

**Estructuras Aritméticas desarrolladas por alumnos de cuarto año básico
al momento de enfrentarse a la búsqueda de solución a situaciones
problémicas asociadas a la multiplicación**

Seminario para optar al Grado de
Licenciado en Educación y al Título
de Pedagogía Básica Mención
Matemáticas.

Integrantes:
Fuentes Espinoza Margarita de las Mercedes
Gajardo Osses Cinthia Soledad
Silva Ponce Sendy Estefania
Tapia Espinoza Marisol Amalia
Torres Contreras Deborah Ruth

Profesor Guía:
Uribe Rivera Manuel Antonio.

Santiago, Chile
Año 2009

Agradecimientos

La paciencia, la perseverancia, la lucha y el sacrificio son como un árbol de raíz amarga, pero cuando crece y florece aparece el fruto más dulce en recompensa de todas las desesperanzas.

Es por esto que agradecemos a todos aquellos que nos acompañaron en este largo caminar, en primer lugar agradecemos a dios por su dulce compañía y consuelo en los momentos más difíciles.

En segundo lugar agradecemos a nuestras familias, en especial a nuestros padres y madres, quienes de manera incondicional nos apoyaron en la dicha y en desdicha, sin ellos no podríamos haber llegado a obtener nuestra meta más preciada.

Resumen

La presente investigación incorpora como área problemática, el proceso de enseñanza aprendizaje de la multiplicación en estudiantes de Cuarto Año Básico. Específicamente, explora las distintas estrategias resolutivas utilizadas por los estudiantes al momento de enfrentarse a problemas de carácter multiplicativo, identificando las principales dificultades presentes en dicho proceso.

Para aproximarnos a los procesos operatorios aplicados según las estructuras aritméticas utilizadas por los estudiantes que se enfrentan a las situaciones problemas, se realizaron grabaciones del Pensamiento en Voz Alta de 61 estudiantes, cada uno de ellos resolvió 8 problemas multiplicativos. Para el análisis de los datos obtenidos se utilizó el Software de análisis cualitativo Atlas.ti que permitió identificar y categorizar las distintas estructuras aritméticas presentes en el discurso de los estudiantes. Luego, a través de Redes Sistémicas, se agruparon para cada situación problema, las rutas o vías lógicas utilizadas por los estudiantes.

Las conclusiones obtenidas del análisis de los datos, nos permiten afirmar que *“los estudiantes al momento de enfrentarse a situaciones problema asociadas a la multiplicación, utilizan más de una estructura aritmética para obtener una solución, lo que no sesga o delimita la resolución de situaciones problema a una sola operatoria, sino que involucra diversas estructuras aritméticas.”*

• Agradecimientos.....	2
• Resumen.....	3
• Índice.....	4
• Introducción.....	6
• Capítulo I: Planteamiento del problema.....	8
1.- Planteamiento del problema.....	9
1.1.- Antecedentes generales del problema.....	9
1.2.- Justificación e importancia	12
1.3.- Preguntas de investigación.....	14
1.3.1.- Definición del problema.....	14
1.4.- Limitaciones.....	15
2.- Supuestos.....	16
3.- Objetivos de la Investigación.....	16
3.1 Objetivo general.....	16
3.2 Objetivos específicos.....	16
• Capítulo II: Marco Teórico.....	17
4.- Marco teórico.....	18
4.1.- Resolución de problemas en el Currículo Nacional.....	18
4.2.- Qué es resolver problemas.....	21
4.3.- Tipos de problemas.....	23
4.4.- La enseñanza de la Resolución de Problemas.....	23
4.5.- Resolución de Problemas Matemáticos.....	27
4.6.- Teoría de los Campos Conceptuales.....	29
4.7.- Enseñanza Aprendizaje de la Multiplicación.....	34
4.8.- Resolución de problemas desde la perspectiva de la multiplicación.....	38
• Capítulo III: Marco Metodológico.....	44
5.- Marco Metodológico.....	45
5.1 Muestra.....	45
5.1.1 Criterios para la selección de la muestra.....	46
5.2.- Fundamentación de la metodología.....	46
5.3.- Técnicas e instrumento de recolección de datos	48
5.3.1.- Pensamiento en voz alta.....	48
5.3.2 Redes sistémicas	51
5.3.3 Atlas.ti	52
5.4.- Pasos diseño metodológico.....	53
5.5.- Validez y confiabilidad.....	57
5.6.- Modelo de instrumento empleado.....	58
6.- Recogida de información.....	62

• Capítulo IV:	64
7.- Análisis de datos.....	65
7.1 Análisis de los resultados obtenidos.....	70
8.- Conclusiones.....	104
9.- Sugerencias y/o recomendaciones.....	104
10.-Bibliografía.....	110
11.- Anexos (Recolección y análisis de datos - Técnica Atlas.ti).....	116

Introducción

Existen innumerables investigaciones acerca de la resolución de problemas, y de las estrategias que deben seguir los estudiantes para la búsqueda de una o varias soluciones.

En el área de las matemáticas actualmente existe un cambio en la visión frente a la resolución de problemas, si recordamos según lo expuesto por Garret (1988) y García (2003) desde el punto de vista de las ciencias sociales, un problema es aquello que genera un conflicto en el sujeto, lo que permite observar a lo largo de la historia que no todo es un problema para todas las personas, puesto que lo que es un problema para uno, para otros puede no serlo. A partir de los campos conceptuales según Vergnaud (1991) se establece un cambio conceptual, aunque los campos conceptuales no son específicos del área de las matemáticas, si proponen un cambio conceptual progresivo de las estructuras aritméticas. Por lo cual, existe un cambio en el foco conceptual, puesto que según lo mencionado anteriormente por Vergnaud (1991) sobre la resolución de problemas en la actualidad tiene un nuevo sentido, ahora no nos referiremos a los problemas como tal, sino a situaciones problemas, entendiendo estas últimas como aquellas situaciones que pueden o no generar un conflicto para la búsqueda de una solución. A su vez, estableciendo que en matemáticas las situaciones y los problemas solo tienen una respuesta lógica, pero para obtener dicha respuesta el sujeto puede usar variados métodos resolutorios, lo que implica que para una resolver una situación multiplicativa, el sujeto puede seleccionar su plan de acción utilizando las estructuras aritméticas, o las sub divisiones de esta como: las estructuras aditivas o las multiplicativas y las acciones que cada una permite o no realizar. Sin embargo, a pesar de lo establecido anteriormente, este estudio se focalizará en la búsqueda de solución a situaciones multiplicativas.

En este estudio se presentan en primer lugar, los antecedentes generales y el problema de investigación.

El segundo lugar, específicamente en el capítulo I se presenta el sustento teórico con el que se fundamenta la investigación y establece según las referencias teóricas el cambio conceptual presente entre la resolución de problemas y las situaciones problémicas en el área de educación matemática.

El tercer lugar, Capítulo II se establecen los aspectos y los parámetros metodológicos con los cuales se rige la presente investigación.

Finalmente el capítulo III da cuenta de los resultados y del análisis de datos, se establecen las conclusiones y se plantean diversas sugerencias didácticas para trabajar la temática establecida.

Capítulo I:
Planteamiento del problema.

1. Planteamiento del problema.

La educación matemática en la actualidad presenta transformaciones conceptuales centradas en la enseñanza. En Chile actualmente, los docentes se refirieren a la resolución de problemas como un eje transversal de la enseñanza como lo indica la matriz curricular básica, pero no lo llevan a cabo como tal.

Con el propósito de delimitar este estudio debemos establecer dos conceptos primordiales: el primero la resolución de problemas que a partir de los campos conceptuales, es modificado por su funcionalidad y significado, por lo cual nos referiremos a “situaciones problémicas” y en segundo término a “estructuras aritméticas”.

La búsqueda de soluciones a situaciones problémicas deben ser presentadas a los alumnos en la globalidad y transversalidad de los saberes y contenidos a lo largo de toda la enseñanza. En esta ocasión la asociación existente entre situaciones problémicas y multiplicación, sin olvidar que la multiplicación cumple una función mas allá de la operacionalidad, sino que forma parte de las estructuras aritméticas básicas que los alumnos deben traer consigo.

En variadas ocasiones el problema surge desde la formación del concepto, por ejemplo, si el alumno no adquiere el concepto de cantidad tendrá mayor dificultad al momento de enfrentarse a operatorias o ejercicios con mayor complejidad a partir de la adición. Esto significa que en la educación matemática todos los saberes y contenidos deben ir interconectados y en progresión según grados de dificultad, lo que no implica trabajar los contenidos de manera independiente, sino como un todo en función de la construcción del conocimiento por parte del alumno. A continuación se presentaran los antecedentes teóricos para la realización del estudio.

1.1- Antecedentes generales del problema.

El sistema educacional de Chile se fundamenta en el principio de autonomía curricular que se orienta en pro de un mejoramiento de la calidad de la enseñanza y de los procedimientos de elaboración de los planes de estudio, para generar una homogenización en los contenidos que se imparten a lo largo de todo Chile y de todos los niveles de enseñanza. Es por esto que a partir del Currículum centramos la investigación en el subsector de Educación Matemáticas, estableciendo la adquisición integral del

conocimiento y comprensión de esta área para la vida cotidiana. En el Marco Curricular de la Enseñanza de las matemáticas en NB2, cuarto año básico, se plantean los objetivos y contenidos agrupados en función de cuatro ejes temáticos: Números, Operaciones Aritméticas, Formas y Espacio, y Resolución de Problemas. En este estudio nos centramos en el eje de resolución de problemas como un instrumento y una herramienta fundamental para la enseñanza de la multiplicación. En el eje de resolución de problemas se consideran dos aspectos centrales, el primero de ellos hace hincapié en el desarrollo de habilidades para resolver problemas y el segundo se refiere a la resolución de diferentes tipos de problemas en cada contenido de los ejes temáticos antes mencionados. Además, la resolución de problemas asociada a situaciones y contextos comunes para los alumnos les permite no solo la exploración y la búsqueda de caminos y soluciones, sino que a su vez les permite el desarrollo de la metacognición para el desarrollo y reconocimiento de propias experiencias individuales.

Actualmente la resolución de problemas o situaciones problemáticas son concebidas no sólo como un eje transversal de la educación, sino que es considerada como una herramienta fundamental que traspasa los contenidos, los saberes y las experiencias a lo largo de toda la vida de cada ser humano.

Desde este punto de vista, la resolución de problemas utilizada como una herramienta transversal para la adquisición de saberes, conocimientos y experiencias, se hace necesario delimitar la investigación en la relación que existe entre el alumno o aprendiz y la búsqueda de solución de situaciones problemáticas asociadas a un concepto aritmético, en este caso la multiplicación, entendiendo la multiplicación como concepto base para adquirir nuevos conocimientos en niveles superiores como el álgebra, las potencias, la factorización prima, etc.

El aprendizaje y resolución de problemas de situaciones multiplicativas son temas centrales abordados en variadas investigaciones utilizando como eje central la dificultad del aprendizaje de los alumnos en diferentes niveles de su educación. Los planes y programas de estudio del subsector de educación matemática y los contenidos mínimos obligatorios refieren la enseñanza aprendizaje de la multiplicación a una asociación de situaciones correspondientes a una adición iterada, un arreglo bidimensional (elementos ordenados en filas y columnas), una relación de proporcionalidad (correspondencia uno a varios).

Por lo expuesto anteriormente, la importancia de la enseñanza aprendizaje de la multiplicación debe ser asociada a situaciones problemáticas para la interiorización del

concepto. Para ello Vergnaud (1983), propone los problemas multiplicativos como un conjunto de situaciones para cuyo tratamiento es necesario utilizar conceptos, procedimientos y representaciones de diferente tipo estrechamente interconectados para la facilitación de un aprendizaje significativo; aclarando según los campos conceptuales establecidos por Vergnaud (1983), que cada situación matemática corresponde a una estructura aritmética, entendiendo a esta última desde la base de la subdivisión existente entre las estructuras aditivas y estructuras multiplicativas. Por otro lado, Gómez (1991), afirma que la enseñanza de la multiplicación se presenta a problemas asociados a la multiplicación y los denomina problema de razón, problemas de combinación y problemas de área para la facilitación y adquisición del concepto de producto.

Con lo descrito anteriormente, la problemática se realiza en la práctica de determinados procedimientos o algoritmos lo que provocan una automatización de procedimientos de cálculo de las operaciones matemáticas aritméticas. En cambio, el problema necesita desarrollar la habilidad para enfrentar nuevas situaciones, en donde el sujeto debe diseñar el camino y los procesos pertinentes para su resolución.

Para dar respuesta a lo señalado, Defior (2000), plantea que para trabajar comprensivamente la operación de la multiplicación, con los estudiantes, estos deben haber “(...) consolidado el concepto de adición, ya que usualmente la multiplicación se presenta en situaciones que representan una adición iterada”. Así como a la vez asevera que los alumnos deben manejar la habilidad de contar en intervalos para lograr con mayor efectividad la adquisición del concepto de producto al repartir un número de veces determinado de una cantidad determinada. A si mismo, enfatiza la relación inversa que existe entre la multiplicación y la división, lo cual implica una reorganización del concepto multiplicativo, además asume que esta relación permite “(...) comprender las diferentes conexiones entre conceptos aritméticos, de forma flexible y en coherencia con los problemas matemáticos que se apliquen”, al igual que Vergnaud (1988), en los campos conceptuales dentro de las estructuras multiplicativas establece esta estrecha conexión entre operatorias inversas como lo son en este caso la división y la multiplicación.

La resolución de problemas asociada a la multiplicación es una de las actividades más complejas para el ser humano, pues pone en juego las habilidades tanto cognitivas como de creación, producto de la carencia de procedimientos pre aprendidos por el sujeto, en donde la articulación entre la comprensión del problema y la puesta en marcha de un procedimiento resolutorio o dicho de otro modo, de un plan de acción confabulan en función de la búsqueda de una solución.

La enseñanza de las matemáticas en las aulas comunes de escuelas básicas, se fundamenta en la transmisión de saberes matemáticos en especial los aritméticos, pero dejan de lado la importancia que tiene como fundamento la resolución de situaciones aplicadas a contextos comunes y reconocidos por los estudiantes, sin dejar de lado las habilidades que deben poseer los alumnos para la ejecución de ejercicios para dicha resolución de problemas y generar el aprendizaje. Sin embargo las situaciones problemáticas asociadas a la multiplicación planteadas como tareas matemáticas presentan un mayor grado de dificultad para los alumnos puesto que si no han incorporado el concepto de producto les hace mucho más difícil la tarea de la búsqueda de la solución.

La enseñanza de la multiplicación tradicionalmente según Defior (2000) se introduce como una adición iterada lo que a lo largo de los años no muchos alumnos modifican el conflicto cognoscitivo que esta transformación les ocasiona, impidiendo la adquisición del concepto de producto. Por otra parte, si la introducción a la enseñanza de la multiplicación se realizara no sólo con suma iterada, sino que también como combinación (producto cartesiano) y área, utilizando como herramienta central y transversal la resolución de problemas desde el punto de vista de situaciones problemáticas según este cambio de enfoque presentado en la actualidad en la enseñanza de las matemáticas, facilitaría la adquisición del concepto de producto (multiplicación).

1.2 Justificación e importancia.

La educación matemática debe promover un mayor desarrollo de habilidades, destrezas y actitudes que los alumnos deben poseer al momento de enfrentarse a diversas situaciones de la vida cotidiana, por lo cual se hace indispensable formar a los estudiantes con habilidades y capacidades para enfrentarse como agentes activos e integrales en la sociedad actual, las matemáticas por lo tanto, trascienden mas allá de los contenidos, saberes o algoritmos propiamente tales de la enseñanza, esto no quiere decir que no sean importantes los contenidos o los algoritmos a enseñar, sino que fundamentamos la importancia de estos en función de las habilidades y destrezas que los alumnos deben poseer al finalizar cada nivel de enseñanza. La resolución de problemas por lo tanto es utilizada de manera trasversal a lo largo de toda la educación para generar en los alumnos las capacidades para enfrentarse con las competencias necesarias a las situaciones conflictivas y las que no lo son a lo largo de la vida. Es por esto la importancia de entregar una educación de calidad y significativa para los estudiantes.

Por otro lado, los bajos resultados que se han obtenido en la prueba SIMCE han demostrado las carencias en el subsector de educación matemática, comparando los establecimientos particulares y municipales en este subsector, la brecha es evidente los escolares de ingresos superiores superan a sus pares de escasos recursos en 80 puntos.

Desde el año 2005 hasta el 2008 los resultados en los establecimientos educacionales municipales no han tenido un incremento significativo del puntaje, puesto que solo han variado un punto del puntaje promedio. Los resultados liberados por esta prueba han demostrado que el 59% de los alumnos que rinden esta prueba se encuentran en un nivel intermedio y avanzado, y el 41% restante está en un nivel inicial. Lo que indica que existe una brecha significativa entre estos estudiantes. Es por esto el interés de investigar uno de los posibles factores que podría incidir en los bajos resultados de esta evaluación SIMCE en el subsector de educación matemática en dependencias municipales.

Esta investigación nace de la inquietud existente frente a la adquisición del concepto de producto (multiplicación) con el fin de plantear diversas rutas o vías utilizadas por los alumnos para la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas asociadas al concepto multiplicativo, desde la base de las estructuras aritméticas planteadas por Vergnaud (1988), en donde interactúan tanto las estructuras aditivas en conjunto con las acciones que pueden implicar como contar, seriar, juntar, etc, como la utilización de estructuras multiplicativas en donde existen al igual que en las situaciones aditivas acciones asociadas, tanto a la multiplicación como a la división, tales como: arreglos bidimensionales, reparto, agrupamiento o variación proporcional, combinación, etc.

En cuarto año básico los alumnos se encuentran en una etapa de transición y de término del proceso educativo del primer ciclo básico, por lo cual, los estudiantes deben manejar en mayor profundidad los conceptos y contenidos aritméticos para poder ingresar a segundo ciclo básico con los contenidos mínimos de egreso.

Por lo tanto, a través de esta investigación se pretende conocer e identificar las rutas o vías lógicas utilizadas por los alumnos de cuarto año básico al momento de enfrentarse a situaciones problemas asociadas a la multiplicación y observar la incidencia de las estructuras aritméticas adquiridas por los alumnos para la búsqueda de la solución.

1.3 Preguntas de Investigación.

Dentro del contexto de la resolución de situaciones problemáticas asociadas al área de la multiplicación presente en los alumnos de 4° año básico, es que surgen las siguientes preguntas de investigación.

Los alumnos de cuarto año básico:

- a) ¿utilizan diversas estructuras aritméticas para la resolución de situaciones problemáticas asociadas a la multiplicación?

- b) ¿Cuáles con las dificultades que se pueden presentar al momento de enfrentarse a situaciones problemáticas asociadas a la multiplicación?

- c) ¿Cómo influye la enseñanza aprendizaje de los educandos en la situaciones problemáticas asociadas a la multiplicación?

1.3 Definición del problema.

Dentro del contexto de la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas asociadas al área de la multiplicación, los alumnos de 4° año básico que corresponden al último nivel del primer ciclo de enseñanza:

“¿Qué estrategias utilizan los estudiantes Chilenos de Cuarto Año de Enseñanza Básica de colegios municipalizados, al momento de enfrentarse a situaciones problemáticas asociadas a la multiplicación?, ¿qué estructuras aritméticas son utilizadas?, ¿cuáles son las principales dificultades que estos presentan?”.

Superando la etapa inicial de iteración, comprendiendo progresivamente el algoritmo multiplicativo desde la forma abstracta y efectiva, logrando por medio del aprendizaje, consolidar el concepto multiplicativo para lograr facilitar la comprensión en niveles superiores de constructos matemáticos más complejos, como el álgebra.

1.4 Limitaciones.

Durante el transcurso de la investigación se presentaron algunas limitaciones teóricas, metodológicas y prácticas que generaron obstáculos para la realización de este estudio, algunas de estas son:

- El tiempo otorgado para la realización de la investigación es muy breve, en un semestre no es posible trabajar de manera más extensa este estudio, lo que genero limitaciones metodológicas, por el límite de tiempo para la entrega.
- Durante la recopilación bibliográfica se genero gran conflicto, porque la biblioteca de la universidad Católica Silva Henríquez, no cuenta con material suficiente, ni mucho menos actualizado, acerca del tema en estudio lo que dificulto aun más la búsqueda de la información teniendo que recurrir a otros medios para obtener la bibliografía adecuada.
- Durante la aplicación del instrumento de investigación, los docentes de dependencias municipales estuvieron en paro por la deuda histórica lo que genero conflicto en las fechas pactadas en las escuelas para la aplicación del instrumento.
- La muestra seleccionada al ser poco extensiva por el tipo de investigación a realizar, específicamente solo diez alumnos por curso, cuando uno de los estudiantes no se presentaba el día de la aplicación del instrumento genero modificaciones de los alumnos seleccionados.
- Las limitaciones de una investigación de tipo cualitativa en base a un estudio de casos por medio del pensamiento en voz alta, muchas veces se dificulto la extracción de información por parte de los estudiantes, porque los investigadores no podían intervenir en las respuestas de los alumnos, por lo cual solo podían limitarse a la información entregada por los sujetos en base a preguntas neutras realizadas.
- Producto de los paros de los docentes de dependencias municipales, la fecha de la realización de la prueba SIMCE fue modificada por el Ministerio de Educación, lo que provoco en las escuelas un rechazo a la aplicación del instrumento por considerar que los estudiantes podrían estresarse aun mas con dicha aplicación, afectando a los resultados a obtener en el SIMCE de la escuela propiamente tal.

2. Supuestos.

- Los alumnos de cuarto año básico al momento de enfrentarse a situaciones problemas asociadas a la multiplicación lo desarrollan con suma iterada.
- Los alumnos de cuarto año básico no comprenden el concepto multiplicativo porque se encuentran aun en la etapa transitoria de la suma iterada a la multiplicación propiamente tal.
- Los alumnos de cuarto año básico tienen dificultades en las estructuras multiplicativas puesto que solo se le entregan las competencias en cuanto a suma iterada, tablas de multiplicar memorísticas, y el algoritmo propiamente tal, dejando de lado las situaciones multiplicativas como el área, producto cartesiano y combinación.

3 Objetivos de la Investigación.

3.1 Objetivo General.

Identificar, caracterizar y analizar las principales Estructuras aritméticas, asociadas al concepto de la multiplicación, que presentan alumnos de Cuarto Año de Enseñanza Básico, al momento de enfrentarse a situaciones problemáticas asociadas a la multiplicación.

3.2 Objetivos Específicos.

- Identificar, categorizar y analizar las principales estructuras aritméticas y acciones desarrolladas por los alumnos de cuarto año de enseñanza básica, durante el desarrollo de la búsqueda de soluciones a situaciones asociadas a la multiplicación.
- Identificar y analizar las dificultades aritméticas presentes por los estudiantes de 4° Año de Enseñanza Básico, durante el desarrollo de problemas asociadas a la multiplicación.
- Inferir posibles dificultades presentes en el proceso de enseñanza de la multiplicación a partir del análisis de los aprendizajes observados en los estudiantes.

Capítulo II
Marco Teórico

4. Marco Teórico

A continuación se intentará dar cuenta de los núcleos curriculares de la enseñanza de las matemáticas establecidas para la realización de este estudio.

4.1 Resolución de Problemas en el Currículo nacional.

El Currículo vigente en Chile presenta en los planes y programas de educación en cuarto año básico, cuatro ejes centrales de aprendizaje; los cuales se mencionan a continuación:

- Números
- Operaciones aritméticas
- Formas y espacio
- Resolución de problemas

En este último eje, de resolución de problemas, es donde enfatizamos nuestro trabajo de investigación.

Según los Planes y Programas para 1° y 2° y para 3° y 4° básico (2002), el eje de resolución de problemas *“atraviesa los otros ejes ya descritos, se ponen a prueba los conocimientos adquiridos y se enfatiza en el desarrollo de la habilidad para resolver problemas”*. Por lo tanto el cuarto eje posee un carácter de transversalidad en relación a los tres primeros ejes ya mencionados. Y por ende se ponen a prueba los conocimientos que han adquirido los alumnos y se acentúa la habilidad y el desarrollo de esta en la resolución de problemas.

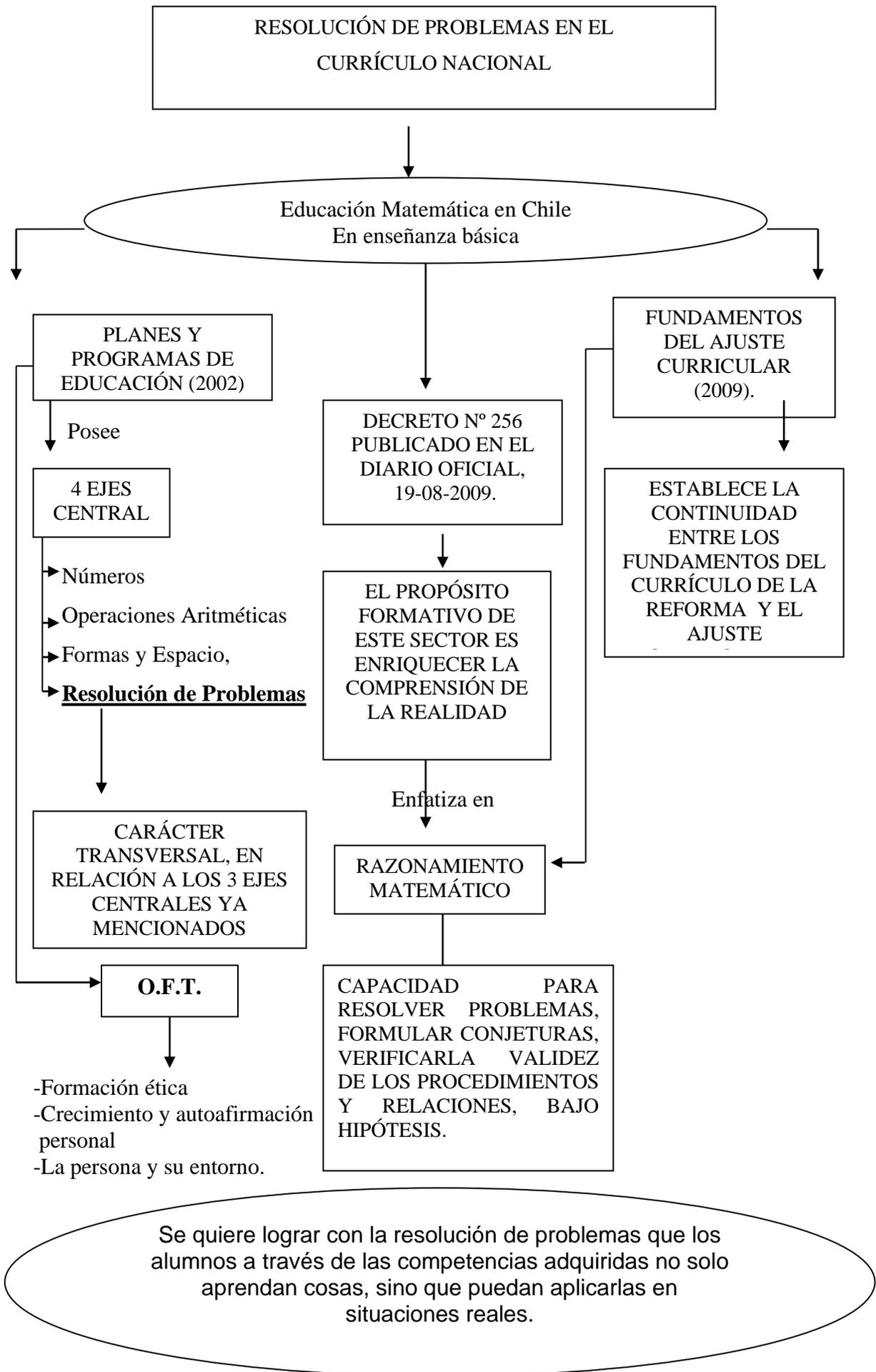
La educación matemática ofrece un conjunto amplio de procedimientos que permite establecer relaciones entre diversos aspectos de nuestra realidad. Según la Propuesta del Ajuste Curricular (Mayo 2009), *“El propósito formativo de este sector es enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes.”* Por esta razón la educación matemática es muy importante para nuestros alumnos, ya que contribuye a que ellos sean capaces de analizar, confrontar y contribuir con estrategias personales para lograr la resolución de un problema expuesto. A través del desarrollo de resolución de problemas los estudiantes podrán analizar situaciones concretas.

Según los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica (2002) el resolver problemas *“exige enfrentar a alumnos y alumnas a múltiples y variadas situaciones...”* Tales como la exploración de alternativas y la perseverancia en la búsqueda de caminos y soluciones.

En los Fundamentos del Ajuste Curricular (2009). *“Se establece la continuidad entre los fundamentos del currículo de la reforma en materia de concepciones acerca de conocimiento matemático, aprendizaje de la matemática y de los aportes de esta a la formación humana.”* Con esto se entiende que los fundamentos enfatizan la incorporación de tendencias actuales de la educación matemática. Posee una amplia visión de la concepción de la resolución de problemas, ya que aquí se considera que está pertenece a un concepto mayor que es el razonamiento matemático, siendo esta la capacidad para resolver problemas, formular conjeturas, verificar la validez de los procedimientos y relaciones, bajo hipótesis.

Según la Propuesta del Ajuste Curricular (Mayo 2009) *“La formación matemática debe enfatizar el desarrollo del pensamiento creativo y crítico para la formulación de conjeturas, exploración de caminos alternativos de solución y discusión de la validez de las conclusiones”*. Por lo cual, el currículo intenta, definir objetivos y proponer nuevos contenidos dirigidos a desarrollar las bases del razonamiento matemático, en función de la resolución de situaciones problemáticas, promoviendo el desarrollo de habilidades tales como: *“la búsqueda y comparación de caminos de solución, análisis de datos y de las soluciones, anticipación y estimación de resultados, sistematización del ensayo y error (...)”*.

Esquema 1



4.2 ¿Qué es resolver problemas?

Para lograr comprender lo abordado anteriormente por el eje de resolución de problemas, debemos establecer las concepciones teóricas establecidas desde la definición conceptual propiamente tal del problema.

Resolver problemas o *“enfrentarse a problemas”* para Garret (1988), toma mayor énfasis en obtener una solución y estas últimas no siempre son posibles; en cambio para García, J. (2003), el proceso de resolver problemas puede ser explicado desde tres puntos de vista: Según el objetivo que se le asigne a la resolución de problemas, según los procesos cognitivos involucrados o según las particularidades mismas del proceso de resolución de problemas.

García, J (2003), plantea que el objetivo de la resolución de problemas es realizar la actividad para pensar, en donde los sujetos *“necesitan practicar para volverse pensadores efectivos”* Pestel (1988). Además, desde el punto de vista de los procesos cognitivos, asevera que los procesos de conducta y pensamiento dirigidos hacia el desarrollo de tareas intelectuales e individuales del sujeto permite un reconocimiento de la situación problémica hasta encontrar la solución del mismo. Sin embargo, en cuanto a las particularidades del proceso, lo describe como la transformación en donde el individuo procesa la información en el cerebro y lo traduce a habilidades propias de los procesos cognitivos. Por lo cual podemos establecer según lo antes mencionado que la resolución de problemas para García (2003), se define como el rango total de procedimientos y actividades cognitivas que realiza el individuo desde el reconocimiento del problema hasta la solución del mismo.

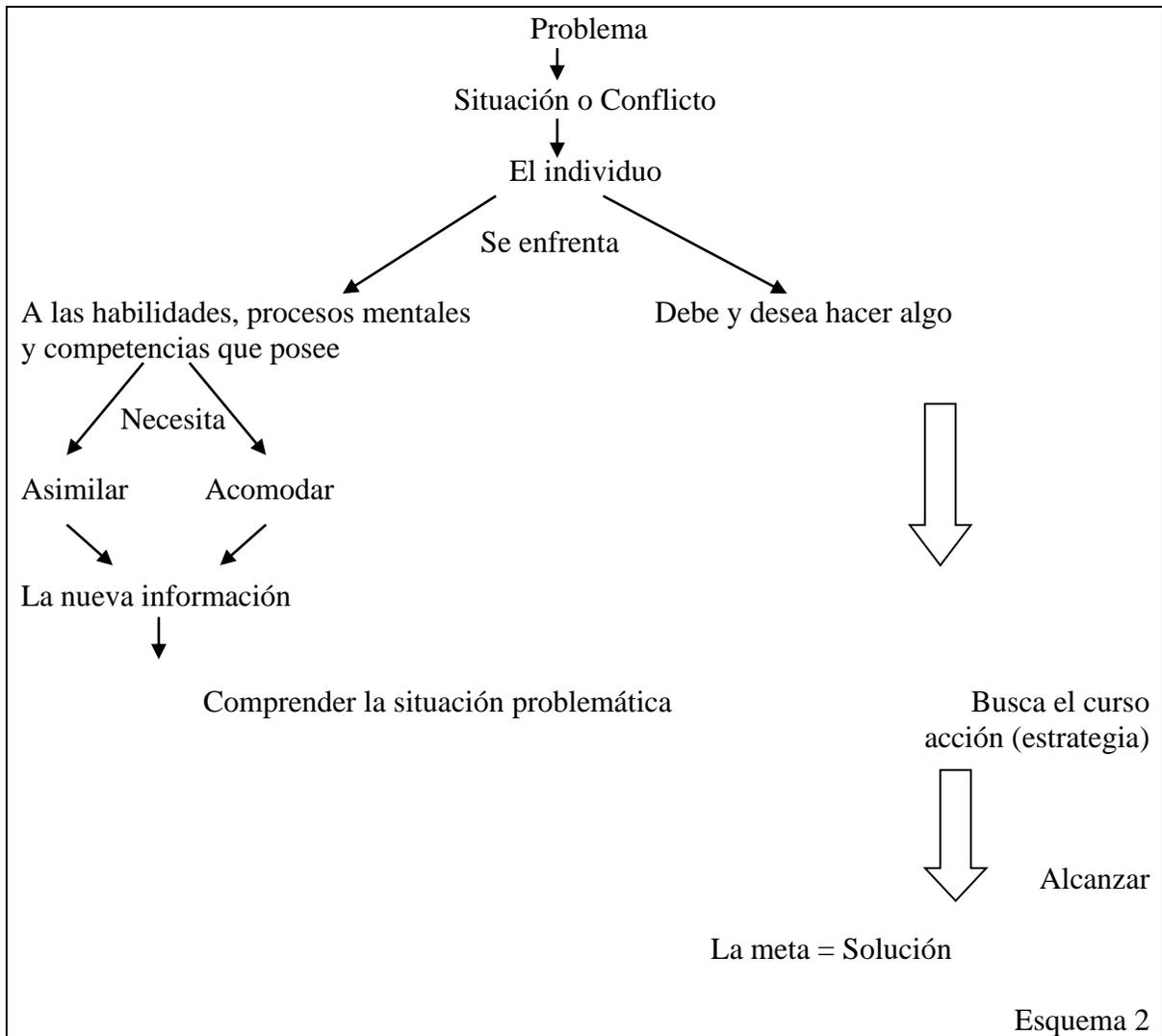
Pómes (1996), antepone a la explicación sobre que es resolver problema la diferencia que existe entre los ejercicios y los problemas propiamente tales, *“Los ejercicios son herramientas a través de las cuales se pretende que los alumnos automaticen un conjunto de rutinas y procedimientos”*, en donde el sujeto debe automatizar y asimilar ciertos algoritmos por medio de la aplicación mecánica de los mismos o por medio de la memorización, algo a lo que se recurre a menudo en la enseñanza tradicional; Para Villarroel (1987), la forma repetitiva y memorística en que se aborda tradicionalmente esta temática en los colegios, no considera las estrategias cognitivas que dominan al proceso, y por lo tanto no beneficia el desarrollo del pensamiento matemático y creativo en los niños.

Además, para continuar con el tema planteado Ortega (1997), plantea que un ejercicio está fuertemente relacionado con un algoritmo, no necesariamente sencillo. Sin embargo, lo describe al problema como una situación matemática o extra-matemática que no tiene una solución inmediata, admite varias vías de aproximación y posiblemente varias

soluciones, puede consumir mucho tiempo y exige esfuerzo mental, imaginación y creatividad.

Es por esto que un buen problema debe considerar características tales como: no debe ser paralizante, no es inmediato, es potencialmente soluble (que tiene solución), generador de conjeturas y preguntas; controlable por parte del alumno, es decir, el individuo puede generar criterios para decidir cuándo está resuelto el problema, debe generar conflicto emocional y contribuye a que el sujeto produzca conocimientos nuevos o reorganice los que ha adquirido.

Esquema 2

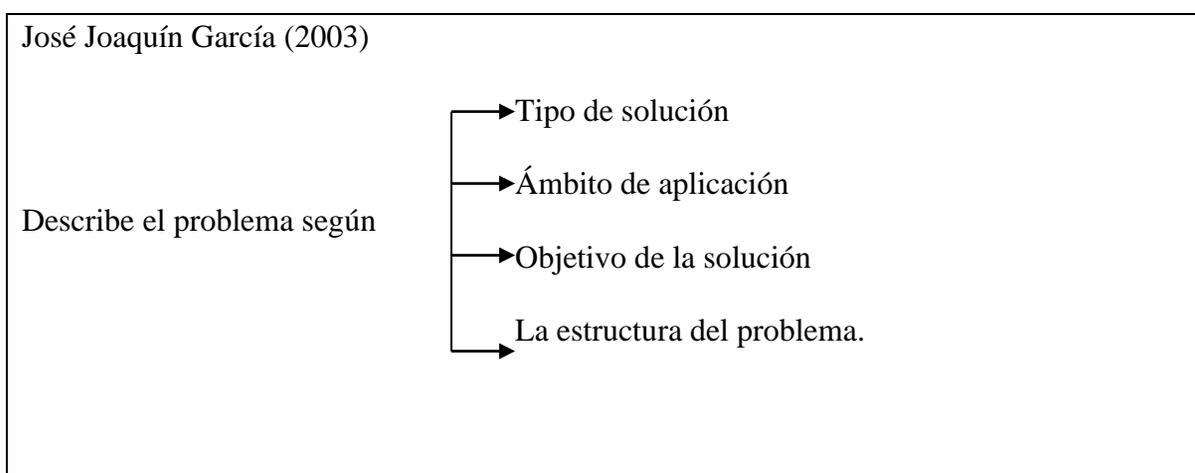


4.3 Tipos de problemas

Una vez aclarada la conceptualización señalada por algunos autores acerca de que es un problema y sobre la resolución de este mismo, debemos presentar los diferentes tipos de problemas que existen.

Para García (2003), los problemas pueden ser clasificados por el tipo de solución que requieren y el ámbito de aplicación, el objetivo para el cual se propone la resolución y la estructura que este posee. (Esquema 3)

Esquema 3



Para Garret (1988), los problemas reales o llamados problemas verdaderos son situaciones enigmáticas que no son resolubles y que solo son comprendidas para aquellos que pueden conocer varias respuestas de las que ninguna es correcta o equivocada en términos absolutos, se busca solo la respuesta más adecuada para dicho problema.

4.4 La enseñanza de la resolución de problemas

Una vez conocidas las especificaciones conceptuales acerca de la resolución de problemas se hace necesario comprender esta, como una de las áreas que mayor dificultad adquiere en la enseñanza de las matemáticas.

Según Mayela (2007), *“los niños y las niñas son capaces de resolver mecánicamente las operaciones fundamentales básicas (suma, resta, multiplicación y división), pero no saben cómo aplicarlas para la solución de un problema, ya que sólo se les ha enseñado a actuar de forma mecánica y repetitiva.”* Por el contrario queremos lograr que los alumnos utilicen las operaciones en conjunto con la resolución de problemas, es decir que sean parte de un medio para resolver una problemática y no de forma mecánica, si no a través de la

utilización de sus competencias, estos puedan encontrar diversas soluciones o caminos para obtener una solución.

Según Kamii (1994), citado por Ruiz (2003), “...*La resolución de problemas debería darse al mismo tiempo que el aprendizaje de las operaciones en vez de después, como aplicaciones de éstas...*”; en tanto, el aprendizaje combinado de las operaciones y resolución de problemas facilitaría la comprensión y asimilación de las operaciones aritméticas.

Polya (1982) menciona que “*el profesor tiene en sus manos la llave del éxito ya que, si es capaz de estimular en los alumnos la curiosidad, podrá despertar en ellos el gusto por el pensamiento independiente; pero, si por el contrario dedica el tiempo a ejercitarles en operaciones de tipo rutinario, matará en ellos el interés...*” se debe introducir a los estudiantes de forma motivadora a la iniciación de la resolución de problemas ya que la rutina los conlleva a la desmotivación y por ende no comprenden conceptos.

Según establecen Ruiz (2003) “*dejar hablar a los niños sobre sus acciones, permite al maestro acceder a su pensamiento*”. De tal modo que los alumnos sean capaces de explicar y justificar el proceso que están siguiendo para comprender la solución de este. Se debe tener claro que no existe una receta exacta para aprender a resolver problemas, pero algunos autores mencionan ciertos pasos que son esenciales al momento de enfrentarnos a una problemática.

Polya (1982), establece que existen cuatro pasos en la resolución de un problema que pretenden favorecer la capacidad reflexiva y creativa del individuo que promueve el desarrollo del pensamiento lógico. Estos son:

- Comprender un problema: Se debe leer con atención el enunciado, identificando los datos conocidos, las incógnitas a resolver; y la relación que existe entre ambos aspectos.
- Diseñar un plan: Una vez comprendida la situación, es el momento en que planificamos las acciones que nos llevarán a nuestra meta, es necesario plantearse los datos que aparecen en el enunciado obtenido y ver para qué sirven, qué puede calcularse a partir de ellos, qué operaciones utilizar y en qué orden se debe proceder.
- Ejecución del plan: es la puesta en práctica de los pasos ya diseñados. Este paso termina con la obtención clara de la respuesta o solución.
- Examinar la solución: Este paso es necesario para realizar una revisión de todo el trabajo que hemos realizado para ver si hay errores o no.

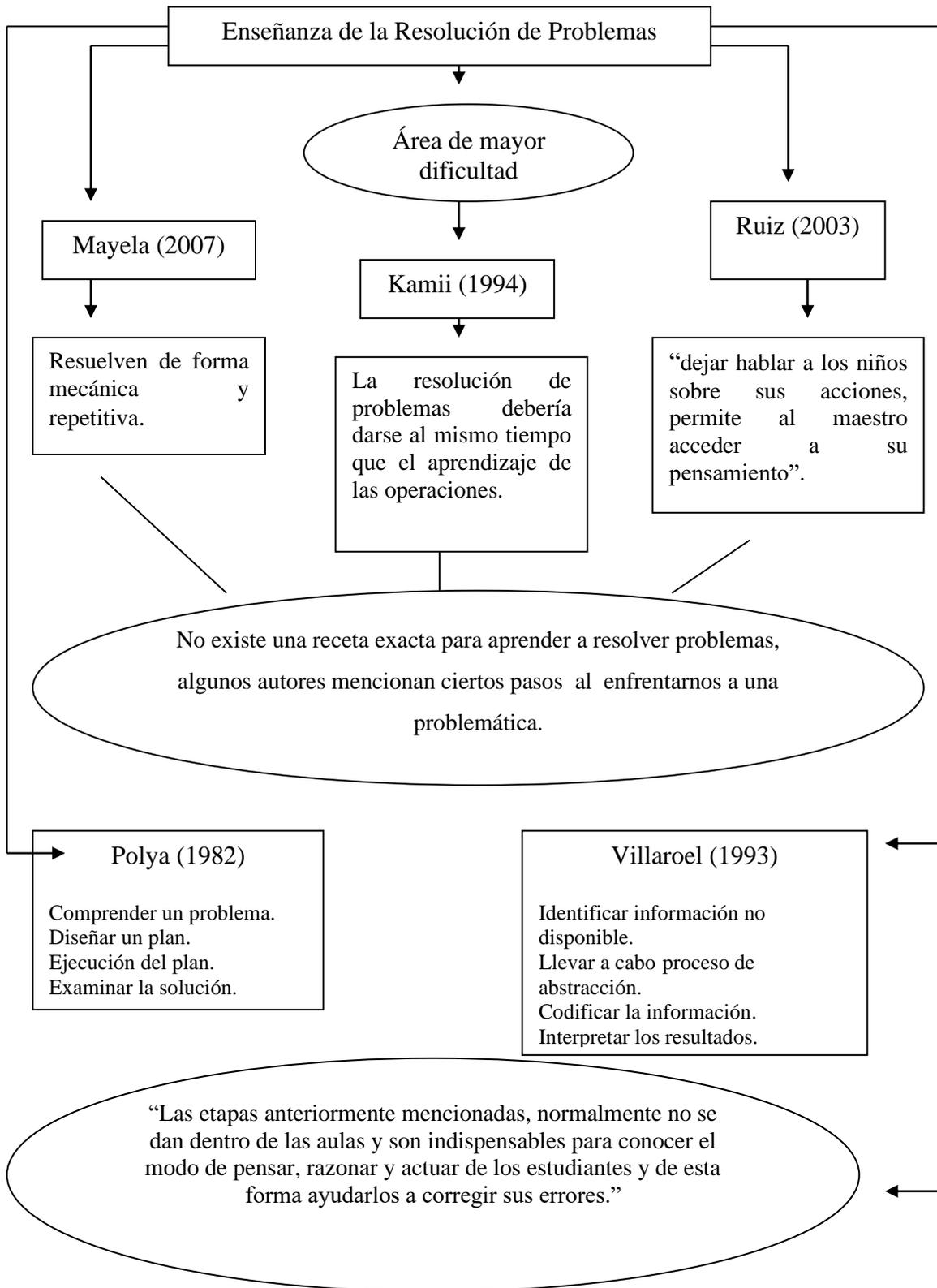
Mayela (2007), nos dice que *“Las etapas anteriormente mencionadas, normalmente no se dan dentro de las aulas y son indispensables para conocer el modo de pensar, razonar y actuar de los estudiantes y de esta forma ayudarlos a corregir sus errores.”*

Para Villarroel (1993), la resolución de problemas matemáticos requiere que los alumnos manipulen la información que se les proporciona y sean capaces de encontrar una nueva información con la utilización de algún algoritmo. Esto implica que la enseñanza de las estrategias debe planificar un conjunto de actividades que el alumno deberá llevar a cabo de modo que logre interiorizar cada una de las acciones mentales o pasos implícitos, además de saber aplicarlo a situaciones concretas. Para lo cual se plantean los siguientes pasos en relación al quehacer de los alumnos:

1. Identificar la información no disponible que se puede obtener a partir de la información entregada.
2. Llevar a cabo un proceso de abstracción en el cual se elimina lo que no es pertinente y se mantiene lo que es esencial en cada caso.
3. Codificar la información pertinente en un lenguaje matemático de modo de obtener información nueva.
4. Debe realizar las operaciones matemáticas correspondientes.
5. Interpretación de los resultados de las operaciones en términos de la información requerida.

Según las consideraciones antes establecidas ver el siguiente esquema.

Esquema 4.



4.5 Resolución de Problemas Matemáticos

Para lograr comprender el tema a desarrollar es necesario delimitar el significado de un problema, para ello se presentarán diversos enfoques y autores que nos permitirán establecer una orientación clara sobre qué es un problema.

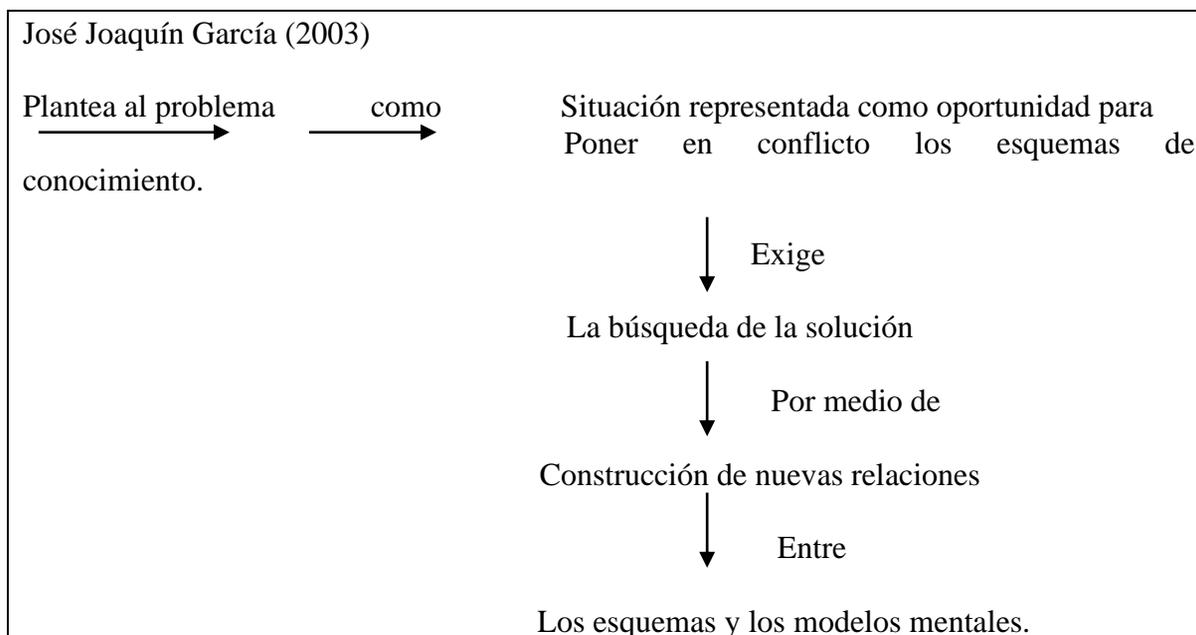
Otros autores como Krulik y Rudnik (1992), delimitan al problema como *“una situación cuantitativa o no, que pide una solución para la cual los individuos implicados no conocen medios o cambios evidentes para obtenerla”*.

Sin embargo, Martínez (1987), asume al problema como tal, cuando representa *“lo buscado en una pregunta o grupo de preguntas que generan una tensión en el pensamiento productivo de los individuos y cuya solución requiere de la búsqueda de nuevos conocimientos”*. Es en este caso cuando la búsqueda de la solución como parte del problema toma mayor énfasis, poniendo en contraste el problema con la búsqueda de la solución, relacionando los procesos cognitivos del individuo.

Garret (1988), desde la perspectiva en que un problema es una duda carente de repuesta, asume que cada sujeto *“dependiendo de su conocimiento personal, personalidad y de las estrategias o recursos de que se disponga, vera una situación dada como un problema o simplemente como un puzzle o rompecabezas que debe armar”*.

Para García (2003), el problema se define como *“una situación que representa una oportunidad de poner en juego los esquemas de conocimiento, que exige una solución que aún no se tiene y en la cual se deben hallar interrelaciones expresas y tácitas entre un grupo de factores o variables, búsqueda que implica la reflexión cualitativa, el cuestionamiento de propias ideas, la construcción de nuevas relaciones, esquemas y modelos mentales”*. (ver esquema 5)

Esquema 5



Es en esta etapa en donde podemos establecer una estrecha relación entre lo planteado por los autores Martínez, Garret y García,(2000) (que aunque no todos lo describan de la misma forma): un problema o una situación problémica es aquella en la que un individuo se ve enfrentado de manera sorpresiva, poniendo en juego todas las habilidades, los procesos mentales y las competencias propias de cada sujeto en función de asimilar y adaptarse (acomodar) a la situación problémica, para luego comprender la misma y así continuar con la siguiente fase de búsqueda de caminos para su solución.

La resolución de problemas matemáticos para Ruiz (2003), es *“generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva”*.

Vila (2001), describe a la resolución de problemas como *“una actividad de reconocimiento y aplicación de las técnicas trabajadas en clase y a la vez de acreditación de las técnicas aprendidas”*, ambos autores, tanto Ruiz como Vila coinciden en que la resolución de problemas se debe al enfrentamiento con situaciones conflictivas que ponen en juego todas la habilidades y capacidades de los individuos en función de la comprensión, como de la búsqueda de la solución.

Así mismo, Buschiazzo (1997), desde el punto de vista matemático, plantea al problema como una dificultad que implica, una situación nueva que se debe esclarecer por medio del razonamiento, para lo cual el sujeto debe buscar las estrategias mas pertinentes para alcanzar la meta propuesta, la solución.

Perales (1993), *“El problema adquiere así una dimensión de actividad de enseñanza – aprendizaje, tanto de conceptos como de habilidades, y evaluadora no sólo de dicho aprendizaje sino de los propios mecanismos cognitivos puestos en juego por el educando”*. En esta definición encontramos en toda su extensión las características por las cuales la resolución de problemas es tan importante: pueden recogerse bajo un mismo parámetro la constancia de la adquisición de conceptos y de procedimientos en el alumno.

Krulik y Rudnik (1997) definen el problema como: *“una situación cuantitativa o no, que pide una solución, para la cual los individuos implicados, no conocen medios o caminos evidentes para obtenerla”*.

Según el concilio nacional de supervisores de Matemáticas (NCSM, 1989), la resolución de problemas es el proceso de aplicar lo adquirido anteriormente al nuevo conocimiento por medio de estrategias de resolución de problemas que implica realizar preguntas, analizar situaciones, traducir resultados, graficar resultados, dibujar esquemas, etc. Desde el momento en que el individuo se ve enfrentado a una situación problémica, pone funcionamiento su actividad mental, asumiéndolo como un desafío para el cual debemos buscar la respuesta

4.6 Teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud

Una vez establecidos los parámetros de la resolución de problemas, en este punto por medio de los campos conceptuales que el enfoque presentado anteriormente sobre la resolución de problemas es modificado desde el énfasis conceptual en la enseñanza de las matemáticas.

Para Vergnaud (1991), los campos conceptuales son una teoría cognitiva ya que establece la importancia de la conceptualización y de los esquemas correspondientes para el aprendizaje de un concepto. La teoría de los campos conceptuales, nace de la teoría psicológica de la conceptualización de lo real permitiendo conocer y estudiar las filiaciones y las rupturas presentes entre los conocimientos y en el contenido conceptual que cada sujeto trae consigo, en función de las conductas explícitas o implícitas del sujeto al momento de verse enfrentado a una situación; entendiendo como conocimiento el saber hacer y el saber expresar. La teoría de los campos conceptuales no se remite solamente a las matemáticas, pero en función de la matemática es que intenta dar conocimiento frente a los procesos de conceptualización progresiva de la adquisición de las estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones de número-espacio, y el álgebra.

Desde el punto de vista de Vergnaud (1991), es necesario realizar relaciones y discordancias en el conjunto de situaciones organizadas por ideas semejantes o no de un sujeto, en donde los procedimientos, las representaciones y las formulaciones pueden de manera lógica y razonable derivar unas de otras. Por lo tanto, un concepto logra sentido si el individuo lo incorpora a través de situaciones y problemas, no sometiéndolo simplemente a una definición del concepto, Vergnaud (1991) nombra con la expresión de “*concepto en acto*” y “*teorema en acto*” a los conocimientos contenidos en los esquemas. Dicho de otro modo: “*invariantes operatorias*”. Según Peña (2007) las invariantes operatorias son, desde el punto de vista globalizado, el acto de un sujeto cuando logra aplicar esquemas referidos a una situación a otras situaciones de la misma clase o tipo, por lo cual el individuo logra la generalización del esquema en cuestión, en donde el concepto de la invariable operatoria reúne todos los conocimientos contenidos en los esquemas “*(...) organizándolos en conceptos y teoremas en acto*”. Para Vergnaud (1991), los esquemas son “*la organización invariante de la conducta para una clase de situación dada*”. es aquí en donde los elementos cognitivos que permite la acción del individuo en función de la búsqueda de la solución a una situación problema permite la acción de una operatoria, es decir, se ponen en práctica los conocimientos en el acto en conjunto con los teoremas y constructos que el sujeto trae consigo.

Por otra parte, las competencias matemáticas son también sostenidas por esquemas organizadores de la conducta para lo cual se establece que el conocimiento racional es precisamente operatorio. Considera a los campos conceptuales como un conjunto de situaciones que ayudan a la adquisición de un concepto y no solo remitiéndolo a su definición, por lo cual, el concepto de situación en este caso toma un rol didáctico y de significancia tanto en la dimensión afectiva y dramática como en la dimensión cognitiva en donde los constructos y los procedimientos matemáticos forman parte de dicha situación.

En cuanto a situaciones Vergnaud (1991), distingue dos tipos:

1. Situaciones para las que el sujeto no tiene todas las competencias necesarias.
2. Situaciones para las que el individuo dispone de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación.

Estos son procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son en función de las situaciones a las cuales son confrontados.

En la primera situación, el individuo se encuentra obligado a reflexionar, indagar, realizar tanteos, averiguar etc. Esto llevará al sujeto a trazar esquemas que deberán ser ajustados, apartados y re combinados; este proceso es el que lleva a descubrimientos de un aprendizaje significativo.

En la segunda situación, las conductas del individuo estarán automatizadas y serán organizadas por un único esquema ya aprehendido.

Vergnaud (1991) establece que las relaciones elementales distinguidas en las diversas clases de problemas son centradas en un interés didáctico moderado, por su carácter elemental por lo cual pasa a cumplir un rol instrumental de análisis de las situaciones y de las dificultades conceptuales de los sujetos.

El aprendizaje de las matemáticas es “(...) *establecer clasificaciones y describir procedimientos, formular teoremas en acto, analizar la estructura y función de los enunciados y representaciones simbólicas*” Vergnaud (1991), en sentido matemático, continuando con los campos conceptuales en donde se establece y organiza la enseñanza de las matemáticas en dos estructuras: las estructuras aditivas y multiplicativas.

Dentro de las estructuras o situaciones aditivas (según los campos conceptuales) existen variados tipos de problemas establecidos por la relación entre elementos aditivos que son a la vez una o un conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica diversos tipos de situaciones aditivas y de su operación inversa conocida como la sustracción, en donde el conjunto de conceptos adquiridos aplicados a dicha situación o situaciones permiten analizar dichas acciones, algunos de estos pueden ser: situaciones de reunión o fraccionamiento de magnitudes medibles, situaciones de relación de comparación aditiva, y situaciones de composiciones de transformaciones y relaciones. Esta última no aparece en el currículo escolar.

En cambio, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas según Vergnaud (1991) son a la vez un conjunto de situaciones en donde dicho tratamiento implica una o varias situaciones multiplicativas o de su operación inversa divisorias, en donde el conjunto de conceptos y teoremas aplicados en dichas acciones permiten analizar algunas situaciones como por ejemplo: proporción simple y proporción múltiple, función lineal, razón, escala directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, múltiplo y divisor, etc.

La teoría de los campos conceptuales en el área de las matemáticas, no solo habla de operaciones aritméticas en donde los algoritmos y la automatización de dichos conceptos o teoremas son mas importantes que la aplicación de estos mismos a diversas situaciones, sino que según los campos conceptuales, se hace necesario referirse a estructuras o situaciones aritméticas en cuyos modelos interdependientes por su estructura son nombrados como: estructuras o situaciones multiplicativas y aditivas, en donde todas las

acciones que estas impliquen pertenecerán a los esquemas jerarquizados de la adquisición de dichos conceptos, teoremas y acciones aplicables a variadas situaciones en diferentes contextos. Dejando claro que el cálculo es solo una opción que surge luego del análisis de un problema en donde para Peña (2007) “(...) existen variadas alternativas; siendo el cálculo una relación entre cantidades según propiedades y relaciones numéricas. Aquí es en donde el dominio de las estructuras aditivas y multiplicativas, es decir, del campo conceptual, permitirá optar por la o las operaciones aritméticas adecuadas”. Aclarando que existen diversos tipos de cálculo, tales como: cálculo mental, escrito y instrumental, en donde el cálculo escrito por medio de la utilización de diversas técnicas de escritura, pueden desarrollar por medio de algoritmos diversas situaciones y así evidenciar el tratamiento de acción realizado por el individuo.

Para Maza (1991), concibe resolución de problemas en distintos niveles de dificultad, que van desde lo más simple a lo más complejo. Permiten desarrollar un tratamiento de las operaciones más flexibles y de más amplio nivel conceptual. Y las situaciones problemáticas las concibe como situaciones que conllevan una serie de normas limitadoras a los distintos planteamientos del problema, pero implícitamente son las situaciones a las que se enfrenta un alumno para aplicar un concepto.

Tanto para Verganud (1991) y Maza (1991), existen situaciones problemáticas que facilitan el aprendizaje de un constructo a través de una red de conceptos que el individuo ha comprendido mediante un proceso de reflexión sobre estos conocimientos. En las situaciones problemáticas se presentan dificultades a las cuales el alumno se ve enfrentado, ampliando así su nivel de abstracción de un conocimiento ya que se le plantea de distinta manera y no solo encasillarlo a una definición.

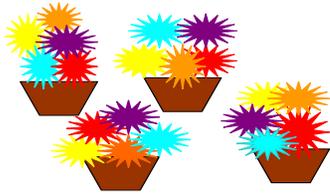
A continuación se señalan algunas situaciones multiplicativas de Verganud:(ver esquemas: 6, 7 y 8)

Esquema 6

Situación 1 / Suma iterada.

Tengo 4 maceteros con Flores. Si cada macetero tiene 5 flores.

¿Cuántas flores tengo en total?



$$5 + 5 + 5 + 5 = 20$$
$$4 \times 5 = 20$$

Esquema 7

Situación 2 / Combinación.

Tengo tres pantalones y 12 poleras de distinto color.

¿Cuántos pares distintos de pantalones y poleras puedo usar?



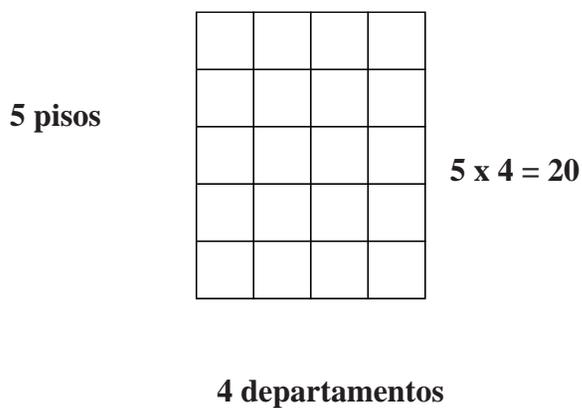
$$3 \times 12$$

Esquema 8

Situación 3 / Área

Francisco vive en un edificio de 5 pisos, con cuatro departamentos por piso.

¿Cuántos departamentos tiene el edificio en total?



4.7 Enseñanza aprendizaje de la multiplicación

La creciente necesidad de buscar mecanismos en el área de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, para la enseñanza de un nuevo conocimiento al momento de su enseñanza en el caso de multiplicación genera una orientación desde el conocimiento de las estructuras operatorias y su función como formas lógicas, y abstractas en los diferentes contenidos a tratar.

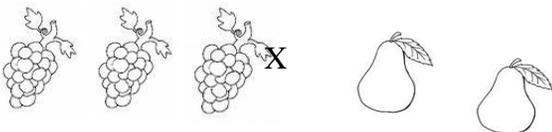
Maza (1985), afirma que el niño como sujeto construye sus operaciones y su inteligencia “(...) en la medida que adquiere los conocimientos que le son necesarios para comprender y dominar la realidad existente” Es por esto que para Maza (1985), no basta con conocer o manejar operaciones lógicas como la inclusión o la seriación, sino que ejerciendo un apoyo en la comprensión de la multiplicación aritmética, es en donde se hace necesario conocer las diversas significaciones presentes en los individuos a las que se ven enfrentados. Por ejemplo: la “suma de sumandos iguales, número de veces que se repite, etc.” Entendiendo estas últimas como las significaciones que el alumno atribuye a cada noción a lo largo de su desarrollo.

En la enseñanza de la multiplicación para Maza (1985), uno de los principales problemas presentes durante la enseñanza de las multiplicaciones es el descubrimiento del operador multiplicativo, esto quiere decir el número de veces en que se repite un determinado número o conjunto, en donde se realizan acciones u operaciones propias de la aritmética. Es aquí en donde como primera instancia se presentan las operaciones de suma iterada y el algoritmo multiplicador propiamente tal, en la primera situación por ejemplo: $2+2+2+2+2+2$ adicionamos un conjunto sobre otro sin tener en cuenta el número de conjuntos adicionados, en cambio en el siguiente ejemplo: 2×6 es necesario considerar de manera simultánea las dos variables: el número de elementos de cada grupo y el número de grupos, ambas situaciones aritméticas son recurrentes al momento de enfrentar a los alumnos a la enseñanza de la multiplicación pero el proceso por el cual el alumno paulatinamente introduce la multiplicación, entendiéndose éste como suma iterada constituye un conflicto cognitivo al momento de enfrentar el algoritmo propiamente tal, ya que los alumnos siempre recurren a los procedimientos de resolución aditivos en un principio lo que dificulta el construir un nuevo factor o operador multiplicativo es decir manejar simultáneamente el número de elementos de cada grupo y número de grupos,

En la actualidad las definiciones que existen de multiplicación se asocian muchas veces a una suma iterada como se menciono anteriormente, sin embargo, multiplicar corresponde a un conjunto de operatorias que sobrepasan la acción de sumar varias veces.

Es así, como Maza (1991), define la multiplicación, como una operación aritmética entre dos números naturales, tanto de carácter binario como unitario, el primer modo es más general desde el punto de vista matemático (concepto de multiplicación). El segundo modo concuerda a la concepción inicial que se posee de la multiplicación (suma iterada). Otro autor que se refiere a la multiplicación es Fernández (2007), el cual señala que la multiplicación solo debe ser introducida como una suma de sumandos iguales. No obstante sumar no es multiplicar. En las situaciones multiplicativas aparecen dos conjuntos definidos y una relación constante, no así en la suma ya que solo aparece un conjunto. Para ilustrar esta situación se puede ver el siguiente esquema.

Esquema 9

Suma	<p>Un conjunto: manzanas con manzanas.</p> 
Multiplicación	<p>Dos conjuntos: uvas con peras.</p> 

Desde la perspectiva de Orozco (1996), el estudio de la estructura multiplicativa se aborda desde al menos de cuatro puntos de vista: como operación mental, como tabla de multiplicar, desde la perspectiva de los algoritmos, desde el enfoque de resolución de problemas.

Es preciso definir estos puntos de vista de la multiplicación. Comenzaremos por la multiplicación como una operación mental para desarrollar problemas de producto, los alumnos generalmente utilizan procedimientos como la suma iterada entendiendo que los procesos aditivos son distintos a los procesos multiplicativos. Sin embargo el origen de la operación multiplicativa es la adición, pero es necesario que los educandos superen los procedimientos aditivos y aprendan el concepto multiplicativo. Orozco (1996), describe los cambios que ocurren en la mente del educando al dejar de utilizar procedimientos aditivos para multiplicar. Orozco (1996), plantea que en estas operaciones han llegado a confundirse y que muchos profesores no se percatan que los educandos solo utilizan la suma iterada para resolver problemas multiplicativos. Esta aplicación de la operatoria aditiva no es errónea, ya que la suma iterada es la forma más natural de resolución para la multiplicación y el camino más fácil para llegar al resultado de una multiplicación. Sin embargo muchos

de los alumnos no superan esta forma de resolución que para ellos les resulta más espontáneo y naturales por esto que simplemente no aprenden a multiplicar. Este es un déficit que tiene efectos complejos de superar en la construcción de la división, en el manejo de las medidas de superficie y volumen y en el álgebra. Orozco (1996), plantea que para resolver ejercicios multiplicativos usando como estrategia de suma iterada, los alumnos utilizan diversas características. En términos generales la suma iterada consiste en sumar repetidamente el mismo número perteneciente a un mismo conjunto o sea un mismo número se repite tantas veces como lo indica un factor, en cambio en la multiplicación existe un multiplicando, multiplicador y un producto son factores distintos unos de otro, entonces, para multiplicar, el niño debe lograr registrar las veces que suma, reconocer la reiteración del sumando y expresar el valor numérico que da cuenta de las veces que lo reitera. La transformación de la reiteración aditiva, permiten la manifestación de soluciones multiplicativas.

- La multiplicación en el contexto de las tablas de multiplicar:

La enseñanza de las tablas de multiplicar para el manejo de los algoritmos, se convierten en memorización de las mismas tablas de multiplicar para la adquisición del aprendizaje y del algoritmo. Orozco (1996) afirma que para muchos autores es esencial la memorización de las tablas de multiplicar porque ahorran tiempo en los problemas más engorrosos para la obtención del cálculo. La operación multiplicativa se construye progresivamente y el aprendizaje de la tabla ayuda en esta construcción, pero no puede reemplazarla.

- Para la memorización de la operatoria se plantea tres versiones:

1. Las multiplicaciones se repiten a diario, en voz alta, empezando por la de menor grado de dificultad que le provoque al alumno, o sea, por la llamada tabla del dos y continuando progresiva y secuencialmente hasta la del nueve y en algunos casos, hasta la del doce.

2. La segunda forma destaca las tablas de multiplicar y demuestra que los resultados se obtienen a través de sumas iteradas de dos en dos, tres en tres, etc. La diferencia que tiene con la primera es que en ésta se utiliza la suma iterada para la obtención del resultado, pero tiene el inconveniente de conceptualizar la multiplicación como una suma reiterada.

3. La tercera versión aborda las tablas de multiplicar desde el punto de vista de la propia construcción del concepto por parte de los alumnos debido al uso de procedimientos

informales como la multiplicación por 10, cálculo del doble, el cálculo de la mitad, la descomposición de los factores y la composición. Sin embargo, es necesario anotar que estos procedimientos son óptimos cuando los alumnos han superado la suma reiterada y resuelven problemas y multiplicaciones, utilizando procedimientos multiplicativos, por lo menos con los cinco primeros números naturales.

- El algoritmo de la multiplicación:

Los algoritmos en educación matemática son entendidos como la formación aritmética que los educandos necesitan. Orozco (1996) plantea que el algoritmo es un conjunto ordenado de pasos que se deben realizar para la resolución de la operatoria. Estos pasos a lo que se refieren están regidos por las tablas de multiplicar, es por esto que se considera al algoritmo por parte de los educandos como producto de un sistema notacional de base diez y de la composición necesaria de los primeros números naturales de tipo multiplicativo. Este enfoque revela la doble naturaleza del algoritmo: es producto final de un proceso de construcción lógico y producto de un automatismo o rutina.

Para Campos (2006), la multiplicación es muy difícil aún para los niños de NB2 y por esto es posible aun permitir a los alumnos que desarrollen un ejercicio multiplicativo a partir de una suma y conteo, ya que no poseen recursos para su resolución, no así en niveles más avanzados de educación, ya que en los niveles de educación media, ellos ya debieran multiplicar correctamente, entendiéndola como una operación aparte de la suma.

Maza (1991), plantea que la enseñanza de la multiplicación es y debe ser introducida como una suma iterada, pero no solo debe remitirlo a suma, ya que sumar no es multiplicar, es una operación distinta. Para él existen distintas tipos de situaciones de aprender esta operación y que ayuda considerablemente al aprendizaje significativo de esta operatoria multiplicativa define tres conceptos:

1. Problema de razón, se refiere a suma iterada.
2. Problemas de combinación, se refiere a producto cartesiano.
3. Problema de área, se refiere al cálculo de superficies planas.

Estas formas de aprender la multiplicación ayudan a la mejor comprensión del concepto multiplicativo.

Según Orozco (1996), es sabido que una gran cantidad de los alumnos, una vez que terminen su educación básica terminarán resolviendo problemas de multiplicación como una suma reiterada. Esto debido a que desde un comienzo se le enseña al alumno a desarrollar los ejercicios de multiplicación como una suma.

Según Fernández (2007), esta forma de introducción a la multiplicación causa un conflicto en los alumnos, debido a que se les enseña como suma repetitiva y luego se les dice que no es una suma, estamos engañando su pensamiento lógico y a la vez generando dudas sobre sus aprendizajes, es por esto que debemos reconocer la necesidad de implementar estrategias didácticas adecuadas al momento de enseñar un nuevo concepto para no provocar en el alumno incertidumbre e inseguridad sobre el nuevo conocimiento. Es labor del docente asegurarse de que los educandos comprendan correctamente el nuevo aprendizaje, siendo claros y rígidos y asegurándose de su adquisición.

4.8 Resolución de problemas desde la perspectiva de la Multiplicación

La multiplicación desde el contexto de la resolución de problemas, se desarrolla por la conceptualización propuesta por Vergnaud (1983, 1991) autor que ubica los problemas multiplicativos en el campo conceptual de la estructura multiplicativa, referidas a situaciones multiplicativas, referidas a conceptos interconectados de multiplicación.

Es por esto, que desde el contexto de la resolución de problemas, según lo establecido anteriormente por Vergnaud (1983, 1991) se propone para los problemas multiplicativos la noción de un campo conceptual, definida como: *“un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar conceptos, procedimientos y representaciones de diferente tipo estrechamente interconectados.”* Desde la perspectiva tradicional la operación de la multiplicación se representa con una triple relación $a \times b = c$, comprendiendo la multiplicación como el resultado de la búsqueda entre dos medidas elementales dando como consecuente el “producto”.

En educación formal en cambio, la introducción de las multiplicaciones es presentada como una suma iterada de un mismo número natural; en donde a partir de esta suma introducimos conceptos tales como: multiplicando, multiplicador y producto como resultado de dicha operatoria. Entendiéndose, al multiplicando como número que se repite, al multiplicador como el número de veces de repeticiones y al producto como el resultado de dicha suma iterada.

Para Nesher (1992) *“los problemas de multiplicación y de división comparten la misma estructura multiplicativa, la diferencia entre unos y otros reside en la información que se muestra y en la que se oculta.”* Por lo cual la sintaxis correspondiente a la formulación del problema delimita el tipo de operación que corresponda realizar para resolver el problema en cuestión. Al Igual Vergnaud (1988), por medio de los campos

conceptuales establece la interrelación entre la multiplicación y la división dentro de las estructuras multiplicativas.

Para Orozco (1996), la enseñanza de la multiplicación en las escuelas les dedica varios años de la enseñanza al aprendizaje de las tablas de multiplicar y de los algoritmos. Sin embargo, muchos alumnos no utilizan el concepto multiplicativo al momento de enfrentarse a esta operación y emplean la suma reiterada para la resolución de dichos problemas, provocando una de las grandes causantes del fracaso de la educación en primer ciclo.

Dicho desde otro modo según Gómez (1985), el proceso que ocurre entre la introducción por medio de la suma iterada y la construcción del nuevo conocimiento principio multiplicativo genera muchas veces un problema cognoscitivo en los alumnos. Para lograr comprender la estructura de los problemas multiplicativos es necesario aclarar el papel que cumplen las cantidades que aparecen, desde el punto de vista de las magnitudes. Schwartz (1986) y Kaput (1989) establecen que la estructura de las cantidades se ubica entre la estructura semántica (más fina) y la estructura matemática del problema (más gruesa), entendiendo dicha estructura como la expresión aritmética o algebraica resultante.

Para Itzcovich y Broitman (2001), la enseñanza de la multiplicación implica una construcción de conocimiento que lleva varios años para su enseñanza y que este conocimiento no se logra al momento de la enseñanza misma del algoritmo.

Por otra parte los niños de primer año de educación básica pueden resolver problemas de tipo multiplicativo. Para que los alumnos puedan generar situaciones que favorecen su aprendizaje en el aula, puedan desarrollar estrategias personales para la resolución del problema, aún cuando no dominen esta operatoria, así los alumnos pueden relacionarse con el concepto y abordar el estudio de problemas multiplicativos aunque estos no dominen estrategias de cálculo ni el manejo del signo X. Según los autores se deben presentar a los alumnos distintos tipos de problemas de tipo multiplicativos para ello plantean tres problemas distintos: Problemas de proporcionalidad, de organizaciones rectangulares y de combinatoria.

Los problemas de proporcionalidad hacen referencia a problemas que implican la relación entre dos series proporcionales: perros y patas, pulpos y tentáculos, mesa y patas

Esquema 10

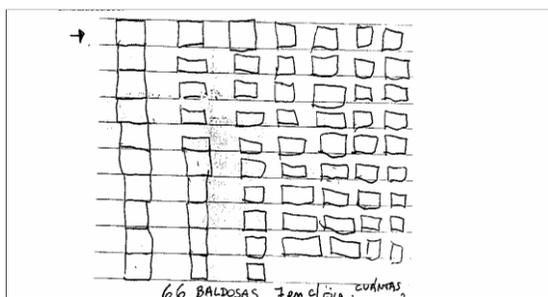
¿Cuánto dinero en un autobús
 Usando el dinero de curso o comprar tickets? ¿Cuánto comparten
 con \$3 ni el resto de centavos?

CANTIDADES	CUESTAN
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45

*Tomado de Parra, C. y Saiz, I. (1984). "Multiplicación en segundo grado". Ficha mimeografiada.

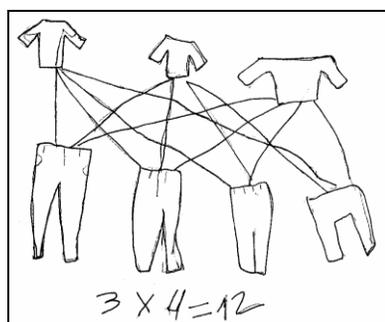
Las organizaciones rectangulares se refieren a problemas de baldosas en donde impliquen filas y columnas.

Esquema 11



Combinatoria se refiere a combinar elementos, se plantea la posibilidad de realizar dibujos para resolverlo de varias formas y estar seguro de la respuesta. Sin embargo la resolución de este tipo de problemas se puede realizar como sumas o una multiplicación que pudiera resolver de mejor manera el problema.

Esquema 12



Según la caracterización establecida anteriormente por Schwarz (1989) y Kapu (1988) se plantea la distinción entre dos tipos de cantidades: intensivas e extensivas; entendiendo como cantidad un par ordenado entre (x, u) , en donde x es un número cualquiera y u es una unidad de una magnitud.

La cantidad extensiva, describe la extensión de una cantidad referida a un conjunto determinado, estas cantidades son aditivas caracterizadas por la suma de números sin alterar la unidad que acompaña.

Por Ejemplo:

$$(x, u) + (x, u) = (x + x, u)$$

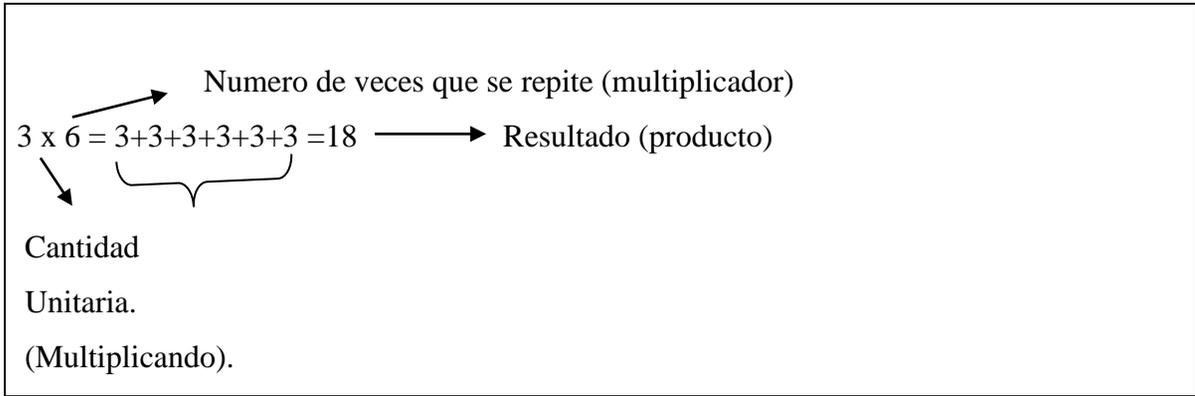
La cantidad intensiva describe un aspecto intensivo de una cantidad referida a una razón como por ejemplo: “*Velocidad, densidad, precio unitario, etc.*” Comprendiendo las cantidades intensivas como unidades compuestas.

Comprendiendo lo anteriormente descrito Schwarz (1988) y Kapu (1988) describen la estructura de cantidades de una situación multiplicativa es “*el conjunto de expresiones y de relaciones entre las expresiones de las cantidades que aparecen en él, y las operaciones permitidas entre esas cantidades*”. En donde, por ejemplo: la combinación resultante entre $E \times E$ correspondería al modelo de la multiplicación como producto cartesiano, que para Vergnaud (1983), correspondería al llamado producto de medidas o de combinación.

Según Maza (1991) existe gran concordancia en la clasificación de acuerdo a la estructura de problemas multiplicativos planteados por Vergnaud (1983), Quintero (1986), Nesher (1988). A continuación se presentara la clasificación propuesta:

Problemas de razón, para Maza (1991) o también conocido como regla de correspondencia según Nesher (1988), se refiere a la concepción inicial que se tiene de la multiplicación desde el punto de vista de una suma iterada desde la referencia unitaria del número, esto quiere decir que al existir una cantidad (multiplicando) que es convertida por otra cantidad (multiplicador) que es el que señala el número de veces que se repite la primera cantidad, es decir el ejercicio como tal se transforma en unitario porque la importancia recae solo en la primera unidad (multiplicando), puesto que el segundo solo indica la cantidad de repeticiones sin modificar dicha unidad primaria hasta el resultado propiamente tal, por ejemplo:(ver esquema 13)

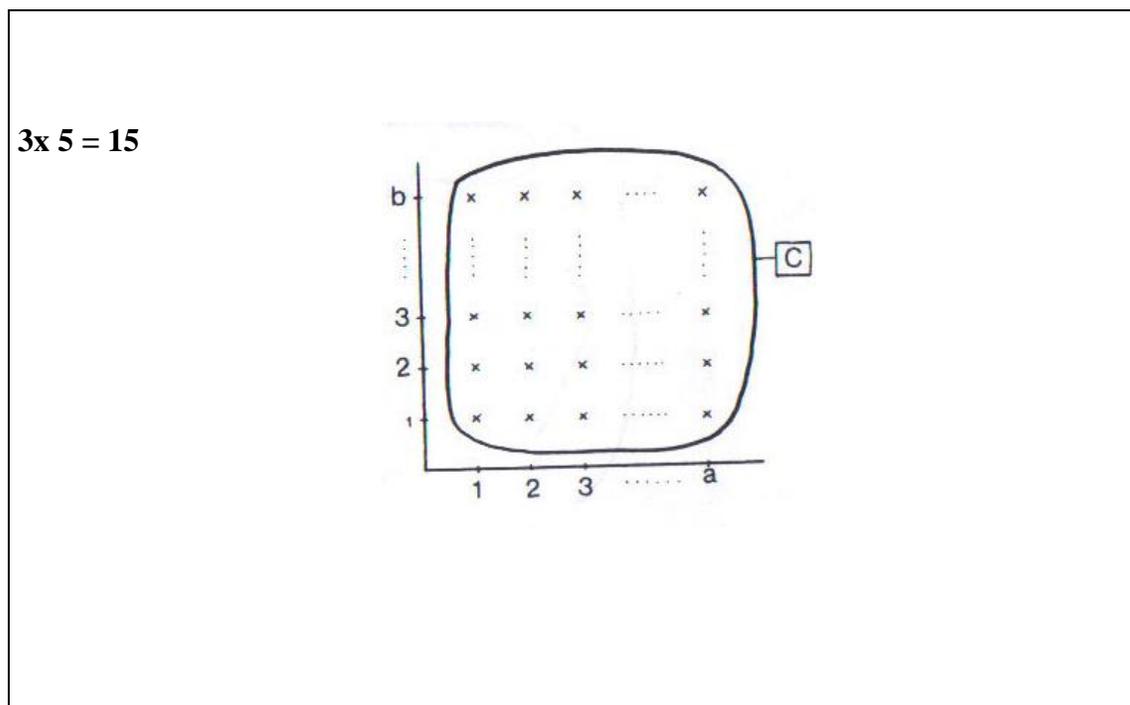
Esquema 13



Problemas de combinación (producto cartesiano) estos problemas hacen referencia a una operación binaria en donde el multiplicando y el multiplicador tienen papeles distintos y naturalezas también diferentes, entendiendo al multiplicando y al multiplicador como un conjunto de elementos cardinales concretos, para lo cual el nivel de abstracción se refiere directamente a los conjuntos de elementos, en donde el resultado (producto) nace de la combinación de dichos elementos. Lo que implica una conmutatividad entre los elementos multiplicando y multiplicador que no existía en el caso de la suma iterada. (Maza, 1991)

Ejemplo: en un baile de graduación hay 3 niñas y 5 niños ¿Cuántas combinaciones de parejas de baile podemos establecer?

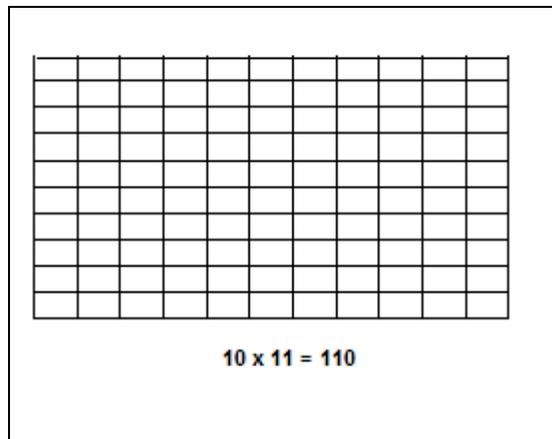
Esquema 14



Problemas de Área, el autor Maza (1991), establece una relación existente entre estos problemas de área y los problemas de combinación ya que estos últimos amplían considerablemente las posibilidades del cálculo de las superficies desde la disposición matricial de los problemas de combinación. Aunque los problemas de área son asociados a la combinación desde el punto de vista del área se busca determinar superficies específicas de áreas a calcular por lo cual la introducción a concepciones de perímetro y área toma gran fuerza, sin embargo es necesario aclarar que la superficie de un lugar específico también se puede resolver por medio de la suma iterada y por combinación. Los conceptos de medida de superficies toman mayor énfasis. Por ejemplo:

El piso de la sala de clases está cubierto por baldosas ¿Cuántas baldosas cubren la superficie total de la sala de clases?

Esquema 15



Capítulo III
Marco Metodológico

5. Marco Metodológico

Introducción

Es imprescindible en toda investigación delimitar los aspectos metodológicos diseñados y por implementar, dentro de los cuales basaremos nuestro estudio. En primer lugar, la investigación contempla un diseño de carácter cualitativo en donde se abordará como línea investigativa la descripción y análisis de fenómenos en contextos afines a la labor educativa, dentro del marco de la enseñanza de la educación matemática, expresamente en la resolución de problemas multiplicativos, extraídos de la prueba SIMCE.

La metodología a utilizar contempla un conjunto de técnicas de recolección y análisis de datos cualitativos.

A continuación se describirán de manera más detallada los fundamentos metodológicos que sustentan dicho estudio, complementando con una breve conceptualización de una de las técnicas de recolección y análisis de datos a utilizar. Se continuará con la descripción del escenario o población de estudio, junto con los criterios de selección de los actores y finalmente presentaremos el procedimiento de intervención y de análisis de datos.

El paradigma cualitativo, valora dentro de sus enfoques, la experiencia de cada ser humano y la subjetividad de este mismo. Para Sandoval (2002) “en la metodología cualitativa el investigador ve el escenario y a las personas en una perspectiva holística; las personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo. El investigador cualitativo estudia a las personas en el contexto de su pasado y de las situaciones en las que se hallan”.

5.1 Muestra

La muestra definida en esta investigación corresponde una selección de estudiantes de cuarto año básico, de la Región Metropolitana de Chile. Pertenecientes a establecimientos educacionales correspondientes a dependencias Municipales. Las edades de los estudiantes que participaran en la investigación fluctúan entre los 9 y 10 años de edad.

La muestra escogida está compuesta por 6 establecimientos Municipales, con un total de 61 estudiantes, específicamente 10 estudiantes por dependencia.

5.1.1 Criterios para selección de la muestra

Durante la selección de nuestra muestra nos enfocamos en dos criterios: El primer criterio de selección para la obtención de la muestra definitiva de nuestra investigación corresponde a: los establecimientos educacionales escogidos debían tener características similares. Que tengan igual tipo de sostenedor es decir que pertenezcan a Establecimientos Municipalizados.

El segundo criterio de selección son las calificaciones de los alumnos de 4to año básico. Deben tener notas promedio del curso en el subsector de matemáticas. Al obtener la media del curso se trabajará con cinco alumnos por sobre la media y cinco bajo la media del curso.

5.2 Fundamentación metodológica

Una vez contemplado el diseño de investigación a utilizar (cualitativo), con el propósito de describir e interpretar situaciones y eventos, relacionados con la manifestación de determinados fenómenos a ser posteriormente analizados, por medio del estudio de casos y mediante el uso de técnicas para la recopilación de información.

Este estudio se sitúa en un área en donde es posible conocer como razonan, y aplican su pensamiento los individuos en función de sus propios conocimientos ya adquiridos. La metodología cualitativa se fundamenta en descripciones detalladas de fenómenos que son observables. Para Hernández Sampieri (2003) el método cualitativo incorpora lo que los actores dicen, sus experiencias, actitudes, creencias y pensamientos tal y como son expresados, y desarrollados por ellos mismos. Según Mertens (2005), Coleman y Unrau (2005) plantean que la investigación cualitativa “es particularmente útil cuando el fenómeno de interés es muy difícil de medir o no se ha medido anteriormente”. Patton (2002) identifica las siguientes áreas y necesidades establecidas para planteamientos referentes a procesos:

- El foco de investigación está formado por experiencias de los participantes en torno al proceso, particularmente en resultados individualizados.
- Es de gran importancia la información detallada y profunda acerca del proceso.
- Por lo cual, se pretende conocer la diversidad de cualidades únicas de los actores inmersos en el proceso.

La investigación cualitativa se fundamenta en la perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento de las acciones principalmente de los seres Humanos, en donde busca interpretar lo que va captando activamente durante el proceso de la investigación. Es por esto que para Sampieri, Fernández, Baptista (2006) “el enfoque cualitativo puede definirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible, lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones, y documentos, es naturista porque estudia a los seres vivos en sus contextos y ambientes naturales, y interpretativo porque intenta dar sentido a los fenómenos en términos de los significados que las personas otorguen”.

La investigación cualitativa se fundamenta en la perspectiva Descriptiva desde el punto de vista del proceso inductivo en donde se debe explorar y describir, para luego generar concepciones teóricas. Para Patton (1990) “los datos cualitativos son descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones”.

Dicho paradigma, valora dentro de sus enfoques la experiencia de cada ser humano y la subjetividad de este mismo. Para Sandoval (2002) *“en la metodología cualitativa el investigador ve el escenario y a las personas en una perspectiva holística; las personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo. El investigador cualitativo estudia a las personas en el contexto de su pasado y de las situaciones en las que se hallan”*. La investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos y gran valor interpretativo, sobre la contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas. A su vez aporta un punto de vista holístico frente a los fenómenos observados.

Por lo anteriormente descrito, y por medio de la metodología cualitativa, podremos entender y describir los fenómenos observados desde una perspectiva holística-global e interpretar de manera rigurosa los datos encontrados en el estudio de casos, en donde la selección de caso/s está predeterminada por especificaciones espacio-temporales, por lo cual requiere de enfoques incluyentes, no reduccionistas y comprensivos. En cuanto a la clasificación de los posibles tipos de estudio de casos, también se presentan con diferencia según los autores. Guba y Lincoln (1981), quienes realizan dicha clasificación a partir del propósito que persigue el investigador al asumir el estudio de caso como recurso de investigación y situacional en donde prioriza la voz del actor. (Pensamiento en voz alta).

Es imprescindible precisar que el estudio de casos no obedece a la lógica estadística es decir no se rige por el principio de representatividad de la muestra, puesto que en este

caso la muestra no es representativa desde el punto de vista probabilístico del universo o población que se estudia. Si predomina en la selección del caso/s su carácter ejemplar, la posibilidad de que varios casos ofrezcan dimensiones posibles de comparar diferencias y similitudes para lograr triangular los datos recolectados durante la investigación. Miles y Huberman (1994) y Crowell (2005), plantean muestras denominadas diversas o de máxima variación en donde los tipos de pruebas no probabilísticas, buscan mostrar distintas perspectivas y representar la complejidad del fenómeno estudiado, localizar diferencias y coincidencias, patrones y particularidades.

Para la recopilación de la información y estudio se utilizarán técnicas tales como: visitas de observación, entrevistas no estructurada de investigación, aplicación de set de preguntas SIMCE, videos y grabaciones.

Para el análisis de la información se utilizarán técnicas de análisis de contenido, tales como transcripciones, que a su vez serán desarrolladas a través de “Redes Sistémicas” y “Atlas.ti”, programa desarrollado para segmentar datos en unidades de significado, relacionar conceptos y categorías dentro de otros; y el análisis de las habilidades cognitivo lingüísticas manifestadas a través del pensamiento en voz alta. Permitiendo las técnicas en su conjunto la interpretación de los significados que se presentan en distintos momentos del enfrentamiento de los estudiantes a las situaciones problemáticas presentadas en su conjunto extraídas de la prueba SIMCE, para luego triangular estos resultados.

5.3. Técnica e instrumentos de recolección de datos

A continuación se presentará la técnica utilizada para la recolección de datos.

5.3.1 Pensamiento en voz alta

Se entiende por pensamiento a aquello que es traído a la existencia a través de la actividad intelectual. Por eso, puede decirse que el pensamiento es un producto de la mente, que puede surgir mediante actividades racionales del intelecto o por abstracciones de la imaginación.

El pensamiento puede implicar una serie de operaciones racionales, como el análisis, la síntesis, comparación, la generalización y la abstracción. No solo se refleja en el lenguaje, sino que lo determina. El lenguaje es el encargado de transmitir los conceptos, juicios y raciocinios del pensamiento. RAE (2001)

El pensamiento lógico matemático enfatiza en la construcción del conocimiento en el niño. El niño construye su conocimiento al relacionar las experiencias obtenidas en la manipulación de objetos, es decir, el niño construye el conocimiento lógico matemático coordinando las relaciones simples que previamente ha creado entre los objetos (Piaget, 1975).

El desarrollo del pensamiento lógico matemático, siempre va de lo más simple a lo más complejo, teniendo como característica que el conocimiento adquirido una vez que es procesado no se olvida, ya que la experiencia no viene de los objetos sino que se origina de la acción que tienen los individuos sobre estos. Es por esto, que el desarrollo de este conocimiento tiene características muy particulares que lo diferencian de otros tipos de conocimientos.

Ericsson y Simón (1980), generaron interés que persiste hasta nuestros días, por su aplicación en los procesos cognitivos en psicología, particularmente sobre resolución de problemas en didáctica de las matemática (Puig.1996; Schoenfeld. 1985); de modo que la información que se obtiene a partir de esta técnica es considerada fuente viable de datos.

De acuerdo a las citas mencionadas con anterioridad resalta la importancia de los datos verbales, en general y el pensamiento en voz alta en particular y se muestra su viabilidad como técnica de recogida de información.

Los protocolos del pensamiento en voz alta son instrumentos metodológicos que implican como su nombre indica, el uso de informantes “pensando en voz alta” mientras lleva a cabo una actividad. Los pensamientos articulados siguiendo esta técnica se graban para poder ser transcritos y son analizados con la ayuda de unas categorías preestablecidas para reflexionar sobre los objetivos del trabajo de investigación.

Ericsson y Simón (1984,1993), respaldándose en trabajos de investigación propios y de otros autores para conseguir un mayor grado de fiabilidad, (para establecer un marco teórico “explícito y riguroso”). Los autores afirman que gracias a este marco teórico, los métodos que utilizan información articulada por informantes pueden ser considerados como uno de los muchos tipos de observaciones que proporcionan datos sobre los procesos cognitivos. Propusieron también, una especie de manual de procedimientos para recoger los datos adecuados ya que “la fidelidad de los datos conseguidos mediante los informes orales está condicionada por los procedimientos utilizados para producirlos y por la relación entre la información solicitada y la secuencia de información obtenida”

Ericsson y Simón (1993) clasifican los informes orales (verbal reports) en tres niveles condicionados por aquello que el procedimiento impone en los informantes:

- Informantes de nivel 1: proviene de la vocalización directa del pensamiento disponible en la memoria de trabajo (*short term memory*) del sujeto.
- Informantes de nivel 2: reflejan descripciones de o explicaciones sobre el contenido del pensamiento presente en la atención del sujeto (en la memoria de trabajo) sin ninguna intención de incitar la información en la memoria de largo plazo (*long term memory*)
- Informantes de nivel 3: resultan de la activación de procesos intermedios para localizar información que no está presente en la memoria de trabajo y, en consecuencia, requieren grados de introspección.

Considerando las implicaciones asociadas a los tres niveles, los autores aconsejan planificar con cuidado la metodología de trabajo para obtener informes orales puesto que su clasificación estará condicionada por las instrucciones recibidas por los informantes.

- Las instrucciones simples que solo implica pensar en voz alta (talk aloud) producen informes de nivel 1, que no comportan ningún tipo de esfuerzo extra por parte de los sujetos tal como se prueba en los estudios revisados por Ericsson y Simón (1993).
- Las instrucciones que solicitan detalles complementarios (por ejemplo articular todo aquello que pase por la mente, o no parar de hablar) originan informes de nivel 2, que no afectan el proceso cognitivo pero que ocasionan una ralentización de la tarea.
- Las instrucciones que requieren algún tipo de control consciente por parte de los informantes originan informes de nivel 3, cuyo proceso de generación puede afectar tanto el curso como la estructura del proceso cognitivo en consonancia con el nivel de introspección solicitado.

Los protocolos de pensamiento en voz alta han sido muy utilizados para analizar actividades de resolución de problemas en numerosos estudios de psicología cognitiva y se considera que producen informes del nivel 2, según la clasificación de Ericsson y Simón (1993).

En nuestro estudio los reportes, verbales producidos individualmente se recogieron en varias sesiones de resolución de problemas, a través de grabaciones de video realizadas

a estudiantes de cuarto año básico de colegios municipales. Posteriormente fueron transcritos en el programa atlas/ti y analizados por medio de una red sistémica.

Siguiendo las directrices de Ericsson y Simón (1993), psicólogos y lingüistas han utilizado la técnica del pensamiento en voz alta para incrementar el conocimiento relacionado con el proceso cognitivo tan complejo y, de esta manera, poder desarrollar modelos de los procesos de composición y/o realizar investigaciones empíricas relacionadas con distintos aspectos pedagógicos.

Instrumentos de análisis de nuestra investigación

5.3.2 Redes sistémicas

Entre las distintas propuestas metodológicas que existen para el análisis de datos cualitativos encontramos las redes sistémicas. Método propuesto por Bliss, y Ogborn, (1983) quienes señalan detrás de cada palabra escrita en el contexto de una frase hay un significado no directamente expresado por las palabras.

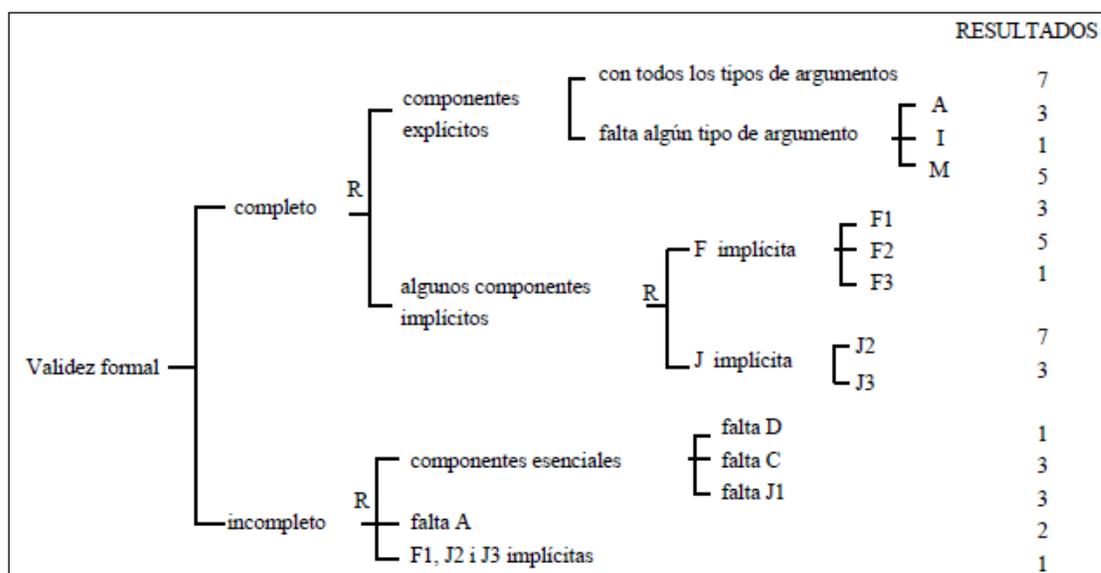
En el análisis de datos obtenidos en nuestra investigación utilizaremos las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) como instrumento de codificación de las respuestas de los estudiantes.

Este tipo de análisis sirve para organizar y analizar datos cualitativos obtenidos a partir de textos escritos, cuestionarios abiertos, observaciones en el aula y/o entrevistas. Son estructuras dinámicas que muestran la dependencia y la independencia entre las ideas que se expresan en cada sujeto o grupos de ellos frente a una pregunta problematizadora específica.

Cada configuración posible es sólo una de las muchas que se pueden estructurar ya que son interpretaciones de la persona que la construye sobre lo que se dice o está escrito a propósito de la ciencia.

A continuación se presenta un ejemplo de una red sistémica (Esquema. N°16), tomado de una investigación realizada por Sardá y Sanmartí (2000), en la cual la red permite analizar las capacidades argumentativas de los estudiantes.

Esquema N°16



Una red sistémica contiene una enorme cantidad de información y hacen referencia a los significados que se interpretan de los estudiantes. Una vez diseñadas estas redes se elaboraron interrelaciones entre las explicaciones de los estudiantes que fueron interpretadas por los investigadores, profundizándose paulatinamente las ideas más relevantes (Garbin y Mireles, 2005).

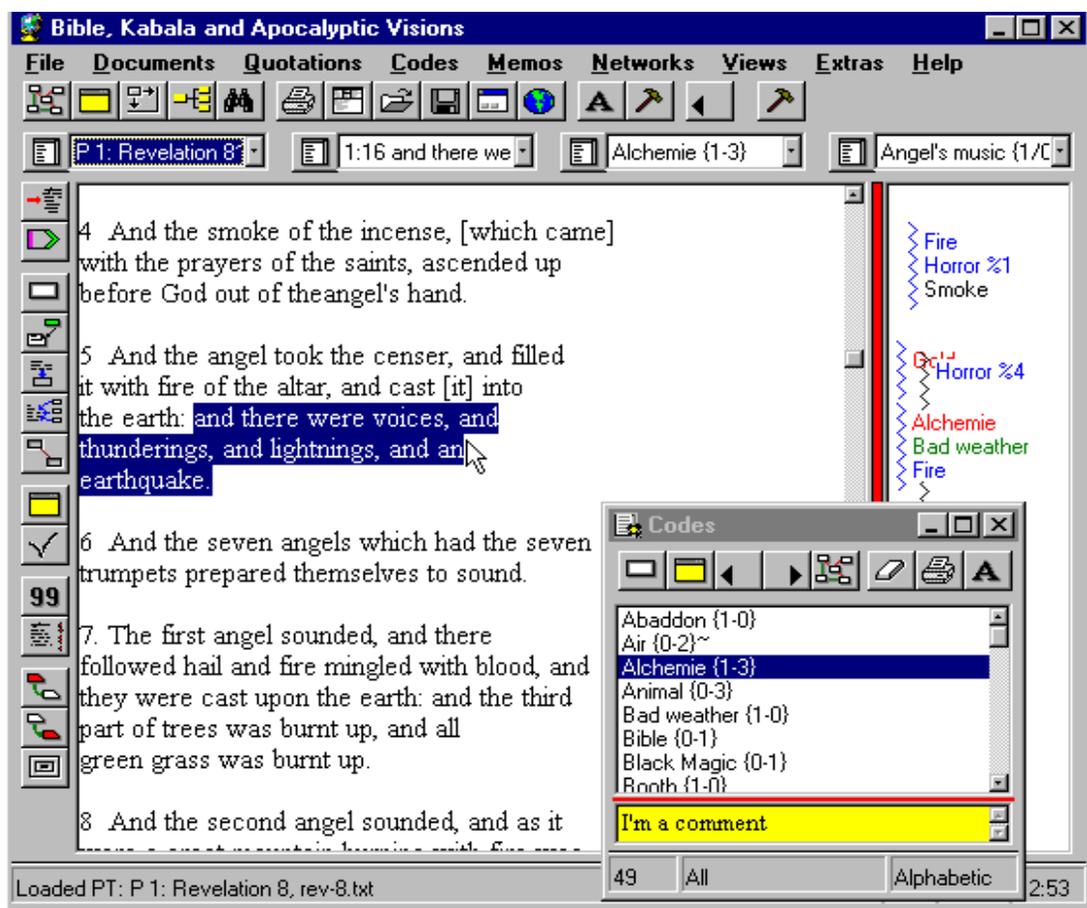
5.3.3 Atlas/ti

Es un programa de investigación cualitativa, el cual utilizaremos al momento de analizar de los datos obtenidos del pensamiento en voz alta de los alumnos de la muestra.

Realizaremos una transcripción de estos datos y Atlas/ti nos permitirá la localización y recuperación de los datos. Por lo tanto en nuestras transcripciones iremos marcando citas de los fragmentos utilizados y se les asignara códigos o distintas categorías, las cuales serán arrojadas a través del discurso de los estudiantes.

A continuación se presenta un ejemplo de atlas/ti. Tomado de un archivo explicativo acerca de este estrategia de análisis de investigación.

Esquema N° 17



5.4 Pasos del Diseño Metodológico

El primer paso de la investigación se realizará un análisis preliminar, descripción, categorización y selección de 8 preguntas de la prueba SIMCE. Estas preguntas deben responder al siguiente orden:

- Pertenecer a la prueba SIMCE de los 4º años básicos.
- Ser de resolución de problemas.
- Estar en la categoría de multiplicación.
- Categorizar las preguntas del instrumento de evaluación según los campos de multiplicación.

Se escogió la prueba SIMCE, porque es un instrumento de evaluación nacional que mide las competencias de los estudiantes. Se aplica en el nivel escogido (4to año básico).

Además utilizamos las preguntas de esta prueba ya que están validadas, solo se encontraron 8 preguntas que integran la categoría de resolución de problemas y multiplicación puesto que son las que están liberadas en internet.

Se decidió trabajar con 4tos años básicos, porque los estudiantes en este nivel deberían tener adquirida la estructura de la operatoria de la multiplicación, Además 4to año

básico es el último nivel del primer ciclo y es la base para la adquisición de nuevos conocimientos en niveles superiores tales como las potencia, algebra, ecuaciones etc.

El segundo paso se refiere a la aplicación de un piloto de instrumento de evaluación. En el cual trabajaremos 5 investigadoras con cinco alumnos para poder observar y analizar las ventajas y desventajas al momento de aplicación de nuestro instrumento.

Los 25 educandos utilizados en la realización del piloto pertenecen a un establecimiento de dependencia municipal.

El piloto está compuesto por 8 preguntas de resolución de problemas de multiplicación las cuales fueron utilizadas en la aplicación final del instrumento. La finalidad de este piloto fue observar si alguna de las situaciones multiplicativas presentaba errores, practicar la forma de entrevistar a los estudiantes, saber si esto nos entregaría información relevante, familiarizarnos con el tipo de entrevistado.

A través de este piloto se observó que solo una entrevistadora debía realizar las preguntas y además convenía realizar preguntas que no interfirieran en el discurso de los estudiantes.

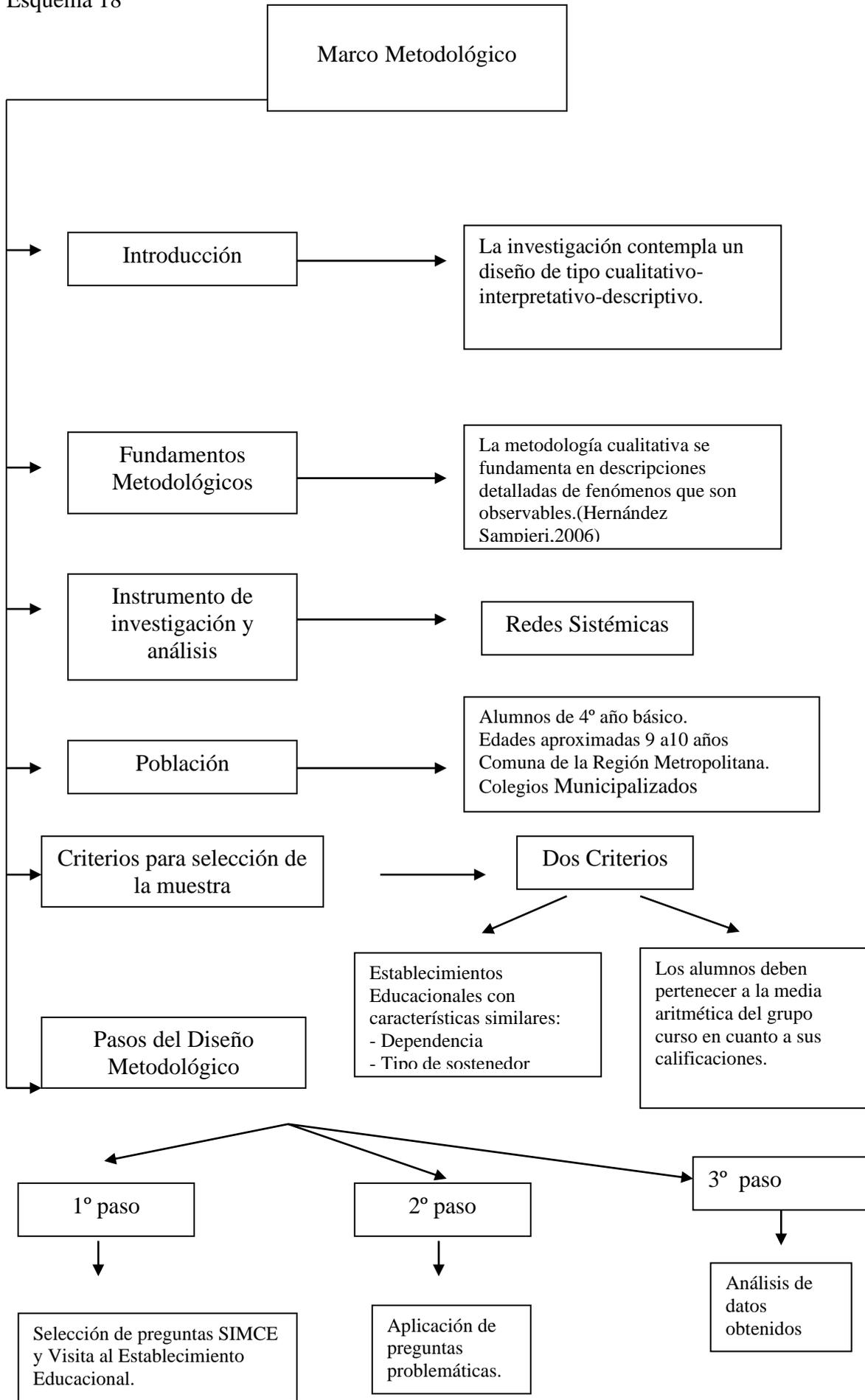
El tercer paso es la aplicación final del instrumento de evaluación. En esta acción visitaremos los establecimientos educacionales en los cuales utilizaremos los cuartos años básicos y obtendremos la media del promedio del curso. En base a este dato de la media del grupo curso escogeremos a 10 alumnos que estén lo más próximo a la media del curso para aplicar nuestro instrumento de investigación, para luego continuar con el protocolo de entrevistas para el estudio de casos, en donde enviaremos a cada alumno seleccionado una autorización para realizar el estudio, en donde se explicará a los apoderados los términos del estudio, y que técnicas utilizaremos para la recolección de datos. En este caso se realizarán video grabaciones, por lo cual necesitamos las autorizaciones de los apoderados para poder grabar a sus hijos.

Tras finalizar la aplicación del instrumento. En el cuarto paso analizaremos los datos obtenidos a través de :(ver esquema 18)

- Se realizará la recolección de datos a través del discurso de los estudiantes los cuales serán gravados mientras desarrollan su tarea.

- Se efectuarán transcripciones y se ingresarán a Atlas/ti y de este modo obtendremos las diversas categorías que utilizan los estudiantes para llegar a una posible solución.
- En base a estas categorías se observarán las posibles rutas que realizan los estudiantes las cuales aparecen en las redes sistémicas, en el análisis de la información.
- Interpretación de los significados que se presentaron en distintos momentos del enfrentamiento de los estudiantes a las situaciones problemáticas presentadas en su conjunto extraídas de la prueba SIMCE.
- Triangulación de los resultados obtenidos y realización de conjetura

Esquema 18



5.5. Validez y Confiabilidad

El instrumento confeccionado está compuesto por 8 preguntas de la prueba SIMCE, estas situaciones problémicas están validadas. Razón por la que se escogió esta prueba ya que por motivos de tiempo era imposible crear un instrumento y validarlo.

El instrumento final aplicado a los estudiantes fue validado por nuestro profesor guía Manuel Uribe Doctor en Ciencias de la Educación, Pontífice de la Universidad Católica y Marcia Villena Magíster en Educación Matemáticas, ejerce en Editorial Santillana.

5.6. Diseño de Instrumento Empleado.

El diseño del instrumento aplicado se seleccionó de la prueba SIMCE de preguntas liberadas de dicha prueba, escogiendo preguntas referidas a resolución de problemas asociados a la multiplicación.

1.- En la siguiente multiplicación, ¿qué número está tapado?

$$8 \cdot \blacksquare = 80$$

- A. 0
- B. 1
- C. 8
- D. 10

2.- En una promoción de bebidas, dan una figura por cada tres tapas marcadas. Ramón tiene 6 tapas marcadas, ¿Cuántas figuras le tienen que dar por las 6 tapas marcadas?

- A. 3
- B. 9
- C. 18
- D. 2

3.- ¿Cuál de los siguientes problemas podría resolver Ricardo multiplicando 6 por 12?

- A. Tengo 6 platos con 12 galletas cada uno. ¿Cuántas galletas tengo en total?
- B. Tengo 12 lápices de colores en mi estuche y presto 6. ¿Cuántos me quedan?
- C. Tengo 6 autitos rojos y 12 azules. ¿Cuántos autos tengo en total?
- D. Tengo 12 bolitas y las reparto entre mis 6 amigos. ¿Cuántas bolitas son para cada uno?

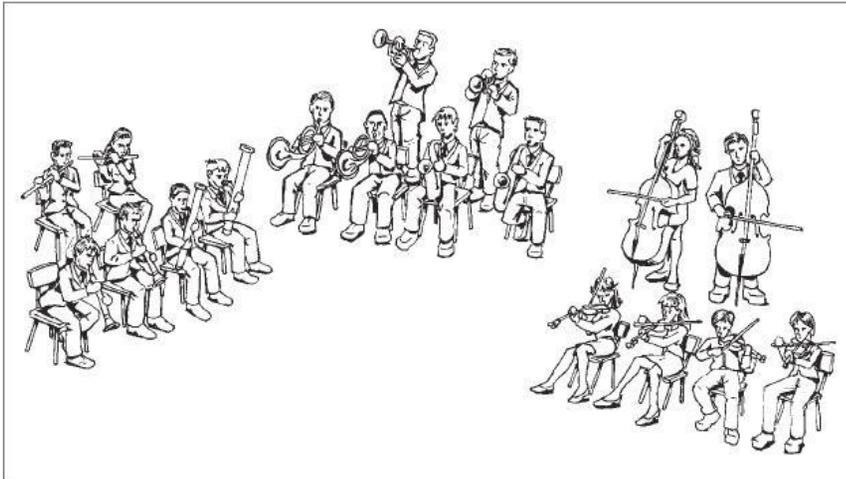
4.- En un consultorio, se entregan mensualmente 2 kilos de leche a cada niño menor de 5 años.

Una familia tiene 3 hijos menores de 5 años.

¿Cuántos kilos de leche recibe esta familia cada mes?

- A. 10 kilos.
- B. 6 kilos.
- C. 3 kilos.
- D. 2 kilos.

5.- Francisco está mirando este dibujo de una orquesta. Para saber cuántos músicos tiene la orquesta, se fija que hay grupos de 6 integrantes.
¿Cuál de las siguientes operaciones permite calcular el número de músicos que tiene la orquesta?



- A. $6 : 3$
- B. $6 \cdot 3$
- C. $6 + 3$
- D. $6 \cdot 6$

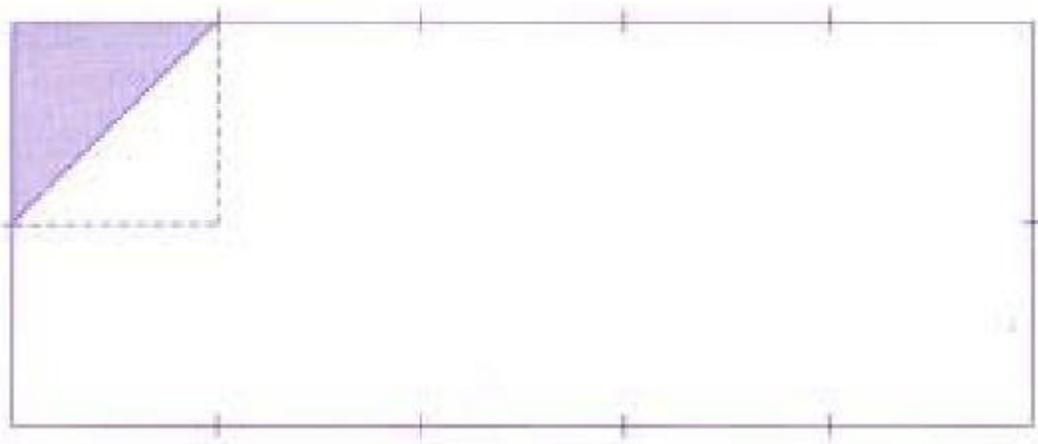
6.- En una bolsa de arroz, aparecen las siguientes instrucciones: "Para preparar una taza de arroz, se deben usar 2 tazas de agua". ¿Cuántas tazas de agua se deben usar para preparar 3 tazas de arroz?

- A. 2
- B. 6
- C. 5
- D. 3

7.- Una niña le da 6 caramelos a cada uno de sus 5 amigos y le sobran 2.
¿Cuántos caramelos tenía?

- A. 32
- B. 8
- C. 13
- D. 28

8.- Pablo cortó banderitas en forma de triángulo para adornar la sala.



¿Para cuántas le alcanzó si usó un papel como el del dibujo y las banderitas son del tamaño del triángulo?

Muestra cómo llegaste a tu respuesta. Puedes hacer cálculos o ayudarte dibujando.

Categorización de preguntas del instrumento aplicado.

Pregunta	Autor	Situación multiplicativa
<p>1.- En la siguiente multiplicación, ¿qué número está tapado?</p> $8 \cdot \blacksquare = 80$	Carlos Maza Gómez	Producto Cartesiano.
<p>2.- En una promoción de bebidas, dan una figura por cada tres tapas marcadas. Ramón tiene 6 tapas marcadas, ¿Cuántas figuras le tienen que dar por las 6 tapas marcadas?</p> <p>A. 3 B. 9 C. 18 D. 2</p>	Carlos Maza Gómez Gerard Vergnaud	Razón Suma iterada
<p>3.- ¿Cuál de los siguientes problemas podría resolver Ricardo multiplicando 6 por 12?</p> <p>A. Tengo 6 platos con 12 galletas cada uno. ¿Cuántas galletas tengo en total? B. Tengo 12 lápices de colores en mi estuche y presto 6. ¿Cuántos me quedan? C. Tengo 6 autitos rojos y 12 azules. ¿Cuántos autos tengo en total? D. Tengo 12 bolitas y las reparto entre mis 6 amigos. ¿Cuántas bolitas son para cada uno?</p>	Carlos Maza Gómez	Producto cartesiano.

<p>4.- En un consultorio, se entregan mensualmente 2 kilos de leche a cada niño menor de 5 años. Una familia tiene 3 hijos menores de 5 años. ¿Cuántos kilos de leche recibe esta familia cada mes? A. 10 kilos. B. 6 kilos. C. 3 kilos. D. 2 kilos.</p>	<p>Carlos Maza Gómez</p>	<p>Razón , producto cartesiano</p>
<p>5.- Francisco está mirando este dibujo de una orquesta. Para saber cuántos músicos tiene la orquesta, se fija que hay grupos de 6 integrantes. ¿Cuál de las siguientes operaciones permite calcular el número de músicos que tiene la orquesta?</p> <p>A. $6 : 3$ B. $6 \cdot 3$ C. $6 + 3$ D. $6 \cdot 6$</p> 	<p>Carlos Maza Gómez.</p>	<p>Producto cartesiano.</p>
<p>6.- En una bolsa de arroz, aparecen las siguientes instrucciones: "Para preparar una taza de arroz, se deben usar 2 tazas de agua". ¿Cuántas tazas de agua se deben usar para preparar 3 tazas de arroz? A. 2 B. 6 C. 5 D. 3</p>	<p>Carlos Maza Gómez.</p>	<p>Producto cartesiano.</p>
<p>7.- Una niña le da 6 caramelos a cada uno de sus 5 amigos y le sobran 2. ¿Cuántos caramelos tenía? A. 32 B. 8 C. 13 D. 28</p>	<p>Carlos Maza Gómez Gerarad Vergnaud</p>	<p>Razón Suma iterada.</p>
<p>8.- Pablo cortó banderitas en forma de triángulo para adornar la sala.</p>  <p>¿Para cuántas le alcanzó si usó un papel como el del dibujo y las banderitas son del tamaño del triángulo?</p> <p>Muestra cómo llegaste a tu respuesta. Puedes hacer cálculos o ayudarte dibujando.</p>	<p>Gerarad Vergnaud, Carlos Maza Gómez</p>	<p>Situación de área.</p>

Las preguntas fueron categorizadas de acuerdo a los autores anteriormente señalados, ellos entregan diversas situaciones existentes en resolución de problemas asociadas a la multiplicación.

6. Recogida de Información

La recolección de información se llevo a cabo a través de:

- Gravar el discurso de los estudiantes mientras resuelven las situaciones multiplicativas.
- Transcribir el discurso de los estudiantes e ingresar las transcripciones al software de investigación cualitativa Atlas/ti.
- Realizar análisis del discurso de los estudiantes y asignar categorías que se desprenden de dichas transcripciones.
- Realizar redes sistémicas en base a las rutas que utilizan los estudiantes, desde que leen el problema hasta que obtienen una posible solución.(en base a las transcripciones del pensamiento en voz alta de los estudiantes)
- Efectuar tabulaciones de los resultados en base a las redes sistémicas.
- Obtener triangulaciones de los datos obtenidos a través del pensamiento en voz alta de los educandos y la literatura empleada en nuestra investigación.

En cuanto a la recolección de datos. Tres investigadoras trabajan con 10 estudiantes por establecimiento. Una investigadora seleccionaba a los estudiantes según la media del grupo curso en cuanto a sus calificaciones en Educación Matemática.

Los alumnos seleccionados (10) acompañaban a la investigadora, los cuales permanecían en el patio o en una sala aparte, con la segunda investigadora. Las investigadoras contaban a los estudiantes que debían hacer al momento de enfrentarse al instrumento de evaluación.

La tercera entrevistadora llama a cada uno de los estudiantes y realizan las situaciones problemáticas en una sala, sin distractores (ruidos, otras personas, etc).

La entrevistadora se sienta a lado del estudiante para realizar las preguntas. Sobre la mesa hay una grabadora y frente al estudiante una cámara que filma lo que hace el alumno.

El resto de estudiantes que esperan su turno en compañía de las investigadoras N° 1 y N°2, los cuales no pudieron inferir las respuestas del instrumento aplicado, puesto que no tenían contacto con los estudiantes que habían realizado la evaluación.

Este proceso se llevo a cabo en los 6 establecimientos municipalizados que utilizamos para aplicar el instrumento.

En la etapa de recolección de información se nos presentaron variadas dificultades y limitación las que serán mencionadas a continuación:

- Al momento de obtener la media del promedio de cada curso se seleccionaron 5 estudiantes que estuviesen sobre la media del curso y 5 bajo la media del curso. En ocasiones sucedió que algunos de estos estudiantes no asistieron a clases el día de la selección lo que provoco, escoger a otro estudiante que tuviese un promedio cercano al estudiante que faltó a clases.
- Paros de los establecimientos municipalizados a causa de la deuda histórica. Esto nos retraso en variadas ocasiones, ya que asistíamos al establecimiento y por estar en paro, los estudiantes no asistían a clases.
- Ensayos de prueba SIMCE. En algunos establecimientos no se nos permitió aplicar el instrumento de evaluación puesto que los alumnos de 4to año básico realizaba ensayo SIMCE y los profesores consideraban que estaban estresados los estudiantes y no rendirían de forma correcta en nuestra evaluación.

A causa de estas limitantes el proceso fue de recolección de la información demoró más de lo estipulado.

Capítulo IV
Presentación de Resultados

7. Análisis de datos

Los resultados presentados a continuación corresponden a la obtención de datos a entregado a por la aplicación del instrumento de evaluación. Las explicaciones referidas a cada pregunta realizada por los estudiantes.

Las respuestas de los estudiantes a través de la técnica usada del pensamiento en voz alta fueron transcritas, analizadas y categorizadas en distintos grupos. Estas categorías de levantan a partir del discurso de los estudiantes, puesto que son las respuestas que nos entregan los alumnos en la búsqueda de una posible solución.

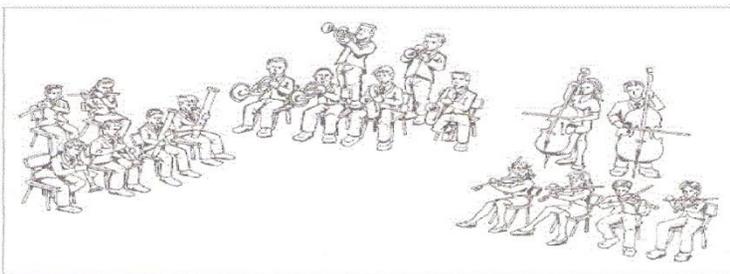
Las categorías corresponden a las estructuras aritméticas tanto aditivas como multiplicativas y las acciones que conllevan a la utilización de estas.

A continuación se presentan las categorías utilizadas por nuestros estudiantes.

- Multiplica
- Multiplica directo
- Suma
- Suma iterada
- Resta
- Ensayo y error
- Dividir
- Reparto equitativo
- Cuenta
- Dibuja sobre la matriz
- Dibuja fuera la matriz
- No explicita operación
- No arroja información.
- **Multiplica:** El alumno multiplica diversos números para llegar al posible resultado.

Esquema N° 19

5.- Francisco está mirando este dibujo de una orquesta. Para saber cuántos músicos tiene la orquesta, se fija que hay grupos de 6 integrantes.
¿Cuál de las siguientes operaciones permite calcular el número de músicos que tiene la orquesta?



A. $6 : 3$
 B. $6 \cdot 3$
 C. $6 + 3$
 D. $6 \cdot 6$

$6 \times 6 = 36$
 $6 : 3 = 2$
 $6 \times 1 = 6$
 $6 \times 2 = 12$
 $6 \times 3 = 18$
 $6 \times 4 = 24$
 $6 \times 5 = 30$
 $6 \times 6 = 36$

$6 \times 3 = 18$
 $6 \times 3 = 18$
 $6 \times 3 = 18$
 $6 \times 3 = 18$

$6 + 6 = 12$
 $6 + 6 = 12$
 $6 + 6 = 12$
 $6 + 6 = 12$

- **Multiplica Directo:** El alumno desarrolla la operación como producto cartesiano (3 x 2).

Esquema N° 20

6.- En una bolsa de arroz, aparecen las siguientes instrucciones: "Para preparar una taza de arroz, se deben usar 2 tazas de agua". ¿Cuántas tazas de agua se deben usar para preparar 3 tazas de arroz?

A. 2
 B. 6
 C. 5
 D. 3

$2 \times 3 = 6$

- **Suma:** El alumno suma diversos números para llegar al posible resultado.

Esquema N° 21

6.- En una bolsa de arroz, aparecen las siguientes instrucciones: "Para preparar una taza de arroz, se deben usar 2 tazas de agua". ¿Cuántas tazas de agua se deben usar para preparar 3 tazas de arroz?

A. 2
 B. 6
 C. 5
 D. 3

$6 \times 6 = 36$

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 2 \\ \hline 5 \end{array}$$

- **Suma Iterada:** El alumno desarrolla una suma repetida del multiplicando o multiplicador.

Esquema N° 22

6.- En una bolsa de arroz, aparecen las siguientes instrucciones: "Para preparar una taza de arroz, se deben usar 2 tazas de agua". ¿Cuántas tazas de agua se deben usar para preparar 3 tazas de arroz?

A. 2
 B. 6
 C. 5
 D. 3

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ + 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

- **Resta:** El alumno realiza una resta para desarrollar su ejercicio.

Esquema N° 23

4.- En un consultorio, se entregan mensualmente 2 kilos de leche a cada niño menor de 5 años.
Una familia tiene 3 hijos menores de 5 años.
¿Cuántos kilos de leche recibe esta familia cada mes?

A. 10 kilos.
 B. 6 kilos.
 C. 3 kilos.
 D. 2 kilos.

$$\begin{array}{r} 12 \\ - 6 \\ \hline 16 \end{array}$$

- **Ensayo y Error:** El alumno prueba con las alternativas para obtener una posible solución.

Esquema N° 24

3.- ¿Cuál de los siguientes problemas podría resolver Ricardo multiplicando 6 por 12?

A. Tengo 6 platos con 12 galletas cada uno. ¿Cuántas galletas tengo en total?
B. Tengo 12 lápices de colores en mi estuche y presto 6. ¿Cuántos me quedan?
C. Tengo 6 autitos rojos y 12 azules. ¿Cuántos autos tengo en total?
D. Tengo 12 bolitas y las reparto entre mis 6 amigos. ¿Cuántas bolitas son para cada uno?

me quedan 72 galletas
tengo 18 autitos
bolitas pers cada uno

ronder

$$\begin{array}{r} 12 \times 6 \\ 72 \\ + 6 \\ \hline 18 \end{array}$$

- **Divide:** El alumno realiza una descomposición que consiste en averiguar cuántas veces un número (el divisor) está contenido en otro número.

Esquema N° 25

4.- En un consultorio, se entregan mensualmente 2 kilos de leche a cada niño menor de 5 años.
Una familia tiene 3 hijos menores de 5 años.
¿Cuántos kilos de leche recibe esta familia cada mes?

A. 10 kilos.
B. 6 kilos.
C. 3 kilos.
 D. 2 kilos.

$$\begin{array}{r} 2 \times 12 \\ 24 : 3 = 8 \\ 0 \end{array}$$

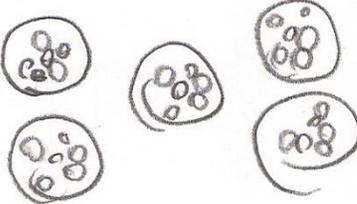
$$\begin{array}{r} 24 : 12 = 2 \\ 0 \end{array}$$

- **Reparto Equitativo:** El alumno reparte en iguales cantidades un mismo número.

Esquema N° 26

7.- Una niña le da 6 caramelos a cada uno de sus 5 amigos y le sobran 2.
¿Cuántos caramelos tenía?

A. 32
B. 8
C. 13
D. 28



- **Cuenta:** El alumno cuenta de 1 en 1, 2 en 2, 5 en 5, etc. Cuenta y escribe el número en cada triángulo de la figura.

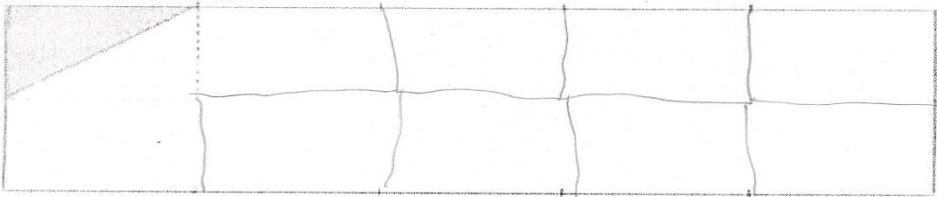
Esquema N° 27

A: Lee la pregunta 8
I: ¿Qué crees tú que tendríamos que hacer en esta pregunta?
A: (cuenta de 2 en 2) son 20 banderas.

- **Dibuja sobre la Matriz:** El alumno desarrolla el problema al interior de la figura establecida. (rectángulo).

Esquema N° 28

8.- Pablo cortó banderitas en forma de triángulo para adornar la sala.



¿Para cuántas le alcanzó si usó un papel como el del dibujo y las banderitas son del tamaño del triángulo?

Muestra cómo llegaste a tu respuesta. Puedes hacer cálculos o ayudarte dibujando.

0 cuadrados

- **Dibuja fuera la Matriz:** El alumno desarrolla el problema fuera de la figura establecida. (rectángulo).

Esquema N° 29

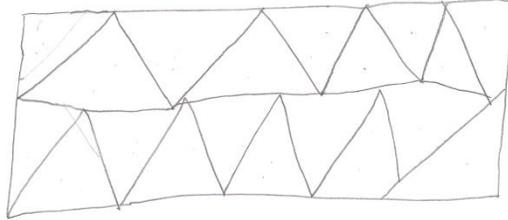
8.- Pablo cortó banderitas en forma de triángulo para adornar la sala.



¿Para cuántas le alcanzó si usó un papel como el del dibujo y las banderitas son del tamaño del triángulo?

Muestra cómo llegaste a tu respuesta. Puedes hacer cálculos o ayudarte dibujando.

$\frac{8 \times 2}{16}$



Salen 19 triángulos

- **No Explícita Operación:** El alumno entrega el resultado, (correcto o incorrecto), pero no muestra la operación que realiza para llegar a su posible solución.

Esquema N° 30

1.- En la siguiente multiplicación, ¿qué número está tapado?

$$8 \cdot \boxed{10} = 80$$

A. 0
 B. 1
 C. 8
 D. 10

- **No Arroja Información:** El alumno no responde la pregunta. No llega a ningún resultado.

A: lee pregunta dos...
 He . sumar (10seg.) ¿Tengo que sumar seis mas seis?...¡No!... voy a pasar a la otra.

7.1 Análisis de los resultados obtenidos

Debemos destacar que a través de los resultados obtenidos a partir de los análisis propuestos, realizamos la confección de una tabla de dificultad, la cual nos señala y nos permite clasificar cada una de las preguntas pertenecientes a nuestro instrumento de evaluación. Esta clasificación en cuanto a los niveles de dificultad se llevo a cabo para facilitar la clasificación de las preguntas en cuanto a los resultados que se obtuvieron, además para presentar de forma ordenada la presentación de los análisis y los resultados.

Tabla N° 1

N°	Niveles de dificultad de las preguntas	Preguntas incorrectas del total del instrumento
1	Nivel bajo de dificultad	0 a 15
2	Nivel intermedio de dificultad	16 a 30
3	Nivel alto de dificultad	31 a 61

A continuación se entregará una definición de cada uno de los niveles de dificultad para que se comprenda el porqué, de la clasificación de las preguntas según sus respuestas erróneas.

Nivel bajo de dificultad

El nivel bajo de dificultad corresponde a la situación en que las preguntas resueltas por los estudiantes posean entre 0 a 15 respuestas incorrectas. Además se consideran erróneos, los casos en que los alumnos no responden la pregunta, esto se debe a que los alumnos que no responden, no son capaces de desarrollar de ninguna forma la situación planteada, no comprenden ni plantean procedimientos para solucionarla.

Tabla N° 2

Total Respuestas Correctas	Total Respuestas Incorrectas	No Responde
54	5	2

Nivel Intermedio de dificultad

El nivel intermedio de dificultad corresponde a la situación en que las preguntas resueltas por los estudiantes posean entre 16 a 30 respuestas incorrectas. Además se consideran también erróneos, los casos en que los alumnos no responden la pregunta, esto se debe a que los alumnos que no responden, no son capaces de desarrollar de ninguna forma la situación planteada, no comprenden ni plantean procedimientos para solucionarla.

Tabla N° 3

Total Respuestas Correctas	Total Respuestas Incorrectas	No Responde
38	16	7

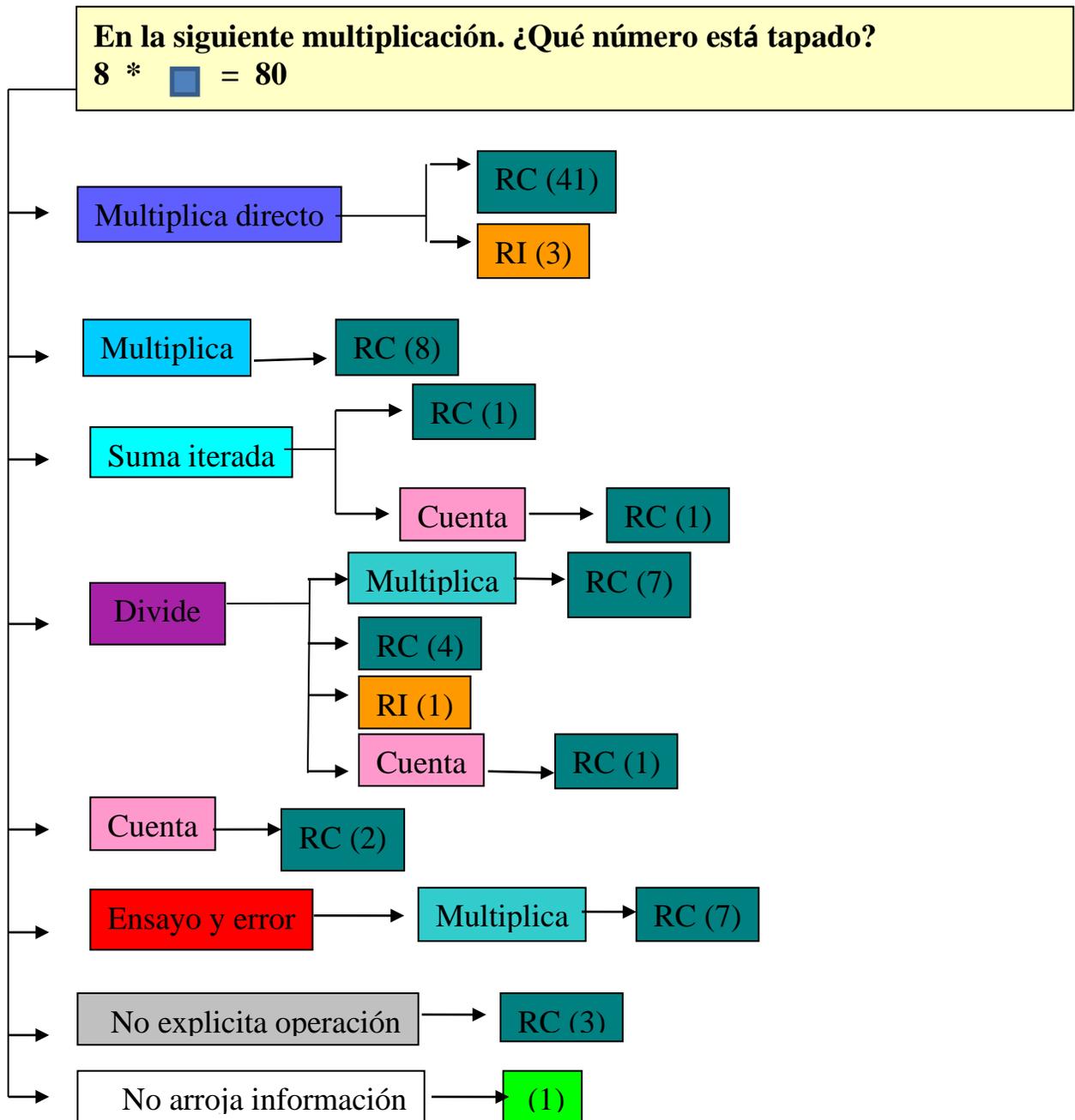
Nivel Alto de dificultad

El nivel alto de dificultad corresponde a la situación en que las preguntas resueltas por los estudiantes posean entre 31 a 61 respuestas incorrectas. Además se consideran también erróneos, los casos en que los alumnos no responden la pregunta, esto se debe a que los alumnos que no responden, no son capaces de desarrollar de ninguna forma la situación planteada, no comprenden ni plantean procedimientos para solucionarla.

Tabla N° 4

Total Respuestas Correctas	Total Respuestas Incorrectas	No Responde
23	33	5

El contenido de la pregunta se indica a continuación:



Esquema N° 31

En la **tabla N° 5**, se sintetiza la información acumulada en cuanto a los términos de tipologías encontradas (categorías a partir de las explicaciones de los alumnos) y a la frecuencia de las mismas en los protocolos analizados

Pregunta Número 1		Individuos identificados dentro de las categorías		No Responde	N° de alumnos por categoría
Categorías		Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas		
1.1.- Multiplica Directo		2, 3, 4, 6, 8, 9, 13, 15,16,17,18,19,20,1,24, 25, 26,29, 30, 31, 32, 34, 35, 38, 39, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 53, 55, 57, 58, 59, 61	36, 37, 56		44
1.2.- Multiplica		10			1
1.3.- Suma Iterada		43, 60			2
	Cuenta	54			1
1.4.- Cuenta	De 10 en 10	28			1
1.5.- Divide		11, 23, 33	5		4
	Multiplica	12, 52			2
	Cuenta	22			1
1.6.-Ensayo y error	Multiplica directo	14, 44			2
1.7.- No Explicita Operación		7, 27			2
1.8.- No Arroja Información				1	1

Al observar el esquema N° 31 y tabla N° 5, se distinguen 8 categorías troncales, las cuales utilizan los alumnos al momento de resolver una situación matemática, en este caso se presenta una situación de multiplicación, donde uno de los factores se encuentra incógnito, por lo cual deben buscarlo, a partir de que ya conocen su resultado.

Para llegar a una posible solución, los estudiantes utilizan una o variadas vías para obtener un resultado frente a la pregunta planteada.

La pregunta a la cual los alumnos se enfrentan tiene un nivel de complejidad bajo, puesto que de un total de 61 alumnos una alta cantidad de ellos, correspondiente a 57 educandos obtiene una respuesta correcta frente a la situación que se plantea.

Se puede deducir sobre la en base del resultado que una gran cantidad, equivalente a 44 de los estudiantes, tiene conocimiento de las tablas de multiplicar, esto de acuerdo a la información que arroja el análisis de esta pregunta, puesto que en su gran mayoría los alumnos obtienen una respuesta correcta en esta situación utilizando como principal vía de resolución, la multiplicación directa.

La pregunta requiere que los alumnos realicen los procesos de buscar, comprender y calcular para poder así resolver eficientemente dicha pregunta.

En la pregunta que plantea “qué número está tapado” en la cual los estudiantes deben buscar la forma indicada de obtener una solución, comprender el proceso y finalmente resolverlo, utilizando la operación aritmética de multiplicación, la gran mayoría de las respuestas a la ya mencionada pregunta fueron correctas, siendo la minoría correspondiente a 4 estudiantes los que obtienen respuesta incorrecta, infiriendo que la causa de los errores de los estudiantes es netamente por falta del conocimiento de las tablas de multiplicar o bien les resulta más fácil utilizar otra ruta o vía para obtener un resultado posiblemente correcto.

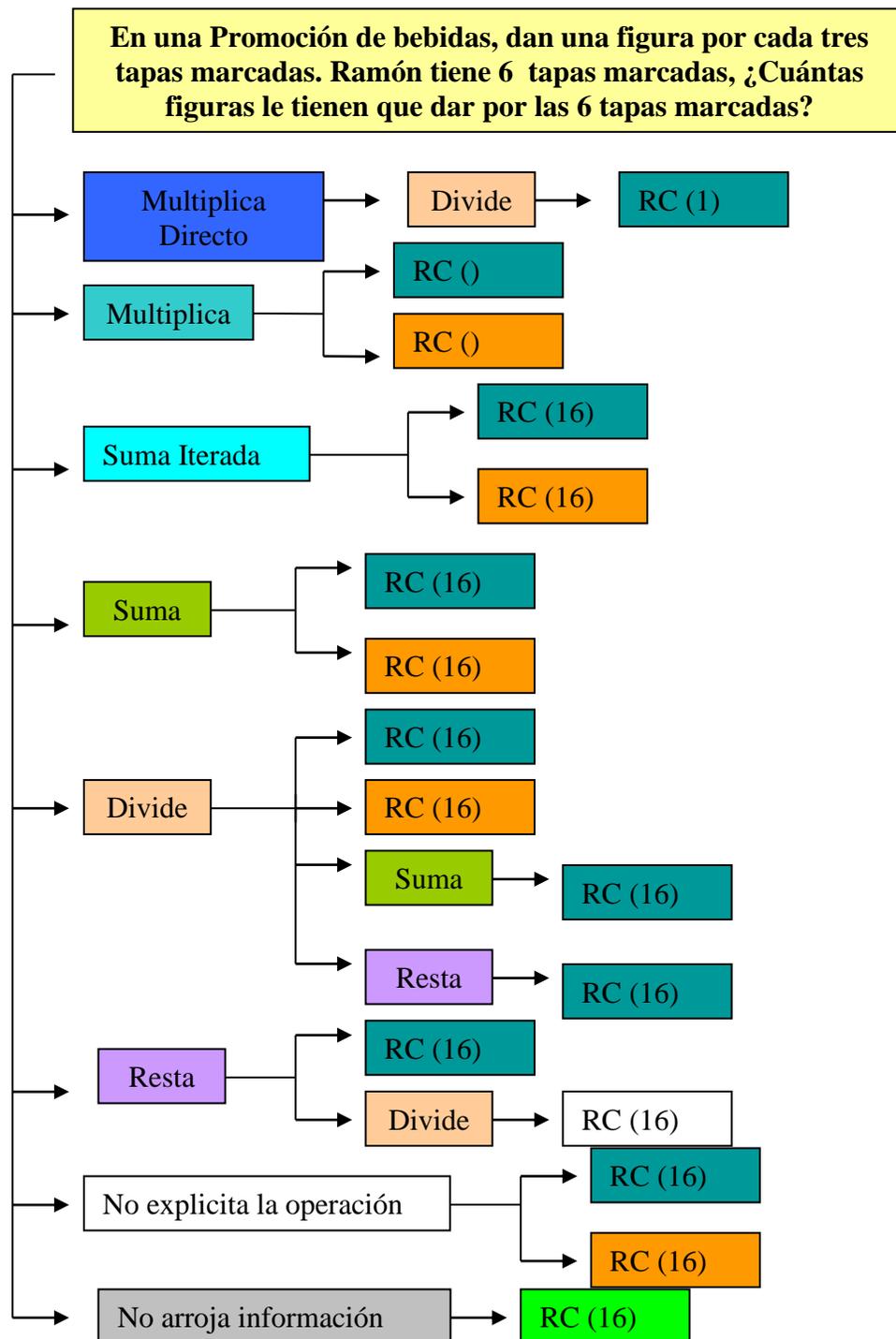
Por otro lado se observa que 7 de los alumnos, resuelven esta situación con la operación inversa a la multiplicación (división) obteniendo un resultado correcto, no obstante un estudiante realiza la operación de división de manera errónea, utilizando números incorrectos para obtener un posible resultado.

La situación que se plantea en la pregunta N° 1, es específica, por esta razón para obtener un resultado positivo se requiere tener conocimiento de las tablas de multiplicar. Sobre la base de los análisis, la mayor cantidad de los estudiantes utiliza la vía de la multiplicación y solo son 3 los que obtienen una respuesta incorrecta utilizando la misma ruta que utilizan los que en su mayoría obtienen respuesta correcta (multiplicación directa).

En el caso de esta situación la multiplicación esta explicita en el enunciado los alumnos tienen el producto de la multiplicación expuesto, y esto hace que los estudiantes que no tengan memorizadas las tablas de multiplicar puedan optar por observar y desarrollar otras alternativas (ensayo y error) y comprobar que el resultado de cada opción puede ser mayor o menor al que se les presenta en el enunciado de la situación hasta obtener la alternativa correcta.

Red Sistémica N° 2

El contenido de la pregunta número 2 se indica a continuación:



Esquema N° 32

En la **tabla N° 6**, se sintetiza la información acumulada en términos de tipologías encontradas (categorías a partir de las explicaciones de los alumnos) y frecuencia de las mismas en los protocolos analizados.

Pregunta Número 2		Individuos identificados dentro de las categorías		No Responde	N° de alumnos por categoría
		Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas		
1.1.- Multiplica Directo			19, 26, 45		3
	Divide		14		1
1.2.- Multiplica		2, 6, 12	11, 29,		5
1.3.- Suma Iterada		48	57		2
1.4.- Suma		13,15,16,18,31,50 ,51,53	10, 40, 46, 54, 59		13
1.5.- Divide		4, 17, 20, 32, 34, 35, 37, 38,39, 42 44, 47, 58, 60, 61	33, 41,49, 52, 55, 56		21
	Suma	28			1
	Resta		43		1
1.6.- Resta		30			1
	Divide	36			1
1.7.- No Explicita Operación		1,5, 7, 9 ,22, 24,25, 27	3, 23		10
1.8.- No Arroja Información				8, 21	2

Al observar los resultados de los alumnos expresados en el esquema N° 32 y la tabla N° 6, se distinguen claramente 8 categorías troncales que los estudiantes utilizaron para obtener una posible solución.

Esta pregunta requería que los estudiantes al momento de desarrollar esta situación lo hicieran a través de la multiplicación. Sin embargo se observa que en nuestra primera categoría troncal que es multiplica directo; podemos observar que 3 estudiantes utilizaron esta vía para resolver el problema en cuestión, obteniendo un resultado correcto. Estos alumnos utilizan el producto cartesiano para resolver este ejercicio.

Se puede intuir, según Orozco (1996) describe los cambios que ocurren en la mente del alumno, al realizar el proceso de multiplicación directa, el ya tiene adquirida en sus capacidades la operación aritmética de la multiplicación. Haciendo referencia a Orozco quien dice; que el educando al dejar de utilizar procedimientos aditivos comienza para multiplicar.

A continuación; en el siguiente recuadro aparece un ejemplo de esta categoría resuelto por los estudiantes.

Esquema N° 33

2.- En una promoción de bebidas, dan una figura por cada tres tapas marcadas. Ramón tiene 6 tapas marcadas, ¿cuántas figuras le tienen que dar por las 6 tapas marcadas?

A. 3
B. 9
C. 18
D. 2

$3 \cdot 1 = 3$
 $3 \cdot 2 = 6$

Además llama la atención que por el contrario de lo descrito anteriormente y en la misma ruta o vía de obtención de una solución; solo tres estudiantes obtuvieron un resultado incorrecto. Esto indica que los números que multiplicaron no fueron correctos, como es el caso de los estudiantes 19 y 26 que multiplico 3 x 6 y su resultado fue 18.

Aquí podemos observar que además de utilizar los números incorrectos para multiplicar el estudiante no sabía las tablas de multiplicación. Muchos autores afirman que es fundamental la memorización de las tablas de multiplicar para poder realizar de forma correcta esta operación y además ahorran tiempo en la obtención del cálculo.

Lo que nos sorprende al analizar estos resultados es que la mayor cantidad de estudiantes resolvió la situación matemática con la operación inversa a la multiplicación, es decir la división. Esta corresponde a la quinta categoría fue la ruta más usada como se mencionó anteriormente con un equivalente a 22 estudiantes de los cuales 15 de ellos acertaron en sus respuestas.

Esquema N° 34

2.- En una promoción de bebidas, dan una figura por cada tres tapas marcadas. Ramón tiene 6 tapas marcadas, ¿cuántas figuras le tienen que dar por las 6 tapas marcadas?

A. 3
 B. 9
 C. 18
 D. 2

$6 : 2 = 3$

$6 : 1 = 6$
 $6 : 2 = 3$
 $6 : 3 = 2$

En este ejemplo observamos que el estudiante utilizó el troncal de la división para resolver su ejercicio y obtuvo respuesta errónea ya que dividió los números incorrectos.

Sin embargo 15 estudiantes que utilizaron esta ruta la desarrollaron de forma correcta y obtuvieron buenos resultados.

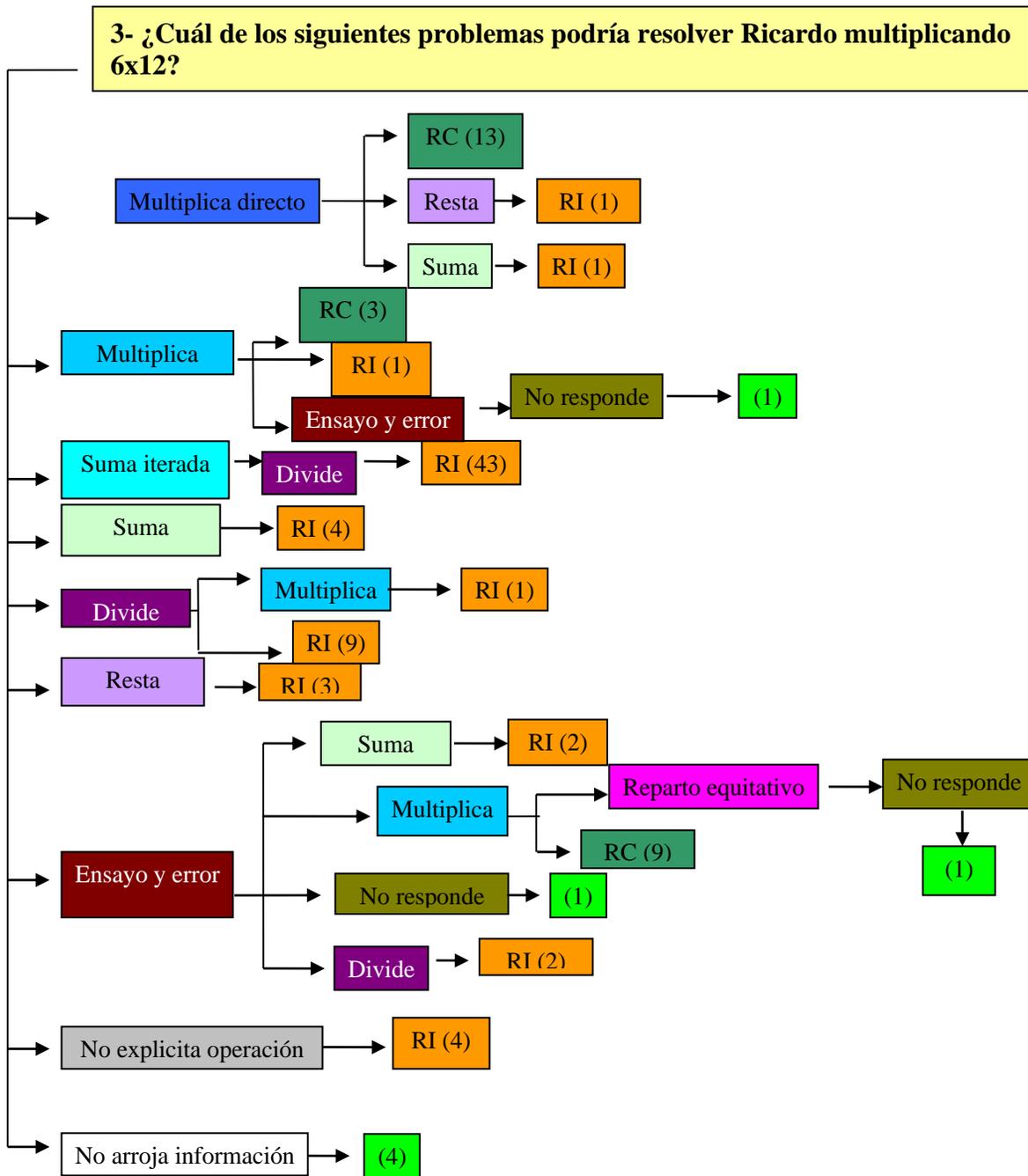
Cabe mencionar que nuestra última categoría corresponde a los estudiantes que no arrojan información ya que no resolvieron el ejercicio, por motivos de:

- No entender la problemática
- encuentran muy difícil la situación, para resolver.

Sin embargo en esta última categoría y correspondiente a la pregunta número 2 de nuestro instrumento de evaluación nos encontramos tan solo con 2 estudiantes.

Se deduce según el análisis que arroja esta pregunta que posee un nivel intermedio de complejidad (según nuestros estándares de medición) puesto que 21 de nuestros estudiantes obtuvieron resultados incorrectos al momento de resolver esta situación problemática y 38 de ellos no presentan un mayor grado de dificultad para desarrollar y obtener buenos resultados. Ya que estos utilizaron diversas vías que les fueron factibles en la solución del ejercicio logrando buenos resultados.

El contenido de la pregunta se indica a continuación:



Esquema N° 35

La **tabla N° 7**, sintetiza la información acumulada en términos de tipologías encontradas (categorías a partir de las explicaciones de los alumnos) y frecuencia de las mismas en los protocolos analizados de la pregunta número 3.

Pregunta Número 3		Individuos identificados dentro de las categorías		No responde	N° de alumnos por categoría
Categorías		Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas		
1.1- Multiplica directo			7, 17, 20, 26, 31, 38, 39, 41, 42, 47, 50, 52, 53		13
	suma			15	1
		Resta		10	1
1.2- Multiplica			30, 34, 35		11
	Ensayo y error			3	1
1.3.- Suma iterada	Divide			43	1
1.4.- Suma				2, 8, 49, 58	4
1.5.- Divide				1, 19, 21, 25, 46, 51, 55, 56, 57.	9
	Multiplica			32	1
1.6.- Resta				18, 54, 59	3
1.7.- Ensayo y error	Multiplica		4, 13, 28, 29, 40, 44, 45, 48, 60		9
		Reparto equitativo			9
	Suma			14, 12.	2
	Divide			16, 46.	2
	No responde				24
1.8.- No Explicita la Operación				5, 22, 36, 37.	4
1.9.- No Arroja Información				6, 23, 27, 33	4

En el esquema N° 35 y tabla N° 7 se presentan 9 rutas utilizadas por los alumnos para llegar a una posible respuesta correcta, de estas rutas al igual que en las situaciones anteriores se desprenden diversos caminos que los educandos utilizan para obtener un resultado.

Al observar la información expresada en el esquema 35 y tabla N° 7, se observa que la situación expuesta en la tercera pregunta tiene un nivel de complejidad mayor para los estudiantes que las otras situaciones del instrumento aplicado. Esto se infiere ante la gran cantidad de alumnos correspondiente a 37 alumnos que no responden correctamente esta pregunta. Más de la mitad de los alumnos entrevistados erraron al responder correctamente esta situación.

Se deduce que se debe a que gran parte de los estudiantes confunden la multiplicación con otra operación matemática, motivo por el cuál sus respuestas son erróneas.

Como la pregunta lo indica el alumno debe señalar entre varias situaciones cuál es la que se resuelve con una multiplicación, los estudiantes que obtienen una respuesta errónea, en su gran mayoría confunden la situación multiplicativa con una de división (operación inversa a la multiplicativa).

Por otro lado llama la atención que los educandos identifiquen una situación multiplicativa, con una de división, puesto que se debe considerar que los alumnos deben tener claro en este nivel, que en una operación de multiplicación, el producto siempre será mayor al multiplicando, no así en el caso de la división, donde el cociente es menor que el dividendo.

Sin embargo, despierta curiosidad que los estudiantes la relacionen con la operación inversa a la multiplicativa (división), se esperaba que sus respuestas tuvieran una mayor inclinación hacia una suma iterada, puesto que es la forma de introducir la operatoria multiplicativa.

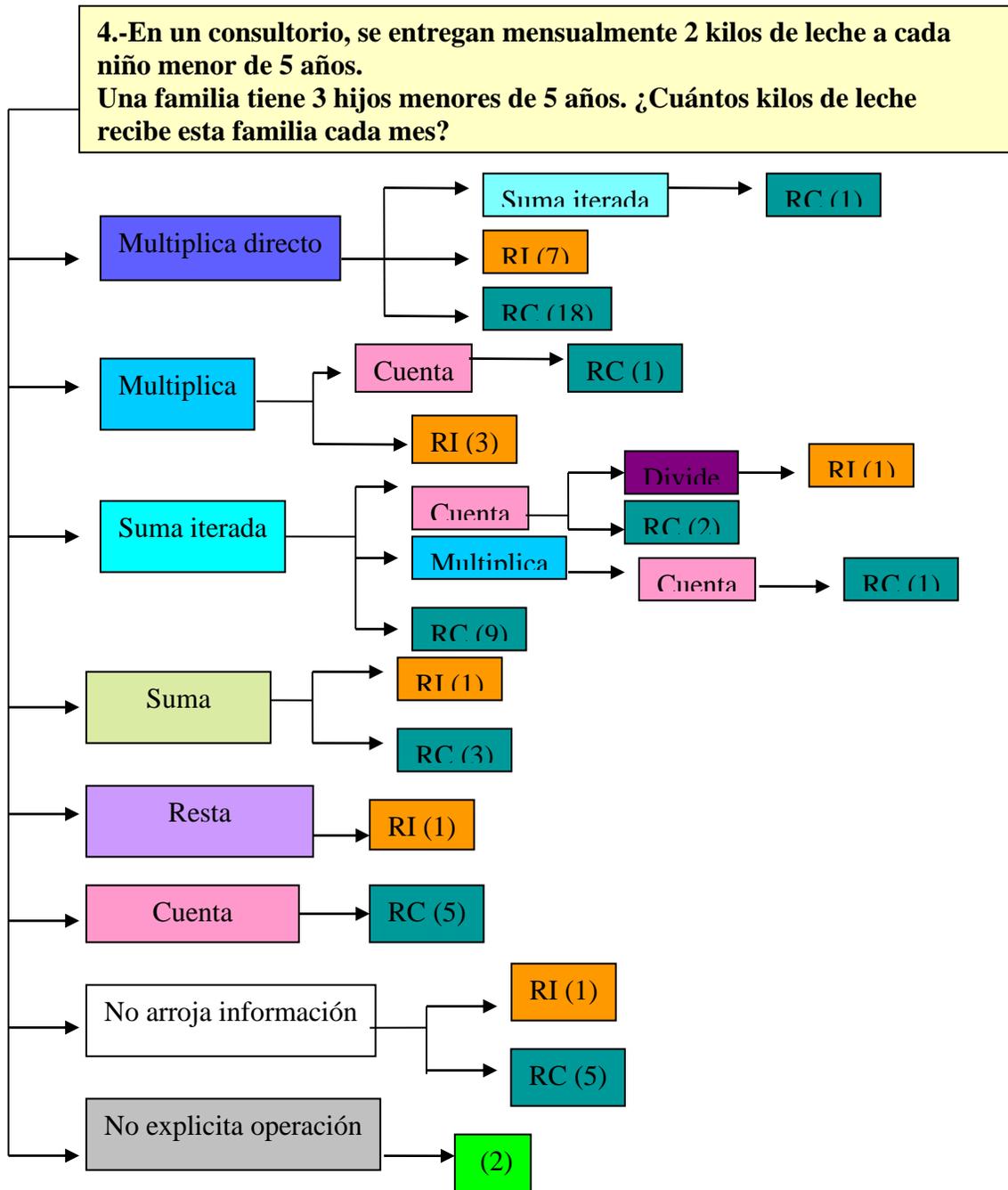
No obstante los educandos que tienen un resultado correcto, en su mayoría equivalente a 13 estudiantes utilizan solo una ruta, estos alumnos multiplican directo 6×12 logrando el producto que corresponde de la multiplicación, o en algunos casos errado, lo que no influye en su resultado, puesto que el alumno debe identificar una situación multiplicativa, entre otras que no lo son. En estas situaciones se deduce, que la dificultad que presentan los educandos es el escaso manejo de las tablas de multiplicar, lo que los imposibilitaría en obtener una respuesta correcta, si se les solicitara, pero como no es el caso y los alumnos si reconocen la operación multiplicativa, entre las otras obtiene buenos resultados. Sin embargo, los alumnos debiesen desarrollar correctamente una multiplicación, puesto que es un contenido que se conoce del año anterior. Cuando los alumnos que resuelven la multiplicación directa de 6×12 y tienen el producto de esta

multiplicación, observan o desarrollan las otras alternativas (ensayo y error) y reconocen que los resultados de las otras situaciones son distintos o inclusive menores al de la multiplicación que realizan anteriormente, entonces descartan las alternativas anteriores y marcan la respuesta correcta.

Sin embargo se debe señalar que ningún alumno reconoce la situación multiplicativa solo leyendo, puesto que todos los educandos desarrollan la multiplicación de la pregunta, para conocer el resultado de esta y así identificarla entre las otras situaciones presentes.

Por otro lado llama la atención que alumnos que logran llegar a la respuesta correcta sin mayor dificultad y muestran habilidad en la operatoria, no sean capaces de explicitar la ruta utilizada o la operación que hacen para llegar al resultado de la situación planteada.

El contenido de la pregunta se indica a continuación:



Esquema N° 36

La **tabla N° 8**, sintetiza la información acumulada en términos de tipologías encontradas (categorías a partir de las explicaciones de los alumnos) y frecuencia de las mismas en los protocolos analizados de la pregunta número 4.

Pregunta Número 4		Individuos identificados dentro de las categorías		No responde	N° de alumnos por categoría	
Categorías		Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas			
1.1- Multiplica directo		2, 12, 13, 14, 24, 29, 32, 36, 38, 39, 44, 45, 47, 48, 50, 53, 55, 60	19, 26, 33, 34, 37, 40, 57		25	
	Suma iterada	42			1	
1.2- Multiplica			16, 35, 43.		3	
	Cuenta	5			1	
1.3.-Suma iterada		8, 17, 28, 31, 41, 51, 56, 59, 61.			9	
	Multiplica	Cuenta	15		1	
	Cuenta		1, 52			2
		Divide		4		1
1.4.- Suma		11, 18, 25.	10		4	
1.5.- Resta			54		1	
1.6.- Cuenta de 2 en 2		20, 22, 27, 46, 49.			5	
1.7.- No Explicita la Operación		6, 7, 23, 30, 3	58		6	
1.8.- No Arroja Información				21, 9	2	

Al observar el esquema 36 y tabla N° 8 se distinguen claramente 8 categorías troncales, utilizadas como rutas o vías para solucionar la situación en cuestión.

Tras analizar los antecedentes registrados en la toma de datos del instrumento aplicado, específicamente los obtenidos en la pregunta N° 8, se observa que los alumnos en su gran mayoría equivalente a 46 alumnos, obtienen una respuesta correcta de la situación que se les plantea. Utilizando diversas y distintas rutas para llegar a una solución, aunque

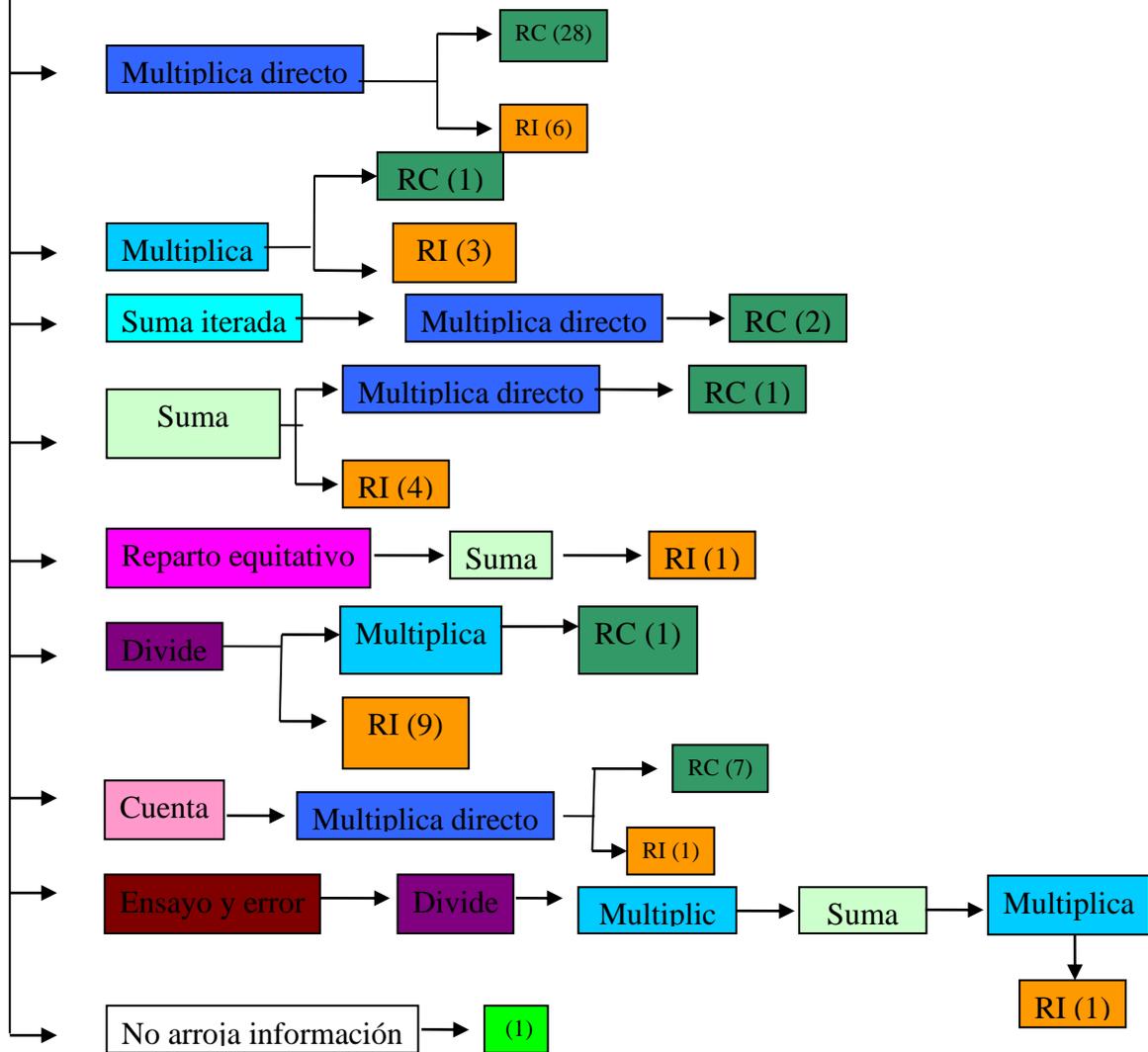
de igual forma obteniendo el mismo resultado correcto. De estos estudiantes, se observa en la tabla N° 8 que la tendencia para resolver esta situación es a través de una multiplicación directa, siendo esta la operación aritmética más usada por los alumnos para solucionar la pregunta expuesta.

Por otro lado se puede observar que casi la totalidad de los alumnos que utilizan suma iterada correspondiente a 13 estudiantes resuelven esta situación y obtienen un resultado correcto y solo uno de los estudiantes cometería un error, puesto que realiza al final de su desarrollo una división. Frente a esta situación, se intuye que el alumno no multiplica de forma correcta y obtiene un producto erróneo, nuevamente el insuficiente dominio de las tablas, lleva al alumno al error, entonces realiza su operación inversa (división), como la respuesta esta en las alternativas de la situación en cuestión, la considera correcta.

Al observar la información expresada en el esquema y tabla N° 8, se puede distinguir claramente, que los alumnos que multiplican directo, son los que más acierto y a la vez errores ejecutan. Como primer punto se concluye que los alumnos que obtienen respuestas correctas de esta situación equivalen a 18 estudiantes y utilizan esta ruta, tienen dominio de las habilidades multiplicativas, reconociendo la información del enunciado y al mismo tiempo manejando las tablas de multiplicar. Sin embargo es curioso que 7 alumnos que usan la misma ruta que los educandos que obtienen en su mayoría respuesta correcta fallen en sus respuestas, tras la información obtenida en el instrumento aplicado se observa que esto se debe al escaso manejo de las tablas de multiplicar, puesto que ese es el centro de sus errores.

El contenido de la pregunta se indica a continuación:

5- Francisco está mirando este dibujo de una orquesta. Para saber cuántos músicos tiene la orquesta, se fija que hay grupos de 6 integrantes. ¿Cuál de las siguientes operaciones permite calcular el número de músicos que tiene la orquesta?

Esquema N° 37

La **tabla N° 9**, sintetiza la información acumulada en términos de tipologías encontradas (categorías a partir de las explicaciones de los alumnos) y frecuencia de las mismas en los protocolos analizados de la pregunta número 5.

Pregunta Número 5					Individuos identificados dentro de las categorías y subcategorías		No responde	N° de alumnos por categoría
Categorías					Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas		
1.1- Multiplica directo					2,7,12,14,16,1718,20,28,31,3336,37,38,39,4344,45,47,50,5759.	10,15,29,34,4158.		28
1.2- Multlica					35	8,24,25.		4
1.2.-Suma iterada	Multiplica directo				19,54			2
1.3.- Suma						49,52,55,61		4
	Multiplica directo				11			1
1.4.- Divide						6,22,23,30,32,40,42,46,56.		9
	Multiplica				60			1
1.5.- Reparto equitativo	Suma					21		1
1.6.- Cuenta	Multiplica directo				1,4,5,9,13,48,51.	26		8
1.7.-Ensayo y error	Divide	multiplica	suma	Multiplica		3		1
1.8.- No Arroja Información							27,33.	2

En el esquema 37 y tabla N° 9 se observan claramente 8 rutas troncales, utilizadas por los alumnos, de las cuáles se desprenden otras sub rutas las que son aplicadas por estos, para obtener una posible solución de la situación planteada.

La situación presente en la pregunta N° 9 no presenta mayor complejidad para los estudiantes, puesto que la tendencia en los resultados de esta pregunta, así lo demuestran. La tabla n° 5, expresa detalladamente lo señalado. Más de la mitad de los estudiantes correspondiente a 34 de estos responden correctamente la situación matemática planteada.

Al observar detalladamente los antecedentes entregados en el esquema N° 37 y tabla N° 9, se distingue que gran parte de los alumnos equivalente a 22 alumnos responden correctamente la situación presentada en la pregunta N° 5, utilizan una ruta corta y lo hacen a través de una multiplicación directa.

Por otro lado, alumnos 6 alumnos que utilizan la misma ruta para llegar a la solución de la situación presente responden equivocadamente. Los estudiantes identifican sin dificultad, que la operación más apropiada para resolver esta situación es la multiplicación, por lo tanto comprenden apropiadamente el concepto multiplicativo, el conflicto se demuestra en la selección de datos que el estudiante realiza. No obstante de esto intuye que los educandos no tienen habilidades para identificar y reconocer los datos dentro del enunciado y debido a esto marcan una respuesta incorrecta, puesto que utilizan números erróneos para multiplicar.

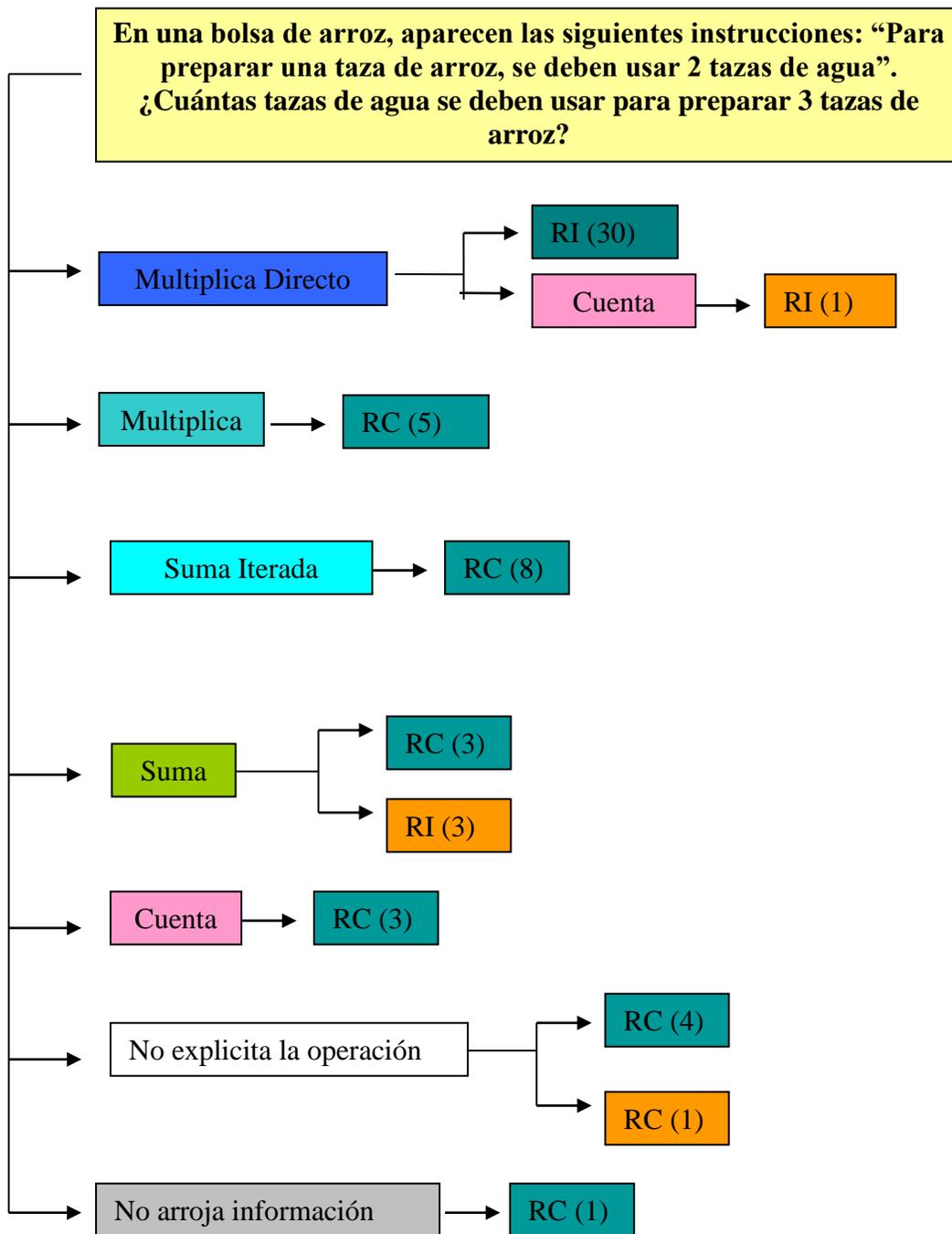
Se debe señalar que la situación expuesta en la pregunta N° 5 está acompañada de un dibujo, el cual debe utilizarse como un apoyo para solucionar esta situación. En tanto, para una parte de los alumnos fue útil, pero para otra es más bien un distractor, puesto que cuentan los dibujos y relacionan esta acción con una operación de suma, identificando ésta como su alternativa correcta.

La mayor fracción de los alumnos que responden erradamente son 22 estudiantes, confunden la operación correcta, con una división.

Llama la atención que un alumno que utiliza la ruta de ensayo y error para llegar a la solución, se equivoque, no obstante si el hubiera multiplicado de forma correcta su respuesta habría sido la misma del dibujo, ya que en la mayoría de los casos, el dibujo es utilizado para comprobar su respuesta. De esto se deduce que el alumno no sabe multiplicar correctamente, de lo contrario el resultado de su multiplicación habría estado correcto.

Red Sistémica N° 6

El contenido de la pregunta se indica a continuación:



Esquema N° 38

En la **tabla 10**, se sintetiza la información acumulada en términos de tipologías encontradas (categorías a partir de las explicaciones de los alumnos) y frecuencia de las mismas en los protocolos analizados.

Pregunta Número 6		Individuos identificados dentro de las categorías		No responde	N ° de alumnos por categoría
Categorías		Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas		
1.1.- Multiplica Directo		1,7,12,14,15,17,18, 19,20,26,29,31,32, 33,35,36, 37,38,39, 41, 42,44, 45,47,48, 50,53,55,56, 58,60	16, 40		33
	Cuenta	4			1
1.2.- Multiplica		2,6,1 , 49,57			4
1.6.- Suma Iterada		11,8, 9, 43, 51, 52, 54, 61			8
1.3.- Suma		25, 30,34,	3, 10, 59		6
1.4.- Cuenta		5,22, 46			3
1.5.-No Explicita la Operación		21, 23, 24, 28	27		5
1.6.-No arroja información				21	1

Al observar los resultados de los alumnos expresados en el esquema 38 y tabla Nº 10, se distinguen claramente 6 categorías troncales que los estudiantes utilizaron para obtener una posible solución.

La información que nos arroja la pregunta número 6 indica que más de la mitad de los estudiantes correspondiente a 33 de estos, resolvieron esta situación matemática a través de la ruta de la multiplicación directa, esto confirma que los alumnos tienen un manejo de la operatoria de la multiplicación y que además la utilizan de forma correcta ya que en esta categoría solo hubo 2 estudiantes que obtuvieron resultados incorrectos.

En el siguiente cuadro se muestra un ejemplo de un estudiante que utilizó la multiplicación directa para resolver la situación problemática n° 6.

Esquema N° 39

6.- En una bolsa de arroz, aparecen las siguientes instrucciones: "Para preparar una taza de arroz, se deben usar 2 tazas de agua". ¿Cuántas tazas de agua se deben usar para preparar 3 tazas de arroz?

A. 2
B. 6
C. 5
D. 3

$2 \times 3 = 6$

Además creemos que algunos estudiantes, equivalentes a 14 de estos, aun no manejan la operatoria de la multiplicación ya que resolvieron el ejercicio a través de la suma iterada, suma o conteo. Sabemos que en muchos establecimientos educacionales enseñan la multiplicación en un comienzo como una suma iterada para luego introducir por completo la multiplicación. En algunas ocasiones los estudiantes siguen trabajando con sumas ya que:

- Les resulta más fácil trabajar con sumas.
- No saben las tablas de multiplicar.
- No saben multiplicar.

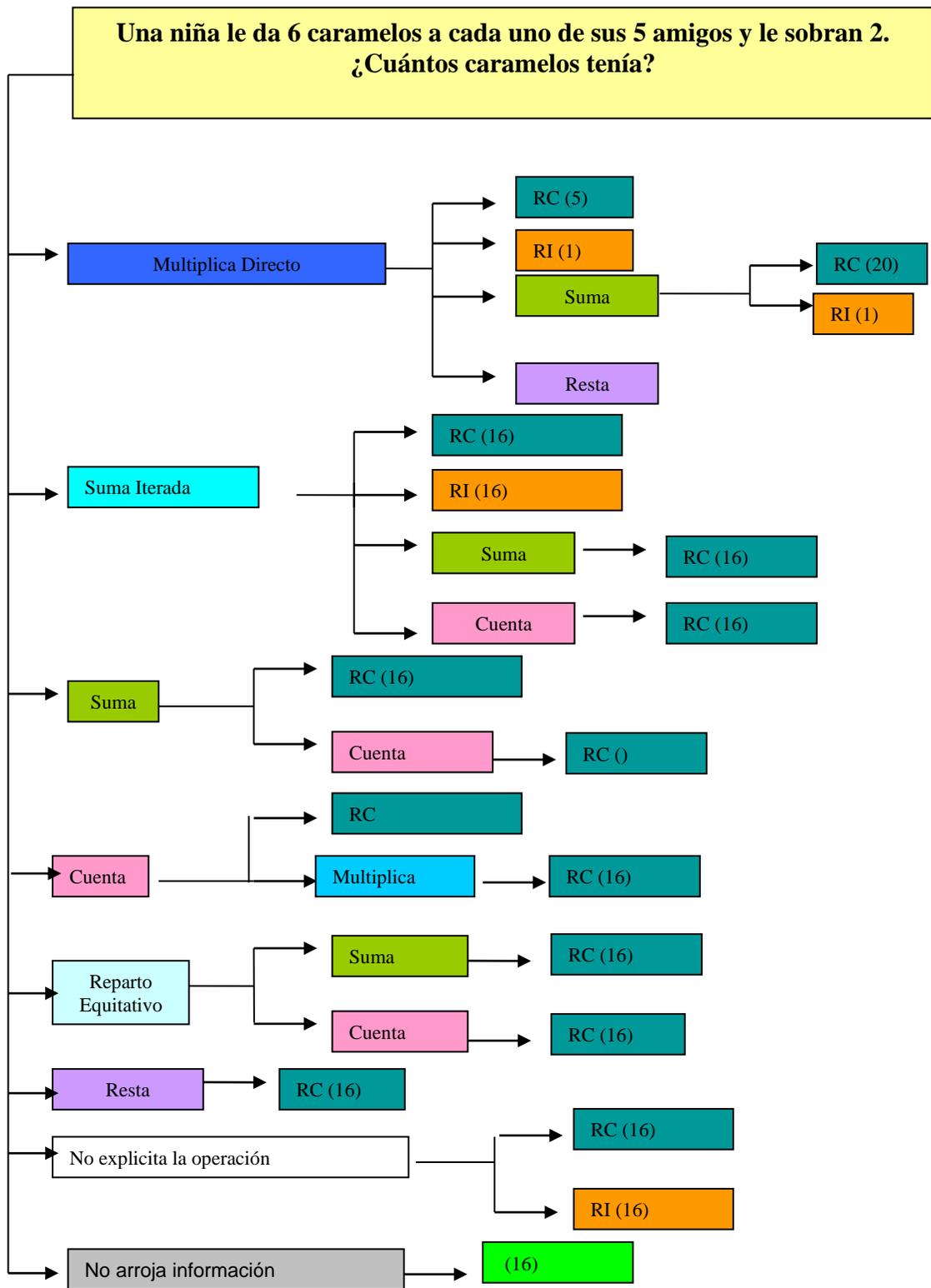
Debemos destacar que los alumnos pueden trabajar una suma iterada con números pequeños como es el caso de la pregunta seis; ya que deben multiplicar 2×3 .

En variadas ocasiones algunos estudiantes mediante la ruta de suma iterada, suma o conteo obtuvieron resultados correctos. Y cuando queremos obtener resultados, estas vías estarían correctas, pero no es nuestro caso. Ya que el objetivo de esta investigación es observar los diversos caminos o rutas viables que el universo de la muestra escogen para desarrollar las situaciones que se les presentan en el instrumento aplicado, por lo tanto ellos se encasillan en alumnos que obtuvieron resultados acertados, sin embargo la ruta escogida para desarrollar la situación matemática no es la esperada.

La pregunta número 6 nos arroja excelentes resultados, ya que independientemente de las rutas que hayan desarrollados los educandos solo hubieron 6 resultados incorrectos. Lo que nos indica que esta pregunta en especifica posee un nivel de bajo de dificultad puesto que los resultados fueron buenos y tan solo y los estudiantes trabajaron 6 vías distintas para obtener una posible solución a la situación matemática y en este caso estas rutas fueron acertadas lo que los llevó a un resultado correcto.

Red Sistémica N° 7

El contenido de la pregunta se indica a continuación:



En la **tabla 11**, se sintetiza la información acumulada en términos de tipologías encontradas (categorías a partir de las explicaciones de los alumnos) y frecuencia de las mismas en los protocolos analizados.

Pregunta Número 7		Individuos identificados dentro de las categorías		No Responde	N° de alumnos por categoría
Categorías		Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas		
		16, 20, 26, 36, 47	45		6
1.1.-Multiplica Directo	Suma	1, 2, 3, 17, 19, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 41, 4, 44, 49, 50, 53, 55, 60	56		21
	Resta	15	39		2
1.2.- Suma Iterada		54	43		2
		Suma	5, 10, 46, 51, 57, 61		6
		Cuenta	9		1
1.3.- Suma			6, 7, 27, 29, 30, 52, 58, 59		8
	Cuenta	11			1
1.4.- Cuenta		4, 24, 48			3
	Suma, Multiplica	8			1
1.5.- Reparto Equitativo	Suma	21			1
	Cuenta	14, 28			2
	Multiplica Directo	12			1
1.6.- Resta			22		1
1.7.- No Explicita Operación		23	25		2
1.8.- No Arroja Información				13, 18, 40	3

En base a los resultado obtenidos en el desarrollo de la pregunta número 7. Que correspondería según Carlos Maza Gómez a una “situación de combinación”.

Tanto en nuestra tabla y red de análisis observamos que la gran mayoría de los estudiantes, equivalente a 21 de estos, resolvieron la situación problemática a través de dos rutas.

En una primera instancia realizan una multiplicación directa; (6×5) para luego sumar los 2 caramelos que sobran.

Como aparece en el siguiente recuadro, un ejemplo obtenido de un instrumento aplicado a los estudiantes:

Esquema N° 41

7.- Una niña le da 6 caramelos a cada uno de sus 5 amigos y le sobran 2.
¿Cuántos caramelos tenía?

A. 32
 B. 8
 C. 13
 D. 28

$$\begin{array}{r} 6 \times 5 \\ \hline 30 \\ + 2 \\ \hline 32 \end{array}$$

Podemos inferir que estos estudiantes tienen adquirida la operación matemática de la multiplicación y desarrollan correctamente el producto cartesiano. Lo que implica a la perfección, según Maza una combinación.

Además debemos mencionar que en esta pregunta los alumnos utilizaron diversos caminos para obtener una posible solución, ya que aparecen las 8 categorías, como rutas viables en la solución de la situación matemática.

Inferimos que esta pregunta no presenta un grado mayor de dificultad para los educandos ya que tan solo 14 de ellos obtuvieron resultados erróneos al momento de resolver, en cambio 3 estudiantes no respondieron el ejercicio. Esto ocurre por dos grandes situaciones las cuales se van repitiendo en cada situación que analizamos.

Se infiere que los estudiantes obtiene resultados erróneos porque:

- No saben las tablas de multiplicar, ya que realizan la operación (producto cartesiano) pero obtienen un resultado incorrecto.
- No saben multiplicar, por esta razón realizan una suma iterada para resolver la operación y por ser un número más grande, se equivocan en sumar. Obteniendo un resultado incorrecto.

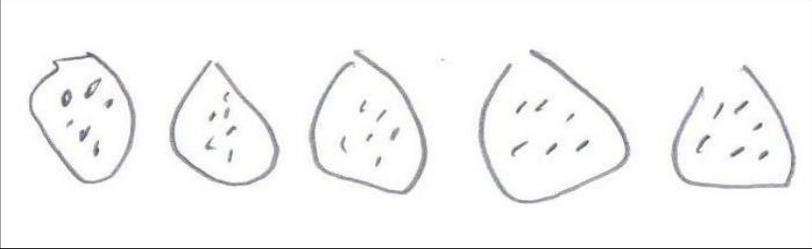
No obstante algunos de nuestros estudiantes utilizaron para resolver este ejercicio una ruta distinta a las ya mencionadas.

A continuación en el siguiente cuadro un ejemplo extraído de nuestro instrumento de evaluación.

Esquema N° 42

7.- Una niña le da 6 caramelos a cada uno de sus 5 amigos y le sobran 2.
¿Cuántos caramelos tenía?

A. 32
 B. 8
 C. 13
 D. 28



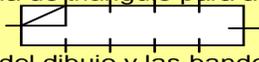
La ruta utilizada por 4 alumnos es más bien distinta a la utilizada por el resto de los estudiantes, llama la atención que estos estudiantes a través de la vía que utilizan (reparto equitativo) para llegar a una posible solución de esta situación, hayan obtenido un resultado correcto.

Inferimos que ya que los educandos como tal su nombre lo dice reparten una de las cantidades en formas iguales. Quizás no debemos desligarlos de la multiplicación pues como Neshet nos señala que los “problemas de multiplicación y de división comparten la misma estructura multiplicativa la diferencia entre unos y otros reside en la información que se muestra y en la que se oculta”. Es por esta razón que los estudiantes realizan una variedad en caminos y rutas para obtener un posible resultado. Ya que los estudiantes ven la situación matemática de distintas formas y aún así obtienen buenos resultados.

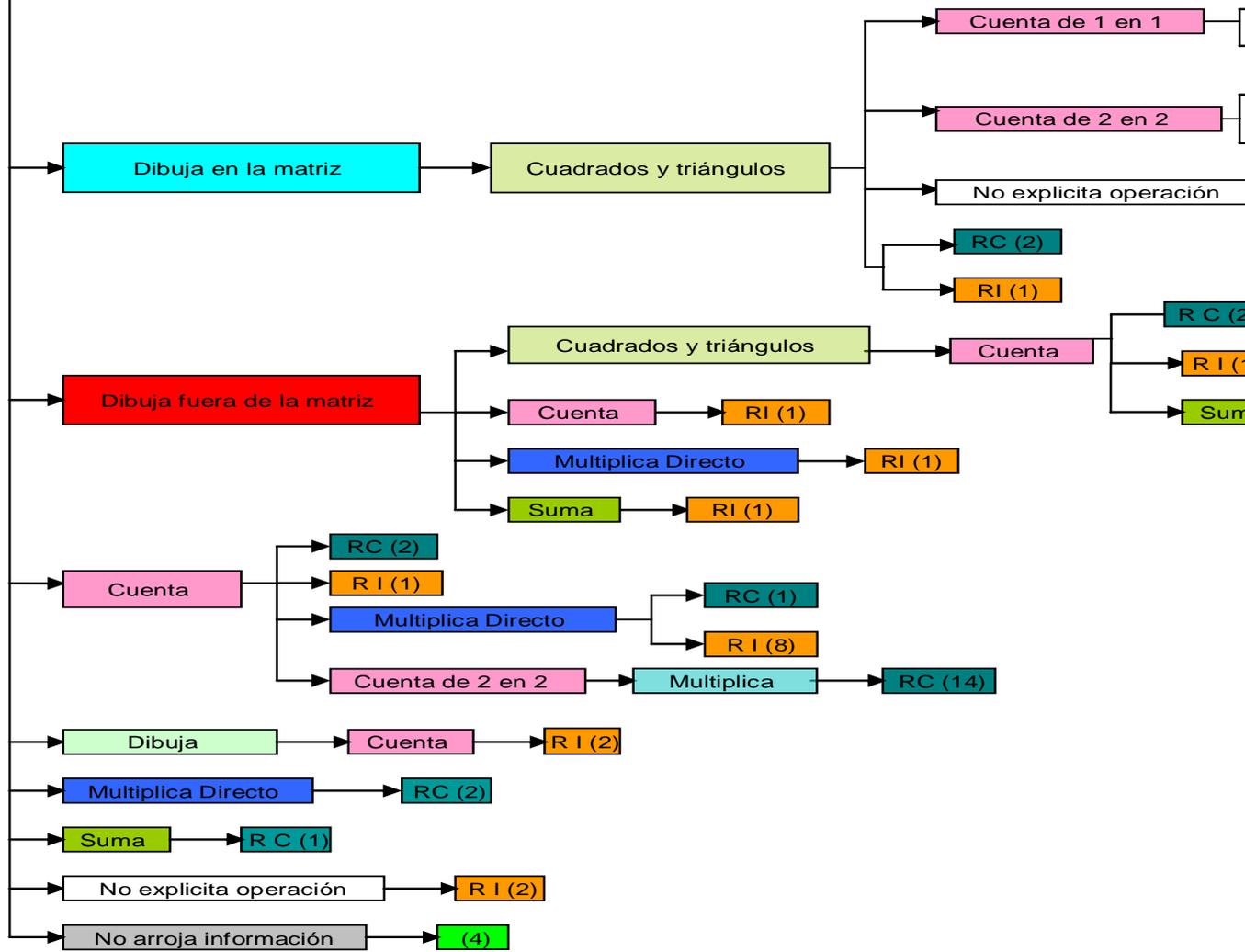
Red Sistémica N° 8

El contenido de la pregunta se indica a continuación:

Pablo cortó banderitas en forma de triángulo para adornar la sala.



¿Para cuántas le alcanzo si usó un papel como el del dibujo y las banderitas son del tamaño de...
Muestra cómo llegaste a tu respuesta. Puedes hacer cálculo o ayudarte dibujando



En la **tabla 12**, se sintetiza la información acumulada en términos de tipologías encontradas (categorías a partir de las explicaciones de los alumnos) y frecuencia de las mismas en los protocolos analizados.

Pregunta Número 8			Individuos identificados dentro de las categorías		No Responde	Nº de alumnos por categoría
Categorías			Respuestas Correctas	Respuestas Incorrectas		
1.1.-Dibuja sobre la matriz. (cuadrado y triángulo)			34, 57,	2,		3
	Cuenta 1 en 1		1, 5, 8, 13, 23, 24, 28, 31, 36, 38, 54, 60, 61	3, 9, 10, 16, 46, 51, 53, 55, 56,		22
	Cuenta de 2 en 2		7, 12, 39, 48, 50,			5
		Suma	Multiplica Directo.	4		1
	No explicita operación.		18			1
1.2.-Dibuja fuera de la matriz	Cuadrado y triángulo	Cuenta	6, 22	27		3
		Suma		29		1
	Cuenta			52		1
	Multiplica directo			32		1
	Suma			15		1
1.3.- cuenta			17	19, 49		3
	Multiplica directo		20	14		2
	De 2 en 2		35, 41, 43, 44, 47			5
Multiplica			26		1	
1.4- Dibuja	Cuenta			58, 59		2
1.4.Multiplica directo			42, 45,			2
1.6.- suma			33,			1
1.7.- No Explicita Operación				25, 49		2
1.8.- No Arroja Información					11, 40, 21, 30	4

En el esquema N° 43 y tabla N° 12 se distinguen claramente ocho categorías troncales, dibuja sobre la matriz, dibuja fuera de la matriz, cuenta, dibuja, multiplica directo, suma, no arroja información y no explicita operación, estas categorías son utilizadas por los alumnos como rutas o vías para solucionar la situación que se les plantea.

Se debe destacar que la situación N° 8 esta acompañada de una figura, la cual se presenta a los educandos para que la utilicen como medio de apoyo para desarrollar dicha situación.

Como plantea Horacio Itzcovich y Claudia Broitman (2001) la enseñanza de la multiplicación implica una construcción que tarda años en adquirir la operatoria de multiplicación y esta no se logra al momento de concebir el algoritmo, lo que denotan estos autores es que los alumnos para generar sus conocimientos son capaces de seguir otras rutas o vías para obtener un posible resultado, aun cuando no dominen esta operatoria, así los alumnos pueden relacionarse con el concepto. Es el caso de esta situación que nos arroja una infinidad de caminos que utilizan los estudiantes para obtener una posible respuesta y que ésta sea correcta.

Es por esto que los resultados que arrojaron los análisis frente a cómo se resolvió la situación deja en evidencia que los educandos utilizaron diversas rutas troncales y que llevaron a 35 alumnos de la muestra a responder de forma correcta.

Para Carlos Maza Gómez (1991), está es una situación de área (cálculo de superficie plana) que se relaciona netamente con una situación de combinación (producto cartesiano), ya que los alumnos utilizan el cálculo de superficie de acuerdo a la disposición matricial de las situaciones de combinación, y es por esto que se avala que el calculo de área (superficie) sea resuelto por el uso de suma iterada y de combinación.

Luego de un análisis completo de los datos arrojados por el instrumento aplicado a alumnos de cuarto año básico, el cual indica que la situación tiene un nivel de dificultad intermedio, puesto que un total de 26 alumnos respondió a esta situación planteada de forma incorrecta.

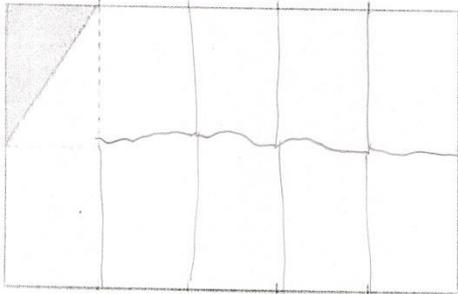
Se observa en esquema N° 43 y tabla N° 12, que la tendencia que más se denota en las vías que utilizan los estudiantes para resolver una situación es “Dibujan sobre la matriz”, apoyándose de cálculos y dibujos para obtener un óptimo resultado. Además los

educandos completan el desarrollo de esta situación a través de diferentes categorías (conteo, suma y multiplicación directa).

Como se demuestra en el siguiente recuadro un ejemplo de “dibujan sobre la matriz”.

Esquema N° 44

8.- Pablo cortó banderitas en forma de triángulo para adornar la sala.



¿Para cuántas le alcanzó si usó un papel como el del dibujo y las banderitas son del tamaño del triángulo?

Muestra cómo llegaste a tu respuesta. Puedes hacer cálculos o ayudarte dibujando.

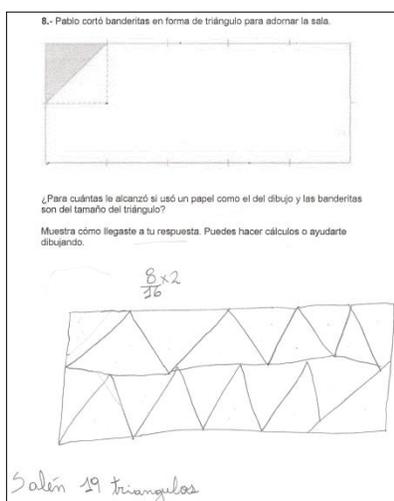
10 cuadrados

Los alumnos que siguieron esta vía (dibujan sobre la matriz) como posible solución obtienen resultados correctos. Sin embargo, existen otros educandos que utilizan el mismo camino, pero calculan números incorrectos o simplemente realizan un mal conteo, obteniendo la gran mayoría resultados erróneos.

Los alumnos que utilizaron la segunda categoría “dibujan fuera de la matriz” se apoyaron en conteo, suma o multiplicación directa. Los 7 casos que se adjuntan a esta categoría, 2 de ellos son correctos y los demás obtienen un resultado incorrecto, ya sea por que no siguieron el patrón que se les indica en la situación o dibujaron de acuerdo a como ellos consideraban que se podía resolver esta situación.

Como se demuestra en el siguiente recuadro un ejemplo de “dibujan fuera de la matriz”

Esquema N° 45



Como se menciona anteriormente se considera que la pregunta N° 8 tiene un nivel de complejidad intermedio, ya que 26 estudiantes al resolver ésta situación a través de diferentes rutas o vías, obtienen un resultado erróneo. Sin embargo la categoría más utilizada para resolver esta situación es “dibujan sobre la matriz “con un total de 22 estudiantes, 13 de estos utilizaron esta vía teniendo un resultado correcto y los 9 restantes obtienen un resultado incorrecto.

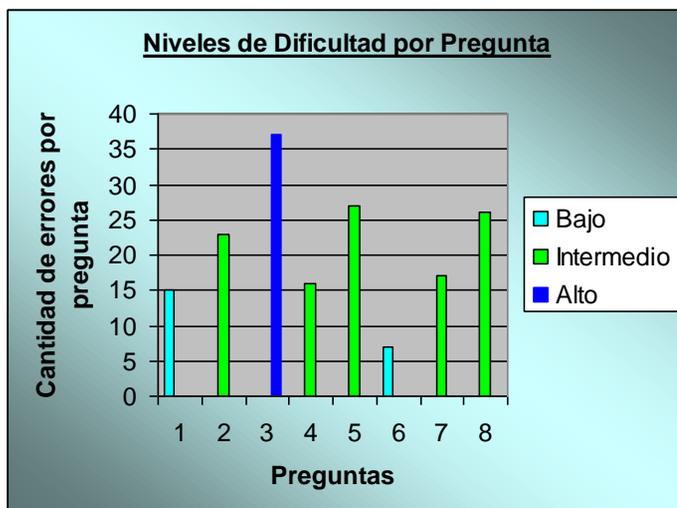
Síntesis de niveles de dificultad

- En conclusión acerca de los niveles de dificultad de las preguntas que pertenecen a nuestro instrumento de evaluación. Descubrimos que no todas las situaciones matemáticas se encasillan en la misma categoría de dificultad. Esto se observa a través de una tabla de frecuencias y un gráfico de barras en los que se demuestra lo mencionado.

Tabla N° 13

Niveles de dificultad por pregunta			
Preguntas	Bajo	Intermedio	Alto
1	15		
2		23	
3			37
4		16	
5		27	
6	7		
7		17	
8		26	

Esquema 46



Por lo visto la pregunta N° 2 es la que posee un alto nivel de dificultad con 37 errores. Se infiere que este instrumento posee un carácter intermedio de dificultad según lo observado en la tabla y gráfico N° 9 ya que más de la mitad de las preguntas equivalentes a 5 situaciones matemáticas se encuentran en este nivel de dificultad.

A continuación, tabla de resultados por pregunta en forma global del instrumento de evaluación.

Tabla N° 14

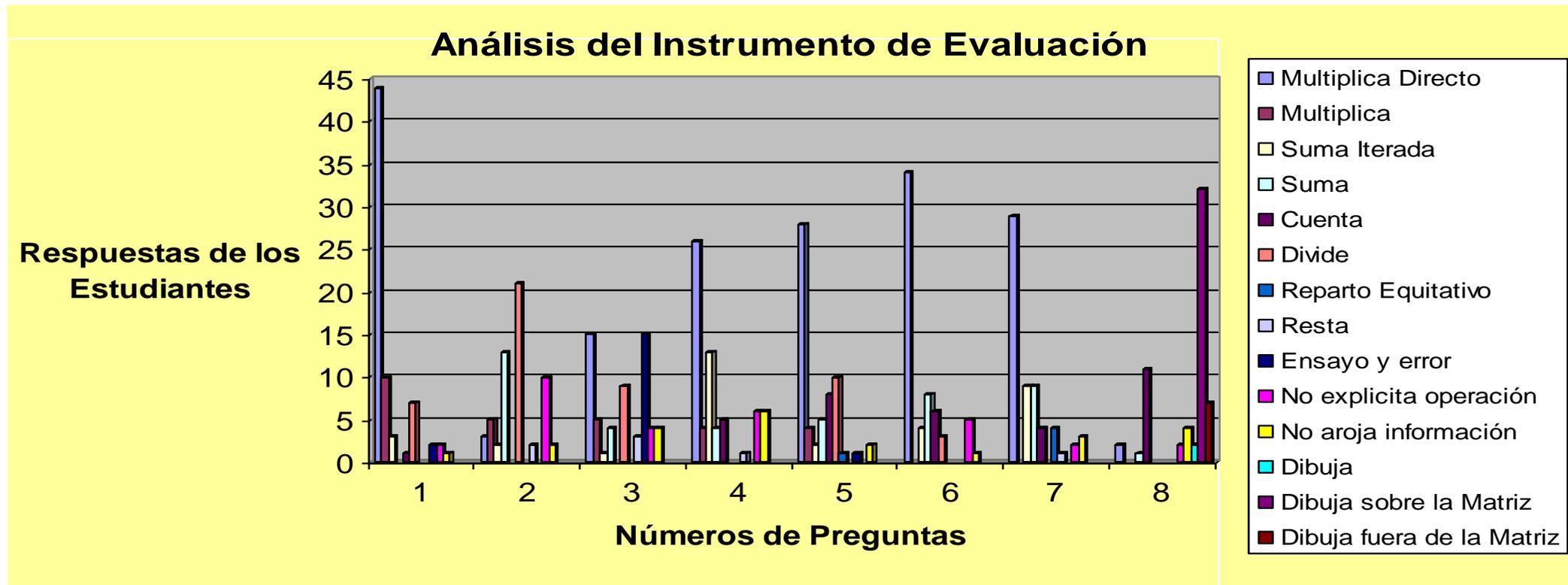
Análisis del Instrumento de Evaluación									
Categorías	Preguntas del Instrumento de Evaluación								Total
	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4	N° 5	N° 6	N° 7	N° 8	
Multiplica Directo	44	3	15	26	28	34	29	2	181
Multiplica	10	5	5	4	4	4			32
Suma Iterada	3	2	1	13	2	8	9		38
Suma		13	4	4	5	6	9	1	42
Cuenta	1			5	8	3	4	11	32
Divide	7	21	9		10				37
Reparto Equitativo					1		4		5
Resta		2	3	1			1		7
Ensayo y error	2		15		1				18
No explicita operación	2	10	4	6		5	2	2	31
No arroja información	1	2	4	2	2	1	3	4	19
Dibuja								2	2
Dibuja sobre la Matriz								32	32

Dibuja fuera de la Matriz								7	7
---------------------------	--	--	--	--	--	--	--	---	---

- Como podemos observar en esta tabla aparecen las categorías troncales, que los estudiantes utilizaron para obtener una posible solución por pregunta determinada. Esta tabla no arroja las rutas o vías que utilizaron los estudiantes después de la categoría troncal, ya que estas rutas se analizaron en extenso con anterioridad. Mostrando resultados correctos e incorrectos.

En este apartado se observa de manera global cuál fue la primera acción que los educandos realizaron al desarrollar el instrumento de evaluación.

- Existe una tendencia importante que se extiende a lo largo de todas las preguntas de nuestro instrumento de evaluación en cuanto a la operación aritmética utilizada por los estudiantes para obtener una posible solución en el desarrollo de su situación problemática. Esta operación es la multiplicación directa definida anteriormente en las que los estudiantes trabajan a través del producto cartesiano para conseguir su resultado. Es por esto que en respuesta a nuestros objetivos de investigación es que realizamos una identificación y categorización de las situaciones aritméticas más utilizadas por los educandos.
- Cada pregunta nos arroja información diversa ya que las categorías extraídas de los análisis entregan que los alumnos utilizaban diversos caminos para obtener posibles soluciones en cada situación matemática. Es por esta razón que si observamos la tabla de análisis de nuestro instrumento veremos que todas las categorías tienen una o más respuestas.
- Encontrándonos con que en la operación aritmética de multiplicación (tanto directa como indirecta) hubo 213 estudiantes que utilizaron esta ruta para obtener una solución.
- Nuestra segunda categoría que obtuvo la segunda cantidad en respuestas por pregunta es la suma (suma iterada y suma) equivalente a 88 respuestas.
- En la tercera categoría nos encontramos con la división (división, reparto equitativo) con 42 contestaciones.
- Y la última categoría correspondiente a operaciones aritméticas aparece la resta en la que solo hubo 7 vías troncales utilizadas con esta operación.
- Debemos destacar que la acción de conteo obtuvo una cantidad mayor a algunas categorías por separado correspondiente a 32 respuestas.
- Dentro de la pregunta N° 8 se destaca por más de un 80% que los estudiantes dibujaron sobre la matriz para desarrollar esta situación problemática



- Al observar el grafico anterior se muestra claramente, la tendencia más usada por los estudiantes (multiplica directo), la mayoría de las preguntas, fueron resueltas a través de esta operación, en los casos que los alumnos no utilizan la multiplicación directa para resolver las preguntas, como se muestra en las situaciones multiplicativas de las preguntas n° 2 y 3 del instrumento. Se infiere que no están familiarizados con este tipo de situaciones multiplicativas y por esto buscan otras formas de solucionar la situación

8. Conclusiones.

En un comienzo, este estudio planteó que la enseñanza aprendizaje de la multiplicación, inicialmente es adquirida e introducida como una situación representada como una suma iterada, partiendo de la base aditiva como concepto pre aprendido por los alumnos, también los estudiantes deben haber desarrollado habilidades como contar en intervalos por ejemplo: 2 en 2, 10 en 10, etc. Por el contrario esto no quiere decir que la única manera en la cual debe ser introducido el concepto de multiplicación sea por medio de adiciones iteradas. Otra de las maneras es por medio de la memorización de las tablas de multiplicar, una de las situaciones más factibles es que si un estudiante desarrolló con facilidad la habilidad de contar en intervalos, ésta le facilitará la adquisición de memorización de combinaciones, y así de manera implícita facilita la memorización de las tablas de multiplicar por ejemplo las tablas del 1 al 10, por otra parte es necesario delimitar que la enseñanza de las tablas de multiplicar no sólo debe ser memorística, sino que debe pasar por diversos niveles de comprensión y de construcción por parte del alumno para que logre ser efectiva dicha enseñanza, una de las didácticas más utilizadas para la construcción de las tablas de multiplicar es la tabla Pitagórica o tabla de combinaciones multiplicativas (producto cartesiano).

Maza (1991), plantea diversas maneras de aprender multiplicación asociadas a problemas como el de razón, combinación y área facilitando así el aprendizaje de la multiplicación. A lo largo de estas páginas hemos visto que la multiplicación es un entramado de conocimiento complejo y difícil de adquirir por parte de los alumnos. Es necesario aclarar que a diferencia de Vergnaud (1991), que plantea las situaciones problemáticas como actividades cognitivas individuales, Maza (1991), plantea las situaciones como actividades grupales entregando otro enfoque sobre un mismo concepto.

La problemática de esta investigación surge del interés por reconocer el procedimiento que utilizan los estudiantes de cuarto año básico, al desarrollar ejercicios multiplicativos nos referimos a los procedimientos usados por los educandos en relación a las estructuras aritméticas, al momento en que estos resuelven ejercicios de multiplicación presentes en diversas situaciones. Identificando las distintas vías o rutas lógicas que los alumnos emplean.

Los resultados de esta investigación sobre la base de los análisis son de gran interés por estar relacionados con las dificultades que presentan los educandos al momento de enfrentarse a una situación matemática multiplicativa. Después de estar inmersas en distintos establecimientos educacionales, en los cuales sucedieron diferentes acciones.

Acciones que se relacionan a procedimientos de la aplicación de nuestro instrumento a estudiantes de cuarto año básico. Los cuales se darán a conocer a modo de conclusiones.

Al interior de nuestra muestra se observa que los estudiantes utilizan diversas rutas o vías para obtener una posible solución a la situación planteada, se entiende por rutas o vías las siguientes operaciones aritméticas:

- Multiplicación
- División
- Adición
- Sustracción

En conjunto con las operaciones aritméticas, los estudiantes utilizan otras rutas que se desprenden de las cuatro operaciones matemáticas. Las cuáles fueron arrojadas por los alumnos durante la aplicación del instrumento. En relación a los resultados obtenidos se generaron las siguientes categorías.

- Multiplica directo
 - Suma iterada
 - Conteo
 - Reparto equitativo
 - Ensayo y error
 - Dibuja sobre la matriz
 - Dibuja bajo la matriz
 - Dibuja
 - No arroja información
 - No explícita operación
- En el extenso análisis de los resultados obtenidos tras la aplicación del instrumento de evaluación se observó, que la mayor cantidad de alumnos utiliza la multiplicación como vía para obtener una posible solución, al contrario de lo esperado, que la suma iterada sería la ruta más utilizada para resolver las situaciones multiplicativas, solo fueron una menor cantidad comparándolos con los educandos que resuelven a través de la multiplicación.
- A pesar que la multiplicación es la ruta más usada, de igual modo existen errores en sus respuestas. Se deduce que gran parte de los errores que cometen los alumnos al realizar una multiplicación es a causa de no poseer un mayor

dominio de las tablas de multiplicar, u otro de los errores más comunes es que los educandos multiplican números incorrectos, esto se debe a que no realizan una adecuada extracción de los datos presentados en el enunciado.

- Los alumnos que realizan la multiplicación directa resuelven esta operación como producto cartesiano. Se concluye de esto, que los educandos que resuelven las situaciones multiplicativas a través del producto cartesiano poseen un mayor dominio de la operatoria multiplicativa. Es decir, estos estudiantes comprenden esta operatoria como una operación independiente de la adición. Cuando los estudiantes aún no adquieren de modo independiente la multiplicación, resuelven esta operación a través de otras operaciones o acciones como por ejemplo la suma iterada.
- Una desventaja que muestran los estudiantes que trabajan con suma iterada, es que cuando calculan números de más de una cifra, les resulta difícil y tedioso obtener un resultado correcto.
- Otra de las falencias detectadas que presentan los estudiantes es no identificar en el enunciado la operación matemática que deben realizar. En el caso de una situación multiplicativa la relacionan con una adición o inclusive con la operación inversa a esta (división).
- Los alumnos resuelven situaciones multiplicativas con la operación inversa a la multiplicativa y de igual forma obtienen resultados correctos. Se intuye que los estudiantes usan esta operación, puesto que les resulta más fácil desarrollar una división que una multiplicación.
- Los alumnos de 4 año básico, en una mayor parte demuestran que poseen conocimiento de la operatoria multiplicativa, no así en el caso de un 3° básico donde los alumnos aun están adquiriendo este concepto. Es por esto la elección de este nivel para la aplicación del instrumento, ya que el . 4° año básico es el nivel donde se finaliza el primer ciclo dando paso a nuevos aprendizajes los cuales serán más complejos en el segundo ciclo, el alumno debe tener una buena base para lograr la adquisición de esto. En Chile la prueba SIMCE evalúa los aprendizajes adquiridos por los alumnos durante
- La selección de las preguntas que se utilizaron en el instrumento son de multiplicación, relacionado con lo que plantea Vergnaud y Gómez, se

clasificaron de acuerdo a las situaciones multiplicativas que ellos plantean, la selección de éstas preguntas incidieron en los resultados obtenidos en el análisis de los datos por el instrumento aplicado, ya que existen preguntas que presentaron mayor dificultad que otras, sin embargo, descubrimos que la situación que mas dificultad presento fue la de producto cartesiano (situación N° 3, en donde debían reconocer la multiplicación en alternativas que son de diferentes operaciones) .

- Unas de las incertidumbres presentes en esta investigación, es saber si los alumnos de cuarto año básico realizaron la resolución del instrumento de forma consiente en relación a sus capacidades o a modo de azar.
- Itzovich y Broitman (2001), plantean que la enseñanza de la multiplicación se debe realizar desde niveles iniciales, es decir desde primer año básico, sin necesidad de presentar dichas situaciones como multiplicativas permitiendo introducir el concepto progresivamente.

Objetivo: Identificar, categorizar y analizar las principales estructuras aritméticas y acciones desarrolladas por los alumnos de cuarto año de enseñanza básica, durante el desarrollo de la búsqueda de soluciones a situaciones asociadas a la multiplicación.

- La gran variedad de estructuras aritméticas utilizadas por los estudiantes de 4° básico de diversos establecimientos educacionales de dependencia municipal, visitados, presentan una gran heterogeneidad en torno a la forma de obtener un resultado, aunque como se señala anteriormente, la tendencia se levanta en torno a la operación de multiplicación directa, puesto que esto se observa en la mayoría de las respuestas de los alumnos. De esto se infiere que la generalidad de los alumnos si conocen la operación multiplicativa y la identifican como otra operatoria distinta a las demás. Sin embargo los alumnos que no utilizan esta operación aritmética, ocupan otras estructuras aritméticas para obtener un posible resultado, ya sea correcto o incorrecto. Las estructuras que utilizan los estudiantes en algunos casos les facilitan el proceso resolutorio, pero en otros los confunde y los lleva a cometer errores.

Objetivo: Identificar y analizar las dificultades aritméticas presentes por los estudiantes de 4º Año de Enseñanza Básico, durante el desarrollo de problemas asociadas a la multiplicación.

- Las deficiencias se presentan en el desconocimiento de las tablas de multiplicar las cuales les dificultan el proceso para obtener un resultado. Esto se observa también en alumnos que, comprendiendo la operación de multiplicación, no llegan al resultado, por errar en el producto de ésta, debido al escaso manejo de ellas. Sin embargo, hay otros alumnos que saben multiplicar y comprenden el concepto de multiplicación, pero utilizan suma iterada para solucionar una multiplicación, esto se debe al insuficiente manejo de las tablas, a ellos se les facilita la operatoria resolviendo una multiplicación como suma iterada, puesto que están familiarizados desde pequeños con ésta, aunque como anteriormente se señala la cantidad de alumnos que utiliza suma iterada no es la que se pensaba, los que la utilizan lo hacen solo, porque es más fácil para ellos sumar.
- Por otro lado, se muestra que los alumnos, no manejan variadas situaciones multiplicativas, puesto que las que resuelven sin dificultades son situaciones comunes y sin mayor complejidad, pero frente a situaciones nuevas para ellos, presentan precario dominio y cometen errores esto se observo en la mayor parte de los alumnos entrevistados.

Objetivo: Inferir posibles dificultades presentes en el proceso de enseñanza de la multiplicación a partir del análisis de los aprendizajes observados en los estudiantes.

- En base a las distintas características de los aprendizajes analizados en los alumnos, se puede pensar, que es probable que la enseñanza de la multiplicación en los establecimientos municipales está centrada en la operatoria, lo que permite a los alumnos desarrollar situaciones multiplicativas de producto cartesiano sin mayor dificultad, los problemas se presentan en situaciones más complejas por ejemplo las situaciones N° 3 y 8 del instrumento aplicado, donde el alumno debe resolver otro tipo de situación a las acostumbradas. Los alumnos se confunden al reconocer entre varias situaciones las que corresponden a multiplicación, se infiere que la enseñanza de la multiplicación se realiza con problemas simples y similares sin cambios en las problemáticas, puesto que los alumnos, obtienen resultados óptimos en situaciones como las N° 2 y 1 entre otras.

La enseñanza de las tablas de multiplicar demuestran una carencia en la adquisición que tiene el alumno de estas, puesto que se infiere que el tiempo que se les dedica no es suficiente para afianzarse en los aprendizajes significativos de los alumnos, o las actividades y estrategias utilizadas por los docentes son tediosas y repetitivas, debido a esto los alumnos las olvidan y no las internalizan.

Finalmente, consideramos que esta investigación debería ser trabajada de manera más extensa, y no solo realizarse en el último nivel del primer ciclo, sino que además se podría ejecutar desde los niveles iniciales para así poder establecer progresiones conceptuales por medio de situaciones problémicas asociadas a la totalidad de las estructuras aritméticas. Además se podrían establecer comparaciones entre dependencias municipales y dependencias particulares en función de medir cuales son los niveles de logros alcanzados en relación a las situaciones problémicas asociadas a las estructuras aritméticas. El tema de estudio es relevante y puede generar grandes aportes a la educación matemáticas por lo cual dejamos abierto nuestro tema de estudio para cualquier otro investigador que quiera indagar con mayor extensión dicho tema.

9. Sugerencias y/ o recomendaciones

- Abordar las estructuras aritméticas de manera integral desde el primer año en que los alumnos ingresan a la escuela, no es necesario especificar los conceptos ni los algoritmos, parte fundamental de la educación debe ser que los alumnos construyan sus propios conocimientos, si al igual que Vergnaud se introdujeran las situaciones problemas como actividad cognitiva individual a los alumnos les permitiría crear un concepto propio y significativo. Así mismo Maza plantea que si las situaciones problémicas fuesen abordadas como actividades grupales, permitiéndoles co-construir su propio significado por medio de la socialización y la apropiación del concepto aritmético.
- Fortalecer la enseñanza memorística de las tablas de multiplicar, a partir de las seriaciones numéricas realizadas en los primeros años de enseñanza como por ejemplo sumar de 2 en 2, 5 en 5 y 10 en 10, lo que promueve el trabajo simultaneo de estas seriaciones, la comprensión, memorización de las tablas de multiplicar y la optimización de procesos y tiempo.

10. Bibliografía

- Bliss, Monk y Ogborn, (1983). “ *Qualitative data analysis for Educational Research.* ” A guide to uses of systema networks. Croom Helm: London i Camberra.
- Buschiazzo, N., Cattáneo, L., Filipputti, S., Hinrichsen, S. y Lagreca, N. (1997). “*Matemática hoy en la E.G.B.: ¿qué enseñar? ¿cómo? ¿para qué?. Estrategias didácticas*”. Rosario: Homo Sapiens Ediciones.
- Campos, M. (2006) “*El desarrollo, sentido y técnica para la multiplicación.*” Instituto Superior de Formación Docente “Nueva Formación”. Córdoba, Argentina
www.sochien.cl/jornadas2006/talleres_internacionales/rc.pdf. (consulta 14-09-2009)
- Cerdán, F y Puig, L (1988) “*Problemas Aritméticos Escolares*”. Ediciones Síntesis, España.
- Cohen, L. y Marión, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Ed.La Muralla: Madrid.
- Coleman, H y Unrau, Y.A (2005). En R.M. Grinnell y Y.A. Unrau (Eds.) “*Social Work: Research and Evaluation. Quantitative and qualitative approaches*” (7ª.ed.,pp.403-420). Nueva York: Okford University Press.
- Defior, S. (2000). “*La dificultades del aprendizaje: un enfoque cognitivo*”. Ediciones Alijibe, Málaga.
- Ericsson , K.A. y H.A. Simón. (1980) “*Verbal reports as data*” *Psychological review* 87: 215-51
- Ericsson, K.A. y H.A. Simón. (1993 -1984). “*Protocol Analysis*”. *Verbal Reports as Data*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Ericsson, K.A. y H.A. Simón. 1987. “*Verbal reports on thinking*”. *Introspection in Second Language Research*. Eds. C. Faerch y G. Kasper. Avon: Multilingual matters Ltd. 24-53.
- Fernández, J. (2007), “*La enseñanza de la multiplicación aritmética una barrera epistemológica*”. *Revista iberoamericana de educación* n°43 pp. 119-130.

- García, J. (1989). *“Psicología evolutiva y educación infantil”*. Editorial Santillana. Madrid, España.
- García, J. (2003). *“Didáctica de las ciencias: Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad”*. España. Aula Alegre.
- Garbin, S. y Mireles, M. (2005). *Fractal: ideas y percepciones de estudiantes entre 15 y 17 años*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, 101-107.
- Garret, R. M (1988). *“Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el curriculum de ciencias”*. Enseñanzas de las ciencias. Barcelona, España.
- Gómez, G, C. (1985). *“Infancia y Aprendizaje”*. Ediciones I.M.I.P.A.E., Barcelona.
- Guba, E. G. /Lincoln, y. S. (1981/1985): *Effective Evaluation: Improving the Usefulness of evaluation Results through Responsive and Naturalistic approaches*, 1. Edición 1981, 4. Reimpresión 1985, San Francisco: Jossey - Bass.
- Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *“Metodología de la investigación”*. Tercera Edición. México: Editorial Mc Graw Hill.
- Hernández, R; Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *“Metodología de la Investigación. Enfoques Cuantitativo, Cualitativo y Mixto”*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997) *“La Demostración en Matemáticas: Clasificación y Ejemplos en el Marco de la Educación Secundaria”*. Educación Matemática 9 (2) 65-104.
- Itzovich, H. Broitman, C.(2001), *“Orientaciones, didácticas para la enseñanza de la educación en los tres ciclos de la EGB”*. Documento n°4, Provincia de Buenos Aires, Gabinete pedagógico.
- Jonassen (2004), Citado en: Castro, E. (2008) *“Resolución de problemas: Ideas, tendencias e influencia en España”*. Departamento de Matemática, Universidad de Granada.
- Kamii (1994), citado por Ruiz y otros (2003, p. 326) *“Enseñanza Eficaz de la*

- Resolución de Problema en Matemáticas*” Revista Educación 32(1), 123-138, ISSN: 0379-7082, 2008. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.
- Krulik y Rudnik,(1980) Citados por Gil.D; Martínez Torregrosa, J, Ramírez, I.(1992). *“La Didáctica de la Resolución de Problemas en cuestión: elaboraron de un modelo alternativo”*. Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales. No.6 pgs.73-85.
- Martínez, M. (2003) *“Naturaleza y principios de la Filosofía de la educación. Una reflexión.”* En Blanco Pérez, Antonio. Filosofía de la educación. La Habana: Ed. Pueblo y Educación.
- Maza, C. (1991). *“Números y operaciones”*. Editorial Síntesis: Madrid.
- Maza, C. (1991). *“Multiplicar y dividir: A través de la resolución de problemas”*. Editorial Visor: Madrid.
- Maza, C. (1991). *“Enseñanza de la multiplicación y división”*. Editorial Síntesis: Madrid.
- Mertens, D. (2005). *Research and evaluation in Education and Psychology: Intergrating Diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods*. (2a.ed). Thousand Oaks: Sage.
- Mayela, C (2007) *“Enseñanza Eficaz de la Resolución de Problema en Matemáticas*” *“Revista Educación 32(1), 123-138, ISSN: 0379-7082, 2008. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.*
- Ministerio de Educación (Mayo 2009). *“Propuesta del Ajuste Curricular, Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios”* Ediciones Ministerio de Educación. Santiago, Chile
- Ministerio de Educación (Marzo 2009). *“Fundamentos del Ajuste Curricular en el sector de Matemáticas”*. Ediciones Ministerio de Educación. Unidad de Currículum y Evaluación .Santiago, Chile.
- Ministerio de Educación (2004), *“Evaluación Nacional del rendimiento estudiantil”*. República del Perú.

- Ministerio de Educación (2004). *“Plan y Programas de Estudio para el Tercer y Cuarto Año de Enseñanza Básica”*. Ediciones Ministerio de Educación. Santiago, Chile.
- Ministerio de Educación (2002). *“Plan y Programas de Estudio para el Tercer y Cuarto Año de Enseñanza Básica”*. Ediciones Ministerio de Educación. Santiago, Chile.
- Ministerio de Educación, República de Chile, departamento Jurídico, (2002). *“Decreto Supremo de Educación N° 232”*. Santiago,
- Ministerio de Educación (1997). *“Plan y Programas de Estudio para el Tercer y Cuarto Año de Enseñanza Básica”*. Ediciones Ministerio de Educación. Santiago, Chile.
- Miles, M.B. Y Huberman, A. (1994). *“Qualitative data analysis: an expanded sourcebook.”* Newbury Park, CA: Sage.
- Miliaret, G. (1986). *“Las matemáticas, cómo se aprenden, cómo se enseñan”*. Un texto básico para psicólogos, enseñantes y padres”. Editorial Visor Madrid, España.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *“Curriculum and evaluation standards for school mathematics”*. Reston, VA: El autor.
- Nesher, P. (1992). *“Solving Multiplication Word Problems. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hatrup (Eds), Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching”* (pp. 189-219). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Nickerson, Raymond; et. Al. (1987). *“Enseñar a Pensar, aspectos de la actitud intelectual”*. Editorial Piados, Barcelona, España.
- Ortega, (1997) citado en: Cambios en la enseñanza de las matemáticas: énfasis en la resolución de problemas. Integra N°4-2000. http://www.uvm.cl/educacion/publicaciones/integra/Integras/Integra_04/07-diaz.pdf. (consulta 11-06-2009)
- Orozco, M. (1996), *“La estructura multiplicativa”*, Universidad del Valle.
- Patton, M. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. 3rd ed. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

- Pérez, M.P. y Pozo, J.L. (1994). “*Aprender a resolver problemas y resolver problemas para aprender*”. En J.L. Pozo Municio (Ed), “*La solución de problemas*”. Aula XXI. Santillana: Madrid.
- Pestel, B.C. (1988). “*More sample problems with step by step solution? Take them away. Journal of Chemical Education*”. P.444.
- Peña, C (2007), “*la enseñanza de las operaciones aritméticas: aspectos fundamentales a priorizar*”. (Parte II y IV), Revista Espacio Pedagógico, http://www.espaciologopedico.com/articulos/articulos2.php?Id_articulo=1498 (Consulta 12-11-2009)
- Piaget (1973). Citado en: Gómez, G, C. (1985). “*Infancia y Aprendizaje*”. Ediciones I.M.I.P.A.E., Barcelona.
- Pómes Ruiz, J. (1991). “*La metodología de resolución de problemas y el desarrollo cognitivo: un punto de vista post-piagetiano*” Enseñanza de las Ciencias, pp. 78-82.
- Polyá, G. (1982). “*Como plantear y Resolver problemas*”. Trillas, México ed. 10º.
- Polya (1965), citado por Echenique (2006, p. 10). “*Enseñanza Eficaz de Resolución de Problema en Matemáticas*” Revista Educación 32(1), 123-138, ISSN: 0379-7082, 2008. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.
- Ruiz, D. y García, M. (2003, Octubre- Diciembre). “*El lenguaje como mediador en el aprendizaje de la aritmética en la primera etapa de Educación Básica*”. Educere La Revista Venezolana de Educación, 23(7): 321- 327.
- Sandoval, C. (2002). *Investigación Cualitativa*. Programa de Especialización en Teoría, Métodos y Técnicas de Investigación Social. Módulo IV. Instituto Colombiano para el fomento de la educación Superior, ICFES. Colombia: ARFO Editores.
- Sardá, J., Sanmarti., N. (2000) *Enseñar a argumentar científicamente: un reto de las clases de ciencias*. En Enseñanza de las Ciencias, 18(3): 405-422.
- Schoenfeld, A, H. (1985) “*Mathematical problem solving*”. New York, NY: academic press.

Schwarz (1989) y Kapu (1986), citado en Problemas aritméticos escolares, Puig y Cerdán (1990), capítulo 4, pag.5-6-7-8. <http://www.uv.es/puigl/lpae4.pdf> (consulta 15-19-2009)

Vergnaud, G. (1983). "*Multiplicative structures. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes*". New York: Academic Press, 128-174.

Vergnaud, G. (1991) "*El niño las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*". México. Trillas, Cap.11, 1° edición.

Vila, A. y Callejo, M.L. (2004). "*Pensar en clase de matemáticas. El papel del las creencias en la resolución de problemas*". Col. Educación hoy. Narcea, Madrid

Villaruel, Irene (1987). "*Acerca de la enseñanza de conceptos científicos*". Presentado en la 5° Reunión Nacional y 4° Reunión Latinoamericana de la física.

Villaruel, Irene (1993). "*Mi mundo y los Números. Guía para el profesor, Segundo, Tercero y Cuarto Básico*". Ediciones Pedagógicas Chilenas S.A. Santiago, Chile.

Villaruel, Irene (1997). "*Apuntes Magister, dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas*". Pontificia Universidad Católica de Chile.

www.simce.cl (consulta, 10-07-2009)

www.mineduc.cl (consulta, 27-06-2009)

Anexo
“Recolección y análisis de datos - Atlas.ti.”

Recolección de datos

La recolección de datos se realizó a través del programa atlas.ti, que adjunta la cantidad de transcripciones que se obtuvieron en nuestra investigación, que comprenden los pensamientos en voz alta de los alumnos al momento de realizar el instrumento, por esto que la función del programa es clasificar y categorizar las acciones que realizan los alumnos por medio de la información de las transcripciones de las pruebas.