizar y proyectar una situación real a través de la matemática y sus procesos.*
P.N.3	*Es tomar un problema de la vida real y traspasarlo a un lenguaje algebraico para encontrar una solución a dicho problema.*

Tabla 25. Respuesta profesores nóveles, pregunta 3.A

Los docentes entregan una definición cercana a lo que las investigadoras consideran como Modelación Matemática.

b) ¿Cómo resolvería usted el problema dado? Anote cada detalle utilizado para su desarrollo.

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas
P.E.1	No presenta evidencia
P.E.2	No presenta evidencia
P.E.3	No presenta evidencia

Tabla 26. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 3.B

Ninguno de los docentes presenta evidencia en el desarrollo de la pregunta.

Profesores Nóveles	Respuestas
P.N.1	*Me queda la duda pues dice la cantidad que necesito para armar oro de algún color, pero no da la proporción de cuanta cantidad de oro de algún color puedo obtener.*
P.N.2	Desarrollo en **Anexos**
P.N.3	*Si 1000g de oro amarillo son 125 de plata y 125 de cobre, primero divido todo por 20, de esta manera obtengo que 50 gramos de oro amarillo son 6,25 de plata lo mismo con el oro rojo.* *Como necesito 6,25 gramos de plata, divido el oro verde en 40 para obtener los 6,25 de plata, lo mismo hago con el oro rojo.*

Tabla 27. Respuesta profesores nóveles, pregunta 3.B

Sólo dos docentes dan respuesta al problema planteado, sin embargo estas respuestas son erróneas.

c) ¿Realiza este tipo de análisis con los estudiantes en la escuela? Entiéndase este tipo de análisis con base en la modelación matemática, bajando el problema al nivel escolar nacional. ¿Por qué? Y si su respuesta fuese negativa ¿Qué se lo impide?

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas
P.E.1	No presenta evidencia
P.E.2	*No realizo este tipo de análisis, ya que los estudiantes*

	presentan muchos problemas (sobre todo de aprendizaje) en donde doy énfasis a la solución de problemas sencillos de la vida diaria.
P.E.3	No presenta evidencia

Tabla 28. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 3.C

Se evidencia que sólo un docente responde la pregunta, y afirma que no realiza ese tipo de análisis dado que los estudiantes presentas muchos problemas, sobre todo de aprendizajes.

Profesores Nóveles	**Respuestas**
P.N.1	*Siempre intento que modelen situaciones a través de la matemática, pero suele ser la etapa más compleja de todas. Los estudiantes suelen ver la matemática como una herramienta, mecánica y estructurada, no como el desarrollo de un razonamiento, de un planteamiento de situaciones que suelen tener solución.*
P.N.2	*Generalmente ocupo problemas contextualizados; pero al comienzo; luego a lo largo de la unidad, no dispongo del tiempo como para planificar y construir clases basadas en la modelación. Por la misma razón domina el álgebra en el tratamiento del contenido.*
P.N.3	*Por lo general, esquematizo el procedimiento, para que los alumnos vayan siguiendo paso a paso el modelamiento matemático, dando distintos problemas y los alumnos vaya trabajando, aunque considero que es complejo poder motivar e incentivar a los estudiantes logren el nivel de aprendizaje para que puedan modelar sin una guía.*

Tabla 29. Respuesta profesores nóveles, pregunta 3.C

Los tres docentes encuestados afirman "intentar" utilizar la modelación matemática en el desarrollo de sus clases. Los profesores dan algunos factores como por ejemplo que el modelamiento matemático es la etapa más compleja, el segundo profesor menciona que no dispone del tiempo necesario para planificar clases con base en la modelación, y finalmente se expresa que es complejo motivar e incentivar a los estudiantes para lograr un aprendizaje de modelación sin la guía del docente.

<u>Pregunta 4</u>

a) ¿Usted toma en cuenta el contexto educativo en el que está inmerso? ¿De qué manera lo hace?

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas
P.E.1	*Por ser escuela industrial, tiene bastante en donde aplicar. Tomando distintas situaciones de las especialidades que se imparten, dependiendo el contenido visto y la pertinencia.*
P.E.2	*Si, principalmente que entiendan los conceptos, enseño lo elemental para que se motiven, y luego profundizo de acuerdo al avance y que aprendan a aplicar estos conocimientos.*
P.E.3	*Si lo hago planificando de acuerdo al nivel de vulnerabilidad del colegio y alumnos.*

Tabla 30. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 4.A

Se evidencia que los tres docentes afirman tomar en cuenta el contexto de sus estudiantes en el tratamiento de sus clases. Tomando en cuenta factores como la vulnerabilidad del colegio y alumnos, distintas situaciones de acuerdo a la especialidad que se imparten en el colegio, etc.

Profesores Nóveles	Respuestas
P.N.1	*Sí, considerando habilidades, conocimientos, e interpretaciones de los estudiantes, horas de clases a la semana, complejidad de los contenidos. Adaptando el contenido a los estudiantes y a la vez adaptando a los estudiantes al contenido, pues sea cual sea la complejidad a medida que se les pide, dan.*
P.N.2	*Lo considero como parte importantísima, es necesaria para modificar la planificación o una clase en particular; en función de dicho contexto. Intento que mis estudiantes puedan relacionarse con su contexto tanto dentro como fuera de la escuela, trabajando actividades en las que interactúen, tomen decisiones, analicen y entiendan como es su contexto.*
P.N.3	*No, durante las clases de sistema de ecuaciones no he considerado el contexto educativo.*

Tabla 31. Respuesta profesores nóveles, pregunta 4.A

Dos de los profesores afirman considerar el contexto al momento de enseñar los sistemas de ecuaciones lineales, considerando habilidades, conocimientos, interpretaciones de los estudiantes y la complejidad del contenido. Además uno de ellos menciona que lo utiliza para modificar su planificación o una clase en particular. El otro docente no considera el contexto de sus estudiantes en el desarrollo de los sistemas de ecuaciones.

b) ¿Utiliza situaciones conflictivas, que emergen durante la realización de la clase, para generar interés en los estudiantes? Entiéndase por situación conflictiva cualquier situación que interrumpa el flujo de la clase.

Profesores con Vasta Experiencia	Respuestas
P.E.1	*A veces, que generalmente no se dan en mis clases.*
P.E.2	*Si, que muchas veces, los estudiantes se quejan que no entienden nada de matemáticas, razón por la cual, tengo que enseñar desde lo más básico, que asocien con problemas cotidianos de ellos.*
P.E.3	*Si, llamándoles la atención en forma enérgica y poniendo ejemplos del por qué es importante que ellos se eduquen, ya que de ellos depende su futuro.*

Tabla 32. Respuesta profesores con vasta experiencia, pregunta 4.B

La mayoría de los docentes afirma aprovechar las situaciones conflictivas emergentes en el desarrollo de las clases.

Profesores Nóveles	Respuestas
P3	*Sí, son momentos enriquecedores cuando los estudiantes plantean sus propias conclusiones con respecto a un tema, a un contenido y dejo que se provoque una discusión manejable en la que los jóvenes ponen en juego todo lo que saben para justificar sus ideas. La mayoría de las veces hay que inducirlas, pero en algunas surgen solas y esas son las mejores.*
P4	*El espacio o la acomodación, la capacidad de respuesta es algo difícil de desarrollar. La utilización del error, por ejemplo puede frustrar a quien lo comete si no existe tino en su exposición ante el curso, por lo mismo lo intento cada vez que puedo; cualquier instancia es una instancia de aprendizaje.*
P6	*No he utilizado situaciones conflictivas para el desarrollo y aprendizaje de los estudiantes, debido a que no se han presentado de manera que la pueda utilizar como un*

	recurso pedagógico.

Tabla 33. Respuesta profesores nóveles, pregunta 4.B

Dos docentes mencionan tomar en cuenta las situaciones conflictivas que emergen en las clases dadas por los estudiantes, uno de ellos afirma que son muy enriquecedoras, ya que desde ahí surgen discusiones entre estudiantes.

2. Caracterización del Conocimiento para la Enseñanza

Acorde a los objetivos específicos presentados en esta investigación, el desarrollo de este apartado busca el cumplimiento del primer objetivo, el cual hace referencia a *caracterizar el conocimiento para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, con base en las categorías de Lee Shulman.*

A continuación se presentará la caracterización del contenido que debiera dominar el docente, específicamente en cuatro puntos de los presentados como conocimiento base para la enseñanza. Siendo estos los parámetros considerados en análisis posteriores realizados en la investigación.

- **Conocimiento del contenido**
  El conocimiento que debería manejar el docente en este punto es en base a todo lo expuesto en el marco teórico, bajo el título de *Sistemas de ecuaciones lineales*, donde se espera que los docentes manejen tanto el saber sabio del contenido, como lo es la definición, los métodos de resolución y su registro gráfico, así bien la historia del surgimiento de dicho contenido, sus aplicaciones práctica en la vida cotidiana y por último sus errores y obstáculos.
- **Conocimiento del currículo**
  En base al conocimiento del currículo se espera que los docentes conozcan y manejen lo presentado en el marco curricular, tanto como en los programas y planes de estudios y además de lo presentado en el texto oficial del estudiante.
- **Conocimiento didáctico del contenido**
  En este punto, las investigadoras esperan que los docentes manejen didáctica de contenido, específicamente en el área de las matemáticas, donde las teorías propuestas por las investigadoras son Teoría de Situaciones Didácticas y Modelación Matemática, las cuales se encuentran plasmadas en el marco teórico.

- **Conocimiento de los contextos educativos**

  Al abordar este punto, se espera que los docentes tengan en cuenta, al momento de la planificación de sus clases, el contexto donde se encuentran inmersos sus estudiantes, para así lograr captar la atención de ellos y conseguir un aprendizaje significativo para estos en base a su propia realidad.

3. Contraste del Conocimiento de los profesores

En consecuencia con el segundo objetivo específico planteado en la investigación, el cual pretende *contrastar el conocimiento matemático de los profesores con la caracterización anterior*, se presenta dicho contraste para así poder delimitar cuales de los puntos expuestos anteriormente, cumplen los docentes encuestados.

Este contraste se realizará con respecto a la recogida de información entregada a través de los cuestionarios contestados por los docentes y la caracterización del conocimiento matemático. Posteriormente a partir de esta información las investigadoras evaluarán el nivel de cumplimiento por parte de los docentes de dichas caracterizaciones, estos niveles serán: *Insuficiente, Aceptable y Sobresaliente.* Donde se calificará por *Insuficiente* a aquellos docentes que cumplan con menos del cincuenta por ciento de los parámetros expuestos en la caracterización.

Siguiendo con los niveles de cumplimiento de los docentes, se evaluará como *Aceptable* a aquellos profesores que cumplan con más del cincuenta por ciento de los parámetros, pero no con la totalidad de ellos.

Finalmente se juzgarán por *Sobresaliente* a aquellos encuestados que cumplan en su totalidad los parámetros desarrollados en la caracterización.

3.1 Conocimiento del Contenido

En base a lo expuesto en la caracterización, donde se presenta el óptimo de conocimientos que debiesen manejar los docentes encuestados. A continuación se analizará si estos profesores cumplen con dicha caracterización, diferenciando a los profesores con vasta experiencia de los profesores nóveles.

Es por esto que para dicho análisis se consideraron las respuestas entregadas por los docentes encuestados, las cuales se pueden apreciar desde la tabla 14 hasta la 23.

Profesores	**Contraste**
Con vasta	Se puede constatar que los tres profesores al momento de dar la

experiencia	definición formal de los sistemas de ecuaciones lineales, entregan una definición acertada de estos. Por otra parte, cuando se les pregunta por la parte histórica, solo uno de ellos conoce parte del surgimiento de los sistemas. Además los docentes al responder en base a los métodos de resolución que conocen, todos aseguran tener conocimiento de los tres métodos planteados en el programa de estudio, método de sustitución, igualación y reducción, también afirman conocer más métodos externos a los planteados por el programa, lo cual bajo la mirada de las investigadoras es valorado, ya que su conocimiento no se limita sólo a lo que apuntan los planes y programas, debido a que estos estipulan lo que se debe enseñar y no lo que se debe conocer. Sin embargo, al momento de preguntarles por ejemplos contextualizados, sólo un docente en base a la respuesta esperada por las realizadoras de esta investigación, da respuesta de forma correcta, explicitando distintas aplicaciones, ya que los otros docentes, sólo se limitan a entregar respuestas pertinentes a la pregunta pero que no dan respuesta a ella. Por último, se puede apreciar que los docentes, al momento de pedirles que den ejemplos de sistemas de ecuaciones sobre los distintos tipos de soluciones que se puedan presentar, sólo uno erró en un tipo de solución (infinitas soluciones), dejando la duda entre las investigadoras si realmente el error fue por falta de conocimiento o por alguna otra razón. Es por esto que si se realiza una mirada global a las respuestas entregadas por los docentes encuestados, se puede asegurar que ellos tienen un conocimiento base del contenido aceptable, debido que la única debilidad observada es el surgimiento del tópico estudiado en esta investigación.
Nóveles	Este grupo de docentes cuando se les pregunta por la definición formal de sistemas de ecuaciones lineales, todos responden de manera correcta. Esto es totalmente opuesto a lo ocurrido a la segunda pregunta, la cual hace referencia a la historia de los sistemas de ecuaciones, donde los tres afirman no conocer el surgimiento de dicho tópico. Cabe destacar que un solo profesor afirma no conocerlos, pero infiere como fue su desarrollo en la historia, dado que sigue el mismo patrón de la mayoría de los objetos matemáticos. También estos tres docentes afirman conocer los tres métodos planteados en los programas de estudio, y además dos de ellos afirman

	conocer algunos más. Con respecto a la entrega de ejemplos dos profesores los plantean contextualizados, el restante afirma enseñar problemas contextualizados en base a la programación lineal donde las investigadoras tienen dos objeciones respecto a esto, la primera es en base a que si bien la programación está dentro de un contexto, no pertenece a la realidad misma de los estudiantes. La segunda objeción que se tiene, es que en el caso óptimo de que se presentara un problema contextualizado pertinente a la realidad de los estudiantes, este tipo de problemas no es netamente un ejercicio de sistemas de ecuaciones lineales, sino más bien pertenecería al tópico de inecuaciones lineales, donde los sistemas son sólo una herramienta para el desarrollo de dichos problemas. Es por esto que se puede inferir que los profesores nóveles también poseen un conocimiento base del contenido aceptable, dado que se evidencia que ninguno de los docentes conoce la parte historia de los sistemas.

Tabla 34. Conocimiento del Contenido

3.2 Conocimiento del Currículo

Así como los docentes deben tener un conocimiento base del contenido, también lo deben tener en el currículo, por esto se analizará si los docentes encuestados logran un dominio suficiente en este aspecto de sus conocimientos.

A pesar que en la caracterización anterior se espera que el docente utilice el marco curricular en su totalidad, es decir, enfocándose en los contenidos mínimos obligatorios, objetivos fundamentales y los planes y programas. Lamentablemente no es posible obtener esta información a través del cuestionario entregado a los profesores, es por esto que el análisis en este punto no será entregado de manera completa, dado que como se mencionó anteriormente dicho instrumento no pudo ser sujeto a mejoras. Por tanto el análisis se realizará sólo tomando en cuenta el programa de estudio y no el marco curricular en su totalidad.

Es por esto que para dicho análisis se consideraran las respuestas entregadas por los docentes encuestados, las cuales se pueden apreciar en las tablas 2-3-4-5-12-13.

Profesores	**Contraste**
Con vasta	Los tres docentes se ajustan a lo propuesto por los programas de

experiencia	estudio, además uno de ellos afirma enseñar este objeto matemático en todos los niveles de enseñanza media. Por otro lado se puede apreciar que existen diferentes consideraciones por parte de los docentes al momento de revisar los programas de estudio para enseñar los sistemas de ecuaciones, entre estos se encuentran los conocimientos previos, el propósito de la unidad, métodos de solución y problemas de aplicación. Por lo que se puede inferir que los docentes toman en cuenta el programa de estudio para el tratamiento de los sistemas, pero no de manera completa, ya que este presenta además otros puntos a considerar para el desarrollo de la unidad. En conclusión, se puede decir que el conocimiento base de estos docentes con respecto al currículo no se presenta de manera completa a partir de lo señalado en el programa. Es por eso que las investigadoras califican el conocimiento del currículo de los encuestados como aceptable.
Nóveles	Primeramente se hará referencia al nivel donde se enseña el tópico sistemas de ecuaciones lineales, en donde dos de tres profesores se rigen por lo expuesto en los programas de estudio y lo realizan en segundo año medio, el profesor que no se ajusta a lo propuesto por el MINEDUC es porque lo enseña en primero medio. En las consideraciones que los docentes toman en cuenta al momento de revisar el programa para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones, se puede apreciar que no existe uniformidad en las respuestas entregadas, ya que los docentes entregan diferentes posturas, donde se hace referencia a los conocimientos previos, orientaciones curriculares, ejemplos y orientaciones pedagógicas. Sin embargo estas consideraciones no bastan para el desarrollo que propone el programa de estudio. Por tanto se califica a estos docentes con el criterio de aceptable.

Tabla 35. Conocimiento del Currículo

3.3 Conocimiento Didáctico del Contenido

Ajustándose con lo presentado en la caracterización, se debe tener en cuenta que este análisis tendrá su foco en dos grandes ejes, Teoría de Situaciones Didácticas y Modelación Matemática. Es por esto que para dicho análisis se considerarán las respuestas entregadas por los docentes encuestados, las cuales se pueden apreciar en las tablas 12-13-24-25.

Profesores	Contraste
Con vasta experiencia	Refiriéndose a la Modelación Matemática y lo que ellos entienden por esta, se aprecia que sólo uno de los docentes se acerca al concepto mismo, de los restantes, uno de ellos posee una vaga idea, mientras que el otro se aleja completamente del concepto que las investigadoras plasman con respecto a la Modelación Matemática. A partir de las respuestas entregadas por los encuestados, se puede inferir que los docentes con vasta experiencia realizan un tratamiento mecanicista de los sistemas de ecuaciones lineales, ya que ellos mismos afirman presentar primero el concepto a sus estudiantes y posteriormente ejercitarlo con problemas que propone el texto. Con esto se aprecia, bajo el juicio de las realizadoras de la investigación, que los profesores con vasta experiencia desvalorizan el proceso analítico que se puede llegar a lograr en los estudiantes. Por ende se afirma que los profesores siguen utilizando las mismas técnicas de años anteriores, obviando la Teoría de Situaciones Didácticas, la cual sirven como herramienta para la construcción del conocimiento. Considerando lo expuesto recientemente, las autoras de este estudio califican como insuficiente el conocimiento didáctico del contenido que poseen estos profesores.
Nóveles	Se destaca que los docentes nóveles en base a las contestaciones dadas sobre la pregunta referida a la Modelación Matemática, dos de ellos entregan una respuesta cercana a lo que se presenta en el marco teórico con respecto a esta misma. El otro profesor, bajo la apreciación del equipo de investigación, entrega un concepto superior con respecto a la Modelación Matemática. Con respecto al tratamiento que realizan los docentes de los sistemas de ecuaciones, no se puede realizar un análisis en profundidad, ya que dos de las evidencias entregadas no responden a lo que se apunta en dichas preguntas. Sin embargo existe un profesor que muestra en su evidencia, el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales bajo un lineamiento didáctico, fundado en la Modelación Matemática. Por otra parte cuando se les pregunta a los encuestados por la epistemología ocupada en sus salas de clases, se evidencia que ellos se guían por lo que estipula el programa de estudio. Sin embargo dos de ellos acomodan el conocimiento, que presenta el programa, a las

	necesidades que tienen sus estudiantes; donde uno de ellos va más allá y pretende realizar la ambiciosa propuesta del Marco Curricular, generando análisis en los estudiantes respecto de problemas enfocados a en la cotidianeidad de los estudiantes, con opiniones grupales y juicios de valor; desprendiendo desde ahí regularidades para formalizar el concepto matemático. Realizando una mirada global a las respuestas entregadas por los docentes, estos calificarían como aceptable en el sentido del conocimiento didáctico del contenido. Es necesario en este punto distinguir a un profesor que cumple con todos los parámetros contemplados en el conocimiento didáctico del contenido, siendo calificado como sobresaliente. Es por esto que se hace esta mención especial.

Tabla 36. Conocimiento Didáctico del Contenido

3.4 Conocimiento de los Contextos Educativos

En este último punto se espera que los docentes tengan conocimiento de los contextos educativos donde están inmersos sus estudiantes, tomando en cuenta aspectos desde lo micro como por ejemplo el grupo curso, hasta lo macro refiriéndose a comunidades y/o culturas donde se encuentra inmerso el estudiantado. Es por esto que para dicho análisis se considerarán las respuestas entregadas por los docentes encuestados, las cuales se pueden apreciar en las tablas 30-31.

Profesores	Contraste
Con vasta experiencia	Los tres docentes encuestados afirman tomar en cuenta el contexto educativo de los estudiantes, no obstante si se considera la definición de contextualización entregada por las autoras del estudio, sólo dos de ellos se acercan a este concepto, ya que de la respuesta entregada por el tercer profesor no se puede extraer información adecuada para el desarrollo de este campo. Lamentablemente el instrumento es deficiente, de manera que no permite extraer la información necesaria para desarrollar un contraste óptimo. Por consiguiente la calificación que se da a los docentes, en base a los niveles de cumplimiento será sobresaliente.
Nóveles	En este caso dos de los tres profesores encuestados revelan tomar en cuenta los contextos educativos, uno de estos declara considerarlo *importantísimo* y explica que al tomar en cuenta este punto debe modificar sus planificaciones para cada clase en particular, teniendo

	como finalidad que sus estudiantes se relacionen con su contexto y así tomen conciencia de éste. En cambio el tercer profesor indica lo opuesto, manifestando no utilizar los contextos educativos de sus estudiantes en el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales. Finalmente cabe mencionar que al tener sólo un parámetro para evaluar este conocimiento, dos de los tres profesores se califican como sobresalientes.

Tabla 37. Conocimiento de los Contextos Educativos

En las respuestas entregadas por los profesores se extrae que la mayoría de estos si toma en cuenta los contextos educativos en los que se desenvuelven, además de considerar esto como un asunto importante, debido que puede existir modificación desde su planificación hasta el desarrollo de la clase, según el contexto inmerso en el que se encuentre inmerso cada uno, pensando netamente en sus estudiantes.

4. Contraste del Programa de Estudio con el Texto del Estudiante

Teniendo en cuenta que el tercer objetivo específico de esta investigación es *Contrastar el programa de estudio con el texto del estudiante entregado por el Ministerio de Educación*, a continuación se presentará dicho contraste, para así posteriormente, las investigadoras realicen una valoración de este, y finalmente juzguen si es pertinente la utilización del texto del estudiante para la realización de su diseño curricular.

	Indicadores	Texto del estudiante
AE 06: Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente.	Determinan y verifican la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, manualmente.	En el texto del estudiante, en la página 223, se puede apreciar que sí muestra la gráfica de las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales (Ver en **Anexos**) donde posteriormente se realiza la conexión con la parte algebraica. Luego se les pide a los estudiantes que solucionen el sistema de ecuaciones lineales relacionándolos a los distintos tipos de soluciones (solución única, infinitas soluciones o sin solución) y además se les pide a los estudiantes que asocien el registro gráfico con el algebraico.
	Determinan y verifican la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, usando un software gráfico.	En la página 224 del texto del estudiante (Ver en **Anexos**) se puede apreciar que se les pide a los estudiantes resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, donde se les recomienda a los estudiantes utilizar algún procesador geométrico. Se puede apreciar que la utilización de este software matemático aparece como una recomendación para el estudiante, por lo cual queda a criterio del profesor si este lo hace cumplir o no.
	Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución.	En la página 226 del texto del estudiante (Ver en **Anexos**) se muestra la resolución de un sistema de ecuación lineal de dos incógnitas, paso a paso, donde posteriormente en la página 229 (Ver en **Anexos**) se les pide a los estudiantes que desarrollen dichos sistemas apoyándose de este método de sustitución, por lo cual se puede observar que este indicador se cumple a cabalidad.

	Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante reducción.	En base al texto del estudiante se puede apreciar que en la página 228 (Ver en **Anexos**) se muestra en cuatro pasos la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales y además en la página 230 (Ver en **Anexos**) se les pide a los estudiantes explícitamente que desarrollen una serie de sistemas de ecuaciones lineales utilizando este método de resolución.
	Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante igualación.	Al igual que los otros indicadores enfocados a los métodos de resolución, también está estructurado el cómo resolverlo, tal como se puede observar en la página 227 del texto del estudiante (Ver en **Anexos**). Además, al igual que los otros métodos, se les pide a los estudiantes que den solución a los sistemas de ecuaciones lineales, utilizando específicamente este método de resolución (Ver en **Anexos**).
	Fundamentan acerca de cuál es el método más eficiente para resolver un sistema de ecuaciones lineales dado y determinan su solución.	En la página 230 del texto del estudiante (Ver en **Anexos**) se le pide al estudiantado que resuelvan algunos sistemas de ecuaciones, donde ellos deben escoger el método de preferencia, justificando su elección. Donde exactamente lo que busca este ítem es realizar lo estipulado por el indicador.

	Discuten acerca de la existencia y pertinencia de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	En el texto del estudiante en la página 232 (Ver en **Anexos**), se puede apreciar que explicita el propósito del sub título *Existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales* el cual es: analizar algebraicamente la existencia en un sistema de ecuaciones lineales. Con esto se puede apreciar, tal como lo señala en propósito, que en el texto sólo se le da énfasis al análisis algebraico, generando la carencia de sentido del trabajo que se está realizando.
AE 07: Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	Modelan una situación, usando un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	Si se tiene en cuenta que la modelación y la socialización van de la mano, en el texto nunca se propone que los estudiantes trabajen en grupo y/o construyan el conocimiento, por lo cual se puede afirmar que este indicador no se está cumpliendo, en base a los que dice los programas de estudio.
	Relacionan un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con el contexto de un problema.	A lo largo de la unidad se puede apreciar diversos ejemplos contextualizados, algunos resueltos y otros planteados, para que los estudiantes lo resuelvan, buscando acercar la realidad a ellos.
	Interpretan la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas según el contexto del problema asociado.	En la página 238 del texto del estudiante (Ver en **Anexos**) se les pide a los alumnos que resuelvan una serie de ejercicios, planteados en lenguaje natural, donde se les pregunta en base a distintos contextos. Donde posteriormente deben, a partir de la obtención de los valores de las incógnitas, dar respuesta a la pregunta planteada en el problema. Con esto se busca que el estudiante pueda interpretar la solución algebraica y traspasarla a lenguaje natural.

Tabla 38. Contraste Programa de Estudio vs Texto del Estudiante

Con respecto al contraste recién planteado se puede apreciar que el libro cumple con algunos de los indicadores, donde los más relevantes para las investigadoras, lamentablemente no se ven presentes en el texto del estudiante, los cuales hacen referencia a modelación, la utilización de nuevas tecnologías y también el no cumplimiento del indicador que busca que el estudiante tenga un proceso de razonamiento más allá de la simple ejercitación.

5. Diseño Curricular

La propuesta se diseñará en base a toda la información presentada y recopilada en la investigación, donde se debe considerar para la elaboración, los organizadores del currículo presentado en el marco teórico, también el conocimiento que debe tener el docente en base a los sistemas de ecuaciones lineales, y además teorías didácticas de las matemáticas como lo son la Modelación Matemática y la Teoría de Situaciones Didácticas. Sin olvidar que la propuesta se ajustará a lo presentado en el marco curricular presentado por el MINEDUC.

Cabe destacar que las planificaciones para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, utilizarán nuevas técnicas, distintas a las que los estudiantes están acostumbrados, donde el profesor presenta el contenido y luego ellos deben reproducir el mismo procedimiento en una serie de ejercicios. Buscando motivar a los estudiantes por medio de juego y desafío personales, de manera que el profesor no sea el que *entrega* el conocimiento a sus estudiantes, sino que sea más bien un guía en la construcción de éste.

Sin embargo, no todas las clases pueden estar enfocadas netamente en la modelación matemática, dado que en función del tiempo que se dispone, es muy complejo desarrollar las clases bajo esta mirada, debido a que esta metodología requiere de mucho más tiempo para lograr abordar el tópico y construir el razonamiento matemático de los estudiantes.

Abocándonos al diseño curricular como tal, primeramente, hay que mencionar que está pensado para ser efectuado en siete sesiones, siendo la primera una clase enfocada específicamente a los conocimientos previos que poseen los estudiantes, necesarios para, posteriormente, utilizarlos al trabajar con el tópico en cuestión. Esta clase, como sólo se quiere recordar los conocimientos que él ya posee, comenzará con un juego, el cual fue recuperado de URL https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2013/06/10/baraja-de-pasos-de-una-ecuacion/.

Las siguientes clases están enfocadas puramente en los sistemas de ecuaciones lineales, abordando el contenido no de una mirada tradicionalista y mecanicista, sino más bien buscando la construcción del conocimiento y razonamiento matemático.

De esta manera se irán intercalando las clases desarrolladas con base en la Teoría de Situaciones Didácticas y modelación matemática con una de formalización del contenido y ejercitación, esto se debe realizar de esta manera, debido a dos razones, bajo el criterio de las investigadoras. La primera razón es que dado que los discentes están acostumbrados a la clase tradicionalista, no se puede sacar completamente de ese escenario y segundo es porque a pesar de que el estudiante construirá su conocimiento, también debe ponerlo a prueba.

Posterior a las clases mencionadas anteriormente, se realizará una sesión donde los alumnos tendrán que debatir, acerca de cuál método es el más eficiente para resolver un sistema de ecuaciones lineales, donde el profesor designará arbitrariamente la posición que tomarán los estudiantes.

Donde finalmente se realizará la última clase que tiene como objetivo evaluar los aprendizajes de los estudiantes. Esta evaluación, siendo consecuente con la metodología utilizada en la investigación, se realizará a modo de trabajo grupal, donde se espera que los estudiantes revaloricen las matemáticas, comprendiendo que las pueden encontrar en cualquier situación de la vida cotidiana, donde ésta muchas veces pasa por frente de ellos, pero no son capaces de valorarla y/o reconocerla.

Cabe mencionar también, que para el desarrollo de este diseño, se consideraron diferentes actividades y modelos a tratar con los estudiantes. Estos modelos y actividades se recopilaron de distintas fuentes de información y se seleccionaron en base al criterio de las investigadoras. Además se debe mencionar que el equipo de investigación, a pesar de no avalar la forma de abordar los sistemas de ecuaciones lineales en el texto del estudiante, de igual forma se utilizó en la propuesta, esto se debe a dos razones.

La primera es porque la educación chilena está medida por una serie de pruebas estandarizadas, entre las que se encuentran el SIMCE[19] y la PSU[20]. Es por esto que es necesario que los estudiantes también trabajen *ejercicios tipo*[21], de manera que conozcan a la forma que tienen estas pruebas. Y segundo, al ser el documento oficial

[19] Sistema de medición de la calidad de la educación.
[20] Prueba de selección universitaria.
[21] Ejercicios desprovistos de contexto.

con el que trabajan los estudiantes, este modelo de clases podrá ser utilizado para la enseñanza en cualquier parte del país, ya que se busca que este tipo de clases se pueda aplicar de manera transversal indistinto de la ciudad donde se enseñe o la dependencia del establecimiento donde se aplicara este diseño.

Como se busca la transversalidad de la aplicación de este diseño, se debe mencionar que no se tomaron en cuenta las TIC para la elaboración del diseño, ya que no todos los establecimientos tienen la infraestructura necesaria para poder llevar a cabo una clase donde los estudiantes trabajen con un software educativo. El diseño curricular en cuestión se puede ver en **Anexos.**

5.1. Fortalezas y Debilidades

A continuación se pretende dar a conocer algunas de las debilidades y fortalezas encontradas en el diseño curricular.

5.1.1 Fortalezas

Promueve un aprendizaje activo, ya que motiva al estudiante a construir su proceso de aprendizaje en el contexto que este se vea inmerso.

En este diseño se identifican intenciones de provocar un real interés, algo realmente contextualizado y significativo para ellos, de manera que si esta propuesta pudiese llegar a concretar, se espera por parte de las investigadoras un importante cambio en la educación.

Se ejecuta un plan de desarrollo de la clase de manera organizada, con estrategias didácticas (experimentos, proyectos de aprendizaje, actividades, etc.) trabajando los estudiantes de una manera conjunta. Existe coherencia en la estructura del diseño el cual guiará el logro de los objetivos de la clase.

Se incita a adaptar los procedimientos apropiados a nuevas situaciones favoreciendo el proceso de enseñanza. Se promueve además la participación de los estudiantes, ya que el profesor se convierte en un guía, un facilitador del proceso pedagógico

5.1.2 Debilidades

La primera debilidad que se debe tener en consideración es que el tiempo para este diseño basado en modelación, quizás, no siempre será cumplido a cabalidad.

Además se considera como una debilidad, la no utilización de TIC en el desarrollo de la propuesta curricular, sin embargo, la decisión de no tomarlo en cuenta, es dado a que se pretende que este material sea de un carácter más transversal a los diferentes tipos de establecimientos que existen en Chile. Es por esto que no se consideró ésta herramienta, ya que existen colegios con una mayor vulnerabilidad donde no se tiene acceso a herramientas computacionales, o si se tienen éstas son muy deficientes.

5.2 Recomendaciones

Es importante reconocer la importancia de que los estudiantes construyan su propio aprendizaje, ya que es así como lo convertirá verdaderamente en aprendizaje significativo para ellos, por esto se debe permitir la discusión entre los estudiantes como primer paso, para luego dar discusión entre estudiantes y docente, lo cual otorga un nutrido trabajo colaborativo para ellos. Por esto la primera recomendación que se debe entregar, es que el profesor que desee utilizar este diseño en alguna de sus clases, debe tener en cuenta que está enfocado en un trabajo grupal, donde los estudiantes discuten con sus pares los diferentes problemas que se le presentan, por tanto no se debe olvidar el trabajo en equipos de trabajo dentro y/o fuera del aula.

Además se recomienda también, modificar, en el caso de que fuera necesario, los ejemplos que se proponen en las actividades, de manera que se acerquen a los contextos específicos del curso donde se está trabajando.

Y por último se debe tener en cuenta que próximamente se efectuará un reajuste en las bases curriculares de 7º a II Medio, por lo que el objeto sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas se adelantará a primer año medio, por esto la recomendación es que se puede utilizar este diseño curricular, bajo la nueva reforma, pero sujeto a mejoras en base a lo que proponga las nuevas bases curriculares.

5.3 Análisis a priori

Recordemos que el título de nuestra investigación es *Sistemas de ecuaciones lineales. Un diseño curricular fundado en un análisis a priori, para el tratamiento en aulas de enseñanza media.* Por esto se delimitará en qué punto se encuentra la investigación, respecto a la ingeniería didáctica.

A este instrumento, sólo se le han analizado las dificultades y fortalezas, siendo esto parte de la primera fase de la ingeniería didáctica, evidenciada en el marco teórico.

Avanzando en la ingeniería, en la fase dos, se describen dos partes, una la descriptiva, la cual ya se desarrolló en el apartado *diseño curricular* y una segunda, que tiene como objetivo predecir lo que ocurrirá, al momento de implementar el diseño curricular en el aula.

Por esto, como primera conjetura, se cree que al momento de realizar este diseño curricular, los estudiantes participarán de manera activa, debido a la nueva metodología de trabajo que se les está presentado. Logrando, entre otros factores, captar la atención de ellos de manera constante, clase a clase, debido que cada una de las actividades de las que se presenta será llamativa para el alumnado

Totalmente opuesto a lo presentado anteriormente, como segunda conjetura se piensa que los estudiantes al trabajar en grupos, se distraerán demasiado, generando un desorden considerable, impidiendo que se logren los objetivos de las actividades y de cada clase.

Por último se cree que en el caso de que se pudiera realizar las actividades planificadas en el diseño propuesto, quizás, al no estar habituados los estudiantes a esta metodología de trabajo, los alumnos no logren desarrollar el pensamiento matemático de la forma en que se espera, quedando inconclusas las actividades, viéndose forzado el docente a intervenir más de lo que pretende esta propuesta curricular.

CAPÍTULO V
CONCLUSIONES

1. Respuesta a la Pregunta de Investigación

En base a todo lo expuesto a lo largo de este estudio, los componentes esenciales que se deben tener en cuenta para la elaboración de un diseño curricular para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales son bastantes. Es decir, se deben tomar en cuenta diversos aspectos que tiene que dominar el docente. Tal como afirma Rico (2000), se deben tener algunas consideraciones, llamados organizadores, los cuales no están muy alejados de las categorías expuestas por Shulman, por tanto se puede afirmar que los componentes esenciales que se deben considerar son: el currículo nacional que rige a los docentes y estandariza los conocimientos y habilidades que se deben enseñar a lo largo del país, aplicaciones del objeto matemático con el cual se va a trabajar, materiales y recursos, los errores y obstáculos, además de tener conocimiento didáctico en el área de las matemáticas y por último, pero no menos importante se debe considerar el contexto educativo donde está inmerso el estudiante, ya que de esta manera se facilitarán los procesos de enseñanza y aprendizaje.

2. Comprobación de los Supuestos

Dentro de los supuestos de investigación, se afirmó que los docentes nóveles, de esta investigación en particular, en su mayoría, no están preparados en base a los contenidos, donde a lo largo de la investigación se pudo constatar que en general los docentes manejan suficiente información sobre el contenido, sólo teniendo dificultades para responder en base al surgimiento histórico, información por la cual los docentes con vasta experiencia tampoco sobresalieron, dado que sólo uno afirmó conocer el origen, mientras que los demás encuestados tampoco conocían su surgimiento. Es por esto que no se puede ser tan categórica y confirmar que los profesores nóveles no están preparados, para esta investigación y con los docentes encuestados, este supuesto queda injustificado.

En el siguiente supuesto se cree que actualmente los docentes sólo realizan clases tradicionalistas. No se puede afirmar necesariamente que estos realizan clases tradicionales, dadas las limitaciones del estudio, lo que sí se puede afirmar es que no utilizan metodologías nuevas como es la modelación, a pesar de que el programa de estudios menciona que se debe desarrollar la modelación matemática en el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales, los profesores simplemente no toman en cuenta este indicador.

Por último, cabe mencionar que un supuesto explicitado en el estudio fue que los años de práctica influyen en el cómo enseñar, siendo los docentes con vasta experiencia los más preparados, supuestamente. Pero al momento de analizar la información y contrastarla con las categorías expuestas en la caracterización, se pudo apreciar que no existe mayor diferencia entre los docentes nóveles y los docentes con vasta experiencia, dado que en los cuatro ejes que se compararon, las calificaciones que entregaron las investigadoras en general son muy parecidas, donde la única diferencia observada fue en el área del conocimiento didáctico del contenido. En esta área, los docentes con vasta experiencia fueron calificados como insuficiente, a diferencia de los nóveles que fueron calificados como aceptables para esta investigación.

Además cabe destacar que hubo un docente novel, que en esta área en cuestión, calificó como sobresaliente, dado que fue el único de todos los docentes en presentar un desarrollo de clase distinto al tradicional, utilizando la modelación matemática.

Con esta evidencia, queda más que claro que, si se realiza una comparación, no se puede afirmar que los docentes con vasta experiencia están mejor y más preparados que los docentes nóveles. En base a todo lo planteado, el supuesto queda invalidado para la investigación.

3. Proyecciones

La proyección de esta investigación, principalmente, es la continuación de la ingeniería didáctica, debido a que en este estudio, sólo se realizan las dos primeras fases expuestas en el marco teórico.

Por esto, el estudio puede ser continuado, ya que falta implementar el diseño curricular propuesto, someterlo a prueba, para poder obtener la validación luego de confrontar el análisis a priori y a posteriori y finalmente obtener las conclusiones.

Otra proyección que cabe destacar para este estudio, es más bien para la complementación de este, ya que si bien el texto del estudiante analizado no hace referencia a la utilización de la modelación en el trabajo con los sistemas de ecuaciones lineales, no necesariamente implica que en todos los textos del estudiante, de otras editoriales, ocurra lo mismo. Es por esto que una futura investigación relacionada con el mismo objeto matemático, puede ser un análisis exhaustivo a diversos textos de los estudiantes en base al tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales.

4. Conclusiones Generales

Dentro del desarrollo de la investigación se plantea que por lo general los docentes realizan en la mayoría de los casos una enseñanza de manera mecanicista, es por tanto que se emplea un cuestionario a los docentes seleccionados con el fin de indagar en este tratamiento con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. Es por esto que se concluye, a partir de los resultados obtenidos, que verdaderamente los docentes sólo realizan clases tradicionalistas, donde ellos no utilizan nuevas metodologías para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, teniendo en cuenta que esta afirmación es sólo en base a los sujetos encuestados en esta investigación.

En base a esta proposición entregada por las autoras, estas infieren que los docentes no innovan en sus técnicas debido a dos posibles razones, la primera es referente a tiempo que estos disponen para las planificaciones de sus clases. Por otra parte, se cree que la segunda posible razón por la cual los docentes encuestados siguen realizando sus clases bajo un paradigma tradicionalista, es debido a que ellos no tienen las suficientes herramientas, habilidades y conocimientos para utilizar otro tipo de metodología para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

Por otra parte, las investigadoras constatan que se necesita una actualización al texto del estudiante entregado por el MINEDUC, dado que el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales no tiene situaciones contextualizadas basadas en la modelación matemática, sin embargo, el programa y marco curricular la consideran una parte importante para la enseñanza en este ámbito. Por esto se concluye que existe una contradicción entre lo que presenta el texto del estudiante y lo que se propone en las bases curriculares, por esto es necesaria una actualización en los textos escolares. Así como se critica la falta de actualización del texto del estudiante, también se debe criticar a los profesores, tal como se muestra en el apartado anterior, ya que es un compromiso docente estar actualizado a nuevas metodológicas didácticas.

Por esto, se cree que el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales con base en la Modelación Matemática, específicamente, es una tarea difícil para los docentes, debido a que el tiempo que poseen tanto dentro del aula como tiempo dedicado a la planificación de clase no es suficiente para el desarrollo de esta teoría didáctica.

BIBLIOGRAFÍA

Álgebra. (s.f). Recuperado el día 06 de enero de 2015, de URL http://www.uv.es/~perezsa/docencia/material/IMEE/Matrices.pdf

Arrieta, J. y Díaz, L. (2013). Una mirada socioepistemológica de la modelación. Artículo en evaluación en revista de corriente principal.

Artigue, M. Douady, R. Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (1ª edición). Distrito Federal, México: Grupo editorial iberoamericana.

Báez, M., Cantú, C., Gómez, K. (2007). *Estudio cualitativo sobre las prácticas docentes en las aulas de matemáticas en el nivel medio.* Seminario de título para optar al grado de Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, Yucatán, México.

Bassanezi, R. & Salett, M. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación- un nuevo método de enseñanza. *Revista de didáctica de las matemáticas*. *(32)*. Diciembre de 1997, 13-25.

Brousseu, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Londres, Inglaterra: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (s.f). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Recuperado el 5 de enero de 2015, de URL http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5CFundamentos Brousseau.pdf

Chavarria, J. (2006). Teoría de situaciones didácticas. *Cuaderno de investigación y formación en educación matemática, (2),* 30-40.

Córdoba, F. (2011). La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería. Instituto Politécnico Nacional. México.

Díaz, D. (2010) Sistemas de ecuaciones y resolución de problemas: una propuesta de enseñanza y aprendizaje. *Revista III REPEM. Universidad Nacional de La Pampa,* Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

Díaz Godino, J., Gomez Alfonso, B., Gutierrez, A., Rico, L., Sierra Vásquez, M. (1999). *Área de conocimiento: didáctica de la matemática*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas*. Seminario de título para optar al grado de Magister en enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. Perú.

Gallardo, R. & González, J.L. (s.f). *El análisis didáctico como una metodología de investigación en educación matemática.* Recuperado el 28 de Octubre de 2014, de SEIEM, sitio web: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas10SEIEM/4Sem1AnalisisDidactico.pdf.

Gómez, P. (s.f). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Recuperado el 29 de Octubre de 2014, de sitio web: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/GomezP05-2797.PDF.

Guerra, A. (2012). *Propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales.* Seminario de título para optar al grado de Magister en Enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Hernández Sampieri, R., Fernandez-Collado, C., Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación*. (4ª edición) Distrito Federal, México: McGraw-Hill Interamericana.

Juegos y matemática. (2013). Recuperado el 10 de Enero de 2015, de URL https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2013/06/10/baraja-de-pasos-de-una-ecuacion/.

Maffey, S. (2006). *Estudio sobre la meta cognición y competencia de profesores y estudiantes en relación al tema de las ecuaciones lineales.* Seminario de título para optar al grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas Educativa. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Distrito Federal, México.

Marroquín, C. (2009). *Construcción del concepto ecuaciones lineales con dos variables mediante visualización y registros de representación en alumnos de primer semestre de ingeniería agroindustrial: secuencia de una situación didáctica.* Seminario de título para optar al grado de Maestría en matemática educativa. Universidad pedagógica nacional francisco morazán. Tegucigalpa, Honduras.

Matrices y determinantes. (s.f). Recuperado el día 02 de Enero de 2015, de URL http://personales.unican.es/carballor/1112/Capitulo1.pdf.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista IRICE (13),* 105-132.

McMillan, J. Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa.* (5ª edición). Madrid, España: Pearson Addison Wesley.

Ministerio de Educación. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media.* Santiago, Chile: MINEDUC.

Ministerio de Educación. (2011). *Matemática. Programa de estudio segundo año medio.* Santiago, Chile: MINEDUC.

Ministerio de Educación (2011). *Plan de estudio 2º año de enseñanza media vigente a partir de 2012.* Santiago, Chile: MINEDUC.

Ministerio de Educación. (2013). *Evaluación prueba inicia. Presentación de resultados* 2012. Recuperado el 19 de noviembre de 2014, de MINEDUC, Santiago: http://www.mineduc.cl/usuarios/mineduc/doc/201308221629100.RESULTADOS_EVALUACION_INICIA.pdf.

Retamosa, A. (2010). *Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.* Seminario de título para optar al grado de Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Universidad de Granada. Granada, Andalucía, España.

Rico, L. Castro, E. Castro, E. Coriat, M. Marín, A. Puig, L. et al. (2000). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (2ª edición) Barcelona, España: Horsori.

Robalino, M., Körner, A., Cuenca, R., Fabara, E., Kohen, J., Parra, M., et al. (2005). *Condiciones de trabajo y salud docente.* Santiago, Chile: OREALC

Rodríguez, G. Gil, J. García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. (2ª edición). Málaga, España: Ediciones Aljibe.

Sandín, M.P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid, España: McGraw-Hill.

Saucedo, G. (s.f). *Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la universidad.* Seminario de título para optar al grado de Maestría en didácticas específicas con mención en matemática. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe, Argentina.

Segura de Herrero, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Relime, 7, (1)*, 49-78.

Soto, E. (2010). *Métodos de determinantes*. Recuperado el 31 de Diciembre de 2014, de URL http://www.aprendematematicas.org.mx/notas/algebra/DGB1_3_2_1_4.pdf.

Strang, G. (1982). *Algebra lineal y sus aplicaciones*. México: Fondo Educativo Interamericano.

Shulman, L, (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado, 9, (2),* 1-30.

Trigueros, M, (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas Innovación Educativa. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*. *Vol. 9, (46),* 75-87.

ANEXOS

ANEXO 1: CARTAS DE PRESENTACIÓN A ESTABLECIMIENTOS

UNIVERSIDAD CATÓLICA SILVA HENRÍQUEZ
Salesiana

Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa

Santiago, Diciembre 29 del 2014.

Señor/a:
Director/a y Jefe de UTP.
Escuela Idustrial San Vicente de Paul.
Presente.

Estimados/as:

Junto con saludarle, paso a presentar a Ud. a las Señoritas Andrea Canelo Escobar, ***C.I. N°: 17832387-3, María José Cartes Rodas, C.I. N°: 16840811-0 y Daniela Cifuentes Espinoza, C.I. N°: 17837428-1***, quienes son alumnas regulares del último semestre de nuestro Programa de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, el cual es impartido por nuestra casa de Estudios.

Durante el presente semestre las estudiantes mencionadas, se encuentran desarrollando su Tesis de Grado denominada: **"Sistemas de Ecuaciones lineales, un diseño curricular fundado en un análisis a priori, para el tratamiento en aulas de enseñanza media"**, dirigido por el Prof. Alonso Quiroz Meza, por lo cual solicito a Ud. su autorización para que dentro de lo posible, ellas puedan aplicar encuestas semi-esctructuradas para docentes de matemáticas.

Cabe señalar que esto es de vital importancia para que puedan llevar a cabo el estudio que requiere su Tesis.

Agradeciendo desde ya su apoyo al respecto, le saluda cordialmente.

UNIVERSIDAD CATÓLICA Silva Henríquez
ucsh
Departamento de Educación Matemática

MARITZA SILVA ACUÑA
Directora Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa.

MSA/mmm.
c.c.: - Archivo.

Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa

Santiago, Diciembre 29 del 2014.

Señor/a:
Director/a y Jefe de UTP.
Consejo Educacional Joaquín Edwards Bello.
Presente.

Estimados/as:

Junto con saludarle, paso a presentar a Ud. a las Señoritas Andrea Canelo Escobar, ***C.I. N°: 17832387-3, María José Cartes Rodas, C.I. N°: 16840811-0 y Daniela Cifuentes Espinoza, C.I. N°: 17837428-1***, quienes son alumnas regulares del último semestre de nuestro Programa de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, el cual es impartido por nuestra casa de Estudios.

Durante el presente semestre las estudiantes mencionadas, se encuentran desarrollando su Tesis de Grado denominada: **"Sistemas de Ecuaciones lineales, un diseño curricular fundado en un análisis a priori, para el tratamiento en aulas de enseñanza media"**, dirigido por el Prof. Alonso Quiroz Meza, por lo cual solicito a Ud. su autorización para que dentro de lo posible, ellas puedan aplicar encuestas semi-esctructuradas para docentes de matemáticas.

Cabe señalar que esto es de vital importancia para que puedan llevar a cabo el estudio que requiere su Tesis.

Agradeciendo desde ya su apoyo al respecto, le saluda cordialmente.

UNIVERSIDAD CATÓLICA Silva Henríquez
ucsh
Departamento de Educación Matemática

MARITZA SILVA ACUÑA
Directora Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa.

MSA/mmm.
c.c.: - Archivo.

Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa

Santiago, Diciembre 29 del 2014.

Señor/a:
Director/a y Jefe de UTP.
Colegio Espíritu Santo del Verbo Divino.
Presente.

Estimados/as:

Junto con saludarle, paso a presentar a Ud. a las Señoritas Andrea Canelo Escobar, ***C.I. N°: 17832387-3, María José Cartes Rodas, C.I. N°: 16840811-0 y Daniela Cifuentes Espinoza, C.I. N°: 17837428-1***, quienes son alumnas regulares del último semestre de nuestro Programa de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, el cual es impartido por nuestra casa de Estudios.

Durante el presente semestre las estudiantes mencionadas, se encuentran desarrollando su Tesis de Grado denominada: **"Sistemas de Ecuaciones lineales, un diseño curricular fundado en un análisis a priori, para el tratamiento en aulas de enseñanza media"**, dirigido por el Prof. Alonso Quiroz Meza, por lo cual solicito a Ud. su autorización para que dentro de lo posible, ellas puedan aplicar encuestas semi-esctructuradas para docentes de matemáticas.

Cabe señalar que esto es de vital importancia para que puedan llevar a cabo el estudio que requiere su Tesis.

Agradeciendo desde ya su apoyo al respecto, le saluda cordialmente.

UNIVERSIDAD CATÓLICA SILVA HENRÍQUEZ
ucsh
Departamento de Educación Matemática

MARITZA SILVA ACUÑA
Directora Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa.

MSA/mmm.
c.c.: - Archivo.

Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa

Santiago, Diciembre 29 del 2014.

Señor/a:
Director/a y Jefe de UTP.
Colegio particular San José de Puente Alto.
Presente.

Estimados/as:

Junto con saludarle, paso a presentar a Ud. a las Señoritas Andrea Canelo Escobar, ***C.I. N°: 17832387-3, María José Cartes Rodas, C.I. N°: 16840811-0 y Daniela Cifuentes Espinoza, C.I. N°: 17837428-1***, quienes son alumnas regulares del último semestre de nuestro Programa de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, el cual es impartido por nuestra casa de Estudios.

Durante el presente semestre las estudiantes mencionadas, se encuentran desarrollando su Tesis de Grado denominada: **"Sistemas de Ecuaciones lineales, un diseño curricular fundado en un análisis a priori, para el tratamiento en aulas de enseñanza media"**, dirigido por el Prof. Alonso Quiroz Meza, por lo cual solicito a Ud. su autorización para que dentro de lo posible, ellas puedan aplicar encuestas semi-esctructuradas para docentes de matemáticas.

Cabe señalar que esto es de vital importancia para que puedan llevar a cabo el estudio que requiere su Tesis.

Agradeciendo desde ya su apoyo al respecto, le saluda cordialmente.

UNIVERSIDAD CATÓLICA Silva Henríquez
ucsh
Departamento de Educación Matemática

MARITZA SILVA ACUÑA
Directora Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa.

MSA/mmm.
c.c.: - Archivo.

Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa

Santiago, Diciembre 29 del 2014.

Señor/a:
Director/a y Jefe de UTP.
Colegio San Pedro Valle Grande.
Presente.

Estimados/as:

Junto con saludarle, paso a presentar a Ud. a las Señoritas Andrea Canelo Escobar, ***C.I. N°: 17832387-3, María José Cartes Rodas, C.I. N°: 16840811-0 y Daniela Cifuentes Espinoza, C.I. N°: 17837428-1***, quienes son alumnas regulares del último semestre de nuestro Programa de Pedagogía en Matemáticas e Informática Educativa, el cual es impartido por nuestra casa de Estudios.

Durante el presente semestre las estudiantes mencionadas, se encuentran desarrollando su Tesis de Grado denominada: **"Sistemas de Ecuaciones lineales, un diseño curricular fundado en un análisis a priori, para el tratamiento en aulas de enseñanza media"**, dirigido por el Prof. Alonso Quiroz Meza, por lo cual solicito a Ud. su autorización para que dentro de lo posible, ellas puedan aplicar encuestas semi-esctructuradas para docentes de matemáticas.

Cabe señalar que esto es de vital importancia para que puedan llevar a cabo el estudio que requiere su Tesis.

Agradeciendo desde ya su apoyo al respecto, le saluda cordialmente.

UNIVERSIDAD CATOLICA Silva Henriquez ucsh Departamento de Educación Matemática

MARITZA SILVA ACUÑA
Directora Escuela de Educación Matemática
e Informática Educativa.

MSA/mmm.
c.c.: - Archivo.

ANEXO 2: INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

“SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. UN DISEÑO CURRICULAR FUNDADO EN UN ANÁLISIS A PRIORI, PARA EL TRATAMIENTO EN AULAS DE ENSEÑANZA MEDIA”

A continuación presentamos un instrumento para la recolección de información, de un estudio enfocado en los profesores en ejercicio docente, denominado “Sistemas de ecuaciones lineales. Un diseño curricular fundado en un análisis a priori, para el tratamiento en aulas de enseñanza media”. Toda información proporcionada por usted será administrada bajo completa discreción, sin exponer la integridad profesional del encuestado.

Esperamos que el desarrollo de la encuesta sea en función de un alto nivel de honestidad y profesionalismo.

De ante mano muchas gracias.

Grupo investigador, Pedagogía en Matemática e Informática Educativa.

Universidad Católica Silva Henríquez

Nombre del establecimiento en el cual ejerce su profesión docente:

____

Años de labor docente: ____

Título Profesional: ____

Pregunta 1:

a) ¿Usted enseña sistemas de ecuaciones lineales, en qué curso?

b) Cuando revisa los programas de estudio para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿en qué se fija?

c) ¿Qué opinión tiene sobre las actividades que se presentan en el programa de estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales?

d) ¿Qué relación cree usted que existen entre lo que presentan los programas de estudio y los textos escolares, sobre la unidad de sistemas de ecuaciones lineales?

e) De acuerdo a lo que el programa de estudio propone, ¿Qué relación existe entre éste y lo que usted trabaja en el aula?

f) Entendiendo que la epistemología es la construcción del conocimiento. ¿Utiliza alguna epistemología, ya sea la presentada en los textos de estudio, en el programa de estudio o alguna propia? Descríbala.

Pregunta 2:

a) ¿Qué entiende usted por sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo definiría?

b) ¿Conoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones lineales en la historia del desarrollo de las matemáticas descríbalo brevemente?

c) Indique que métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conoce. ¿Cuáles enseñas a sus estudiantes? ¿Por qué?

d) Mencione algunos ejemplos contextualizados donde se pueden aplicar los sistemas de ecuaciones lineales.

e) Presente un sistema de ecuación lineal donde su solución sea única, uno con infinitas soluciones y uno que no tenga solución.

Pregunta 3:

a) ¿Qué entiende usted por modelación matemática?

b) Dada la siguiente actividad:

"El oro que se extrae de la tierra es un mineral metálico y de un característico color amarillo cuando está refinado. El oro puro es suave y muy maleable. Para el uso en joyería, el oro se mezcla con otros metales, principalmente cobre y plata, formando una aleación.

Este procedimiento le proporciona cualidades mecánicas que el oro puro no presenta, como dureza, resistencia y color. Normalmente, se ignora que el oro aleado puede presentar diferentes colores. Así, por cada 1 000 g de aleación, además de 750 g de oro puro, existen las siguientes aleaciones de oro:

- *Oro amarillo: contiene 125 g de plata fina y 125 g de cobre.*
- *Oro rojo: contiene 250 g de cobre.*
- *Oro rosa: contiene 50 g de plata fina y 200 g de cobre.*
- *Oro blanco: contiene 100 a 160 g de paladio. El resto es de plata fina.*
- *Oro gris: contiene alrededor de 150 g de níquel. El resto es de cobre.*
- *Oro verde: contiene 250 g de plata.*
- *Oro azul: contiene 250 g de hierro.*

Si se tiene oro verde y oro rojo disponible para fundir, ¿se pueden obtener 50 g de oro amarillo?, ¿por qué?

Si ahora se necesita obtener 20 g de oro rosa y solo se dispone de oro rojo y verde, ¿cuántos gramos de cada tipo se deben utilizar?"

¿Cómo resolvería usted el problema dado? Anote cada detalle utilizado para su desarrollo.

c) ¿Realiza este tipo de análisis con los estudiantes en la escuela? Entiéndase este tipo de análisis con base en la modelación matemática, bajando el problema al nivel escolar nacional. ¿Por qué? Y si su respuesta fuese negativa ¿qué se lo impide?

Pregunta 4:

a) ¿Usted toma en cuenta el contexto educativo en el que está inmerso? ¿De qué manera lo hace?

b) ¿Utiliza situaciones conflictivas, que emergen durante la realización de la clase, para generar interés en los estudiantes? Entiéndase por situación conflictiva cualquier situación que interrumpa el flujo de la clase.

ANEXO 3: VALIDACIÓN DEL CUESTIONARIO POR EXPERTOS

Solicitud de validación de instrumentos a través de Juicio de Expertos

La validación de los instrumentos elaborados por las estudiantes seminaristas, se realiza con el propósito de asegurar que su estructura y contenido, permitan recopilar la información requerida para esta investigación.

El presente seminario es para optar al grado de Licenciado en Educación, Título de Profesor de Educación Media en Matemáticas e Informática Educativa.

Las estudiantes que optan a obtener su título profesional es:

Andrea Francesca Canelo Escobar	17.832.387-3
María José Cartes Rodas	16.840.811-0
Daniela Alejandra Cifuentes Espinoza	17.837.428-1

"Sistemas de ecuaciones lineales. Un diseño curricular fundado en un análisis a priori, para el tratamiento en aulas de enseñanza media".

Resumen: Se realizará un estudio de caso en los Establecimientos Particulares Subvencionados de Santiago, en donde se pretende estudiar el tratamiento que realizan los profesores de matemática en el tópico de los sistemas de ecuaciones lineales en las aulas de enseñanza media, para desarrollar un diseño curricular que sirva de apoyo para los docentes.

Pregunta de investigación: ¿Cuáles serían los componentes esenciales que se deben tomar en cuenta para la elaboración un diseño curricular en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales?

<u>Datos Experto</u>

Nombre: Carlos Gómez Castro

Título o Grado Académico: Profesor de Matemáticas, Licenciado en Educación

Fecha: 07/01/2015

Se ruega consignar si los instrumentos revisados para validar se ajustan a alguna de las siguientes categorías; marcar la categoría que considere pertinente.

- Muy bien.
- Bien.
- Suficiente.
- Insuficiente.

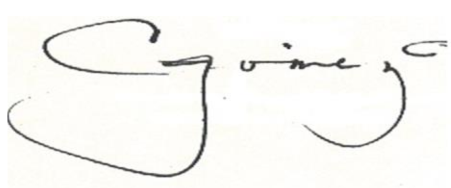
<u>Observaciones</u>

El análisis a priori implica la consideración de los análisis previos asociados al objeto de estudio y al problema de investigación que ustedes plantean, para concebir en cuanto a estructuración, forma y dimensión el diseño curricular que ustedes proponen. Faltaron preguntas que apunten a poder recoger información para realizar los análisis previos asociados al objeto de estudio.
Otro componente importante del análisis a priori, que no fue suficientemente considerado en el instrumento, son las variables involucradas, los medios y las herramientas requeridas para incorporarlas al logro del objetivo que ustedes se plantean.
No vi incorporado al instrumento, el establecimiento de las reacciones, actitudes, habilidades y aptitudes que ustedes esperan de los profesores con motivo de verse enfrentados a este diseño curricular.

Me parece que la estructura y contenidos del instrumento no son los adecuados para recopilar la información requerida para vuestra investigación, sobre todo si está fundada en un análisis a priori.

Les solicité que me adjuntaran el archivo, para haber reaccionado en el documento, pero en fin lo hice considerando el documento impreso.

Lo valido como **Suficiente**, con las consideraciones señaladas.



Firma

Datos Experto

Nombre: Maritza Mariela Silva Acuña

Título o Grado Académico: Profesora de Matemática y Computación, Licenciada en Matemática y Computación

Fecha: 09/01/2015

Se ruega consignar si los instrumentos revisados para validar se ajustan a alguna de las siguientes categorías; marcar la categoría que considere pertinente.

- Muy bien.
- Bien.
- Suficiente.
- Insuficiente.

Observaciones

Considero que la estructura y los contenidos que se consideran en el instrumento, no son pertinentes para recopilar la información requerida para la investigación, sobre todo si está fundada en un análisis a priori.

Lo valido como **Bien**, con las consideraciones señaladas.

Firma

<u>Datos Experto</u>

Nombre: Jorge Ávila Contreras

Título o Grado Académico: Licenciado en Matemáticas

Fecha: 09/01/2015

Se ruega consignar si los instrumentos revisados para validar se ajustan a alguna de las siguientes categorías; marcar la categoría que considere pertinente.

- Muy bien.
- Bien.
- Suficiente.
- Insuficiente.

<u>Observaciones</u>

<u>Pregunta 1</u> c): La opinión puede ser: "es muy buena" "es buena" "cumplen su objetivo" "Regulares" etc. Agregaría, algo así como explique porqué... de manera que desarrolle la idea y no se remita a respuestas cortas que no entregan mucha información para analizar.

d): Partiría preguntando si cree que hay relación... y si su respuesta es sí, pasaría a ésta.

e): Ídem a observación anterior

f): No es que una epistemología se aplique o no se aplique, forma parte de aspectos que movilizan el actuar de las personas y que van generando los conceptos en su devenir histórico... me parece que esta pregunta está mal planteada.

<u>Pregunta 2</u> b): Si su respuesta es sí, descríbalo brevemente.

d): Elabore un ejemplo contextualizado en el cual usted considere que se pueden aplicar sist de ec lineales.

<u>Pregunta 3</u> a): ¿Qué relación tiene esto con sus objetivos específicos y con su investigación?

c): ¿Por qué se deslizaron a la modelación? Es interesante pero debería haberse explicado en los objetivos específicos que hacia allá iría parte de la exploración.

<u>Pregunta 4</u> a): ¿Lo toma en cuenta para qué? Es una pregunta muy amplia, debiese acotarse más a los propósitos del estudio.

Lo valido como **Bien**, con las consideraciones señaladas.

Firma

ANEXO 4: RESPUESTAS ENTREGADAS POR LOS SUJETOS ENCUESTADOS

ANEXO 4.1. Respuesta profesor (P.E.1)

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Salesiana

Nombre del establecimiento en el cual ejerce su profesión docente: Escuela Industrial San Vicente de Paul

Años de labor docente: 28 años.

Título Profesional: Profesor de Estado, Matemática

Pregunta 1:

a) ¿Usted enseña sistemas de ecuaciones lineales, en qué curso?

Si enseño, 2° Medio

b) Cuando revisa los programas de estudio para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿en qué se fija?

En el propósito de cada unidad

c) ¿Qué opinión tiene sobre las actividades que se presentan en el programa de estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales?

Que son pertinentes a la edad y aplicación en la vida real
Además de que son necesarios para la resolución de problemas y ampliar el horizonte del Educando

d) ¿Qué relación cree usted que existen entre lo que presentan los programas de estudio y los textos escolares, sobre la unidad de sistemas de ecuaciones lineales?

Estrecha relación, existe pertimencia

e) De acuerdo a lo que el programa de estudio propone, ¿Qué relación existe entre éste y lo que usted trabaja en el aula?

Es aplicable el programa con la ayuda del texto del Mineduc. Existe una continuidad respecto a lo que se trabaja en cursos anteriores y posteriores (3°)

f) Entendiendo que la epistemología es la construcción del conocimiento. ¿Utiliza alguna epistemología, ya sea la presentada en los textos de estudio, en el programa de estudio o alguna propia? Descríbala.

Aplico lo del texto, a partir de problemas contextualizados y de contenidos de años anteriores los alumnos trabajan problemas que propone el texto.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ
Salesiana

Pregunta 2:

a) ¿Qué entiende usted por sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo definiría?

Conjunto de dos o más ecuaciones con varias incognitas que conforman un problema matematico. Consite en encontrar los valores de las incognitas que satisfacen dichos ecuaciones.

b) ¿Conoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones lineales en la historia del desarrollo de las matemáticas descríbalo brevemente?

No

c) Indique que métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conoce. ¿Cuáles enseñas a sus estudiantes? ¿Por qué?

Sustitución
Igualación
Reducción
Determinantes

Enseño Determinantes es más dinámico, amplia la capacidad del alumno y es necesario para la enseñanza superior.

d) Mencione algunos ejemplos contextualizados donde se pueden aplicar los sistemas de ecuaciones lineales.

Problemas Dietas
Aplicación resolución de triángulos
Reparticiones Herencias.
Economía
Problemas de logística/Distribución.

e) Presente un sistema de ecuación lineal donde su solución sea única, uno con infinitas soluciones y uno que no tenga solución.

Única: $2x + 3y = 6$
$x - y = 9$

∞ soluc:
$8x + 20y = 4$
$5(x - y) - 4(2 - 5y) = x - 5$

sin solución
$4x - 10y = 2$
$2 - 15y = -6x$

Pregunta 3:

a) ¿Qué entiende usted por modelación matemática?

Es como se presenta un problema de la vida diaria o un problema cualquiera en forma algebrai-ca para analizar sus soluciones.

b) Dada la siguiente actividad:

"El oro que se extrae de la tierra es un mineral metálico y de un característico color amarillo cuando está refinado. El oro puro es suave y muy maleable. Para el uso en joyería, el oro se mezcla con otros metales, principalmente cobre y plata, formando una aleación.

Este procedimiento le proporciona cualidades mecánicas que el oro puro no presenta, como dureza, resistencia y color. Normalmente, se ignora que el oro aleado puede presentar diferentes colores. Así, por cada 1 000 g de aleación, además de 750 g de oro puro, existen las siguientes aleaciones de oro:

- *Oro amarillo: contiene 125 g de plata fina y 125 g de cobre.*
- *Oro rojo: contiene 250 g de cobre.*
- *Oro rosa: contiene 50 g de plata fina y 200 g de cobre.*
- *Oro blanco: contiene 100 a 160 g de paladio. El resto es de plata fina.*
- *Oro gris: contiene alrededor de 150 g de níquel. El resto es de cobre.*
- *Oro verde: contiene 250 g de plata.*
- *Oro azul: contiene 250 g de hierro.*

Si se tiene oro verde y oro rojo disponible para fundir, ¿se pueden obtener 50 g de oro amarillo?, ¿por qué?

Si ahora se necesita obtener 20 g de oro rosa y solo se dispone de oro rojo y verde, ¿cuántos gramos de cada tipo se deben utilizar?"

¿Cómo resolvería usted el problema dado? Anote cada detalle utilizado para su desarrollo.

c) ¿Realiza este tipo de análisis con los estudiantes en la escuela? Entiéndase este tipo de análisis con base en la modelación matemática, bajando el problema al nivel escolar nacional. ¿Por qué? Y si su respuesta fuese negativa ¿qué se lo impide?

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Pregunta 4:

a) ¿Usted toma en cuenta el contexto educativo en el que está inmerso? ¿De qué manera lo hace?

Por ser escuela industrial, tiene bastante en donde aplicar.
Tomando distintas situaciones de las especialidades que se imparten, dependiendo el contenido visto y la pertinencia.

b) ¿Utiliza situaciones conflictivas, que emergen durante la realización de la clase, para generar interés en los estudiantes? Entiéndase por situación conflictiva cualquier situación que interrumpa el flujo de la clase.

~~Aho~~ A veces, que generalmente no se dan en clases.

ANEXO 4.2. Respuesta profesor (P.E.2)

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Nombre del establecimiento en el cual ejerce su profesión docente: Complejo Educacional Joaquín Edward Bello

Años de labor docente: 33 años

Título Profesional: Profesor de Matemáticas

Pregunta 1:

a) ¿Usted enseña sistemas de ecuaciones lineales, en qué curso?

Si, enseño sistemas de ecuaciones lineales en 2º año Medio.

b) Cuando revisa los programas de estudio para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿en qué se fija?

En los métodos de solución.
En los problemas de aplicación.

c) ¿Qué opinión tiene sobre las actividades que se presentan en el programa de estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales?

Los problemas que se presentan están muy lejanos a la realidad de los estudiantes.

d) ¿Qué relación cree usted que existen entre lo que presentan los programas de estudio y los textos escolares, sobre la unidad de sistemas de ecuaciones lineales?

La gran mayoría de los libros está de acuerdo con los programas de estudio.

e) De acuerdo a lo que el programa de estudio propone, ¿Qué relación existe entre éste y lo que usted trabaja en el aula?

Trabajo con sistemas de ecuaciones lineales sencillos, que los estudiantes entiendan el concepto y que aprendan a aplicarlos a problemas reales.

f) Entendiendo que la epistemología es la construcción del conocimiento. ¿Utiliza alguna epistemología, ya sea la presentada en los textos de estudio, en el programa de estudio o alguna propia? Descríbala.

Utilizo la presentada en el texto del estudiante. Cada alumno tiene el texto, me guío por el y el estudiante desarrolla las actividades ahí propuestas, con ayuda del profesor.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ
Salesiana

Pregunta 2:

a) ¿Qué entiende usted por sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo definiría?

Es un conjunto de ecuaciones lineales, definidos sobre un cuerpo o un anillo conmutativo.

b) ¿Conoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones lineales en la historia del desarrollo de las matemáticas descríbalo brevemente?

Inicialmente se usaron los sistemas de ecuaciones lineales para cálculos geométricos relacionados con áreas, volumen, longitud.

c) Indique que métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conoce. ¿Cuáles enseñas a sus estudiantes? ¿Por qué?

método gráfico
método de sustitución
método de igualación
método de reducción
- - - - - - - - - - -
método de determinantes

Enseño generalmente estos 4 métodos, porque considero que el estudiante debe entender, comprender, que un sistema se puede resolver por muchos métodos. Que ellos elijan el método a usar.

d) Mencione algunos ejemplos contextualizados donde se pueden aplicar los sistemas de ecuaciones lineales.

Principalmente los aplico en la solución de problemas, por lo general de la vida diaria, como tambien en la geometría analítica, en el cálculo de 2 o más variables.

e) Presente un sistema de ecuación lineal donde su solución sea única, uno con infinitas soluciones y uno que no tenga solución.

solución única

$$\begin{aligned} 2x+2y+6z&=10\\ 2x-y+4z&=11\\ -y+z&=3 \end{aligned}$$

Infinitos soluciones

$$\begin{aligned} 6x+4y+2z&=2\\ 7x+4y+5z&=3\\ 5x+3y+3z&=2 \end{aligned}$$

no tiene solución

$$\begin{aligned} x+2y&=4\\ 2x+4y&=7 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Salesiana

Pregunta 3:

a) ¿Qué entiende usted por modelación matemática?

Es una área de la ciencia que se encarga de expresar fenómenos de la vida real en forma matemática y así poder usar los herramientas que hay en Matemáticas para obtener una solución al problema

b) Dada la siguiente actividad:

"El oro que se extrae de la tierra es un mineral metálico y de un característico color amarillo cuando está refinado. El oro puro es suave y muy maleable. Para el uso en joyería, el oro se mezcla con otros metales, principalmente cobre y plata, formando una aleación.

Este procedimiento le proporciona cualidades mecánicas que el oro puro no presenta, como dureza, resistencia y color. Normalmente, se ignora que el oro aleado puede presentar diferentes colores. Así, por cada 1 000 g de aleación, además de 750 g de oro puro, existen las siguientes aleaciones de oro:

- ***Oro amarillo: contiene 125 g de plata fina y 125 g de cobre.***
- ***Oro rojo: contiene 250 g de cobre.***
- ***Oro rosa: contiene 50 g de plata fina y 200 g de cobre.***
- ***Oro blanco: contiene 100 a 160 g de paladio. El resto es de plata fina.***
- ***Oro gris: contiene alrededor de 150 g de níquel. El resto es de cobre.***
- ***Oro verde: contiene 250 g de plata.***
- ***Oro azul: contiene 250 g de hierro.***

Si se tiene oro verde y oro rojo disponible para fundir, ¿se pueden obtener 50 g de oro amarillo?, ¿por qué?

Si ahora se necesita obtener 20 g de oro rosa y solo se dispone de oro rojo y verde, ¿cuántos gramos de cada tipo se deben utilizar?"

¿Cómo resolvería usted el problema dado? Anote cada detalle utilizado para su desarrollo.

c) ¿Realiza este tipo de análisis con los estudiantes en la escuela? Entiéndase este tipo de análisis con base en la modelación matemática, bajando el problema al nivel escolar nacional. ¿Por qué? Y si su respuesta fuese negativa ¿qué se lo impide?

no realizo este tipo de análisis, ya que los estudiantes presentan muchos problemas (sobre todo de aprendizajes) en donde doy enfasis a la solución de problemas sencillos de la vida diaria.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ
Salesiana

Pregunta 4:

a) ¿Usted toma en cuenta el contexto educativo en el que está inmerso? ¿De qué manera lo hace?

Si, primeramente que entiendan los conceptos enseño lo elemental para que se motiven, y luego profundizo de acuerdo al avance y que aprendan a aplicar estos conocimientos

b) ¿Utiliza situaciones conflictivas, que emergen durante la realización de la clase, para generar interés en los estudiantes? Entiéndase por situación conflictiva cualquier situación que interrumpa el flujo de la clase.

Si, que muchas veces, los estudiantes se quejan que no entienden nada de matemáticas, razón por la cual, tengo que enseñar desde lo más básico, que asocien con problemas cotidianos de ellos.

ANEXO 4.3. Respuesta profesor (P.E.3)

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Nombre del establecimiento en el cual ejerce su profesión docente:
COLEGIO ESPÍRITU SANTO DEL VERBO DIVINO

Años de labor docente: 30 AÑOS

Título Profesional: PROFESOR DE ESTADO MENCIÓN MATEMÁTICA-ESTADÍST

Pregunta 1:

a) ¿Usted enseña sistemas de ecuaciones lineales, en qué curso?

1° medio, 2° medio, 3° medio y 4° medio

b) Cuando revisa los programas de estudio para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿en qué se fija?

EN QUE LOS ALUMNOS CONOZCAN LA FUNCIÓN LINEAL, LA PENDIENTE Y LA ECUACIÓN DE LA RECTA

c) ¿Qué opinión tiene sobre las actividades que se presentan en el programa de estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales?

FALTA EN EL ALUMNO DE ESTE COLEGIO MADUREZ COGNITIVA

d) ¿Qué relación cree usted que existen entre lo que presentan los programas de estudio y los textos escolares, sobre la unidad de sistemas de ecuaciones lineales?

NO EXISTE CONCORDANCIA ENTRE LOS PROGRAMAS DE ESTUDIOS Y LOS TEXTOS ESCOLARES

e) De acuerdo a lo que el programa de estudio propone, ¿Qué relación existe entre éste y lo que usted trabaja en el aula?

SE TRATA DE ACONDICIONAR LOS CONTENIDOS DEL PROGRAMA AL NIVEL DE LOS ALUMNOS

f) Entendiendo que la epistemología es la construcción del conocimiento. ¿Utiliza alguna epistemología, ya sea la presentada en los textos de estudio, en el programa de estudio o alguna propia? Descríbala.

SE USA UNA TRIANGULACIÓN DE CONOCIMIENTOS

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Salesiana

Pregunta 2:

a) ¿Qué entiende usted por sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo definiría?

UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS ES UN CONJUNTO LINEALES. SE REPRESENTA DE LA FORMA

$ax + by = e$

$cx + dy = f$

donde a b c y d PERTENECEN A LOS REALES y X e Y REPRESENTAN LAS INCOGNITAS

b) ¿Conoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones lineales en la historia del desarrollo de las matemáticas descríbalo brevemente?

NO LO CONOZCO

c) Indique que métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conoce. ¿Cuáles enseñas a sus estudiantes? ¿Por qué?

1) MÉTODO GRÁFICO
2) METODO ALGEBRAICO:
A) REDUCCIÓN
b) IGUALACIÓN
c) SUSTITUCIÓN
D) CRAMER
E) GAUSS
F) MATRICES

d) Mencione algunos ejemplos contextualizados donde se pueden aplicar los sistemas de ecuaciones lineales.

Problemas de la vida diaria
Problemas de programación lineal

e) Presente un sistema de ecuación lineal donde su solución sea única, uno con infinitas soluciones y uno que no tenga solución.

a) $3x + 3y = 13$
$3x + 2y = 12$

Es compatible determinado y tiene solución única

b) $\frac{2}{3}x - 8y = 1$
$\frac{1}{4}x - 3y = 2$

Es incompatible, sin solución

c) $\frac{3}{4}x + 2y = 0$
$\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}y = 0$

Compatible indeterminado infinitas soluciones

Pregunta 3:

a) **¿Qué entiende usted por modelación matemática?**

APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA CON DISTINTAS REALIDADES. POR EJEMPLO, CALCULAR LAS DISTINTAS PENDIENTES DE LOS CERROS QUE HAY EN SANTIAGO

b) **Dada la siguiente actividad:**

"El oro que se extrae de la tierra es un mineral metálico y de un característico color amarillo cuando está refinado. El oro puro es suave y muy maleable. Para el uso en joyería, el oro se mezcla con otros metales, principalmente cobre y plata, formando una aleación.

Este procedimiento le proporciona cualidades mecánicas que el oro puro no presenta, como dureza, resistencia y color. Normalmente, se ignora que el oro aleado puede presentar diferentes colores. Así, por cada 1 000 g de aleación, además de 750 g de oro puro, existen las siguientes aleaciones de oro:

- ***Oro amarillo: contiene 125 g de plata fina y 125 g de cobre.***
- ***Oro rojo: contiene 250 g de cobre.***
- ***Oro rosa: contiene 50 g de plata fina y 200 g de cobre.***
- ***Oro blanco: contiene 100 a 160 g de paladio. El resto es de plata fina.***
- ***Oro gris: contiene alrededor de 150 g de níquel. El resto es de cobre.***
- ***Oro verde: contiene 250 g de plata.***
- ***Oro azul: contiene 250 g de hierro.***

Si se tiene oro verde y oro rojo disponible para fundir, ¿se pueden obtener 50 g de oro amarillo?, ¿por qué?

Si ahora se necesita obtener 20 g de oro rosa y solo se dispone de oro rojo y verde, ¿cuántos gramos de cada tipo se deben utilizar?"

¿Cómo resolvería usted el problema dado? Anote cada detalle utilizado para su desarrollo.

c) ¿Realiza este tipo de análisis con los estudiantes en la escuela? Entiéndase este tipo de análisis con base en la modelación matemática, bajando el problema al nivel escolar nacional. ¿Por qué? Y si su respuesta fuese negativa ¿qué se lo impide?

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ
Salesiana

Pregunta 4:

a) ¿Usted toma en cuenta el contexto educativo en el que está inmerso? ¿De qué manera lo hace?

SI LO HAGO PLANIFICANDO DE ACUERDO AL NIVEL DE VULNERABILIDAD DEL COLEGIO Y ALUMNOS

b) ¿Utiliza situaciones conflictivas, que emergen durante la realización de la clase, para generar interés en los estudiantes? Entiéndase por situación conflictiva cualquier situación que interrumpa el flujo de la clase.

SI, LLAMANDOLES LA ATENCIÓN EN FORMA ENERGICA Y PONIENDO EJEMPLOS DEL POR QUÉ ES IMPORTANTE QUE ELLOS SE EDUQUEN, YA QUE DE ELLOS DEPENDE SU FUTURO.

ANEXO 4.4. Respuesta profesor (P.N.1)

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Nombre del establecimiento en el cual ejerce su profesión docente:

Colegio Particular San José de Puente Alto

Años de labor docente: 1 año

Título Profesional: Profesora de educación Media con Mención en Matemáticas e Informática Educativa

Pregunta 1:

a) ¿Usted enseña sistemas de ecuaciones lineales, en qué curso?

Sí, en Segundo Medio.

b) Cuando revisa los programas de estudio para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿en qué se fija?

En lo previo para poder enseñarlo

c) ¿Qué opinión tiene sobre las actividades que se presentan en el programa de estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales?

Que están descontextualizadas

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ
Salesiana

d) ¿Qué relación cree usted que existen entre lo que presentan los programas de estudio y los textos escolares, sobre la unidad de sistemas de ecuaciones lineales?

Ambos tienen el mismo objetivo, pero se desarrollan de distinta manera en los libros de estudio

e) De acuerdo a lo que el programa de estudio propone, ¿Qué relación existe entre éste y lo que usted trabaja en el aula?

yo acomodo los contenidos a las necesidades y habilidades de mis estudiantes, el programa piensa en un estudiante "promedio" que realmente no existe

f) Entendiendo que la epistemología es la construcción del conocimiento. ¿Utiliza alguna epistemología, ya sea la presentada en los textos de estudio, en el programa de estudio o alguna propia? Descríbala.

De forma teórica no, pero intento basarme en la entrega de un conocimiento científico que luego se acomoda al grupo en el cual se imparte, de manera que puede ser reducido o amplificado según las necesidades de los estudiantes.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Salesiana

Pregunta 2:

a) ¿Qué entiende usted por sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo definiría?

Es un conjunto de ecuaciones de primer grado, para el cual se buscan soluciones que satisfagan a todas las ecuaciones a la vez

b) ¿Conoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones lineales en la historia del desarrollo de las matemáticas descríbalo brevemente?

NO.

c) Indique que métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conoce. ¿Cuáles enseñas a sus estudiantes? ¿Por qué?

Sustitución, reducción, igualación y cramer.
Enseño todos los métodos en un principio, y evalúo el manejo y conocimiento de todos en una primera instancia para luego dejar a libre disposición la utilización de datos

d) Mencione algunos ejemplos contextualizados donde se pueden aplicar los sistemas de ecuaciones lineales.

- Relación entre los hombres y mujeres que forman un curso de tantas personas en comparación a la cantidad de mujeres que asiste al paseo y hombres que asiste al paseo
- Relación entre el valor de dos producto y el total a pagar, en comparación al valor pagado al comprar cierta cantidad de un producto y el otro y el total pagado.

e) Presente un sistema de ecuación lineal donde su solución sea única, uno con infinitas soluciones y uno que no tenga solución.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned}$$ No tiene solución

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$ Infinitas soluciones

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 5y &= 7 \end{aligned}$$ Solución única.

Pregunta 3:

a) ¿Qué entiende usted por modelación matemática?

Es la utilización de modelos que explican algún fenómeno a través de la matemática

b) Dada la siguiente actividad:

"El oro que se extrae de la tierra es un mineral metálico y de un característico color amarillo cuando está refinado. El oro puro es suave y muy maleable. Para el uso en joyería, el oro se mezcla con otros metales, principalmente cobre y plata, formando una aleación.

Este procedimiento le proporciona cualidades mecánicas que el oro puro no presenta, como dureza, resistencia y color. Normalmente, se ignora que el oro aleado puede presentar diferentes colores. Así, por cada 1 000 g de aleación, además de 750 g de oro puro, existen las siguientes aleaciones de oro:

- *Oro amarillo: contiene 125 g de plata fina y 125 g de cobre.*
- *Oro rojo: contiene 250 g de cobre.*
- *Oro rosa: contiene 50 g de plata fina y 200 g de cobre.*
- *Oro blanco: contiene 100 a 160 g de paladio. El resto es de plata fina.*
- *Oro gris: contiene alrededor de 150 g de níquel. El resto es de cobre.*
- *Oro verde: contiene 250 g de plata.*
- *Oro azul: contiene 250 g de hierro.*

Si se tiene oro verde y oro rojo disponible para fundir, ¿se pueden obtener 50 g de oro amarillo?, ¿por qué?

Si ahora se necesita obtener 20 g de oro rosa y solo se dispone de oro rojo y verde, ¿cuántos gramos de cada tipo se deben utilizar?"

¿Cómo resolvería usted el problema dado? Anote cada detalle utilizado para su desarrollo.

Me queda la duda pues dice la cantidad que necesito para armar oro de algún color, pero no da la proporción de cuánta cantidad de oro de algún color puedo obtener.

c) ¿Realiza este tipo de análisis con los estudiantes en la escuela? Entiéndase este tipo de análisis con base en la modelación matemática, bajando el problema al nivel escolar nacional. ¿Por qué? Y si su respuesta fuese negativa ¿qué se lo impide?

Siempre intento que modelen situaciones a través de la matemática, pero suele ser la etapa más compleja de todas. Los Estudiantes suelen ver la matemática como una herramienta, mecánica y estructurada, no como el desarrollo de un razonamiento, de un planteamiento de situaciones que suelen tener solución.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Salesiana

Pregunta 4:

a) ¿Usted toma en cuenta el contexto educativo en el que está inmerso? ¿De qué manera lo hace?

Sí, considerando habilidades, conocimientos, e interpretaciones de los estudiantes, horas de clase a la semana, complejidad de los contenidos. Adaptando el contenido a los estudiantes y a la vez adaptando a los estudiantes al contenido, pues sea cual sea la complejidad a medida que se les pide, dan.

b) ¿Utiliza situaciones conflictivas, que emergen durante la realización de la clase, para generar interés en los estudiantes? Entiéndase por situación conflictiva cualquier situación que interrumpa el flujo de la clase.

Sí, son momentos enriquecedores cuando los estudiantes plantean sus propias conclusiones con respecto a un tema, a un contenido y dejo que se provoque una discusión manejable en la que los jóvenes ponen en juego todo lo que saben para justificar sus ideas.
La mayoría de las veces hay que inducirlas, pero en algunas surgen solas y esas son las mejores.

ANEXO 4.5. Respuesta profesor (P.N.2)

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Nombre del establecimiento en el cual ejerce su profesión docente: Ate Castellano.

Años de labor docente: 3 años

Título Profesional: licenciado en educación matemática e informática

Pregunta 1:

a) ¿Usted enseña sistemas de ecuaciones lineales, en qué curso?

Si, enseño sist. de ecc. lineales. generalmente lo enseño en 1° Medio.

b) Cuando revisa los programas de estudio para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿en qué se fija?

Utilizo generalmente las orientaciones curriculares del tema, y luego los ejemplos modifico algunos problemas, de acuerdo a las necesidades específicas de cada curso.

c) ¿Qué opinión tiene sobre las actividades que se presentan en el programa de estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales?

Creo que en la parte algebraica no hay mayor diferencia con lo que hago en clase. El paso complejo es la modelación, no hay preguntas para la construcción del concepto sist. de ecuaciones lineales con solamente tres preguntas desprovistas de contexto.

d) ¿Qué relación cree usted que existen entre lo que presentan los programas de estudio y los textos escolares, sobre la unidad de sistemas de ecuaciones lineales?

No mucho ya que en los P y P del ministerio aparecen en 2° M y los textos de primero solamente trabajan posic. relativas entre 2 rectas, de acuerdo a la geo. analítica.

e) De acuerdo a lo que el programa de estudio propone, ¿Qué relación existe entre éste y lo que usted trabaja en el aula?

Yo parto con lo del texto de estudio (medio de $\overline{AB}$), $\left(m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ $\left(d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}\right)$ y posic. relativas. gráficos de líneas rectas, y luego modelación de problemas con rectas y sist de ecc. lineales; algunos problemas de p. lineal.

f) Entendiendo que la epistemología es la construcción del conocimiento. ¿Utiliza alguna epistemología, ya sea la presentada en los textos de estudio, en el programa de estudio o alguna propia? Descríbala.

Mi modelo de enseñanza se inicia con cotidianeidad, luego del problema realizamos un análisis, con opiniones grupales y juicios de valor. Una vez ubicado el contenido en un contexto aparecen regularidades y reglas, formas algebraicas / gráfica de resolución y cambio de representación de las rectas, interpretación de la solución.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Salesiana

Pregunta 2:

a) ¿Qué entiende usted por sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo definiría?

Entiendo un sistema de ecuaciones lineales como el funcionamiento de varios factores simultáneos para la modelación de una situación lineal.
Def: conjunto de ecuaciones que poseen un conjunto solución común.

b) ¿Conoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones lineales en la historia del desarrollo de las matemáticas descríbalo brevemente?

No lo conozco mucho, pero como la mayoría de los temas algebraicos, deben haberse desarrollado inicialmente cerca del mar mediterráneo; y luego haberse desarrollado más en los siglos XVII y XVIII en el sector europeo.

c) Indique que métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conoce. ¿Cuáles enseñas a sus estudiantes? ¿Por qué?

- reducción, sustitución, igualación, Cramer, aprox. grafico, los enseño todos, ya que mientras más formas conozcan, mejor. Incluso la aproximación geométrica, ya que entrega referencias (utilizando g. analítica).

d) Mencione algunos ejemplos contextualizados donde se pueden aplicar los sistemas de ecuaciones lineales.

No me lo sé de memoria, pero hemos trabajado con ingresos / gastos para poder ~~evaluar~~ ahorrar de 2 familias del colegio, o ecuaciones utilizadas por obreros de la construcción.

e) Presente un sistema de ecuación lineal donde su solución sea única, uno con infinitas soluciones y uno que no tenga solución.

$$\begin{array}{l} x + y = 8 \\ x - y = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} y - 3x = -5 \\ y = 3x + 8 \end{array}$$

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Pregunta 3:

a) ¿Qué entiende usted por modelación matemática?

Manera de entender, analizar y proyectar una situación real a través de la matemática y sus procesos.

b) Dada la siguiente actividad:

"El oro que se extrae de la tierra es un mineral metálico y de un característico color amarillo cuando está refinado. El oro puro es suave y muy maleable. Para el uso en joyería, el oro se mezcla con otros metales, principalmente cobre y plata, formando una aleación.

Este procedimiento le proporciona cualidades mecánicas que el oro puro no presenta, como dureza, resistencia y color. Normalmente, se ignora que el oro aleado puede presentar diferentes colores. Así, por cada 1 000 g de aleación, además de 750 g de oro puro, existen las siguientes aleaciones de oro:

- *Oro amarillo: contiene 125 g de plata fina y 125 g de cobre.*
- *Oro rojo: contiene 250 g de cobre.*
- *Oro rosa: contiene 50 g de plata fina y 200 g de cobre.*
- *Oro blanco: contiene 100 a 160 g de paladio. El resto es de plata fina.*
- *Oro gris: contiene alrededor de 150 g de níquel. El resto es de cobre.*
- *Oro verde: contiene 250 g de plata.*
- *Oro azul: contiene 250 g de hierro.*

Si se tiene oro verde y oro rojo disponible para fundir, ¿se pueden obtener 50 g de oro amarillo?, ¿por qué?

Si ahora se necesita obtener 20 g de oro rosa y solo se dispone de oro rojo y verde, ¿cuántos gramos de cada tipo se deben utilizar?"

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

¿Cómo resolvería usted el problema dado? Anote cada detalle utilizado para su desarrollo.

Analisis en hoja anexa.

c) ¿Realiza este tipo de análisis con los estudiantes en la escuela? Entiéndase este tipo de análisis con base en la modelación matemática, bajando el problema al nivel escolar nacional. ¿Por qué? Y si su respuesta fuese negativa ¿qué se lo impide?

Generalmente ocupo problemas contextualizados, pero al comienzo; luego a lo largo de la unidad, no dispongo del tiempo como para planificar y construir clases basadas en la modelación. Por lo misma razón domina el algebra en el tratamiento del contenido.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Salesiana

Pregunta 4:

a) ¿Usted toma en cuenta el contexto educativo en el que está inmerso? ¿De qué manera lo hace?

Lo considero como parte importantísimo, es necesario para modificar la planificación o una clase en particular; en función de dicho contexto. Intento que mis estudiantes puedan relacionarse con su contexto tanto dentro como fuera de la escuela, trabajando actividades en las que interactuan, tomen decisiones, analicen y entiendan como es su contexto.

b) ¿Utiliza situaciones conflictivas, que emergen durante la realización de la clase, para generar interés en los estudiantes? Entiéndase por situación conflictiva cualquier situación que interrumpa el flujo de la clase.

El espacio o la acomodación, la capacidad de respuesta es algo difícil de desarrollar. La utilización del error, por ejemplo puede frustrar a quien lo comete si no existe tino en su exposición ante el curso, por lo mismo lo intento cada vez que puedo, cualquier instancia es una instancia de aprendizaje.

$O_A = 125\,A + 125\,B$

$O_r = 250\,B$

$O_{rosa} = 5A + 200\,B$

$O_\beta = 100 \leq C \leq 160 + 250X$

$O_6 = -(D \leq 150) + 250\,B$

$O_y = 250\,P$

$O_{Az} = 250\,H$

$O_v = 250\,P + O_r = 250\,B =$

A = plata fina
B = cobre
C = paladio
D = niquel
P = plata
H = hierro

$n \to \infty$

$$\to m \cdot h + m B = 1g\ An \quad /50$$

$$\boxed{50\, m \cdot h + 50\, n \cdot B = 50g\ An.}$$

En ambas preguntas ocurre que al construir la ecuación, se forma una generica en la que se puede formar oro amarillo u oro rosa aparecen 3 variables, es una generatriz de ecuaciones, y creo que ambos sistemas tienen infinitas soluciones. Siempre va a haber una cantidad de mezcla para poder formar oro. El problema se me genera al diferenciar la "plata fina" de la "plata".

ANEXO 4.6. Respuesta profesor (P.N.3)

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Nombre del establecimiento en el cual ejerce su profesión docente:
Colegio San Pedro Valle Grande

Años de labor docente: 2 años

Título Profesional: Licenciatura en Pedagogía en Matemática Educativa

Pregunta 1:

a) ¿Usted enseña sistemas de ecuaciones lineales, en qué curso?

Se enseña 2º medio, los métodos de resolución de sistema de ecuaciones lineales (sustitución, reducción e igualación), además si existen solución, si es única o son infinitas soluciones, también se hace la relación gráfica de las soluciones. En tercero medio (electivo matemático) se utiliza como conocimientos previos para ubicar el punto de intersección de rectas, además también se usan en programación lineal.

b) Cuando revisa los programas de estudio para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, ¿en qué se fija?

Las orientaciones pedagógicas principalmente, aunque lo utilizo como una guía

c) ¿Qué opinión tiene sobre las actividades que se presentan en el programa de estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales?

Creo que sirven para seguir un orden, pero no entrega mucho material para trabajar con los alumnos, las actividades son acorde a lo que deben aprender los chicos, pero no bastan para profundizar en el tema.

d) ¿Qué relación cree usted que existen entre lo que presentan los programas de estudio y los textos escolares, sobre la unidad de sistemas de ecuaciones lineales?

Si existe relación entre los contenidos de los planes de estudios y los textos escolares, aunque el texto escolar se refleja una gran exigencia hacia los estudiantes y son un aporte para el aprendizaje de los alumnos.

e) De acuerdo a lo que el programa de estudio propone, ¿Qué relación existe entre éste y lo que usted trabaja en el aula?

Los programas de estudio dan los contenidos que uno debe pasar en el aula, por ende estan fuertemente relacionados, lo cual es importante porque estandariza el aprendizaje, en el sentido que todos estemos pasando el mismo contenido en cualquier colegio.

f) Entendiendo que la epistemología es la construcción del conocimiento. ¿Utiliza alguna epistemología, ya sea la presentada en los textos de estudio, en el programa de estudio o alguna propia? Descríbala.

Personalmente siento que todo va en una misma línea de trabajo, debido que el plan de estudio da las directrices, el texto aporta en el contenido con ejercicios y propuestas de actividades y también está el estilo propio pare entregar los contenidos.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Pregunta 2:

a) ¿Qué entiende usted por sistemas de ecuaciones lineales? ¿Cómo lo definiría?

En el contexto algebraico, como un conjunto de ecuaciones con dos o más variables, los cuales tienen la misma solución, también existen casos donde existen infinitas soluciones o bien existen sistemas de ecuaciones que no tienen solución.
Desde la optica del gráfico, es el punto de intersección de dos o más rectas, donde cada una de éstas, representa una ecuación en la forma algebraica.

b) ¿Conoce el surgimiento de los sistemas de ecuaciones lineales en la historia del desarrollo de las matemáticas descríbalo brevemente?

Sinceramente desconozco el fundamento histórico y que matemáticos aportarón al desarrollo o al estudio de sistemas de ecuaciones lineales.

c) Indique que métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales conoce. ¿Cuáles enseñas a sus estudiantes? ¿Por qué?

Son tres los métodos de solución que conozco: reducción, igualación y sustitución. En clase explico los tres métodos, porque considero que es importante que conozcan los distintos caminos que pueden tomar para que ellos determinen, a partir de sus experiencias cual es el método que más convenga.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

d) Mencione algunos ejemplos contextualizados donde se pueden aplicar los sistemas de ecuaciones lineales.

En programación lineal, se tranforman los sistemas de inecuaciones a sistemas de ecuaciones, para poder encontrar puntos críticos los cuales permiten encontrar la solución óptima para una función objetiva.

e) Presente un sistema de ecuación lineal donde su solución sea única, uno con infinitas soluciones y uno que no tenga solución.

$2x+3y=8$ $-3x+y=-1$	Solucción única $X=1$ e $Y=2$
$2x-3y=9$ $-4x+6y=-18$	Infinitas soluciones
$2X+Y=3$ $2x+y=5$	No tiene solución.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Pregunta 3:

a) ¿Qué entiende usted por modelación matemática?

Es tomar un problema de la vida real y traspasarlo a un lenguaje algebraico para encontrar una solución a dicho problema.

b) Dada la siguiente actividad:

"El oro que se extrae de la tierra es un mineral metálico y de un característico color amarillo cuando está refinado. El oro puro es suave y muy maleable. Para el uso en joyería, el oro se mezcla con otros metales, principalmente cobre y plata, formando una aleación.

Este procedimiento le proporciona cualidades mecánicas que el oro puro no presenta, como dureza, resistencia y color. Normalmente, se ignora que el oro aleado puede presentar diferentes colores. Así, por cada 1 000 g de aleación, además de 750 g de oro puro, existen las siguientes aleaciones de oro:

- *Oro amarillo: contiene 125 g de plata fina y 125 g de cobre.*
- *Oro rojo: contiene 250 g de cobre.*
- *Oro rosa: contiene 50 g de plata fina y 200 g de cobre.*
- *Oro blanco: contiene 100 a 160 g de paladio. El resto es de plata fina.*
- *Oro gris: contiene alrededor de 150 g de níquel. El resto es de cobre.*
- *Oro verde: contiene 250 g de plata.*
- *Oro azul: contiene 250 g de hierro.*

Si se tiene oro verde y oro rojo disponible para fundir, ¿se pueden obtener 50 g de oro amarillo?, ¿por qué?

Si ahora se necesita obtener 20 g de oro rosa y solo se dispone de oro rojo y verde, ¿cuántos gramos de cada tipo se deben utilizar?"

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

¿Cómo resolvería usted el problema dado? Anote cada detalle utilizado para su desarrollo.

Si 1000g de oro amarillo son 125 de plata y 125 de cobre, primero divido todo por 20, de esta manera obtengo que 50 gramos de oro amarillo son 6,25 de plata lo mismo con el oro rojo.
Como necesito 6,25 gramos de plata, divido el oro verde en 40 para obtener los 6,25 de plata, lo mismo hago con el oro rojo

c) ¿Realiza este tipo de análisis con los estudiantes en la escuela? Entiéndase este tipo de análisis con base en la modelación matemática, bajando el problema al nivel escolar nacional. ¿Por qué? Y si su respuesta fuese negativa ¿qué se lo impide?

Por lo general, esquematizo el podedimiento, para que los alumnos vayan siguiendo paso a paso el modelamiento matemático, dando distintos problemas. Y los alumnos vayan trabajando, aunque considero que es complejo poder motivar e incentivar a los estudiantes logren el nivel de aprendizaje para que puedan modelar sin una guía.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
SILVA HENRÍQUEZ

Salesiana

Pregunta 4:

a) ¿Usted toma en cuenta el contexto educativo en el que está inmerso? ¿De qué manera lo hace?

No, durante las clases de sistema de ecuaciones no he considerado el contexto educativo.

b) ¿Utiliza situaciones conflictivas, que emergen durante la realización de la clase, para generar interés en los estudiantes? Entiéndase por situación conflictiva cualquier situación que interrumpa el flujo de la clase.

No he utilizado situaciones conflictivas para el desarrollo y apendizaje de los estudiantes, debido a que no se han presentado de manera que la pueda utilizar como un recurso pedagógico.

ANEXO 5: DISEÑO CURRICULAR

COLEGIO:	**NOMBRE:**
NIVEL :	**CURSO:**
SECTOR DE APRENDIZAJE:	
O.F.T:	
C.M.O: Reconocimiento de sistemas de ecuaciones lineales como modelos que surgen de diversas situaciones o fenómenos.	
TEMA: Sistema de ecuaciones lineales	
FECHA DE REALIZACIÓN:	**DURACIÓN DE LA CLASE:** 90 minutos

SESIÓN 1

/ APRENDIZAJE ESPERADO/ OBJETIVO DIDÁCTICO	DESARROLLO DE CLASE	ACTIVIDADES		RECURSOS	EVALUACIÓN
		Del docente	De los estudiantes		
Objetivo: Reconocer los conocimientos previos que dominan los estudiantes en base a sistemas de ecuaciones lineales. Reforzar las debilidades encontradas en los estudiantes. Ejercitar, con apoyo del texto lo formalizado anteriormente. **Aprendizaje Esperado:** Analizar representaciones de la ecuación lineal con	❖ **INICIO** Se inicia la clase mencionando a los estudiantes que se jugará un juego de cartas, el cual les permitirá conocer cuánto saben y cuánto recuerdan de las ecuaciones de primer grado. Posteriormente se les entrega los materiales a los estudiantes para realizar dicho juego. ❖ **DESARROLLO** Se explica a los estudiantes que el juego consta con 8 bloques los cuales están organizados de	❖ **INICIO** En primer lugar el docente debe formar grupos de 4 estudiantes. ❖ **DESARROLLO** Posteriormente debe guiar el juego realizando preguntas abiertas para poder reconocer más contenidos y habilidades que debiesen dominar los estudiantes.	Deben participar activamente en el desarrollo del juego, trabajando de manera ordenada y sanamente.	Una baraja de 32 cartas de ecuaciones de primer grado divididas en cuatro grandes bloques. Cada bloque representa un paso en la resolución de ecuaciones de primer grado sencillas del tipo: $\mathbf{A\,x + B = C\,x + D}$	Evaluación Formativa

dos incógnitas.	la siguiente manera: **Bloque 1**: 8 cartas con ecuaciones **Ax + B = Cx + D** **Bloque 2**: 8 cartas con las mismas ecuaciones anteriores pero escritas de la forma **Ax – Cx =D – B** o **B – D = Cx – Ax** **Bloque 3**: 8 cartas con las 8 mismas ecuaciones pero escritas de la forma: **M x =** N **Bloque 4**: 8 cartas con el resultado final de las 8 ecuaciones anteriores: **x = M / N** Entonces habrán 8 ecuaciones diferentes que se resuelven siguiendo estos cuatro pasos.	Donde debe poner énfasis en las ecuaciones lineales y permitiendo que los propios estudiantes vayan identificando sus conocimientos con respecto a este tema. Posteriormente el docente monitorea el trabajo que desarrollan los estudiantes con el libro de texto, paseándose por la sala.			

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Por ejemplo:

<table><tr><td>5x + 7 = 2x + 4</td></tr><tr><td>5x – 2x = 4 - 7</td></tr><tr><td>3x = -3</td></tr><tr><td>x = -1</td></tr></table>
Seguido de esto se presentan a los estudiantes las reglas del juego:

Reglas del juego:
- Juego para cuatro jugadores. – Se reparten 8 cartas a cada jugador.

- El primer jugador empieza colocando una carta del primer bloque, es decir una carta con una ecuación de la forma
A x + B = C x + D, sobre la</td>
<td>❖ CIERRE

Finalmente el docente identifica los errores más frecuentes en los estudiantes y refuerza estos conceptos, para así no tener mayores dificultades al tratar el contenido de sistemas de ecuaciones lineales.</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

	mesa.- Si no tiene pasa su turno. - El segundo jugador intenta colocar alguna de las 3 cartas correspondientes a la resolución de esa misma ecuación. Si no tiene ninguna de las 3, coloca otra ecuación del primer bloque, perdiendo también su turno si no tiene ninguna ecuación inicial. - Las cartas se colocan en el orden correcto de la resolución de la ecuación, es decir carta del bloque 1 seguida por carta del bloque 2, carta del bloque 3 y carta del bloque 4. Si falta un paso se deja el espacio correspondiente. - El tercer jugador intenta a su vez colocar alguna carta implicada en la resolución de				

	las que ya están en la mesa. Si no tiene ninguna carta que desarrolla una de las iniciales de la mesa puede a su vez colocar, si la tiene, otra ecuación inicial. En caso contrario pierde su turno. - Si algún jugador se equivoca pierde su turno. **- Gana el jugador que consiga colocar antes sus 8 cartas.** Luego de que los estudiantes terminen el juego y se conozcan a los ganadores, como ya se recordaron algunos conceptos previos para el aprendizaje de este tópico el docente propone a los estudiantes realizar la actividad de la pág. 219 de su texto de estudio. Donde se presentan una serie de ejercicios en la cual los estudiantes podrán				

	formalizar de manera más concreta sus propios conocimientos previos. ❖ **CIERRE** Se cierra la clase reforzando las debilidades de los estudiantes, observadas por el docente en el transcurso de la clase.				

SESIÓN 2

/ APRENDIZAJE ESPERADO/ OBJETIVO DIDÁCTICO	DESARROLLO DE CLASE	ACTIVIDADES		RECURSOS	EVALUACIÓN
		Del docente	**De los estudiantes**		

Objetivo: Asociar problemas contextualizados con su representación gráfica. Formalizar definiciones, conceptos y procedimientos con respecto a la resolución de sistema de ecuaciones lineales en base al método gráfico. **Aprendizaje Esperado:** Determinan y verifican la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, manualmente. Discuten acerca de la	❖ **INICIO** El docente comienza presentando a los estudiantes el objetivo de la clase, de manera escrita y verbalmente. Luego se les pregunta a los estudiantes ¿Qué recuerdan de la clase anterior? Seguido se indica a los estudiantes formar grupos de 6 integrantes, y se despliega la siguiente actividad: Enzo y Diego se fueron de vacaciones a La Serena, cuando llevaban tres semanas allá se dieron cuenta que no les quedaba más dinero para salir a compartir con sus amigos. Por lo que su tío artesano les propone	❖ **INICIO** Primeramente al momento de conectar la clase con lo visto en la sesión anterior, el docente debe inducir las respuestas de los estudiantes a la pregunta formulada. ❖ **DESARROLLO** El docente debe guiar la clase permanentemente, monitoreando y realizando a los estudiantes preguntas abiertas, donde se les permita construir su propio conocimiento y encontrar solución a la problemática presentada, de manera individual o con ayuda de sus propios	Se espera que los estudiantes puedan trabajar en equipo, respetando las opiniones de sus compañeros, escuchándose entre ellos y respetando su turno. También se pretende que el alumno reflexione, analice y justifique el desarrollo de la actividad.	- Power Point - Proyector	**Evaluación formativa** Se evaluará a los estudiantes mediante su participación al momento de salir a la pizarra a expresar lo realizado por su equipo y también cumplimientos de las instrucciones entregadas por el profesor en el transcurso de la sesión.

<table>
<tr>
<td>existencia y pertinencia de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.</td>
<td>un trabajo, el cual consta de recolectar arena roja a los pies del faro.

El tío les ofrece un trato a cada uno, Diego por ser el mayor recibirá $7000 diarios más $750 por cada kilo de arena que recolecte, en cambio a Enzo le pagará $5000 diarios más $1000 por cada kilo de arena.

❖ DESARROLLO

a) En base a la información entregada complete las siguientes tablas:

<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td></tr></table>
<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td></tr></table></td>
<td>compañeros.

Se realiza un ejercicio de validación entre pares, donde un integrante de cada grupo (vocero) debe salir a la pizarra a explicar cómo resolvieron el problema planteado.

Posteriormente entre los mismos estudiantes se debe juzgar que grupos tienen la razón, reflexionando a partir de la justificación de cada uno.

❖ CIERRE

Luego de que los grupos presenten sus desarrollos y los análisis correspondientes, el docente formaliza el concepto de la gráfica de</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

	b) Grafique la información obtenida en ambas tablas, dibujando los pares ordenados en el mismo plano cartesiano. c) ¿Cuántos kilos de arena debe recoger cada uno para obtener la misma cantidad de dinero? d) ¿Cómo cambiaría la gráfica si a Diego le pagarán $250 más por kilo de arena? ❖ **CIERRE** Se socializan los resultados de cada grupo en el pizarrón, y se reflexiona con preguntas abiertas como ¿se pueden tener 2 soluciones? ¿Podrían existir 3 soluciones? ¿Podrían ser más?	un sistema de ecuación lineal. Entregando así a los estudiantes las diferentes opciones que se pueden dar con respecto a las soluciones se los sistemas (infinitas soluciones, única solución y la no existencia de solución) y herramientas para poder desarrollar este concepto de manera óptima.			

SESIÓN 3

/ APRENDIZAJE ESPERADO/ OBJETIVO DIDÁCTICO	DESARROLLO DE CLASE	ACTIVIDADES		RECURSOS	EVALUACIÓN
		Del docente	**De los estudiantes**		
Objetivo: Ejercitar, con apoyo del texto lo formalizado anteriormente. **Aprendizaje Esperado:** Determinan y verifican la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, manualmente.	❖ **INICIO** El docente comienza presentando a los estudiantes el objetivo de la clase, de manera escrita y verbalmente. Luego pregunta a los estudiantes ¿De qué se trató la clase anterior? ¿Qué conceptos se trabajaron? ¿Qué podemos decir respecto de las gráficas que se trabajaron?	❖ **INICIO** El profesor recuerda las conclusiones elaboradas por los estudiantes en la clase anterior, generando comparación entre ellas, tomando lo más importante de cada una. ❖ **DESARROLLO** Se pretende que el docente verifique el trabajo de los	Se pretende que los estudiantes trabajen de forma ordenada en la actividad señalada por el profesor, consultando las dudas a medida que desarrollen las actividades.	Texto del Estudiante	No se realizará evaluación

	❖ **DESARROLLO** Se indica a los estudiantes sacar su texto de estudio y desarrollar las actividades de las págs. 224 – 225 y pág. 234 El docente verifica el trabajo de los estudiantes y resuelven dudas que emerjan del desarrollo de las actividades. ❖ **CIERRE** Se cierra la sesión indicando cuales fueron los tópicos más débiles con respecto al tratamiento de las actividades.	estudiantes y a medida que vayan emergiendo dudas o dificultades en los estudiantes, éste pueda responder de manera pertinente. ❖ **CIERRE** El docente debe expresar a sus estudiantes las mayores dificultades que se identificaron a medida que avanzaba la clase, para poder generar un aprendizaje más claro sobre la gráfica y las posibles soluciones de un sistema de ecuación.			

SESIÓN 4

/ APRENDIZAJE ESPERADO/ OBJETIVO DIDÁCTICO	DESARROLLO DE CLASE	ACTIVIDADES		RECURSOS	EVALUACIÓN
		Del docente	**De los estudiantes**		
Objetivo: Asociar un problema contextualizado a su expresión algebraica. Formalizar los procedimientos de los métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales, tanto el de reducción como el de igualación y sustitución. **Aprendizajes Esperados:** Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante	❖ **INICIO** Se comienza la sesión presentando a los estudiantes el objetivo de la clase, de manera escrita y verbalmente. Posterior a esto se explica a los estudiantes que los sistemas de ecuaciones lineales surgieron en la historia del hombre hace muchos años, dándoles una pequeña referencia histórica, mencionando que:	❖ **INICIO** Se espera que el docente motive a los estudiantes contando la historia de los sistemas e incite a ir más allá de sólo lo que se le presenta en la escuela. ❖ **DESARROLLO** El docente debe guiar la clase permanentemente, monitoreando a los grupos y realizando a los estudiantes preguntas abiertas, donde se les	Se espera que los estudiantes puedan trabajar en equipo, respetando las opiniones de sus compañeros, escuchándose entre ellos y respetando su turno. También se pretende que el alumno reflexione, analice y justifique el desarrollo de la actividad.	- Proyector - Power Point	**Evaluación formativa** Se evaluará a los estudiantes mediante su participación en clases y cumplimientos de las instrucciones entregadas por el profesor.

sustitución, igualación y reducción. Discuten acerca de la existencia y pertinencia de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	Los sistemas de ecuaciones lineales forman parte de los problemas más antiguos de las matemáticas y se encuentran en diversas culturas, comenzó con los babilónicos, los cuales los utilizaban en el cálculo de área o volumen, además se les explica que tienen bastantes aplicaciones en la vida cotidiana como por ejemplo: - Repartición de Herencia - Construcción de Edificios - Problemas de Dieta - Ingresos/Gastos de dos familias - Astronomía - Flujo del tráfico Desde ahí se presenta, desde una mirada algebraica, la siguiente actividad:	permita construir su propio conocimiento y encontrar solución a la problemática presentada, de manera individual o en un trabajo en equipo. Se realiza un ejercicio de validación entre pares, donde un integrante de cada grupo (vocero) debe salir a la pizarra a explicar cómo resolvieron el problema planteado. Posteriormente entre los mismos estudiantes se debe juzgar que grupos tienen la razón, reflexionando a partir de la justificación de cada uno. Se espera que el docente a medida que vayan surgiendo las respuestas			

	En una rifa se vendieron completos y bebidas; los completos a $400 y un vaso de bebida a $300. Al sacar la cuenta de cuántas bebidas y cuántos completos se vendieron, se dieron cuenta de que no marcaron en ningún vale el producto vendido, es decir, si se trataba de un completo o una bebida, pero sí se sabía que había 425 vales en total. Además se sabía que, producto de estas ventas, se recaudó la suma de $146.000. ¿Cuántas bebidas y completos se vendieron en esa rifa? ❖ **DESARROLLO** El docente señala que se debe trabajar en grupo, para así poder dar respuesta al	de los estudiantes y los métodos de solución, se pueda generar una discusión sobre cuál es el método más eficiente. ❖ **CIERRE** Luego de que los grupos presenten sus desarrollos y los análisis correspondientes, el docente formaliza el concepto de los métodos de resolución de un sistema de ecuación lineal. Entregando así a los estudiantes las diferentes opciones que se pueden dar con respecto a las soluciones de los sistemas (infinitas soluciones, única solución y la no			

	problema planteado, sólo apoyándose de los conocimientos que ya dominan. Durante el desarrollo de la actividad el docente monitorea el cumplimiento de ésta, y orienta a los alumnos para que se logre los conocimientos y habilidades que se esperan. ❖ **CIERRE** Los grupos exponen sus desarrollos y el método que utilizaron para la resolución.	existencia de solución) y herramientas para poder desarrollar este concepto de manera óptima.			

SESIÓN 5

/ APRENDIZAJE ESPERADO/ OBJETIVO DIDÁCTICO	DESARROLLO DE CLASE	ACTIVIDADES		RECURSOS	EVALUACIÓN
		Del docente	**De los estudiantes**		
Objetivo: Ejercitar, con apoyo del texto, lo formalizado anteriormente. **Aprendizaje Esperado:** Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución, reducción e igualación.	❖ **INICIO** Se comienza presentando a los estudiantes el objetivo de la clase, de manera escrita y verbalmente. El docente considera todas las ideas planteadas por los estudiantes en la clase anterior, para luego rescatar las ideas importantes de los modelos generados por los estudiantes, y así validar sus desarrollos.	❖ **INICIO** El profesor recuerda las conclusiones elaboradas por los estudiantes en la clase anterior, generando comparación entre ellas, tomando lo más importante de cada una. ❖ **DESARROLLO** Se pretende que el docente verifique el trabajo de los estudiantes y a medida que vayan	Se pretende que los estudiantes trabajen de forma ordenada en la actividad señalada por el profesor, consultando las dudas a medida que desarrollen las actividades.	Texto del Estudiante	Evaluación Formativa

	❖ **DESARROLLO** Se indica a los estudiantes sacar su texto de estudio y desarrollar las actividades de las págs. 229- 231 El docente verifica el trabajo de los estudiantes y resuelven dudas que emerjan del desarrollo de las actividades. ❖ **CIERRE** Se cierra la sesión indicando cuales fueron los tópicos más débiles con respecto al tratamiento de las actividades.	emergiendo dudas o dificultades en los estudiantes, éste pueda responder de manera pertinente. ❖ **CIERRE** El docente debe expresar a sus estudiantes las mayores dificultades que se identificaron a medida que avanzaba la clase, para poder generar un aprendizaje más claro sobre la gráfica y las posibles soluciones de un sistema de ecuación.			

SESIÓN 6

/ APRENDIZAJE ESPERADO/ OBJETIVO DIDÁCTICO	DESARROLLO DE CLASE	ACTIVIDADES		RECURSOS	EVALUACIÓN
		Del docente	**De los estudiantes**		
Objetivo: Reflexionar sobre la existencia y pertinencia de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales. **Aprendizaje Esperado:** Fundamentan acerca de cuál es el método más eficiente para resolver un sistema de ecuación lineal dado y determinar su solución.	❖ **INICIO** El docente separa al grupo curso en 4 grupos. ❖ **DESARROLLO** Luego de que estén constituidos, el profesor le otorga a cada uno de los grupos un método de solución y les indica que deberán realizar un debate; donde tendrán que defender el método que se les ha otorgado y entregar argumentos del por qué ese es el método más adecuado para	❖ **INICIO** Se pretende que el profesor conecte lo visto anteriormente en sus clases en base a los sistemas de ecuaciones, realizando la lluvia de ideas entregada por los alumnos, de todos los conceptos tratados hasta ahora. ❖ **DESARROLLO** El docente hará el rol de mediador en el desarrollo	Se espera que los estudiantes participen activamente en el debate, pretendiendo tener en cuenta valores como: el respeto al prójimo, tolerancia, coherencia y compromiso con una postura definida.	- Mesa de juez - Bastón de mando	**Evaluación formativa** Se evaluará a los estudiantes mediante su participación en clases y cumplimientos de las instrucciones entregadas por el profesor.

	encontrar la solución a un sistema de ecuación. Se definirán los grupos de la siguiente manera: Grupo 1: Método de Sustitución Grupo 2: Método Gráfico Grupo 3: Método de Igualación Grupo 4: Método de Reducción Se les da un par de minutos a los estudiantes para que se organicen y posterior a esto se comienza con el debate.	del debate, delimitando los tiempos de argumentación de cada grupo. ❖ **CIERRE** Construye un pequeño resumen de los métodos trabajados en el debate, entregándoselos a los estudiantes para su estudio, debido que la siguiente sesión es de evaluación.			

	❖ **CIERRE** Se da por terminada la sesión cuando concluye el debate y se realiza un resumen de los diferentes métodos anteriormente tratados, revisando los pasos de cada uno de ellos para obtener la solución a un sistema de ecuaciones lineales.				

SESIÓN 7

/ APRENDIZAJE ESPERADO/ OBJETIVO DIDÁCTICO	DESARROLLO DE CLASE	ACTIVIDADES		RECURSOS	EVALUACIÓN
		Del docente	**De los estudiantes**		
Objetivo: Evaluar la valoración de las matemáticas en la vida cotidiana. **Aprendizaje Esperado:** Identifican sistemas de ecuaciones lineales, dentro de su entorno educativo, tomando en cuenta su propio contexto y lo llevan a una situación. Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución, reducción e igualación.	❖ **INICIO** El docente entrega las instrucciones para la elaboración de un informe. ❖ **DESARROLLO** Primeramente se les pide a los estudiantes que salgan a observar su colegio, o que imaginen o recuerden una situación de su vida, en donde crean que se pueden utilizar sistemas de ecuaciones	❖ **INICIO** Entrega de manera clara las indicaciones a seguir por los estudiantes. ❖ **DESARROLLO** Acompaña a los estudiantes en la creación de sus situaciones, limitándose a guiar el trabajo y no entregarles ejemplos.	Se pretende que los estudiantes participen y se motiven con la actividad propuesta. Preocupándose de escoger una situación adecuada y una dramatización entretenida y que llame la atención del docente.	Recursos que los estudiantes estimen conveniente.	**Evaluación sumativa** Para la evaluación de esta actividad se considerarán tres aspectos: 1) La situación escogida por los estudiantes es acorde a su realidad y está relacionada correctamente con los sistemas de

	lineales para su solución. Se les menciona que se otorgará un tiempo para el desarrollo de la indicación recién mencionada. Como segunda indicación, se les propone a los estudiantes representar dicha situación dramatizándola, utilizando los recursos que ellos estimen conveniente (disfraces, escenografía, etc). La tercera indicación es la realización de un informe, el cual debe contemplar la situación escogida por los estudiantes y su solución según el método que ellos prefieran, además de una fundamentación del por qué escogieron ese método de	❖ **CIERRE** El docente observa y evalúa las dramatizaciones de los estudiantes, contemplando, los recursos utilizados.			ecuaciones lineales. 2) La representación dramatizada es acorde a la situación y poseen recursos acorde a ésta. 3) El informe es claro, coherente y la solución del sistema de ecuaciones es correcto. También se tomaran en cuenta aspectos de limpieza y tiempo de entrega.

	resolución. Entregando este informe la próxima clase. ❖ **CIERRE** Se cierra la sesión con las representaciones de los estudiantes al grupo curso.				

ANEXO 6: PROGRAMA DE ESTUDIO 2º AÑO MEDIO, MINEDUC

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:
AE 04	
Analizar la validez de una expresión algebraica fraccionaria.	› Identifican aquellos valores para los cuales una fracción algebraica se indefine y justifican adecuadamente. › Analizan fórmulas e interpretan las variaciones que se producen por cambios en las variables.
AE 05	
Establecer estrategias para operar[10] fracciones algebraicas simples, con binomios en el numerador y en el denominador, y determinar los valores que indefinen estas expresiones.	› Relacionan la operatoria de números fraccionarios con la operatoria de las expresiones algebraicas fraccionarias, y establecen analogías y diferencias. › Establecen estrategias para simplificar fracciones algebraicas. › Establecen estrategias para sumar o restar fracciones algebraicas, considerando si los denominadores son iguales o diferentes. › Establecen estrategias para multiplicar y dividir fracciones algebraicas. › Resuelven problemas, utilizando operatoria con expresiones algebraicas fraccionarias, productos notables y factorizaciones.
AE 06	
Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente.	› Determinan y verifican la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, manualmente. › Determinan y verifican la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, usando un software gráfico. › Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución. › Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante reducción. › Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante igualación. › Fundamentan acerca de cuál es el método más eficiente para resolver un sistema de ecuaciones lineales dado y determinan su solución. › Discuten acerca de la existencia y pertinencia de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

10 Suma, resta, multiplicación, división, simplificación, amplificación.

› $\dfrac{m^3+n^3}{m^2-n^2}, m \neq \pm n$

4

Obtienen el mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas. Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de:

› $5m^2n$ y $25mn^3$

› $x^2 - x$ y $x^2 - 1$

› $a^2 + b^2 + 2ab$, $a^2 - b^2$ y $a^2 + ab$

› $a^3 + b^3$, $a^2 - b^2$ y $a^2 + ab$

5

Operan expresiones fraccionarias y justifican los procedimientos utilizados. Por ejemplo, realizan las siguientes operaciones:

› $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x}$

› $\dfrac{a+b}{a(a-b)} + \dfrac{a+b}{b(a-b)}$

› $\dfrac{a}{a^2-ab} + \dfrac{a+b}{ab-b^2}$

› $\dfrac{1}{a^2+ab+b^2} - \dfrac{b}{a^3-b^3} + \dfrac{a}{a^2-ab}$

› $\dfrac{y-1}{x+2} \div \dfrac{y+1}{x+2}$

› $\dfrac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2} \div \dfrac{ab+b^2}{a-b}$

Observaciones al docente: *Es importante que los estudiantes:*

› *reconozcan y justifiquen los procedimientos que utilizan, si usan propiedades como conmutatividad, distributividad;*

› *identifiquen los nombres de los factores que trabajan (monomios, binomios, etc.), si realizan simplificaciones, factorizaciones,*

para que se vayan apropiando del lenguaje matemático y comprendan las acciones que realizan; es decir, que razonen matemáticamente, no que memoricen procedimientos.

AE 06

Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente.

1

Para cada una de las ecuaciones de los siguientes sistemas, asignan valores a una de las variables (por ejemplo, a x) y calculan la otra variable (en este caso, y). Registran los valores en una tabla.

› $\begin{array}{r|} -3x + y = -2 \\ 2x + y = 8 \\ \hline \end{array}$

› $\begin{array}{r|} 2x - y = 2 \\ 3x + y = 3 \\ \hline \end{array}$

Grafican las tablas de valores asociadas a cada una de las ecuaciones. La solución del sistema es la intersección de las rectas obtenidas.

2

Resuelven algebraicamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, utilizando el método más apropiado. Justifican la elección del método.

› $\begin{array}{r|} x - 2y = 3 \\ 3x + 6y = 4 \\ \hline \end{array}$

› $\begin{array}{r|} a + m = 40 \\ 4a + 2m = 100 \\ \hline \end{array}$

› $\begin{array}{r|} -3p - q = 2 \\ p - q = -7 \\ \hline \end{array}$

3

Antes de la resolución, analizan los sistemas y determinan si tienen una, ninguna o infinitas soluciones. Por ejemplo, indican si los siguientes sistemas de ecuaciones tienen una, ninguna o infinitas soluciones:

› $\begin{array}{r|} 2a + b = 6 \\ a + \dfrac{b}{2} = 1 \\ \hline \end{array}$

› $\begin{array}{r|} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y = 2 \\ x + y = 4 \\ \hline \end{array}$

❶ ***Observaciones al docente:*** *Se sugiere al profesor usar un graficador para resolver un sistema de ecuaciones gráficamente o comprobar resultados obtenidos algebraicamente. También debe asegurarse de dejar clara la diferencia entre rectas paralelas coincidentes y no coincidentes, tanto gráfica como algebraicamente.*

AE 07

Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1

Determinan los sistemas de ecuaciones lineales asociados a situaciones en diversos contextos. Por ejemplo, determinan el sistema asociado a la siguiente situación:

Una compañía A de telefonía móvil ofrece un plan nocturno para los teléfonos de prepago a un costo de \$0,5 el segundo más un cargo fijo de \$40 por llamada. Una compañía B ofrece otro plan nocturno para los teléfonos de prepago a un costo de \$0,2 el segundo, pero con un cargo fijo de \$70 por llamada. ¿Cuál es el plan más económico?

2
Considerando el problema de la actividad 1, analizan los resultados en función del problema y responden:

- ¿cuál es el punto de intersección de las rectas asociadas a las ecuaciones del problema?
- ¿qué interpretación tiene el punto de intersección en ese problema?
- ¿cuál es el plan más conveniente para contratar?
- ¿siempre es más económico un plan que otro?

Observaciones al docente: *Se sugiere que el profesor proponga situaciones de la vida cotidiana que sean significativas para los alumnos. Por ejemplo, problemas de comparación de cuentas de insumos básicos, telefonía y compañías de servicios, entre otras.*

3
Formulan situaciones de interés, asociadas a modelos consistentes en sistemas de ecuaciones, y elaboran estos modelos. Por ejemplo, los estudiantes de II medio de un colegio desean saber qué cantidad de entradas se vendió en una fiesta a jóvenes y adultos; conocen el valor para adultos y el valor para jóvenes, el monto recaudado y la cantidad total de asistentes.

4
De una lista de situaciones en contexto, identifican cuáles son modelos exponenciales.

Por ejemplo:

Situación	Modelo	Variables
1 Población de ciervos en una biorreserva	$N(t) = 100 \cdot e^{0,7t}$	$N(t)$: cantidad de ciervos t : tiempo en años
2 Altura que alcanza un objeto con una velocidad inicial de 19,6 metros por segundo en un tiempo determinado	$h(t) = 19,6t - 4,9t^2$	$h(t)$: altura en metros t : tiempo en segundos
3 Eliminación de un fármaco por la orina	$f(x) = 0,8^x$	$f(x)$: cantidad de dosis en el cuerpo en mg. x : número de días

ANEXO 7: TEXTO OFICIAL DEL ESTUDIANTE ENTREGADA POR EL MINISTERIO

Sección 3

Sistemas de ecuaciones lineales

¿Qué aprenderás?	¿Dónde?	Es importante porque te permitirá…
A identificar y plantear un sistema de ecuaciones lineales.	Lección 33	plantear y resolver problemas en variados ámbitos, y analizar sus soluciones.
A interpretar gráficamente un sistema de ecuaciones lineales.	Lección 34	
A resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales.	Lección 35	
A analizar algebraicamente la existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.	Lección 36	
A plantear y resolver problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales.	Lección 37	

Explorando tus ideas previas

- ¿Qué te sugieren los siguientes términos?
  - Simultáneo
  - Compatible
  - Determinado
  - Reducir
- ¿En qué contextos has visto que se debe cumplir más de una condición en un problema?

Actividad

De esto se trata…

Cuando se diseña el horario de un colegio se debe cumplir una serie de condiciones tales como el número de horas por asignatura, la disponibilidad de un profesor, la cantidad de cursos, etc., pero también se asignan restricciones que pueden ser obligatorias o pensando en lo que se cree más conveniente. Así, se debe combinar la disponibilidad de los profesores, la necesidad de cada curso y una larga lista de requisitos.

La programación de un torneo deportivo es en algo similar a esto. En Chile, desde 2005 se utiliza un sistema diseñado por el Centro de Gestión de operaciones del departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile para la programación del Campeonato de fútbol profesional. Mediante este sistema se busca no solo garantizar las condiciones básicas de un campeonato (que todos jueguen contra todos, alternar la condición de local – visita, etc), sino además incluir algunas variables de tipo comercial que dan más atractivo al campeonato. Algunas de ellas son:

- Los partidos llamados clásicos (Colo Colo – Universidad de Chile, Universidad de Chile – Universidad Católica y Universidad Católica – Colo Colo) se deben jugar entre las fechas 11 y 16.
- Ningún equipo jugará en fechas consecutivas contra Colo Colo y Universidad de Chile.
- Si hay fechas a mitad de semana y el fin de semana, los equipos deben jugar en ciudades geográficamente cercanas.

La adecuada programación computacional ha permitido generar programaciones cada vez más óptimas, resultando un gran aporte de la tecnología al espectáculo deportivo.

Actividad grupal

En parejas, lean y realicen las siguientes actividades.

1. ¿Por qué creen que se ponen las condiciones descritas al campeonato? ¿Pondrían ustedes otras? ¿Cuáles?
2. Analicen el horario de enseñanza media de su colegio. ¿Puede mejorarse? Consulten con la persona encargada de hacerlo cuál es el mecanismo utilizado y sus dificultades.

Propósito: plantear y resolver problemas que involucran dos incógnitas, analizando la existencia y pertinencia de sus soluciones.

218 | Matemática 2.° Medio

¿Qué debes saber?

Realiza las siguientes actividades.

Plantear y resolver problemas con ecuaciones de primer grado

1 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a. $3x = 15$

b. $x + 1 = 15$

c. $10 + x = 22$

d. $5x + 12 = 20$

e. $\frac{1}{2} + x = \frac{2}{3}$

f. $2x - 1 = 6$

g. $x - 4 = 12$

h. $3(14 + x) = 48$

i. $5x = 12 - 3x$

j. $\frac{3}{4}x - 2 = 1$

2 Expresa en lenguaje algebraico las siguientes situaciones.

a. Un número que es 15 unidades mayor que **x** es igual a 100.

b. Un número aumentado en 8 es igual a 13.

c. La diferencia entre un número y − 1 es igual a 2.

d. Un número disminuido en 7 es igual al triple del número.

e. Restar 17 de un número es igual al número al cuadrado.

f. El producto de un número y 14 es igual al triple del número menos 15.

3 Resuelve los siguientes problemas.

a. Calcula el valor de **x**, si se sabe que la figura tiene un perímetro de 100 cm.

b. El área de un triángulo rectángulo isósceles es 2 000 cm². La expresión que representa la base está dada por el binomio x + 3. ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo?

Identificar, graficar y analizar funciones afines

4 Identifica la pendiente y el coeficiente de posición de las siguientes funciones afines.

a. $x + y = 12$

b. $3x - 4y = 8$

c. $6x - 7 = 5y$

d. $2x - 10 = 3y - 5$

5 Verifica en cada caso si el punto dado pertenece a la gráfica de la función afín correspondiente.

a. $y = 4x + 1$, A(0,0)

b. $y = 3x - 2$, C(3,7)

c. $2y = x + 2$, C(2,14)

d. $y = -0{,}5x - 10$, E(4, -3)

6 Construye el gráfico de las siguientes funciones afines.

a. $y = 3x + 5$

b. $5x - 4y + 2 = 0$

c. $y - 3x = -2$

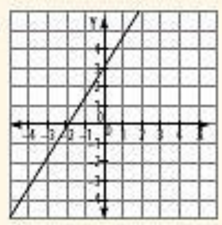
d. $5y = 4x + 10$

e. $y = \frac{5}{4}x + 1$

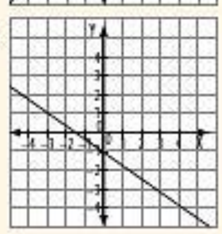
f. $y = -\frac{x}{2}x - 3$

7 Determina la función afín correspondiente a cada gráfico.

a.



b.



Actividad

Autoevaluación: para cada indicador, marca **Sí** si lo dominas o **No** si no lo dominas.

Indicador	Sí	No
Plantear y resolver problemas con ecuaciones de primer grado.	Más de 2 respuestas correctas	2 o menos
Identificar, graficar y analizar funciones afines.	Más de 2 respuestas correctas	2 o menos

Si marcaste No, repasa en los siguientes sitios web…

http://goo.gl/cvnsU

http://goo.gl/0b4Px

33 Propósito: identificar y plantear un sistema de ecuaciones lineales.

Lección

Debes saber…

Decimos que un conjunto de valores satisface una ecuación si, al evaluar la ecuación para dichos valores, la igualdad se cumple. Por ejemplo, los valores $x = 2$, $y = -1$ satisfacen la ecuación

$$3x + 2y = 4$$

pues

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot -1 = 4$$
$$6 - 2 = 4$$
$$4 = 4$$

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

En la fiesta del colegio el curso de Paulina vendió papas fritas en porciones de \$300 y \$500. Para realizar el conteo del dinero, Paulina preguntó a dos de sus compañeros sobre el total vendido y ellos le dieron las siguientes respuestas:

Andrea: en total recaudamos \$12 800.
Pablo: se vendieron 34 porciones en total.

Para averiguar cuántas porciones de cada precio se vendieron, Paulina aplica los siguientes pasos.

Paso 1 Asigna las variables **x** e **y**, respectivamente, al número de porciones de \$300 y \$500 pesos vendidas. Con ello, plantea las siguientes ecuaciones:

x: porciones de \$300 **y:** porciones de \$500

Andrea: en total recaudamos \$12 800 $\rightarrow 300x + 500y = 12\,800$
Pablo: se vendieron 34 porciones en total $\rightarrow x + y = 34$

Paso 2 Realiza una tabla de valores para la primera ecuación.

x	1	6	11	16	21	26	31
y	25	22	19	16	13	10	7

Paso 3 Analiza cuál de los siguientes pares de valores anteriores corresponde con lo que le dijo Pablo, es decir, cuáles de los valores anteriores satisfacen la ecuación $x + y = 34$

$x = 1, y = 25 \rightarrow x + y = 26$ $x = 16, y = 16 \rightarrow x + y = 32$
$x = 6, y = 22 \rightarrow x + y = 28$ $x = 21, y = 13 \rightarrow x + y = 34$
$x = 11, y = 19 \rightarrow x + y = 30$ $x = 26, y = 10 \rightarrow x + y = 36$
$x = 31, y = 7 \rightarrow x + y = 38$

Paso 4 Con esto Paulina concluye que $x = 21$ e $y = 13$, pues estos valores se corresponden tanto con la información que le dio Andrea como con la que le dio Pablo. Es decir, se vendieron 21 porciones de papas de \$300 y 13 de \$500.

Lo que ha hecho Paulina es resolver un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** (una ecuación es lineal si el mayor exponente de sus incógnitas es igual a 1), es decir, ha planteado dos ecuaciones con incógnitas **x** e **y** y ha determinado un par de valores de ellas que satisfacen **simultáneamente** a ambas ecuaciones. En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede representar de las siguientes maneras:

$$\begin{array}{l} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} ax+bx=e \\ cx+dx=f \end{array}\right|$$

a, **b**, **c** y **d** se llaman **coeficientes** mientras que **e** y **f** son los **términos libres**. La solución del sistema se escribe como un par ordenado **(x, y)**. En el ejemplo, la solución del sistema es **(21, 13)**.

En resumen

Un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de ecuaciones lineales. Se representa de la forma

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array}\right|$$

donde **a, b, c, d, e, f** $\in \mathbb{R}$ y **x** e **y** son las incógnitas.

Una solución **(p, q)** del sistema es un par de valores que satisface simultáneamente ambas igualdades.

Razona y comenta

- ¿Habrías planteado el problema de otra manera? ¿Cuál? Explica y verifica si llegas al mismo resultado.

Repaso

1. **Resuelve** las siguientes ecuaciones de primer grado.

   a) $6 - x = 12$

   b) $9 - 2x = 16$

   c) $2x + 6x = 16$

   d) $x + 3x = 18 - 2x$

   e) $3x - 0,5 = 67$

   f) $26 = 2 - 6x$

   g) $\frac{x}{3} + 5 = 2x - 9$

   h) $\frac{3x}{4} - \frac{2x}{5} = x - \frac{1}{2}$

2. **Expresa** en lenguaje algebraico las siguientes situaciones.

   a) Mi mamá tiene 24 años más que yo.

   b) Entre mi hermano y yo tenemos 132 láminas.

   c) El producto de mi edad por 10 es igual a 100.

   d) La cantidad de departamentos de un edificio es igual al triple de 50.

   e) La diferencia entre un número y 40 es igual a 28.

   f) El cociente entre un número y 6 es igual a 3.

3. **Resuelve** los siguientes problemas.

   a) El perímetro de un rectángulo es de 204 cm. El largo es el doble del ancho y el ancho está representado por la expresión $8x + 10$. ¿Cuánto miden el largo y el ancho?

   b) El doble de la edad de Carlos es igual al triple de 100 menos 150. ¿Cuál es la edad de Carlos?

   c) El lado de un pentágono regular de 74 cm de perímetro está representado por la expresión **$3x + 4$**. ¿Cuántos centímetros mide cada lado? ¿Cuál es el valor de **x**?

   d) Miriam y Raúl llevan bandejas de huevos. Si Miriam le diera a Raúl una de sus bandejas, Raúl llevaría el doble de bandejas que ella. Pero si Raúl le diera a Miriam una de sus bandejas, ambos llevarían la misma cantidad. ¿Cuántas bandejas lleva cada uno?

4. **Determina** si el valor dado en cada caso satisface a la respectiva ecuación.

   a) $x = 2$, para la ecuación $2x + 4 = 3x + 2$

   b) $x = 7$, para la ecuación $x - 16 = 2x + 5$

   c) $x = 1$, para la ecuación $2x + 5 = 7$

   d) $x = -2$, para la ecuación $x^2 - 5x - 14 = 0$

   e) $x = -3$, para la ecuación $2x^2 + 12 = -18$

   f) $x = 2$, para la ecuación $3x^2 - 12 = 0$

   g) $x = 0$, para la ecuación $3x^2 - 5x = 0$

Práctica guiada

5. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones. Utiliza el procedimiento visto en la lección.

   a) $\begin{array}{c} -2x + y = -2 \\ 3x - y = 4 \end{array}$

   b) $\begin{array}{c} 3x + 6y = 6 \\ -2x + 3y = 2 \end{array}$

   c) $\begin{array}{c} -7x + 14y = 10 \\ 7x + y = 10 \end{array}$

   d) $\begin{array}{c} -3x + 4y = y \\ 7x - y = 5y + 2 \end{array}$

   e) $\begin{array}{c} x + 4y = 8 \\ -x - 2y = -3 \end{array}$

   f) $\begin{array}{c} 4y + 5 = 2x \\ 6(x - 1) + 4y = y \end{array}$

6. **Plantea y resuelve** los sistemas de ecuaciones correspondientes a las siguientes situaciones. Guíate por el procedimiento indicado en la lección.

   a) La suma de dos números es 29 y su diferencia es 5. ¿Cuáles son los números?

   b) La suma de dos números es 100 y su diferencia es 48. Determina los números.

   c) La diferencia entre dos números es 17. Si el mayor se divide por el menor, el cociente es dos y el resto es cuatro. ¿Cuáles son los números?

   d) El perímetro de un rectángulo es 45 cm. Si el triple de la longitud del menor de los lados es el doble de la longitud del mayor, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Aplica

7. **Desafío:** Andrés es un artista que vendió a un cliente un cuadro y tres esculturas a $ 60 000, y a otro cliente le vendió 3 cuadros y 9 esculturas en $120 000.

   a) ¿Cuánto cuesta cada cuadro y cada escultura?

   b) ¿Puedes asegurar que Andrés vende sus obras al mismo precio a ambos clientes? ¿Por qué?

Reflexiona

- Hacer una tabla de valores puede no ser efectivo siempre. ¿Se te ocurre algún método para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones, de manera más rápida? Discute con tus compañeros.

34 Lección

Propósito: interpretar gráficamente un sistema de ecuaciones lineales.

Debes saber…

- Una función de la forma $y = mx + n$ se llama función afín, y su representación gráfica es una recta.
  En una función afín $y = mx + n$, m se llama pendiente y n, coeficiente de posición.
- La pendiente de una recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, se calcula mediante la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sistemas de ecuaciones lineales y gráficos

Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones

Clara quiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 4x + 2y = -2 \end{array}\right|$$

Daniela le sugiere utilizar un gráfico para estudiar el sistema, siguiendo estos pasos.

Paso 1 Se despeja la variable **y** en cada ecuación del sistema. De esta manera se obtienen dos ecuaciones que corresponden a funciones afines.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 4x + 2y = -2 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} y = -x + 1 \\ 2y = -4x - 2 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} y = -x + 1 \\ y = -2x - 1 \end{array}\right|$$

Paso 2 Se construye una tabla de valores para cada una de las ecuaciones.

$y = -x + 1$

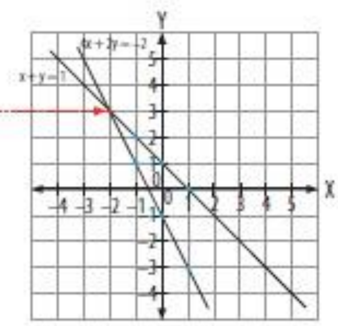
x	y	(x, y)
–1	2	(–1, 2)
0	1	(0, 1)
1	0	(1, 0)

$y = -2x - 1$

x	y	(x, y)
–1	1	(–1, 1)
0	–1	(0, –1)
1	–3	(1, –3)

Paso 3 Se grafican ambas funciones en un mismo sistema cartesiano. Para ello ubicamos los pares ordenados obtenidos en el plano cartesiano y graficamos las rectas.

(–2, 3) es el punto de intersección entre las rectas que representan gráficamente las ecuaciones en el plano cartesiano.



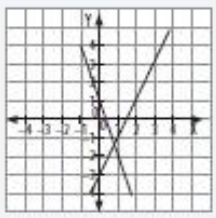
Paso 4 Analizando con detalle el gráfico podemos observar que las rectas se intersecan en el punto de coordenadas (–2, 3). Por lo tanto, esta es la solución del sistema.

Análisis gráfico de un sistema de ecuaciones

Clara analiza ahora los siguientes sistemas para lo que ha construido el gráfico correspondiente a cada uno.

Sistema 1

$$\left.\begin{array}{l}3x+y=1\\2x-y=3\end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l}y=-3x+1\\y=2x-3\end{array}\right|$$

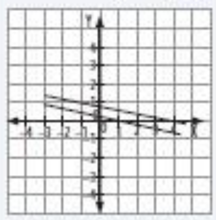


Se obtienen **dos rectas secantes** (se intersecan en un punto). Por lo tanto, el sistema **tiene solución, y es única**.

Este tipo de sistemas se llama **compatible determinado**.

Sistema 2

$$\left.\begin{array}{l}x+5y=1\\2x+10y=8\end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l}y=-\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{5}\\[2ex]y=-\dfrac{x}{5}+\dfrac{4}{5}\end{array}\right|$$

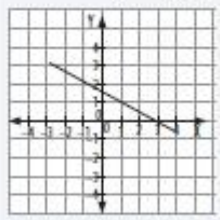


Se obtienen **dos rectas paralelas** (no se intersecan). Por lo tanto, el sistema **no tiene solución**.

Este tipo de sistemas se llama **incompatible**.

Sistema 3

$$\left.\begin{array}{l}2x+4y=6\\3x+6y=9\end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l}y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}\\[2ex]y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}\end{array}\right|$$



Se obtienen **dos rectas coincidentes** (se intersecan en todos sus puntos). Por lo tanto, el sistema **tiene infinitas soluciones**.

Este tipo de sistemas se llama **compatible indeterminado**.

Ayuda

Las ecuaciones $2x + 4y = 6$ y $3x + 6y = 9$ se satisfacen con los mismos valores, por lo que decimos que son **equivalentes**.

Podemos observar, a partir de las funciones afines correspondientes a las ecuaciones de los sistemas, que:

- si en las funciones afines de un sistema sus **pendientes son distintas**, sus gráficas representan rectas secantes y se trata de un **sistema compatible determinado**.
- si en las funciones afines de un sistema **sus pendientes son iguales** pero sus **coeficientes de posición son distintos**, sus gráficas representan rectas paralelas y se trata de un **sistema incompatible**.
- si en las funciones afines de un sistema sus **pendientes y coeficientes de posición son iguales**, sus gráficas representan rectas coincidentes, y se trata de un **sistema compatible indeterminado**.

Razona y comenta

- Si un sistema de ecuaciones tuviera tres ecuaciones con dos incógnitas, ¿qué posibilidades se pueden dar? Discute con tus compañeros.

En resumen

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se **representa gráficamente mediante dos rectas**, que pueden ser **secantes (solución única)**, **paralelas (no tiene solución)** o **coincidentes (infinitas soluciones)**.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Identifica** la pendiente y el coeficiente de posición de las siguientes funciones afines.

   a) $y = -5x + 4$
   b) $y = 2x + 0{,}3$
   c) $y = 5x + 7$
   d) $y = -5$
   e) $y = 2x + 1$
   f) $2y = 5x - 2$
   g) $-y = -0{,}5x - 4$
   h) $0{,}5x - 4{,}4y = 12$

2. **Calcula** la pendiente de la recta correspondiente a la función afín a la que pertenecen los siguientes pares de puntos.

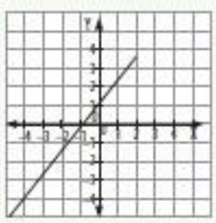
   a) A(−3,2) y B(1,2)
   b) B (1, 0) y C (−3, 5)
   c) D (3, 3) y E (3, 3)
   d) F(−2, −1) y G(2, −4)
   e) H(−0,5; 0) y E(2, −4)
   f) J(−0,6; −10) y K(22, −24)
   g) L(−2; 0,3) y M(−2, −4)
   h) N(−1, −3) y O(−3, −8)

3. **Construye** la gráfica de las siguientes funciones afines.

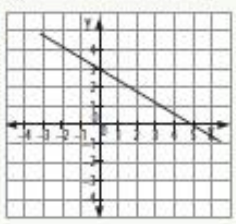
   a) $f(x) = x + 2$
   b) $g(x) = -3x - 1$
   c) $h(x) = 0{,}5x - 0{,}5$
   d) $i(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
   e) $j(x) = \frac{4}{5}x - 4$
   f) $k(x) = -5x + 30$
   g) $l(x) = 3x - 0{,}5$

4. Para cada gráfico, **identifica** la función afín que representa.

   a)



   b)



5. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando tabla de valores.

   a) $\left.\begin{aligned} x + 5y &= 7 \\ x - 3y &= -1 \end{aligned}\right]$
   b) $\left.\begin{aligned} 2x + 6y &= 4 \\ 3x + 4y &= 6 \end{aligned}\right]$
   c) $\left.\begin{aligned} 5x - 2y &= 10 \\ 3x - y &= 3 \end{aligned}\right]$
   d) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ 3x + 2y &= 44 \end{aligned}\right]$
   e) $\left.\begin{aligned} 5x - 4y &= 1 \\ -x + y &= 4 \end{aligned}\right]$
   f) $\left.\begin{aligned} 7x - 2y &= 9 \\ 2x - 5y &= 7 \end{aligned}\right]$
   g) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ x + y &= 3 \end{aligned}\right]$
   h) $\left.\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right]$
   i) $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ 2y + x &= 3 \end{aligned}\right]$
   j) $\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= -2 \\ x + 3y &= 12 \end{aligned}\right]$

Práctica guiada

6. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones por medio de gráficos. Guíate por el procedimiento visto en la lección. Puedes utilizar un procesador geométrico.

   a) $\left.\begin{aligned} x - y &= 3 \\ x + y &= 9 \end{aligned}\right]$
   b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 8 \\ 2x - 3y &= -4 \end{aligned}\right]$
   c) $\left.\begin{aligned} x + 4y &= 1 \\ y + x &= 2 \end{aligned}\right]$
   d) $\left.\begin{aligned} x + 3 &= y \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}\right]$
   e) $\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= -1 \\ 5x - 2y &= 4 \end{aligned}\right]$
   f) $\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 2 \\ -3x - 2y &= -1 \end{aligned}\right]$
   g) $\left.\begin{aligned} 2x - 5y &= 3 \\ 15y - 6x &= 5 \end{aligned}\right]$
   h) $\left.\begin{aligned} -3x + 5y &= 0 \\ -7x + y &= 4 \end{aligned}\right]$
   i) $\left.\begin{aligned} x - y &= -1 \\ x + y &= -1 \end{aligned}\right]$
   j) $\left.\begin{aligned} -x + 3y &= -4 \\ -x + y &= -2 \end{aligned}\right]$
   k) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 8 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}\right]$
   l) $\left.\begin{aligned} -x - 2y &= -6 \\ -x + 4y &= 6 \end{aligned}\right]$
   m) $\left.\begin{aligned} -x + y &= -3 \\ -3x + 5y &= -11 \end{aligned}\right]$
   n) $\left.\begin{aligned} 3y - 2 &= -x \\ 2x - 4 &= -6y \end{aligned}\right]$

7. Sin resolver los siguientes sistemas, **determina** si cada uno de ellos es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Guíate por el ejemplo

Ejemplo: $\begin{cases} 3x+3y=13 \\ 2y=12-3x \end{cases}$

Paso 1 Se expresan como funciones afines las ecuaciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x+3y=13 \\ 2y=12-3x \end{cases} \quad \begin{cases} 3y=-3x+13 \\ 2y=-3x+12 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x+\frac{13}{3} \\ y=-\frac{3}{2}x+6 \end{cases}$$

Paso 2 Se analizan sus pendientes y sus coeficientes de posición.

En la primera ecuación, su pendiente es igual a -1, y el coeficiente de posición es $\frac{13}{3}$.

En la segunda ecuación, su pendiente es $-\frac{3}{2}$, y el coeficiente de posición es 6.

Paso 3 Ya que las pendientes son distintas, las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema son secantes, por lo que el sistema es compatible determinado.

a) $\begin{cases} 2x-12y=6 \\ 3x+y=9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=12 \\ -y+2x=9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2y+5x=29 \\ 2x+5y=29 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-5y=8 \\ -7x+8y=25 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x-2y=13 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{6}{5}x-\frac{2}{3}y=4 \\ \frac{3}{4}x+\frac{5}{6}y=2 \end{cases}$

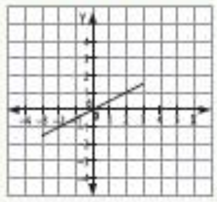
h) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-8y=1 \\ \frac{1}{4}x-3y=2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 25x+10y=4 \\ 15x+6y=\frac{12}{5} \end{cases}$

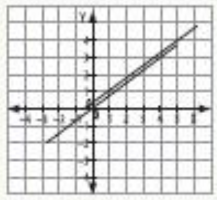
j) $\begin{cases} \frac{3}{4}x+2y=0 \\ \frac{1}{2}x+\frac{4}{3}y=0 \end{cases}$

8. **Asocia** a cada uno de los siguientes gráficos su respectivo sistema de ecuaciones. Para ello, identifica primero el tipo de sistema que representa, y luego analiza los sistemas dados.

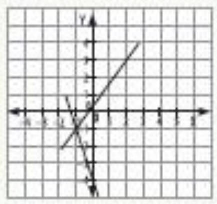
a.



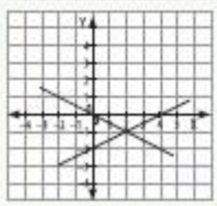
b.



c.



d.



$\begin{cases} x-2y=4 \\ -x-2y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 6x-8y=0 \\ 15x-20y=-5 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x-3y=-1 \\ 3x+y=-4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x-2y=0 \\ 5x-10y=0 \end{cases}$

Aplica

9. **Desafío:** crea un sistema de ecuaciones compatible determinado cuya solución sea (3, –5), un sistema compatible indeterminado y un sistema incompatible.

Reflexiona

- ¿Es posible que un sistema de ecuaciones lineales tenga dos soluciones (y no más)? Si la solución no es única, ¿necesariamente hay infinitas? Discute con tus compañeros.

Practiquemos lo aprendido

35 Lección

Propósito: resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales.

Debes saber…

En una igualdad puedes multiplicar ambos lados de ella por un mismo número sin que esta se altere. Debes multiplicar cada término, respetando los signos.
Por ejemplo

$$2x - 3y = 8 \quad / \cdot -5$$
$$(-5)\cdot(2x) - (-5)(3y) = (-5)\cdot 8$$
$$-10x + 15y = -40$$

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Hasta el momento has podido resolver sistemas de ecuaciones por medio de tablas de valores o de gráficos, pero estos métodos tienen limitaciones que no los hacen fáciles de aplicar en ocasiones. En adelante utilizaremos algunos métodos algebraicos.

Método de sustitución

Considera los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$(1)\ \begin{array}{r} x+4y=1 \\ 3x+12y=-1 \end{array} \qquad (2)\ \begin{array}{r} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{array} \qquad (3)\ \begin{array}{r} 2x-3y=9 \\ x+5y=-2 \end{array}$$

Podemos observar que en cada uno de ellos hay una ecuación en la que una de las variables aparece con coeficiente igual a 1 o a −1. Para resolver cada sistema aplicaremos los siguientes pasos.

Paso 1 Se despeja la variable con coeficiente 1 o −1 en la ecuación indicada.

$$\begin{array}{r} x=1-4y \\ 3x+12y=-1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x-3=y \\ 4x-2y=6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x-3y=9 \\ x=-2-5y \end{array}$$

Paso 2 Se sustituye la expresión obtenida en el despeje en la otra ecuación para obtener una ecuación con una incógnita, que se resuelve.

$$\begin{array}{r} 3(1-4y)+12y=-1 \\ 3-12y+12y=-1 \\ 3=-1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4x-2(2x-3)=6 \\ 4x-4x+6=6 \\ 0=0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2(-2-5y)-3y=9 \\ -4-10y-3y=9 \\ -13y=13 \\ y=-1 \end{array}$$

Ayuda

Una **igualdad** es una expresión matemática que involucra el signo =.
Pueden darse 3 casos:

Absurdo: la igualdad no se cumple en ningún caso.
Por ejemplo
$$x+2=x+3$$

Identidad: la igualdad se cumple en todos los casos.
Por ejemplo
$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

Ecuación: la igualdad se cumple solo en algunos casos.
Por ejemplo
$$2x+5=11$$
Se cumple solo si $x=3$.

Paso 3 En el primer caso se obtiene un **absurdo**, lo que indica que el sistema no tiene solución. En el segundo caso se obtiene una **identidad**, que indica que el sistema tiene infinitas soluciones. En el tercer caso, en cambio, se obtiene un valor para la incógnita **y**.

Remplazamos este valor en la ecuación despejada del paso 1, para determinar **x**.

$$\begin{array}{r} x=-2-5(-1) \\ x=-2+5 \\ x=3 \end{array}$$

Paso 4 Podemos concluir que:

- el primer sistema es incompatible.
- el segundo sistema es compatible indeterminado.
- el tercer sistema es compatible determinado, y su solución es (3, −1).

Repaso

1. **Resuelve** las siguientes ecuaciones.
   - a) $4x - 8 = 6 + 2x$
   - b) $16 + 3x = -12 - 4x$
   - c) $4x + 17 = 11x + 24$
   - d) $4(x - 3) + 40 = 64 - 3(x - 2)$
   - e) $2(x - 4) - (6 + x) = 3x - 4$
   - f) $3x + 12 + 2x + 10 = 6$
   - g) $15(x - 1) + 20(x + 1) = 75$
   - h) $15(x - 1) - 2(x + 1) = 75$
   - i) $15(x + 2) = 6(x + 1) + 10(x - 1)$
   - j) $10(13 - x) + 15(2 - x) = 4 + x$
2. **Calcula** el valor de las siguientes expresiones algebraicas, evaluadas para los valores indicados.
   - a) $2x - 5x^2 + x(x - 1)$, para $x = -2$
   - b) $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 2$, para $x = 6$
   - c) $x^3 - 3x^2 + x + 2$, para $x = 0{,}5$
   - d) $2x^3 - 3x^2 + x - 2$, para $x = -9$
   - e) $\frac{3x+3}{2x} - \frac{x-10}{x}$, para $x = 3$
   - f) $\frac{x^2+1}{x} + x^4 - (x - 10)$, para $x = 5$
3. **Reduce** las siguientes expresiones.
   - a) $2x - 8y - 6y - y - 9x$
   - b) $(2x^4 - 3x^2 + 1) + (4x^2 - 2x + 8)$
   - c) $4(x - 1) + 1 + 3(x + 1)$
   - d) $-2(2x - 4) + 5(-2x - 10)$
   - e) $3a^2 - [2a - 1 - (2a^2 - 5a + 3)] - 6$
   - f) $(3a^2 - 5ab + 2c - 2bc) - (5a^2 - 5ab - 2bc)$
   - g) $\frac{2}{5}(x - 0{,}5) + \frac{3}{2}(x - 6)$
   - h) $x^2 + \left(\frac{1}{2}x - 2\right) - \left(-\frac{1}{2}x - x + \frac{2}{3}x^2\right)$

Práctica guiada

4. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución. Guíate por el procedimiento visto en la lección.
   - a) $\left.\begin{aligned} x &= 10y \\ x + y &= 12 \end{aligned}\right|$
   - b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 50 \\ x &= y - 10 \end{aligned}\right|$
   - c) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 12 \\ x + 3y &= 11 \end{aligned}\right|$
   - d) $\left.\begin{aligned} x - y &= 10 \\ 2x + 3y &= 10 \end{aligned}\right|$
   - e) $\left.\begin{aligned} x &= y + 10 \\ 4x + y &= -3 \end{aligned}\right|$
   - f) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 5x - 2y &= -5 \end{aligned}\right|$
   - g) $\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x + y &= 10 \end{aligned}\right|$
   - h) $\left.\begin{aligned} x - y &= 3 \\ x + 2y &= 18 \end{aligned}\right|$
   - i) $\left.\begin{aligned} x - y &= 4 \\ 2x - 4y &= 13 \end{aligned}\right|$
   - j) $\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}\right|$
   - k) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 25 \\ 2x + 3y &= 40 \end{aligned}\right|$
   - l) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + 4y &= 19 \end{aligned}\right|$
   - m) $\left.\begin{aligned} -2x + y &= 9 \\ 4x - 3y &= 10 \end{aligned}\right|$
   - n) $\left.\begin{aligned} -2x + y &= 12 \\ 3x - 5y &= 4 \end{aligned}\right|$
   - ñ) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{4} - 5 &= y \\ 3x + 20 &= 2y \end{aligned}\right|$
   - o) $\left.\begin{aligned} -3x + 40 &= -10y \\ 3x + 15y &= y \end{aligned}\right|$
   - p) $\left.\begin{aligned} 3x - 4y - 4 &= 8 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}\right|$
   - q) $\left.\begin{aligned} 5x - y &= -4 \\ 2y - 10 &= 6x \end{aligned}\right|$
5. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones por igualación. Guíate por el procedimiento visto en la lección.
   - a) $\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 8 \\ 3x + 2y &= 14 \end{aligned}\right|$
   - b) $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 1 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}\right|$
   - c) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 25 \\ x + 3y &= 40 \end{aligned}\right|$
   - d) $\left.\begin{aligned} 2x + 6y &= 6 \\ 2x - 3y &= -10 \end{aligned}\right|$
   - e) $\left.\begin{aligned} -2x + y &= -2 \\ 3x - y &= 4 \end{aligned}\right|$
   - f) $\left.\begin{aligned} 5x - y &= 3x \\ 2x + y &= 8 + 3x \end{aligned}\right|$
   - g) $\left.\begin{aligned} x + 6y &= 6 \\ -x + 3y &= 2 \end{aligned}\right|$
   - h) $\left.\begin{aligned} 2x - 10 &= 100 - 5y \\ -5y - x &= -10 \end{aligned}\right|$
   - i) $\left.\begin{aligned} x - \frac{1}{5} - 5y &= 0 \\ y - \frac{1}{5} - 2x &= 5 \end{aligned}\right|$
   - j) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ 3y - 25 &= 5x \end{aligned}\right|$

Obtenemos la solución $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

2 se obtendrá una identidad si hay infinitas soluciones, y un absurdo si no hay solución.

Practiquemos lo aprendido

6. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones por reducción. Guíate por el procedimiento visto en la lección.

a) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 7x+2y=-12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-4y=-8 \\ 22x+3y=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-4y=2 \\ -3x+5y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ -18x+3y=6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-4y=0 \\ -2x+5y=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y=1 \\ -2x-y=9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=11 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x-5y=4 \\ 3x+7y=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x+5y=0 \\ 3x+7y=0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 24x+13y=80 \\ 18x-7y=90 \end{cases}$

Aplica

7. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que prefieras. Justifica tu elección.

a) $\begin{cases} -2x-5y=-10 \\ 7x+2y=-10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-7y=-2 \\ x+4y=-9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x+1)+y=2 \\ \dfrac{y+4}{3}-x=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(x-1)=6 \\ x-y=10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x+4y=-7x \\ 5x+y=-1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2y-\dfrac{5}{2}=x \\ 2\left(\dfrac{x-1}{4}\right)+y=\dfrac{y}{4} \end{cases}$

g) $\begin{cases} (1-x)^2=y+x^2 \\ \dfrac{x-1}{4}=1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}+y=x-2 \\ 5-\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{2x+1}{3} \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{2x-2}{4}=0 \\ x-3y=x+6 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=-x+\dfrac{1}{2} \\ 3x-(y-1)=6x \end{cases}$

k) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{3}-\dfrac{2(x-y)}{2}=x \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y+6}{3}=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

l) $\begin{cases} \dfrac{4x-2y}{7}+\dfrac{6(x-y)}{5}=x \\ \dfrac{2x}{9}-\dfrac{2y-1}{3}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

8. **Analiza** la siguiente estrategia para resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=-2 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{y}=3 \end{cases}$

- Se realizan los siguientes **cambios de variable**:

$$p=\frac{1}{x} \qquad q=\frac{1}{y}$$

- Con ello se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2p-5q=-2 \\ 3p-7q=3 \end{cases}$$

Que se puede resolver por los métodos estudiados anteriormente.

Aplica la estrategia de cambio de variable para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{y}=7 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{9}{y}=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=-1 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{y}=0 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=2 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x^2+2y^2=7 \\ 4x^2-3y^2=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x^2-y^2=-1 \\ 7x^2+3y^2=29 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 6x^2-y^2=0 \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=5 \\ x^2+7y^2=-6 \end{cases}$

9. **Considera** los sistemas propuestos en la pregunta anterior.

a) ¿Qué restricciones tienen los cambios de variable?

b) ¿Es posible que el sistema original no tenga solución, pero el sistema con las variables reemplazadas sí lo tenga? Justifica y, si corresponde, pon un ejemplo.

10. Considera el siguiente sistema de ecuaciones de coeficientes literales.

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{array}\right|$$

a) Utiliza el método de reducción para demostrar que su solución está dada por la expresión

$$\left(\frac{de-bf}{ad-bc}, \frac{af-ce}{ad-bc}\right)$$

b) Considerando lo anterior, ¿qué debe ocurrir para que el sistema tenga solución única?

c) Analiza lo que ocurre si $ad = bc$ pero $de - bf \neq 0$? ¿Qué tipo de sistema es? Justifica.

d) Analiza lo que ocurre si $ad = bc$ y $de - bf = 0$? ¿Qué tipo de sistema es? Justifica.

11. Aplica la fórmula de la pregunta anterior para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=1 \\ x+3y=1 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{r} 29x+4y=12 \\ 7x+y=1 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=-7 \\ 6x+9y=5 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} x+y=0{,}1 \\ x-y=0{,}5 \end{array}\right|$

e) $\left.\begin{array}{r} x+4y=2 \\ 3x+13y=9 \end{array}\right|$

f) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{3}x+\sqrt{2}y=0 \\ \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=1 \end{array}\right|$

g) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{5}x-y=6 \\ x+\sqrt{5}y=-2 \end{array}\right|$

h) $\left.\begin{array}{r} \left(\sqrt{3}-1\right)x-y=19 \\ x-\left(\sqrt{3}+1\right)y=5 \end{array}\right|$

i) $\left.\begin{array}{r} x+\sqrt{2}y=\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x+\sqrt{6}y=1-\sqrt{3} \end{array}\right|$

j) $\left.\begin{array}{r} x-\sqrt{12}y=9 \\ x+\sqrt{3}y=10 \end{array}\right|$

12. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} ax+(a+1)y=e \\ (a+1)x+(a+2)y=f \end{array}\right|$$

Con **a, e** y **f** números enteros. **Muestra** que el sistema es compatible determinado y su solución siempre son valores enteros.

13. Un sistema de ecuaciones se denomina **homogéneo** si sus términos libres son ambos iguales a cero. Muestra que un sistema homogéneo, o bien es compatible indeterminado, o tiene solución única e igual a **(0, 0)**.

14. Analiza la siguiente estrategia para resolver el sistema de tres ecuaciones lineales y tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=2 \\ 2x-2y+z=6 \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right|$$

- Se utiliza el método de eliminación entre la primera y la segunda ecuación, y luego entre la primera y la tercera, para eliminar la variable **x**.

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=2 \\ 2x-2y+z=6 \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+6y+4z=4 \\ 8y+3z=-2 \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right| \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=2 \\ 8y+3z=-2 \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+6y+4z=4 \\ 8y+3z=-2 \\ 8y+7z=6 \end{array}\right|$$

- La segunda y la tercera ecuación forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, que se resuelve. Se obtiene así el valor de **y** y de **z**.
- Se remplazan los valores obtenidos en la primera ecuación, para obtener el valor de **x**.

Aplica la estrategia anterior para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x-y+z=0 \\ -x+y+z=4 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+2y+3z=1 \\ x+y+4z=120 \\ 4x+8y+4z=136 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{r} -2x+3y+4z=-2 \\ -3x-4z=-1 \\ 2y+3z=5 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=26 \\ 8x+4y+4z=120 \\ 4x+8y+4z=136 \end{array}\right|$

e) $\left.\begin{array}{r} 2x+7y+5z=1 \\ x+3y+z=16 \\ x+3y-z=20 \end{array}\right|$

f) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-5y+4z=0 \\ 2x+y-5z=1 \end{array}\right|$

g) $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ y+z=-2 \\ 3x-z=0 \end{array}\right|$

h) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-5 \\ x+3y=-2 \\ x-3z=1 \end{array}\right|$

Reflexiona

- ¿Cuál de los métodos de resolución de sistemas te resulta más conveniente? ¿Por qué?
- ¿Cómo podrías interpretar un sistema de ecuaciones lineales, de tres ecuaciones con tres incógnitas? Investiga

36 Propósito: analizar algebraicamente la existencia de soluciones en un sistema de ecuaciones lineales.

Lección

Debes saber...

Un sistema de ecuaciones puede ser:

- **Compatible determinado:** si tiene solución única.
- **Compatible indeterminado:** si tiene infinitas soluciones.
- **Incompatible:** si no tiene solución.

Existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Estefanía debe cotizar el valor de los martillos y serruchos que su curso necesita llevar a los trabajos voluntarios que realizarán en invierno. Para averiguar sus precios preguntó a Emilio, un alumno de otro curso que se encontraba haciendo lo mismo, quien le respondió

"Tres martillos y dos serruchos me costaron $15 300"

Estefanía se dio cuenta de que había muchos precios de martillos y serruchos que podían cumplir esta relación, por lo que siguió consultando a otros estudiantes de otros cursos, que le dieron las siguientes respuestas:

Andrea: "Seis martillos y cuatro serruchos me costaron $30 600"
José: "Nueve martillos y seis serruchos me costaron $40 500"
Claudia: "Cinco martillos y tres serruchos me costaron $24 100"

¿Puede Estefanía averiguar el precio de un martillo y de un serrucho, con esta nueva información? Para hacerlo siguió estos pasos:

Paso 1 Si llama **x** al precio de un martillo e **y** al de un serrucho, la información entregada por Emilio y el resto de los estudiantes se puede representar mediante las siguientes ecuaciones:

Emilio: $3x + 2y = 15\,300$
Andrea: $6x + 4y = 30\,600$
José: $9x + 6y = 40\,500$
Claudia: $5x + 3y = 24\,100$

Paso 2 Estefanía constata que la información dada por Andrea es la misma que la que le dio Emilio, ya que Andrea compró el doble de martillos y de serruchos, y precisamente le costaron el doble. Es decir, las ecuaciones correspondientes a la información entregada por Emilio y por Andrea son equivalentes, por lo que el sistema que ellas formen es compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 15\,300 \\ 6x + 4y = 30\,600 \end{array}\right| \cdot 2 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 6x + 4y = 30\,600 \\ 6x + 4y = 30\,600 \end{array}\right|$$

Paso 3 José compró el triple de martillos que José y el triple de serruchos, pero pagó $ 40 500 por ellos. Estefanía observa que el total no es el triple de lo que pagó Emilio, por lo que le parece que la información entregada por José es contradictoria. Si plantea un sistema con estas dos ecuaciones es incompatible

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 15\,300 \\ 9x + 6y = 40\,500 \end{array}\right| \cdot 3 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 9x + 6y = 45\,900 \\ 9x + 6y = 40\,500 \end{array}\right|$$

Ayuda

Se dice que una información es **consistente** si en ella no hay contradicciones. En caso contrario se dice **inconsistente**.

Por esto, un sistema incompatible suele llamarse también **inconsistente**.

Paso 4 La cantidad de martillos y serruchos comprados por Claudia no se relacionan con los que compró Emilio, por lo que la información que entrega Claudia puede complementar a la de Emilio y formar un sistema compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 15\,300 \\ 5x + 3y = 24\,100 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 9x + 6y = 45\,900 \\ 10x + 6y = 48\,200 \end{array}$$

$$x \quad = 2300$$

$$3 \cdot 2300 + 2y = 15\,300$$

$$2y = 15\,300 - 6\,900$$

$$y = 4\,200$$

Ayuda

Por método de reducción

$-x = -2300 \quad / \cdot -1$

$x = 2300$

Ayuda

Sustituimos el valor de x en la primera ecuación.

$3x + 2y = 15\,300$

Es decir, con la información entregada por Emilio y Claudia puede determinar que un martillo cuesta \$2 300 y un serrucho, \$4 200.

¿Cómo podemos determinar, algebraicamente de qué tipo es un sistema sin necesidad de resolverlo? Considerando el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array}\right|$$

Se tiene que:

- el sistema es **compatible indeterminado** si es posible obtener la segunda ecuación a partir de la primera (o la primera a partir de la primera) multiplicando o dividiendo por un número $k \neq 0$. Es decir, se cumple la relación:

  $c = ka \rightarrow \frac{c}{a} = k \qquad d = kb \rightarrow \frac{d}{b} = k \qquad f = ke \rightarrow \frac{f}{e} = k$

  Entonces, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{f}{e}$

- el sistema es **incompatible** si es posible obtener los coeficientes de **x** e **y** de la segunda ecuación a partir de los de la primera (o los de la primera a partir de los de la segunda) multiplicando o dividiendo por un mismo número $k \neq 0$, pero no el término libre. Es decir, se cumple la relación:

  $c = ka \rightarrow \frac{c}{a} = k \qquad d = kb \rightarrow \frac{d}{b} = k \qquad f \neq ke \rightarrow \frac{f}{e} \neq k$

  Entonces, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \neq \frac{f}{e}$

- el sistema es **compatible determinado** si no es posible obtener los coeficientes de la segunda a partir de los de la primera (o los de la primera a partir de los de la segunda) multiplicando o dividiendo por un mismo número $k \neq 0$. Es decir, para todo número $k \neq 0$ se tiene que:

$$\frac{c}{a} \neq \frac{d}{b}$$

Razona y comenta

- ¿Es posible que un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas tenga infinitas soluciones para el valor de una de sus variables, pero no para la otra? Si piensas que sí, pon un ejemplo. Si no, justifica por qué.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ -2x+3y=5 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x-2y=0 \\ 2x+y=3 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{r} x+y=-1 \\ 4x+y=-7 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x+5y=10 \\ -x+4y=-3 \end{array}\right|$

e) $\left.\begin{array}{r} 2x+7y=0 \\ 2x+11y=0 \end{array}\right|$

f) $\left.\begin{array}{r} -3x+8y=0 \\ -7x+10y=-9 \end{array}\right|$

2. **Representa** gráficamente cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones y determina de qué tipo son.

a) $\left.\begin{array}{r} x-2y=2 \\ x+3y=5 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y=9 \\ 2x-2y=4 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{r} 6x+15y=0 \\ 10x+25y=11 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x+5y=8 \\ x+4y=-6 \end{array}\right|$

e) $\left.\begin{array}{r} 2x+10y=1 \\ 5x+25y=7 \end{array}\right|$

f) $\left.\begin{array}{r} 24x+18y=15 \\ 8x+6y=10 \end{array}\right|$

3. **Identifica** la pendiente y el coeficiente de posición de las siguientes funciones afines.

a) $y=4x+5$

b) $y=-3x+8$

c) $y=\frac{2}{3}x+10$

d) $y=-\frac{5}{9}x-1$

e) $y=7x$

f) $4=5x-y$

g) $1=\frac{x-y}{4}$

h) $-3=5\left(x-\frac{y}{2}\right)$

4. **Juzga** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a) Dos rectas son paralelas si sus coeficientes de posición son iguales.

b) Un sistema compatible indeterminado tiene infinitas soluciones.

c) La solución de un sistema de ecuaciones lineales corresponde a las coordenadas del punto de intersección entre las rectas representadas por las ecuaciones.

d) Si las rectas correspondientes a un sistema de ecuaciones tienen igual pendiente, el sistema es compatible determinado.

e) Un sistema de ecuaciones formado por ecuaciones equivalentes es incompatible.

Práctica guiada

5. **Analiza** los siguientes sistemas y determina de qué tipo son. Guíate por el ejemplo.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 8x+12y=4 \\ 6x+9y=5 \end{array}\right|$

Paso 1 Se analizan los coeficientes de x en ambas ecuaciones, para determinar k:

$$6=k\cdot 8 \rightarrow k=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Paso 2 Se verifica si al multiplicar el coeficiente de y de la primera ecuación por **k** se obtiene el de la segunda:

$$k\cdot 12=\frac{3}{4}\cdot 12=\frac{36}{4}=9$$

Se concluye que el sistema es compatible determinado o incompatible.

Paso 3 Se verifica si ocurre lo mismo con los términos libres.

$$k\cdot 4=\frac{3}{4}\cdot 4=\frac{12}{4}=3\neq 5$$

La relación no se cumple, por lo que el sistema es **incompatible**.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=2 \\ -3x-4y=5 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ -x+y=5 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{r} 7x+9y=0 \\ 2x+y=11 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} 18x+27y=81 \\ 2x+3y=9 \end{array}\right|$

e) $\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ 2x+4y=8 \end{array}\right|$

f) $\left.\begin{array}{r} 4x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{array}\right|$

g) $\left.\begin{array}{r} 12x+8y=20 \\ 3x+2y=5 \end{array}\right|$

h) $\left.\begin{array}{r} 10x-7y=4 \\ 3x+5y=-6 \end{array}\right|$

i) $\left.\begin{array}{r} 14x+49y=-21 \\ 4x+14y=-6 \end{array}\right|$

6. **Analiza** de qué tipo son los siguientes sistemas de ecuaciones según el valor de **k**. Guíate por el ejemplo.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=4 \\ 5x+ky=11 \end{array}\right|$

Paso 1 Se analiza la condición que debe cumplir **k** para que el sistema sea compatible determinado.

$$\frac{5}{2} \neq \frac{k}{-3} \rightarrow k \neq -\frac{15}{2}$$

Por lo tanto, si $k \neq -\frac{15}{2}$, el sistema es compatible determinado.

Paso 2 Se analiza lo que ocurre si $k = -\frac{15}{2}$. Al remplazar este valor se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 4 \\ 5x - \frac{15}{2}y = 11 \end{array}\right|$$

Se observa que

$$5 = \frac{5}{2} \cdot 2 \qquad -\frac{15}{2} = \frac{5}{2} \cdot (-3) \qquad 11 = \frac{11}{4} \cdot 4$$

El número por el que se debe multiplicar el término libre de la primera ecuación para obtener el de la segunda no es igual al utilizado para obtener los coeficientes. Por lo tanto, si $k = -\frac{15}{2}$ el sistema es incompatible.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 1 \\ 3x + ky = 3 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{r} 8x - 10y = 15 \\ 4x + ky = 6 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 0 \\ kx + 9y = 4 \end{array}\right|$

d) $\left.\begin{array}{r} x + ky = 0 \\ 5x + 8y = 1 \end{array}\right|$

e) $\left.\begin{array}{r} 5x + ky = 1 \\ 5x + y = 1 \end{array}\right|$

f) $\left.\begin{array}{r} x + 5y = 4 \\ kx + 10y = 8 \end{array}\right|$

Aplica

7. Para los siguientes sistemas, determina valores de **a** y de **b** para que se cumpla la condición pedida.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 4 \\ ax + by = 9 \end{array}\right|$, para que sea compatible determinado.

b) $\left.\begin{array}{r} ax + 8y = 4 \\ 2x + by = 8 \end{array}\right|$, para que sea compatible indeterminado.

c) $\left.\begin{array}{r} x + ay = 2 \\ 4x + by = 10 \end{array}\right|$, para que sea incompatible.

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + ay = b \\ 5x + by = 9 \end{array}\right|$, para que sea compatible determinado.

8. **Verifica** las siguientes proposiciones.

a) El sistema $\left.\begin{array}{r} kx - 10y = 1 \\ 4x + ky = 8 \end{array}\right|$ es compatible determinado, para cualquier valor real de **k**.

b) El sistema $\left.\begin{array}{r} x - 7y = 1 \\ x + ky = 8 \end{array}\right|$ no puede ser compatible indeterminado.

c) El sistema $\left.\begin{array}{r} x + y = k \\ x + y = k + 1 \end{array}\right|$ no puede ser compatible.

d) El sistema $\left.\begin{array}{r} ax - by = e \\ cx + dy = f \end{array}\right|$ es compatible determinado si **a**, **b**, **c** y **d** son números naturales.

9. **Determina** en cada caso si la información entregada por Enrique y Daniela es consistente o inconsistente. Justifica en cada caso.

a) **Enrique:** mi edad es el doble de la de Daniela.
Daniela: la edad de Enrique menos mi edad, es igual a mi edad.

b) **Enrique:** El costo de cuatro relojes y dos lapiceras es igual a \$21 000.
Daniela: El costo de seis relojes y tres lapiceras es igual a \$25 000.

10. **Determina** cuál(es) de los siguientes sistemas es(son) compatible(s) indeterminado(s).

a) $\left.\begin{array}{r} x - 3y = b - a \\ x - y = a^2 + b^2 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = b - 1 \\ ax - ay = b^2 - 1 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y = b - a \\ -ax + ay = a^2 - ab \end{array}\right|$

11. **Desafío:** Emilio quiere determinar las ecuaciones de 3 rectas, L_1, L_2 y L_3, de modo que L_1 y L_2 formen un sistema compatible determinado, L_1 y L_3 uno indeterminado y L_3 con L_2 formen uno incompatible. ¿Es posible hacerlo? Si no es posible, justifica por qué.

12. **Desafío:** Andrés y Camilo discuten sobre el área y perímetro de un rectángulo. Andrés asegura que no se puede construir un rectángulo cuyo perímetro sea 22 cm y la diferencia entre la medida del largo y ancho sea de 3 cm, en cambio Camilo insiste que si existe. ¿Quién tiene la razón? ¿Cómo lo puedes averiguar?

Reflexiona

- En ocasiones, los medios de comunicación entregan información inconsistente, o incompatible entre sí. ¿Has visto casos de este tipo? Busca un ejemplo en diarios, revistas o televisión

Propósito: plantear y resolver problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales.

Debes saber…

La solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de valores (p, q), de modo que al remplazar estos valores por las incógnitas, ambas igualdades se satisfacen.

Resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales

La edad de Rubén menos la edad de Luis es igual a 27 años, y el triple de la edad de Rubén más el doble de la de Luis es igual a 61 años, ¿qué edad tiene cada uno?

Para resolver este problema aplicaremos los métodos vistos en esta sección mediante los siguientes pasos.

Paso 1 Asignamos las variables **x** e **y** a las edades de Rubén y de Luis, respectivamente.

x: edad de Rubén.
y: edad de Luis.

Con esto podemos plantear el sistema de ecuaciones.

La edad de Rubén menos la edad de Luis es igual a 27 años:

$$x - y = 27$$

El triple de la edad de Rubén más el doble de la edad de Luis es iguala a 61 años:

$$3x + 2y = 61$$

Por lo tanto el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 27 \\ 3x + 2y = 61 \end{array}\right|$$

Paso 2 Analizamos si el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o si no tiene solución. Para ello, observamos que:

- el coeficiente de **x** en la segunda ecuación (3) se obtiene multiplicando por 3 el coeficiente de **x** de la primera (1).
- el coeficiente de **y** en la segunda ecuación (2) se obtiene multiplicando por –2 el coeficiente de **y** de la primera (–1).

Ya que los valores por los que se debe multiplicar son distintos, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Paso 3 Se resuelve el sistema utilizando alguno de los métodos vistos. En este caso, ya que la primera ecuación tiene variables con coeficiente igual a 1 es conveniente proceder por sustitución.

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 27 \\ 3x + 2y = 61 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 27 + y \\ 3x + 2y = 61 \end{array}\right|$$

$$3(27 + y) + 2y = 61$$
$$81 + 3y + 2y = 61$$
$$5y = -20$$
$$y = -4$$

Se remplaza el valor obtenido $y = -4$ en la ecuación despejada.

$$x = 27 + (-4)$$
$$x = 23$$

Por lo tanto, la solución del sistema es (23, −4).

Paso 4 Se analiza si la solución obtenida es pertinente al contexto del problema, es decir, si realmente es posible que las variables tengan estos valores.

En este caso, **x** e **y** son edades de personas, por lo que no es pertinente que existan valores negativos. Por lo tanto, si bien el sistema asociado al problema tiene solución —y única— el problema mismo **no tiene solución.**

Paso 5 Aunque en este caso la solución no es pertinente, en el caso de que lo fuera puedes verificar que los valores obtenidos satisfacen las condiciones del problema. En este caso:

La edad de Rubén menos la edad de Luis es igual a 27 años:

$$x - y = 27$$
$$23 - -4 = 27$$
$$27 = 27$$

El triple de la edad de Rubén más el doble de la de Luis es iguala a 61 años:

$$3x + 2y = 61$$
$$3 \cdot 23 + 2 \cdot -4 = 61$$
$$69 + -8 = 61$$
$$61 = 61$$

Por lo tanto, podemos verificar que la solución obtenida sería correcta pues cumple las condiciones, pero el problema no tiene solución pues el valor obtenido no es pertinente.

Razona y comenta

- ¿Cuál es la diferencia entre un sistema incompatible y un problema con solución que no es pertinente? Explica con tus palabras.
- Analiza el enunciado del problema. ¿Habrías podido anticipar que la solución no era pertinente, antes de resolverlo? Explica cómo podría hacerse esto.

En resumen

Para resolver problemas que involucran sistemas de ecuaciones, asignamos las letras a las respectivas incógnitas, planteamos las ecuaciones y se resuelve el sistema, si tiene solución única. Es importante verificar si la solución obtenida es pertinente al contexto del problema.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Resuelve** las siguientes ecuaciones lineales.

   a) $5x - 7 = 13$

   b) $19x + 47 = 16$

   c) $x + 15 = 6(10 + x)$

   d) $-12 - 2x = 6x$

   e) $2(x - 3) = 4x + 1$

   f) $x + 1 = 7(x + 2)$

   g) $3(x - 1) = 0{,}5x - 1$

   h) $x - 1 = 0{,}25x + x$

2. **Expresa** en lenguaje algebraico los siguientes enunciados.

   a) El perímetro de un rectángulo cuyo ancho mide **2x** metros, y largo mide el triple de su ancho.

   b) El perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide **a + b** cm.

   c) La edad del mayor de tres hermanos, si el menor tiene **x** años, y el del medio tiene 3 años más que el menor y cinco años menos que el doble de la edad del mayor.

3. **Resuelve** los siguientes problemas. Plantea en cada caso la ecuación de primer grado correspondiente.

   a) Al dinero que Daniel tiene se le suma su mitad y luego se le agregan otros $ 6 000, de modo que finalmente queda con $18 000. ¿Cuánto dinero tenía Daniel originalmente?

   b) Un rectángulo tiene el doble de largo que de ancho. Si el largo disminuye en 6 cm y el ancho aumenta en 5 cm, la superficie del rectángulo no varía. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

   c) Dos hermanos se reparten $ 20 000 de modo que al mayor le corresponde el triple de dinero que al menor. ¿Cuánto recibe cada uno?

   d) Camila compra un automóvil con un 15% de descuento, por lo que finalmente paga $ 3 000 000. ¿Cuánto costaba el automóvil sin el descuento?

   e) El doble de la altura de un triángulo disminuida en 8 unidades es igual a 10 unidades. Si el lado correspondiente a dicha altura mide 16 cm, ¿cuál es el área del triángulo?

   f) Para elegir a un representante del colegio se realizó una votación entre tres candidatos, en la que se registraron un total de 560 votos. Pablo tiene 75 votos menos que Juan y 55 votos más que Pedro. ¿Cuántos votos obtuvo cada candidato?

4. **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones. Si no tienen solución única, demuestra por qué.

   a) $\begin{array}{r} 2x + 3y = 9 \\ x + 5y = 8 \end{array}$

   b) $\begin{array}{r} 4x - 2y = 0 \\ -12x + 6y = 4 \end{array}$

   c) $\begin{array}{r} 7x + 6y = -2 \\ 6x + 5y = -5 \end{array}$

   d) $\begin{array}{r} 18x + 30y = 6 \\ 15x + 25y = 5 \end{array}$

   e) $\begin{array}{r} 2x + 9y = 14 \\ x + y = 23 \end{array}$

   f) $\begin{array}{r} 5x + 8y = 0{,}1 \\ 0{,}125x + 0{,}2y = 0{,}5 \end{array}$

Práctica guiada

5. **Resuelve** los siguientes problemas. Guíate por el ejemplo estudiado en la lección.

   a) Ester pagó $10 000 en total por una polera, una camisa y un pantalón. El costo de la polera más el del pantalón es igual al de la camisa, y el doble del precio de polera es igual al precio del pantalón más $ 1 000. ¿Cuál es el precio de la polera, camisa y pantalón?

   b) Andrea tiene $ 5 800 en monedas de $100 y $500. Si en total tiene 18 monedas, ¿cuántas monedas de $100 y de $500 tiene?

   c) Pedro tiene $500 en monedas de $10 y de $50. Si en total tiene 20 monedas, ¿cuántas de cada tipo tiene?

   d) Un producto A cuesta $ 300 y otro producto B, $ 350. Omar compra algunos productos A y otros B, de modo que lleva 12 en total. Si paga $ 3 950, ¿cuántas unidades compró del producto B?

   e) Nelson tiene el doble de la edad de Ana y hace cinco años tenía el triple. ¿Cuál será la edad de Ana en 5 años más?

   f) La edad de Amaro hace 3 años era la mitad de la edad que tenía Alonso. Si dentro de 2 años la edad de Amaro será igual a la edad de Alonso disminuida en 3 años, ¿cuál es la edad de cada uno?

   g) Amanda compró en una tienda 5 lápices y 2 cuadernos por $ 2 900. Javiera compró en la misma tienda 6 lápices y 3 cuadernos por $ 4 050. ¿Cuánto cuestan los lápices y los cuadernos en la tienda?

h) La suma de las edades de Andrés y Jaime es igual a 48 años. Si Andrés tiene el doble de la edad de Jaime, ¿cuáles son las edades de cada uno?

i) En un corral hay conejos y gallinas, que en conjunto suman 36 ojos y 110 patas. ¿Cuántos animales hay?

j) Las edades de dos hermanos están en razón 4 : 5. Si hace dos años el menor tenía 26 años, ¿cuántos años tenía el mayor cuando su hermano menor nació?

k) En un curso hay 45 estudiantes. Si el doble de la cantidad de hombres sobrepasa en 10 estudiantes al doble de la cantidad de alumnas, ¿cuántas mujeres hay en el curso?

l) Si se compran cuatro computadores de la marca A y tres de la marca B se debe pagar \$ 3 573 000; mientras que al comprar cinco de la marca A y cuatro de la marca B se debe pagar \$ 3 500 000. ¿Cuál es el valor de cada computador?

m) A una función de cine asistieron 850 personas y se recaudaron \$ 2 052 400. Si la entrada tenía un valor de \$ 2800 para los adultos y \$ 2200 para los niños, ¿cuántos niños asistieron a la función?

n) La edad de un padre y la de su hijo suman 100 años, y dentro de dos años la edad del padre será el doble de la de su hijo. ¿Cuáles son las edades actuales de cada uno?

o) En un garaje hay 55 vehículos, entre autos y motos. Si en total se cuentan 160 ruedas, ¿cuántos autos y cuántas motos hay?

p) Andrea ganó el doble de dinero que Paula, y entre ambas ganaron \$ 210 000. ¿Cuánto ganó cada una?

q) En un taller de pintura, una máquina la mezcla de acuerdo con el color y el tinte elegido por el consumidor. El precio de una lata de pintura se calcula de acuerdo a las cantidades de cada una de estas sustancias. El precio de un galón de látex es de \$ 4000 y el de tinte es de \$ 8000. Si un cliente pagó \$ 100 000, por quince galones en total, ¿cuántos galones de látex y tinte compró?

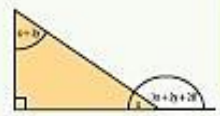
r) María compra 5 kg de manzanas y 2,5 kg de naranjas pagando en total \$4550. Al otro día regresa a comprar más, y por 6 kg de manzanas y 4 kg de naranjas paga \$5250. ¿Cuál es el precio por kg de manzanas y de naranjas?

Aplica

6. **Resuelve** los siguientes problemas geométricos.

a) El perímetro de un rectángulo es 50 cm y el largo excede al ancho en 1 cm. ¿Cuál es el área del rectángulo?

b) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos dibujados en el siguiente triángulo rectángulo?



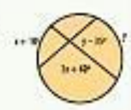
c) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos interiores del siguiente paralelogramo?

d) Dos ángulos α y β son complementarios. Si se aumenta la medida del primero al doble y la medida del segundo disminuye en 10 grados, al sumarlos se obtiene el suplemento de 45°. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos α y β?

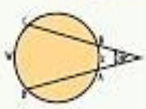
e) El perímetro de un terreno rectangular mide 232 m. Si se sabe que el largo es 8 m mayor que el ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?

f) α y β son dos ángulos complementarios y la diferencia entre el doble del ángulo α y el ángulo β es de 180° ¿Cuáles son los ángulos?

g) ¿Cuáles son las medidas de **x** e **y** en la siguiente figura?



h) En la siguiente figura la suma de las medidas de **w** y **z** es de 90° y el ángulo exterior a la circunferencia mide 30° ¿Cuáles son las medidas de los arcos AB y CD?



i) En la siguiente circunferencia, la suma de las medidas de los ángulos inscritos α y β es de 68°, y la tercera parte de la medida del ángulo del centro γ más la del ángulo del centro α es de 150°. ¿Cuánto mide cada ángulo en la circunferencia?

Practiquemos lo aprendido

7. Resuelve los siguientes problemas numéricos.

a) La suma de dos números es 30 y su diferencia es igual a 6. ¿Cuáles son los números?

b) Un número de 2 cifras es igual a cuatro veces la suma de sus cifras y si se invierten de orden las cifras, el número aumenta en 36 unidades. ¿Cuál es el triple de dicho número?

c) Dado un número entre 200 y 300, la cifra de las decenas es la tercera parte de la cifra de las unidades y la suma de las tres cifras es 14. ¿Cuál es el número?

d) Encuentra dos números que sumados den 285 y restados, 121.

e) Si al sumar dos números impares consecutivos resulta 8, ¿cuál es el producto de estos números?

f) Al simplificar una fracción se obtiene 2. Si se disminuye el numerador en 1 unidad y se aumenta el denominador en 4, se obtiene $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la fracción original?

g) Dos números naturales están en la razón 7 : 5. Si la diferencia entre ellos es 8 unidades, ¿cuáles son los números?

h) La suma de dos números es 17 y la diferencia entre triple del primero y la mitad del segundo es 23. ¿Cuáles son los números?

i) Al sumar los dígitos que componen un número de dos cifras resulta 12. Si se invierten los dígitos del número, este aumenta en 54 unidades. ¿Cuál es la cifra de las unidades del número?

j) La suma de las dos cifras de un número equivale a la tercera parte del número. Si la cifra de las unidades excede en cinco a las decenas, ¿Cuál es el número?

k) La suma de dos números es 27. Si al primero de ellos se le suman 5 unidades y al segundo se le restan 5 unidades, se obtiene que el primero es el doble del segundo. ¿Cuáles son los números?

8. Analiza la pertinencia de los resultados en cada problema.

a) 5 gomas más dos lápices cuestan \$650 y por el precio de 3 gomas más 50 pesos me llevo un lápiz. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

b) Sean dos números enteros positivos tales que el triple del primero menos el segundo es igual a 79 y el doble del primero más el segundo es igual a 31. Hallar los números.

c) En un juego, 2 fichas verdes y 4 blancas entregan 6 puntos, y 2 fichas blancas más 3 verdes dan 17 puntos ¿Cuántos puntos entrega cada ficha?

d) Si en una fracción restamos 2 al numerador y al denominador, el resultado es $\frac{7}{10}$. Pero si al numerador restamos 1 y al denominador restamos 4, el resultado es $\frac{3}{4}$. Determina la fracción.

9. Conexiones: Se llama reacción química a la transformación de una o más sustancias iniciales (reactantes) en una o más sustancias finales (productos). Una reacción se representa mediante una ecuación química, de la forma:

$$\underbrace{A + B}_{\text{Reactantes}} \rightarrow \underbrace{C + D}_{\text{Productos}}$$

Por ejemplo, la reacción entre el metano (CH_4) y el oxígeno (O_2) produce dióxido de carbono (CO_2) y agua (H_2O). Por lo tanto, se puede representar mediante la ecuación:

$$CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

Sin embargo, podemos observar que en esta ecuación hay 4 átomos de hidrógeno en los reactantes pero solo hay 2 en los productos, mientras que hay 2 de oxígeno en los reactantes y 4 en los productos. Para que se respete la **ley de conservación de la materia** de Lavoisier es necesario utilizar **coeficientes estequiométricos**, que ajustan la ecuación de manera que haya la misma cantidad de átomos en reactivos y productos. En este caso:

$$xCH_4 + yO_2 \rightarrow zCO_2 + wH_2O$$

Con ello, se obtiene que:

Átomos	Reactantes	Productos
C	$x \cdot 1 = x$	$z \cdot 1 = z$
H	$x \cdot 4 = 4x$	$w \cdot 2 = 2w$
O	$y \cdot 2 = 2y$	$z \cdot 2 + w = 2z + w$

Lo que genera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x &= z \\ 4x &= 2w \\ 2y &= 2z + w \end{aligned}\right|$$

Este tipo de sistemas siempre tiene infinitas soluciones, por lo que para encontrar una de ellas daremos un valor a **x**, y a partir de ello encontraremos los demás valores.

Sea $x = 1$. Con ello.

$$\left.\begin{array}{l}1 = z\\ 4 \cdot 1 = 2w\\ 2y = 2 \cdot 1 + w\end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l}1 = z\\ 2 = w\\ 2y = 2 + w\end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l}1 = z\\ 2 = w\\ 2y = 2 + 2\end{array}\right|$$

Se obtiene así que una solución posible es **$x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ y $w = 2$**. Por lo tanto, la ecuación correcta es:

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$

Ajusta las siguientes ecuaciones químicas:

a) $NaCl + H_2SO_4 \rightarrow HCl + Na_2SO_4$

b) $H_2CO_3 + KClO \rightarrow K_2CO_3 + HClO$

c) $C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

d) $HCl + Ca \rightarrow CaCl_2 + H_2$

10. Conexiones: En economía se llama **oferta** a la relación entre el precio de un artículo y la cantidad de ellos que un mercado (vendedor) pondrá a disposición a dicho precio. Mientras mayor sea el precio, mayor cantidad de artículos estará dispuesto el mercado a poner a la venta.

A la inversa, se llama **demanda** a la relación entre el precio de un artículo y la cantidad de ellos que los compradores efectivamente estarán dispuestos a comprar. Mientras mayor sea el precio de venta, menos compradores habrá dispuestos a comprar.

En ocasiones, la oferta y la demanda pueden modelarse por medio de ecuaciones lineales que conforman un sistema de ecuaciones. En él, la solución se conoce como **punto de equilibrio.** Por ejemplo:

Si el precio de un artículo es \$80, el mercado pondrá a la venta 60 de ellos, mientras que si el precio es \$200 pondrá 100 artículos. La función correspondiente a la oferta es la de la recta que pasa por los puntos (80, 60) y (200, 100), es decir:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{100}{3} \rightarrow x - 3y = -100$$

A la vez, si el precio del artículo es \$80 habrá 120 compradores, mientras que si es \$200 habrá solo 40. La función correspondiente a la demanda es la de la recta que pasa por los puntos (80, 120) y (200, 40), es decir:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{100}{3} \rightarrow x - 3y = -100$$

El punto de equilibrio corresponde a la solución del sistema $\left.\begin{array}{l}x - 3y = -100\\ 2x + 3y = 520\end{array}\right|$, es decir, (140, 80). El punto de equilibrio representa la combinación "ideal" entre precio del artículo y unidades vendidas, es decir, en la que tanto compradores como vendedores quedarán satisfechos. En este caso, el precio del artículo será de \$140, y habrá 80 artículos comprados/vendidos.

Calcula el punto de equilibrio en las siguientes situaciones:

a) Si el precio de un artículo es \$40, el mercado pondrá a la venta 60 de ellos, mientras que si el precio es \$120, pondrá 140 artículos. A la vez, si el precio del artículo es \$40 habrá 140 compradores, mientras que si es \$120 habrá solo 60.

b) En una empresa de útiles escolares la función correspondiente a la oferta de cierto lápiz es $y=x+20$, y la función correspondiente a la demanda es $y = -\frac{2}{5}x + 160$.

c) Don Carlos vende sandías en la feria. Si las ofrece a \$1000 pesos lleva 60 al puesto, y si las vende a \$800 lleva 40. A su vez él sabe que si las ofrece a \$600 le compran 100 sandías y si las ofrece a \$1200 le compran 55. (Aproxima el precio a la decena y la cantidad a la unidad).

11. Considera la oferta y la demanda.

a) ¿Puede originarse un sistema compatible indeterminado? ¿Y uno incompatible? Justifica.

b) ¿En qué casos una situación de oferta y demanda tiene solución que no es pertinente? Discute con tus compañeros y cita ejemplos.

c) Investiga qué significa que una demanda sea elástica o inelástica. Cita dos ejemplos para cada caso.

12. Desafío: Una empresa de jugos naturales necesita preparar 300 litros de jugo al 85% de pureza. En las bodegas hay dos tipos de jugos: unos con un 95% de pureza y otros con un 80%. ¿Cuántos litros de cada tipo de jugo se deben mezclar para obtener la cantidad de jugo con la concentración deseada?

Reflexiona

- ¿En qué otros contextos has utilizado palabra "pertinente" o "impertinente". Menciona dos ejemplos para cada una.

Resolución de problemas

Analiza la resolución del siguiente problema.

Un automóvil está cargando combustible en un punto **A** de la carretera; mientras que un ciclista está descansando en un punto **C** ubicado **240 km** más adelante por la misma carretera. Si ambos retoman su viaje en la misma dirección y de manera simultánea con una rapidez de **90 km/h** y **30 km/h** respectivamente, ¿cuál es la distancia que logrará recorrer el ciclista antes de ser alcanzado por el automóvil?

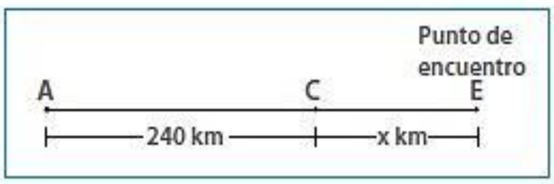
Paso 1 **Comprende** el enunciado

a. Qué datos son necesarios para responder la pregunta?
La fórmula que relaciona la rapidez, el tiempo y la distancia recorrida, y los valores asociados al problema.

b. ¿Qué información entrega el enunciado del problema?
La distancia que separa al ciclista del automóvil y la rapidez con que se mueven en la misma dirección.

Paso 2 **Planifica** lo que vas a realizar

En primer lugar se debe relacionar la rapidez, el tiempo y la distancia recorrida por el automóvil y el ciclista, es decir $v = \frac{d}{t}$ donde v es la rapidez, t el tiempo y d la distancia. Por otro lado, puedes expresar la información que entrega el problema con un dibujo:



donde E es el punto en el que el automóvil alcanza al ciclista. Así, puedes plantear un sistema de ecuaciones con incógnita **x** (distancia entre C y E) y t (tiempo transcurrido). Finalmente, al resolver el sistema se obtendrá el valor de la incógnita **x**, que corresponderá a la distancia que logrará recorrer el ciclista hasta ser alcanzado por el automóvil.

Paso 3 **Resuelve** el problema

Como la rapidez del ciclista es 30 km/h, entonces $30 = \frac{x}{t}$, y como la del móvil es 90 km/h, entonces $90 = \frac{240 + x}{t}$. Luego, el sistema que representa la situación descrita en el problema es $\begin{array}{l|} 30t - x = 0 \\ 90t - x = 240 \end{array}$, cuya solución es

$$x = 120 \text{ y } t = 4.$$

Paso 4 **Revisa** la solución

Remplazando **x** = 120 y **t** = 4, se verifica cada una de las ecuaciones planteadas.

Podrás aplicar lo aprendido aquí en los problemas que se presentan en la página 244.

Para no cometer errores

Analiza la situación

Elena debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+7y=4 \\ 5x-3y=2 \end{array}\right|$$

Para hacerlo utiliza el método de reducción considerando la primera ecuación del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+7y=4 \\ 5x-3y=2 \end{array}\right| \rightarrow 2x=4-7y \rightarrow x=\frac{4-7y}{2}$$

Luego remplaza esta expresión en una de las ecuaciones del sistema

$$2\left(\frac{4-7y}{2}\right)+7y=4$$
$$4-7y+7y=4$$
$$0=0$$

Dado que llega a una identidad, Elena concluye que el sistema es compatible indeterminado.

Razona y comenta

- ¿Cuál es el error cometido por Elena?
- ¿Qué otros errores se pueden cometer en la resolución de sistemas de ecuaciones utilizando los métodos vistos?

Aprende la forma correcta

Elena despejó la variable x en la primera ecuación del sistema y luego remplazó la expresión obtenida en la misma ecuación. Lo que debe hacer es hacer el remplazo en la otra ecuación.

$$5\left(\frac{4-7y}{2}\right)-3y=2$$
$$10-\frac{35}{2}y-3y=2$$
$$-\frac{41}{2}y=-8$$
$$y=\frac{16}{41}$$

Luego se remplaza este valor en alguna de las ecuaciones y se obtiene la solución.

Analiza la situación

Patricio debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} 6x-4y=2 \\ 9x-6y=3 \end{array}\right|$$

Para ello comienza por probar algunos valores. Primero verifica lo que ocurre si $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} 6\cdot1-4y=2 \\ 9\cdot1-6y=3 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4y=-4 \\ -6y=-6 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} y=1 \\ y=1 \end{array}\right|$$

Así, observa que (1, 1) satisface ambas ecuaciones del sistema. Por lo tanto, concluye que esta es la solución

Razona y comenta

- ¿Cuál es el error cometido por Patricio?
- ¿Qué otros errores se pueden cometer en la resolución de sistemas de ecuaciones?

Aprende la forma correcta

Patricio no consideró que un sistema de ecuaciones puede tener infinitas soluciones. En este caso se puede verificar que:

$$9=\frac{3}{2}\cdot6$$
$$-6=\frac{3}{2}\cdot-4$$
$$3=\frac{3}{2}\cdot2$$

Es decir, el sistema es compatible indeterminado y (1, 1) solo es una solución del sistema.

Reflexiona

- ¿Habías cometido ya alguno(s) de estos errores? ¿Cuáles?
- Respecto de los que no cometiste, ¿te sirve estar advertido de la posibilidad de cometerlos?
- Revisa los ejercicios que hayas resuelto en la unidad. ¿Qué errores has cometido? ¿Qué acciones puedes tomar para no volver a cometerlos?

Integrando lo aprendido

Lección 33: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

1 **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando tablas de valores.

a. $\left.\begin{aligned} 4x+y&=4 \\ -4x+3y&=12 \end{aligned}\right|$

b. $\left.\begin{aligned} x+5y&=10 \\ 7x-5y&=10 \end{aligned}\right|$

c. $\left.\begin{aligned} \frac{x}{5}-y&=4 \\ \frac{x+3y}{2}&=2 \end{aligned}\right|$

2 **Utiliza** una tabla de valores para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. En empresa lechera se han envasado 60 00 litros de leche en 2 400 botellas de 2 y 5 litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

b. En una librería han vendido 20 revistas a dos precios distintos: unas a $1 600 y otras a $2 400. Si han obtenido $38 400, ¿cuántas revistas se vendieron de cada precio?

Lección 34: Sistemas de ecuaciones lineales y gráficos

3 **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones por medio de gráficos. Puedes utilizar un procesador geométrico.

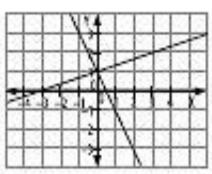
a. $\left.\begin{aligned} 5x-3y&=-8 \\ 6x+7y&=1 \end{aligned}\right|$

b. $\left.\begin{aligned} x+y&=9 \\ 5x-6y&=23 \end{aligned}\right|$

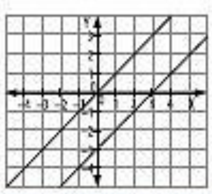
c. $\left.\begin{aligned} -2x+5y&=-11 \\ x-y&=4 \end{aligned}\right|$

4 **Determina** el sistema de ecuaciones asociado a cada gráfico.

a.



b.



Lección 35: Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

5 **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando alguno de los métodos estudiados. Justifica en cada caso la elección del método empleado.

a. $\left.\begin{aligned} x+2y&=8 \\ x-4y&=-10 \end{aligned}\right|$

b. $\left.\begin{aligned} 3x-y&=7 \\ 5x+2y&=-3 \end{aligned}\right|$

c. $\left.\begin{aligned} 6x+7y&=1 \\ -4x+5y&=9 \end{aligned}\right|$

d. $\left.\begin{aligned} 2x-3y&=-8 \\ 6x-5y&=0 \end{aligned}\right|$

e. $\left.\begin{aligned} 6x+2y&=0 \\ 5x+2y&=-5 \end{aligned}\right|$

f. $\left.\begin{aligned} -4x-5y&=-8 \\ 2y&=-15-3x \end{aligned}\right|$

g. $\left.\begin{aligned} 10x-y&=4 \\ 4x+y&=3 \end{aligned}\right|$

h. $\left.\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ 5x+3y&=8 \end{aligned}\right|$

i. $\left.\begin{aligned} \frac{3x+y}{2}&=3 \\ \frac{5x-2y}{3}&=-4 \end{aligned}\right|$

6 **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando cambio de variables.

a. $\left.\begin{aligned} \frac{4}{x}-\frac{7}{y}&=27 \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}&=13 \end{aligned}\right|$

b. $\left.\begin{aligned} \frac{8}{x}-\frac{1}{y}&=0 \\ \frac{1}{x}+7&=\frac{1}{y} \end{aligned}\right|$

c. $\left.\begin{aligned} \frac{2}{x}-\frac{1}{y}&=2 \\ \frac{5}{x}+\frac{3}{y}&=-17 \end{aligned}\right|$

7 **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que prefieras para encontrar los valores de **x**, **y**, **z** según corresponda.

a. $\left.\begin{aligned} 2ax-5by&=0 \\ ax+2by&=1 \end{aligned}\right|$

b. $\left.\begin{aligned} \frac{a}{x}-\frac{b}{y}&=20 \\ \frac{3a}{x}+\frac{2b}{y}&=15 \end{aligned}\right|$

c. $\left.\begin{aligned} 2x-4y+z&=3 \\ x+2y+3z&=4 \\ 3x-6y-z&=5 \end{aligned}\right|$

Evaluación

Lección 36: Existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones

8 **Analiza** los siguientes sistemas y determina si tienen solución única, infinitas soluciones o si no tienen solución.

a. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 6x - 5y = 9 \\ 12x - 10y = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 9x + 2y = 3 \\ -5x + 7y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 24x - 18y = 1 \\ 4x - 6y = 22 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 5x - 8y = 0 \\ 5x + 8y = 0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 0{,}5x - 4y = -2 \\ 2x - 16y = -8 \end{cases}$

9 Para los siguientes sistemas, **determina** valores de a y de b para que se cumpla la condición pedida.

a. $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ ax + by = 1 \end{cases}$, sea compatible determinado.

b. $\begin{cases} 2ax - 6y = 10 \\ 4x - by = 2 \end{cases}$, sea compatible indeterminado.

c. $\begin{cases} x + ay = 2 \\ 4x + by = 10 \end{cases}$, sea incompatible.

10 Dada la ecuación $4x + 12y = 20$, crea en cada caso una ecuación que forme con ella:

a. un sistema compatible determinado.

b. un sistema compatible indeterminado.

c. un sistema incompatible.

Lección 37: Plantear y resolver problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales

11 **Resuelve** los siguientes problemas.

a. El triple de la suma de dos números es 90, y el doble de la diferencia entre ellos es 20. ¿Cuáles son los números?

b. El promedio de dos números es 18. Si el doble del primero más el triple del segundo es 150, ¿cuáles son los números?

c. El perímetro de un rectángulo es 32 cm, y uno de sus lados mide el cuádruple del otro. ¿Cuáles son sus dimensiones?

d. Carolina compró 5 pendrives y 2 tablets en una tienda computacional, por los que pagó \$440 000. En la misma tienda, Claudia compró 3 pendrives y 4 tablets en \$920 000. Si los pendrives y las tablets que compraron son idénticos, ¿cuál es el valor de cada artículo?

e. Alicia le dice a Patricio, "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú" y Patricio contesta: "Si tú me das \$6000, ambos tendremos la misma cantidad". ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

12 Las edades de Eugenia y su hijo Marcelo, sumadas, son iguales a 54 años. **Crea** en cada caso una información adicional para formar un problema:

a. con solución única y pertinente.

b. con solución, pero que no sea pertinente.

c. sin solución.

Evaluación

Autoevaluación

Evalúa tu aprendizaje utilizando el solucionario y completa la siguiente tabla. Si no alcanzaste el mínimo sugerido en las actividades propuestas, vuelve a las páginas indicadas para repasar.

Indicador	Mínimo sugerido	Puedes repasar en la(s) página(s)
Identificar y plantear un sistema de ecuaciones lineales.	2 respuestas correctas	220
Interpretar gráficamente un sistema de ecuaciones lineales.	2 respuestas correctas	222 y 223
Resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones lineales.	2 respuestas correctas	226 a 228
Analizar algebraicamente la existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.	1 respuestas correctas	232 y 233
Plantear y resolver problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales.	2 respuestas correctas	236 y 237

Recapitulemos

En grupos de 4 personas, respondan y discutan las siguientes preguntas.

- ¿Cuáles son los conceptos fundamentales de esta sección?
- ¿Qué utilidad tiene lo que has aprendido?
- ¿En qué ámbitos se puede aplicar lo aprendido en esta sección?
- ¿Qué contenidos te resultaron más difíciles?
- ¿Qué te resultó más interesante en esta sección?

¿Lograste cumplir los propósitos de esta sección?

Diario mural

El lenguaje MATEMÁTICO

La palabra álgebra proviene del término árabe "al-jabr", que significa "componer". De esta forma se denominaba a los procedimientos para resolver una ecuación, en la que se deben ir componiendo los miembros de ella para mantener la igualdad y finalmente llegar a la solución de ella. No está demás decir que la acepción de "algebrista" como componedor perduró algunos siglos en la lengua española, y durante algún tiempo incluso se llamó algebrista al médico que reubicaba y componía los huesos. Su uso en este sentido aparece en el capítulo XV de la segunda parte de Don Quijote de la Mancha, mencionando. *"En esto fueron razonando los dos, hasta que llegaron a un pueblo donde fue ventura hallar un* ***algebrista****, con quien se curó el Sansón desgraciado"*

Si ya fue un gran avance para la humanidad comenzar a utilizar símbolos que representaran cantidades, otro aun mayor fue utilizar símbolos que representaran cualquier cantidad (variables). Incluso, en sus inicios la matemática se fue desarrollando en forma retórica, es decir, solo con palabras. Lo que hoy designamos como incógnita fue, por mucho tiempo, llamada "cosa", de forma que la resolución de un problema podía ser enunciada como "se suma a la cosa cinco, para obtener tres veces la cosa...".

Poco a poco, los matemáticos fueron abreviando el lenguaje para llegar a términos cortos y precisos que indicaran lo que se deseaba hacer. Esto se conoce como "álgebra sincopada". Sin embargo, en ella aun no había símbolos para variables ni operaciones, lo que solamente llegaría en el siglo XVI.

Como decía Euler, el gran matemático suizo, en ocasiones los símbolos y el lápiz se encargan de pensar por nosotros.

Francisco Vieta es quien propone el uso de letras para las variables, y pronto se comenzarían también a utilizar símbolos para las operaciones y las relaciones. En el siglo XVI, Oughtred eligió una **X** como símbolo para sus multiplicaciones, lo que pronto se popularizó. Sin embargo Leibniz, en 1698, le escribió a Johann Bernoulli: "no me gusta como símbolo para la mutiplicación, pues se confunde demasiado fácilmente con la **x**; ... a menudo relaciono dos cantidades con un punto interpuesto, e indico la multiplicación mediante ZC·LM".

La barra horizontal de las fracciones era usada por Leonardo Fibonacci en el siglo XIII, aunque no se generalizó hasta el siglo XVI. La barra oblicua /, variante de la anterior para escribir en una sola línea, fue introducida por De Morgan en 1845.

El signo para la igualdad es obra de Robert Recorde, que empezó a utilizarlo en 1557. Lo justificó diciendo: "Pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o líneas gemelas de una misma longitud, así: $=\!=\!=\!=$, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales". Posteriormente el uso acortó estas líneas hasta llegar al símbolo que utilizamos hoy.

Pese a ser resistido en sus inicios, el uso de símbolos acabó imponiéndose por su simpleza, y claridad. Hay quienes plantean que el desarrollo de toda ciencia pasa, invariablemente, por un adecuado lenguaje para desarrollarla. Como decía Euler, el gran matemático suizo, en ocasiones los símbolos y el lápiz se encargan de pensar por nosotros.

Actividades complementarias

1. ¿En qué otra disciplina el empleo de símbolos es imprescindible para su desarrollo. Menciona algún ejemplo.
2. En su novela 1984, George Orwell plantea que, mediante el uso de la neolengua (un idioma simplificado hasta lo más básico) se podía reducir la capacidad de las personas de pensar, es decir, si no existen las palabras adecuadas, hay pensamientos que no pueden desarrollarse. ¿Estás de acuerdo con esta idea? Discute con tus compañeros.

Álgebra

El álgebra es una rama de la matemática orientada tanto a la resolución de ecuaciones, como al estudio de las estructuras independientemente de sus realizaciones concretas.

EL ÁLGEBRA COMO LENGUAJE DE LAS MATEMÁTICAS
El álgebra se ocupa de la matemáticas desde un punto de vista abstracto y genérico. Para ello utiliza símbolos en vez de números específicos y formula reglas para determinar cómo usar dichos símbolos.

PARA QUÉ SIRVE EL ÁLGEBRA
Muchas ramas de la ciencia utilizan el lenguaje algebraico: desde la física o la ingeniería hasta el procesamiento de imágenes o la sociología.

El álgebra tiene además muchas aplicaciones en la vida cotidiana.

Ej: aplicando una ecuación que representa una parábola puede calcularse dónde caerá un proyectil.

LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es un encadenamiento de números y letras unidos por operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación.

EXPONENTE
Número situado en el ángulo superior derecho de una variable o de una cantidad dada.

TÉRMINO
Es la expresión algebraica en la que no aparecen cantidades separadas por signos + ó −.

$$2a^2 + 3b - 4$$

COEFICIENTE
Es el número situado a la izquierda de una variable. Para expresar el producto no se utiliza ningún signo.

VARIABLE
Cantidad desconocida que se indica mediante letras.

TÉRMINO CONSTANTE
Son los que no contienen letras.

GRADO DE UN TÉRMINO
Es la suma de los exponentes de sus letras. Ej: el segundo término es de primer grado porque

$3b^1 = 1$

LAS ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que es cierta para algún valor de las letras. Éstas se denominan incógnitas y puede haber una o varias.

Ej: $y = 2x2 - x + 1$
incógnitas

TIPOS DE ECUACIONES

› **DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO**
Viene dado por el término mayor presente en ella.
Ej. $3x - 6 = 9$ ← de primer grado
$x^2 - 6x + 3 = 0$ ← de segundo grado

› **DE TERCER GRADO** El término de mayor grado es 3 o cúbico. Ej: $x^3 + 3x^2 + 10 = 0$

› **RACIONAL** La incógnita aparece en fracciones algebraicas. Ej: $\frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+1} = 3$

› **EXPONENCIAL** Si la incógnita aparece en el exponente. Ej: $a^{3x-3} = s$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA
Al interpretar gráficamente una ecuación de dos incógnitas en un sistema de coordenadas cartesianas x es la abcisa e y es la ordenada.

EVOLUCIÓN DEL ÁLGEBRA

3000 a.C. El álgebra comenzó con los **antiguos egipcios y babilonios**, quienes podían resolver ecuaciones lineales, cuadráticas y ecuaciones indeterminadas con varias incógnitas.

Siglo IX **Al-Jwarizmi** recopiló los conocimientos griegos e indios y escribió un tratado algebraico de cuyo título se deriva la palabra álgebra. **Al-Jwarizmi** enunció y demostró las leyes fundamentales e identidades del álgebra.

Siglo XIII **Leonardo Fibonacci** halló una aproximación cercana a la solución de la ecuación cúbica.

Siglo XVI **Scipione del Ferro, Tartaglia y Gerolamo Cardano**, resolvieron la ecuación cúbica general en función de las constantes que aparecen en la ecuación. **François Viète** introduce la notación algebraica moderna.

Siglo XVIII **Carl Friedrich Gauss** publicó la demostración de que toda ecuación polinómica tiene al menos una raíz en el plano complejo.

Siglo XIX **Abel y Galois** promovieron una serie de conceptos generales muy abstractos, entre los cuales merece el primer lugar el concepto de grupo (teoría de los conjuntos). Es el punto de partida de toda el álgebra moderna.

Siglo XIX **W. R. Hamilton** introdujo los cuaterniones dentro de la aritmética de los números complejos. **George Boole**, pone las bases del álgebra lógica.

Siglo XX Se aplican los sistemas de computación a esta materia. Así se creó el álgebra computacional.

Para sintetizar

Síntesis

Volviendo al inicio…

Los caldeos fueron un pueblo que habitaba hace más de tres mil años en la zona que hoy conocemos como Irak. Aparte de ser la cuna de muchas culturas de medio oriente y de las tres más grandes religiones monoteístas del planeta —Judaísmo, Cristianismo e Islam— ¿, tuvieron un avanzado conocimiento de la astronomía que les permitió predecir la ocurrencia de eclipses.

Vistos desde la Tierra, el Sol y la Luna describen trayectorias a través del cielo, de modo que cada día parecen encontrarse en distintas posiciones. Estas trayectorias se encuentran inclinadas una respecto de la otra, de manera que, para que ocurra un eclipse, es necesario que se encuentren en alguno de los puntos de intersección entre sus trayectorias.

Si el tiempo que tardan estos astros en pasar por dichos puntos fuera el mismo, cada mes tendríamos un eclipse. Pero esto no ocurre, por lo que luego de que ocurra una de estas coincidencias, la próxima ocurrirá luego de un tiempo que corresponde al mínimo común múltiplo entre ellas. A esto se añade el movimiento propio de la Tierra, que agrega un tercer factor a este período.

¿Cómo se llama?

Relaciona los conceptos utilizando un mapa conceptual.

Fracción algebraica
Restricción
Máximo común divisor
Mínimo común múltiplo
Amplificación y simplificación
Multiplicación y división entre fracciones algebraicas
Adición y sustracción entre fracciones algebraicas

Funciones y gráficos
Función raíz cuadrada
Función exponencial
Función logarítmica
Desplazamiento
Reflexión
Parámetros
Dilatación
Contracción

Sistemas de ecuaciones lineales
Representación gráfica
Sistema compatible determinado
Sistema compatible indeterminado
Sistema incompatible
Método de sustitución
Método de igualación
Método de reducción
Pertinencia de las soluciones

Evaluando e innovando

Diseña una evaluación con los contenidos vistos en la unidad e intercámbiala con un compañero. Te sugerimos:

- Un crucigrama o sopa de letras con las palabras o conceptos clave.
- Un juego de mesa con preguntas de contenidos de la unidad.
- Un juego de memoria, que relacione conceptos, fórmulas y definiciones.

¿Cómo se hace?

Completa en tu cuaderno el siguiente cuadro sinóptico.

Contenido	Definición y/o procedimiento	Ejemplo
Fracción algebraica y restricciones		
Mcd y mcm entre expresiones algebraicas		
Operatoria entre expresiones algebraicas		
Ecuaciones fraccionarias		
Análisis gráfico de funciones		
Función raíz cuadrada		
Función exponencial		
Función logarítmica		
Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones		
Sistemas de ecuaciones y gráficos		
Tipos de sistemas de ecuaciones		
Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones		

Los caldeos observaron que cada 18 años y 10 días —aproximadamente— se repite un ciclo de eclipses, lo que se conoce como Ciclo de Saros. Los eclipses no se producen en los mismos lugares del planeta y, en ocasiones, ni siquiera se producen, pero este ciclo establece las fechas en las que pueden producirse.

Asteroides y meteoritos

Teóricamente es posible observar estos objetos y lograr determinar su trayectoria, incluso modelándola por medio de funciones, por lo que podría esperarse que, una vez observado un meteorito y definida su trayectoria.

Sin embargo, estos cuerpos se desplazan en medio de muchos otros que modifican su trayectoria, desplazándola, contrayéndola o dilatándola. Si quisiéramos añadir estos parámetros a las funciones que describen sus trayectorias, el estudio de ellas se haría cada vez más complejo y difícil de analizar —como de hecho ocurre—. A medida que los cuerpos son más pequeños, la masa de otros más grandes les afecta de mayor manera, modificando su trayectoria, por lo que la trayectoria de un meteorito, para ser estudiada, debe ser aislada de otros factores externos.

Síntesis

Reforzar antes de evaluar

Refuerza los contenidos vistos en la unidad, realizando las siguientes actividades.

Fracciones algebraicas

Fracción algebraica

1 **Determina** las restricciones de las siguientes fracciones algebraicas.

a. $\frac{-6}{7-10m}$

b. $\frac{9-x}{4(x-2)}$

c. $\frac{2a+5}{(a-8)(a+3)}$

d. $\frac{5x}{x^2-4}$

2 **Expresa** con una fracción algebraica el costo de un libro si se pagan en total **$\$x^2y$** por comprar **$xy$** libros.

Fracciones algebraicas y fórmulas

3 **Calcula** el valor de $\frac{(x-4)^3}{x-5}$, si $x = 7$.

4 La fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ corresponde a la suma de los primeros n números naturales. ¿Cuánto suman los primeros 10 números naturales?

Refuerza

Mcd y mcm de expresiones algebraicas

5 **Determina** el mcm y el mcd entre las siguientes expresiones.

a. $6x, 9x^2, 12x^3$

b. $4pq, 8pqr, 10pr$

6 Marcelo está enfermo y debe tomar gotas cada **$4a^2b^2$** horas, un comprimido cada **$6a^2bc^2$** horas y un jarabe cada **$8ab^2c$** horas. Si toma a las 12:00 horas los tres remedios, ¿en cuántas horas más volverá a tomar los tres remedios juntos?

Amplificación y simplificación de fracciones algebraicas

7 **Amplifica** las siguientes fracciones algebraicas por la expresión dada.

a. $\frac{3x+2}{x+5}$, por $2x^2$.

b. $\frac{x^2+5xy+y^2}{4x^2-9y^2}$, por xy.

c. $\frac{1}{x^2+10x+25}$, por $x+5$.

8 **Simplifica** cada fracción algebraica hasta obtener una fracción irreductible.

a. $\frac{35a^6b^7c^8}{7a^3c^{10}}$

b. $\frac{5b-10}{5b^2-5}$

c. $\frac{b^2-16}{b^2-2b-8}$

d. $\frac{2x^2+2x}{x^3+2x^2+x}$

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

9 **Calcula** las siguientes multiplicaciones.

a. $\frac{8a^2}{20x} \cdot \frac{5x^2}{16a^3y}$

b. $\frac{x^2-4x+4}{x^2+8x+12} \cdot \frac{x^2+7x+6}{x^2-4}$

10 **Calcula** las siguientes divisiones.

a. $\frac{6a-6b}{3a+3b} : \frac{a-b}{3a^2-3b^2}$

b. $\frac{y^2-y-6}{y^2-25} : \frac{y-3}{y+5}$

11 Claudia compró $\frac{7m+14}{m^2-1}$ metros de género a $\$\frac{m-1}{m+2}$ cada metro. ¿Cuánto pagó en total por la pieza de género?

12 Si se reparten $\frac{x^2+6x+9}{16x^2}$ lápices de colores entre $\frac{4x^2}{x+3}$ alumnos. ¿Cuántos lápices recibe cada niño?

Adición y sustracción de fracciones algebraicas

13 **Calcula** las siguientes operaciones.

a. $\frac{5p}{4m} - \frac{3p}{4m}$

b. $\frac{5x^2-7x+8+7}{6x-2} - \frac{4+x}{6x-2}$

c. $\frac{7x}{x^2-5x} - \frac{6x}{x+5} + \frac{5x}{x^2-25}$

d. $\frac{(x-1)^2}{2(2x+3)} + 5(x+6)$

Resolución de problemas que involucran fracciones algebraicas

14 **Resuelve** las siguientes ecuaciones.

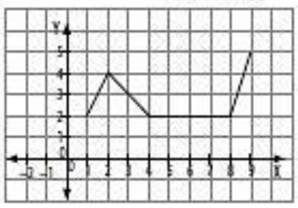
a. $\dfrac{9}{x-5}=\dfrac{8}{x+6}$ **b.** $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

15 El denominador de una fracción excede en 5 al numerador. Si el numerador disminuye en 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es el valor de la fracción?

Función exponencial, logarítmica y raíz

Funciones, tablas y gráficos

16 Considera la función **f(x)**, cuya gráfica es la siguiente:



Construye las gráficas de las siguientes funciones.

a. $f(x) - 2$ **c.** $f(x - 4)$

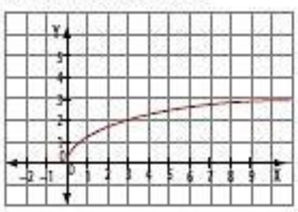
b. $-f(x) + 1$ **d.** $-f(-x) + 1$

Función raíz cuadrada

17 De las siguientes funciones, **determina** los puntos de intersección con los ejes X e Y, dominio y recorrido.

a. $f(x) = \sqrt{x-9} + 4$ **b.** $g(x) = 7 - \sqrt{x+5}$

18 **Construye** la gráfica de las siguientes funciones, a partir de la de $y = \sqrt{x}$.



a. $f(x) = \sqrt{x+3} - 4$ **b.** $g(x) = -\sqrt{x} + 5$

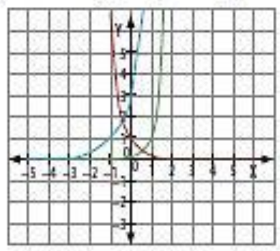
Función exponencial

19 **Construye** la gráfica de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 2^x - 5$ **b.** $g(x) = -3^x + 4$

20 **Identifica** en cada caso a qué curva corresponden las funciones indicadas.

$f(x) = 3^{x+1}$ $g(x) = 0{,}2^x$ $h(x) = 10^{x-1}$

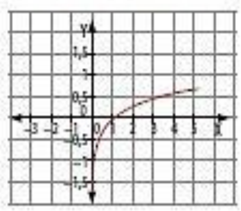


21 Sin graficar, determina el dominio, recorrido e intersecciones con los ejes de las gráficas correspondientes a las siguientes funciones exponenciales.

a. $f(x) = 4^x - 2$ **b.** $g(x) = 0{,}2^x + 5$

Función logarítmica

22 **Construye** la gráfica de las siguientes funciones logarítmicas, a partir de la de $y = \log x$.



a. $f(x) = \log (x - 6)$ **b.** $h(x) = -\log (x - 3) + 2$

23 De las siguientes funciones, **determina** los puntos de intersección con los ejes X e Y, dominio y recorrido.

a. $f(x) = \log x + 6$

b. $g(x) = -\log (x - 7)$

c. $h(x) = \log (x) - 16$

Refuerzo

Reforzar antes de evaluar

Sistemas de ecuaciones

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

24 **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando tablas de valores.

a. $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x - y = 25 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -2x + y = 10 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones lineales y gráficos

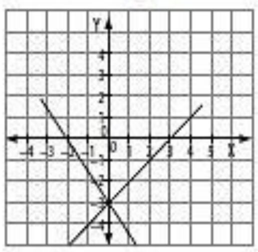
25 **Grafica** los siguientes sistemas de ecuaciones para determinar su solución.

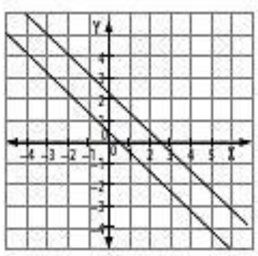
a. $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -3x + 4y = -15 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 7x - 2y = -8 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4} = -1 \\ \dfrac{x-y}{4} = 4 \end{cases}$

26 **Determina** en cada caso el sistema de ecuaciones asociado al gráfico.





Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

27 **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando un método algebraico.

a. $\begin{cases} 3(x - 2y) = -9 \\ 2(x + y) = -6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{5x - 4y}{2} = 0 \\ 10x + 8y = -4 \end{cases}$

28 **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que prefieras para encontrar **x**, **y**, **z** según corresponda.

a. $\begin{cases} ax - 6by = -1 \\ 3ax - by = -2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

Existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones

29 **Analiza** cada sistema y determina si es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

a. $\begin{cases} 7x - 2y = 8 \\ 9x + 6y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 16x - 8y = -2 \\ -8x + 4y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x + 5y = 8 \\ -8x - 10y = -4 \end{cases}$

Resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones

30 Un cuarto de la suma de dos números es 40 y un quinto de su diferencia es 8. ¿Cuál es el número menor?

31 Marcela es un fanática de la tecnología que podría comprar dos celulares y un televisor en \$460 000, o un celular y dos televisores en \$680 000. ¿Cuál es el costo del televisor?

¿Te sientes más preparado para la evaluación de la unidad?

Refuerzo

Profundizar

Ahora que has reforzado los contenidos de la unidad, te sugerimos las siguientes actividades para que puedas profundizar tus conocimientos.

Programación lineal

Lee atentamente el siguiente problema y realiza las actividades.

En una pastelería se elaboran dos tipos de pasteles: A y B. El pastel A necesita $\frac{1}{4}$ kg de crema por cada kg de harina, y al venderlo y produce una ganancia de $ 250. El pastel B necesita $\frac{1}{2}$ kg de crema por cada kg de harina, y con su venta se gana $ 400.

En la pastelería disponen diariamente de 150 kg de harina y 50 kg de crema, aunque por problemas de maquinaria no pueden preparar más de 125 pasteles de cada tipo. ¿Cuántos pasteles de cada tipo se deben vender al día para obtener el máximo de ganancia?

a. Resuelve el problema anterior. Diseña para ello una estrategia y compárala con la de tus compañeros.

b. Investiga en internet sobre "programación lineal", y compara con tu estrategia de resolución. ¿Qué similitudes y qué diferencias observas?

Función inversa

Realiza las siguientes actividades.

1 Analiza los siguientes pares de funciones.

$$f(x) = x + 3 \quad \text{y} \quad g(x) = x - 3$$

$$f(x) = 5^x \quad \text{y} \quad g(x) = \log_5 x$$

¿Qué relación hay entre las funciones, en cada caso? Explica.

2 Grafica en un mismo sistema cartesiano las funciones anteriores. ¿Qué relación puedes observar entre cada par de gráficas?

3 Dos funciones son inversas si en una de ellas, al intercambiar **x** e **y** y despejar **y**, se obtiene la otra.

a. Determina la función inversa de $y = \sqrt{x}$.

b. Conjetura respecto a la forma que tendrá la gráfica de la función obtenida en el punto anterior, su dominio, recorrido e intersecciones con los ejes. Verifica tus conjeturas construyendo la gráfica respectiva.

Profundizo

Evalúo mis aprendizajes

Evaluemos los contenidos vistos en la unidad, realizando las siguientes actividades

Fracciones algebraicas

1 ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente con la fracción algebraica $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$?

A. $\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$

B. $\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

C. $\dfrac{x^2+3x+1}{x-1}$

D. $\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$

E. Ninguna de las anteriores.

2 ¿Para qué valor de **n** se indetermina la expresión $\dfrac{5n-10}{3n-3}$?

A. 3 C. 1 E. -2

B. 2 D. -1

3 ¿Qué expresión se utilizó para amplificar $\dfrac{x+2}{x^2+1}$ y obtener $\dfrac{2x^2+4x}{2x^3+2x}$?

A. 2 C. x^3 E. $2x^3$

B. x^2 D. $2x$

4 ¿Qué fracción resulta al multiplicar la expresión $\dfrac{ax+by}{a+b}$ por $\dfrac{x}{b}$?

A. $\dfrac{ax^2+by}{a+b^2}$ D. $\dfrac{ax^2+by}{ab+b^2}$

B. $\dfrac{ax^2+bxy}{ab+b^2}$ E. $\dfrac{ax^2+bxy}{ab+b}$

C. $\dfrac{ax^2+bxy}{ax+bx}$

5 ¿Qué expresión resulta al simplificar $\dfrac{x^2+9x+18}{x^2-9}$?

A. -2 C. $-x-18$ E. $\dfrac{x+6}{x-3}$

B. $x+18$ D. $\dfrac{x+6}{x+3}$

6 ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente con la fracción algebraica $\dfrac{(a+b)(a^2-b^2)}{a-b}$?

A. $(a+b)^2$ D. $(a+b)(a-b)$

B. $(a-b)^2$ E. $a(a-b)$

C. $a+2ab-b^2$

7 ¿Qué expresión resulta al simplificar $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}:\sqrt[6]{x}}\right)^2$?

A. $\sqrt{x}$ C. $\sqrt{x^6}$ E. $\sqrt[6]{x^5}$

B. $\sqrt{x^3}$ D. $\sqrt[5]{x^6}$

8 ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente con la fracción algebraica $\dfrac{\dfrac{(a+b)^2(a-b)}{a+b}}{a^2-b^2}$?

A. $(a+b)$ D. $(a^2-b^2)^2$

B. $(a-b)$ E. $(a+b)^2(a-b)$

C. $(a+b)^2$

9 ¿Qué expresión dividida por $\dfrac{8}{n}$ resulta $\dfrac{4}{n}$?

A. 2 C. $\dfrac{n^2}{16}$ E. $\dfrac{32}{n^2}$

B. $\dfrac{2}{n^2}$ D. $\dfrac{16}{n^2}$

10 El ancho de un rectángulo es $\dfrac{(2x-y)}{x-y}$ cm y el largo, $\dfrac{(2x+y)}{x+y}$ cm. ¿Cuál es el área del rectángulo?

A. $\dfrac{4x^2-4y^2}{x^2-y^2}\text{cm}^2$

B. $\dfrac{4x^2-y^2}{x^2-y^2}\text{cm}^2$

C. $\dfrac{x^2-y^2}{4x^2-y^2}\text{cm}^2$

D. $\dfrac{x^2-y^2}{4x^2-4y^2}\text{cm}^2$

E. Ninguna de las anteriores.

Evaluación

11 Al lanzar un objeto se puede calcular aproximadamente el tiempo que tarda en caer al piso utilizando fórmula $t=\frac{v-\sqrt{v^2+2gh}}{-g}$, donde g es la aceleración de gravedad que equivale a 9,8 m/s^2. ¿Cuánto tiempo tardaría en caer una piedra que es lanzada con una velocidad (v) de 1,2 m/s desde la azotea de un edificio de 29,4 m de altura (h)?

A. 2 s **C.** 20 s **E.** 2,33 s

B. 3 s **D.** 22,8 s

12 Si 3 hombres hacen un trabajo en **n** días, ¿cuántos días demoran en realizar el mismo trabajo $(3+t)^2$ hombres en las mismas condiciones? Esta pregunta se puede responder si se sabe que:

(1) n = 2 (2) t = 3

A. (1) por sí sola.

B. (2) por sí sola.

C. Juntas (1) y (2).

D. Cada una por sí sola, (1) o (2).

E. Se requiere información adicional.

13 ¿Cuál es el valor de la expresión $\frac{2ab+b}{3b-2ab}$? Esta pregunta se puede responder si se sabe que:

(1) a = 3 (2) b = 5

A. (1) por sí sola.

B. (2) por sí sola.

C. Juntas, (1) y (2).

D. Cada una por sí sola, (1) o (2).

E. Se requiere información adicional.

Función exponencial, logarítmica y raíz

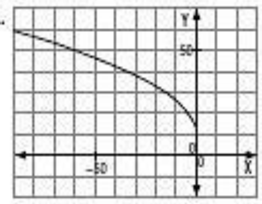
14 Una colonia de microorganismos presente en el ecosistema crece exponencialmente según la fórmula: $P(t)=4\cdot 2^{2t}\cdot 10^3$. Si t representa el tiempo en horas, ¿al cabo de cuántas horas habrá 64 000 microorganismos?

A. 1 **C.** 2 **E.** 8

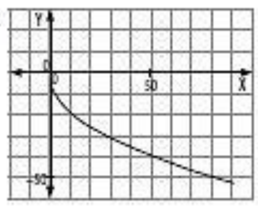
B. 1,5 **D.** 4

15 ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor la función $f(x)=5\sqrt{x}+10$?

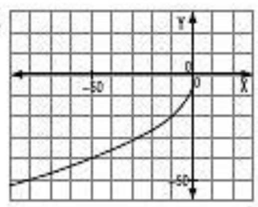
A.



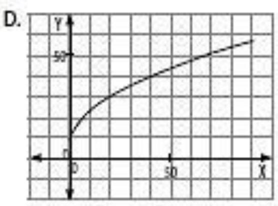
B.



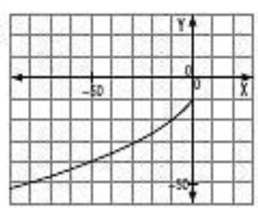
C.



D.



E.



Evaluación

Evalúo mis aprendizajes

Evaluación

16 Con respecto a la función exponencial $f(x) = a^x$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. $f(1) = a$
II. $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
III. $f(x - y) = f(x) - f(y)$

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. I y II
E. I, II y III

17 Si **f** es una función exponencial, ¿cuál(es) de las siguiente(s) afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. $Dom(f) = \mathbb{R}$
II. f es siempre creciente
III. $Rec(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

A. Solo I
B. Solo II
C. I y II
D. I y III
E. I, II y III

18 ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. La función $f(x) = -\sqrt{x-5}$ es decreciente en $\mathbb{R}$
II. El dominio de $h(x) = \sqrt{x^2}$ es el conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
III. La gráfica de $g(x) = \sqrt{x+3} - \frac{1}{2}$ se interseca con el eje **X** en el punto de coordenadas $\left(-\frac{11}{4}, g\left(-\frac{11}{4}\right)\right)$

A. Solo I
B. II y III
C. I y II
D. I y III
E. I, II y III

19 ¿A cuál(es) de las siguientes funciones pertenece el punto $(10, -5)$?

I. $f(x) = \sqrt{2x+5} - 10$
II. $g(x) = 7 - 2\log x$
III. $h(x) = 10^{-x} - 6$

A. Solo I
B. Solo II
C. I y II
D. I y III
E. I, II y III

20 ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdaderas?

I. La función $\mathbf{f(x) = \log_a x}$ es creciente si $\mathbf{a < 0}$.
II. Las gráficas de las funciones de la forma $\mathbf{f(x) = \log_a x}$ se intersecan con el eje X en el punto de coordenadas $\mathbf{(1, 0)}$.
III. Las gráficas de las funciones de la forma $\mathbf{f(x) = a^x}$ son siempre crecientes.

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. I y III
E. I, II y III

21 Se define la función $f(x) = b \cdot a^x$; con $a, b, \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es el valor de $f(5)$? Se puede responder esta pregunta si se sabe que:

(1) El punto $(1, 40)$ pertenece al gráfico de $f(x)$.
(2) $\log a = 2$

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) ó (2).
E. Se requiere información adicional.

Sistema de ecuaciones lineales

22 Las edades de Sebastián y su hermano menor Carlos son x e y respectivamente. Hace 5 años las edades estaban en la razón 2 : 3 y en 5 años más estarán en la razón 4 : 5. ¿Qué sistema de ecuaciones representa la situación descrita?

A. $\begin{vmatrix} 2x + 3y = 0 \\ 5x - 4y = 5 \end{vmatrix}$

B. $\begin{vmatrix} 3x - 2y = 5 \\ 5x - 4y = 5 \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 2x - 3y = -5 \\ 4x - 5y = -5 \end{vmatrix}$

D. $\begin{vmatrix} 2x - 3y = -5 \\ 4x - 5y = 5 \end{vmatrix}$

E. $\begin{vmatrix} 3x - 2y = 5 \\ 5x - 4y = -5 \end{vmatrix}$

23. Rodrigo compra 6 cuadernos y 5 lápices en \$2 270. Si Camila compra 5 cuadernos y 4 lápices a los mismos precios, en \$1 880, ¿cuál es el precio de un cuaderno?

A. \$70 **B.** \$100 **C.** \$320 **D.** \$300 **E.** \$370

24. El doble de la edad de Ángela sobrepasa en 14 años la edad de Juan. Si se sabe que un quinto de la edad de Juan es 13 años menos que la edad de Ángela, ¿cuáles son las edades?

A. Ángela tiene 17 años y Juan, 20.

B. Ángela tiene 22 años y Juan, 20.

C. Juan tiene 20 años y Ángela, 18.

D. Juan tiene 17 años y Ángela, 22.

E. Juan tiene 22 años y Ángela, 17.

25. ¿Cuál(es) de los siguientes sistemas tiene(n) solución?

I. $\begin{array}{r|} \frac{4x}{3}+\frac{y}{6}=2 \\ 4x+\frac{y}{2}=6 \end{array}$

II. $\begin{array}{r|} 6x+6y=20 \\ 2x+2y=5 \end{array}$

III. $\begin{array}{r|} 200x+101y=20 \\ 4x-3y=3 \end{array}$

A. Solo I **B.** Solo III **C.** I y II **D.** I y III **E.** I, II y III

26. ¿Cuál(es) de los siguientes sistemas representa(n) gráficamente dos rectas secantes?

I. $\begin{array}{r|} \frac{4x}{3}+\frac{y}{6}=2 \\ 4x+\frac{y}{2}=6 \end{array}$

II. $\begin{array}{r|} 6x+6y=20 \\ 3x+2y=5 \end{array}$

III. $\begin{array}{r|} 200x+101y=20 \\ 4x-3y=3 \end{array}$

A. Solo I **B.** Solo [illegible] **C.** I y [illegible] **D.** [illegible] y [illegible] **E.** I, II y III

27. Respecto del sistema de ecuaciones $\begin{array}{r|} 4x-y=-3 \\ 8x-2y=-6 \end{array}$, ¿cuál de las siguientes alternativas es FALSA?

A. $y = 0; x = -\frac{3}{4}$ es solución del sistema.

B. La solución corresponde a la intersección de dos rectas distintas.

C. Una de las ecuaciones corresponde a una recta con pendiente positiva.

D. Los puntos (0,3) y (−1,−1) del plano cartesiano son soluciones del sistema.

E. El sistema tiene infinitas soluciones.

28. ¿Cuál es la solución del sistema $\begin{array}{r|} -\frac{x}{9}-\frac{2y}{7}=2 \\ 7x+2y=-2 \end{array}$?

A. $x=\frac{27}{14}; y=-\frac{31}{4}$

B. $x=-\frac{27}{14}; y=-\frac{31}{4}$

C. $x=\frac{14}{27}; y=\frac{31}{4}$

D. $x=\frac{27}{14}; y=\frac{31}{4}$

E. $x=\frac{27}{14}; y=-\frac{4}{31}$

Autoevaluación

Evalúa tu aprendizaje con el solucionario y completa la siguiente tabla. Si no alcanzaste el mínimo sugerido en las actividades propuestas, vuelve a las secciones correspondientes.

Contenido	Mínimo sugerido	Puedes repasar en la...
Fracciones algebraicas.	11 respuestas correctas	Sección 1
Función exponencial, logarítmica y raíz.	6 respuestas correctas	Sección 2
Sistemas de ecuaciones lineales.	5 respuestas correctas	Sección 3

Evaluación