FACULTAD DE EDUCACIÓN
Escuela de Educación en Matemáticas
e Informática Educativa

LA MAGIA COMO HERRAMIENTA MOTIVADORA PARA LA ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA 3D EN ESTUDIANTES DE 3° Y 4° MEDIO, UN ESTUDIO EXPLORATORIO.

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA E INFORMÁTICA EDUCATIVA.

INTEGRANTE:
PAVLOVIC GONZÁLEZ, DANKO VLADIMIR.

PROFESOR GUÍA:
ÁLVARO FIGUEROA LÓPEZ.

SANTIAGO, CHILE
2021

INDICE

AGRADECIMIENTOS 3

RESUMEN 4

ABSTRACT 4

INTRODUCCIÓN 5

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 6
- 1.1 Antecedentes teóricos y/o empíricos observados 6
- 1.2 Definición del problema y pregunta de investigación 9
- 1.3 Objetivos de Investigación 13
  - 1.3.1 Objetivo General 13
  - 1.3.2 Objetivos Específicos 13
- 1.4 Supuestos del trabajo 14
- 1.5 Justificación e importancia 14
- 1.6 Limitaciones 18

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO 19
- 2.1 Fundamentos Curriculares de Geometría 3D 19
  - 2.1.1 Habilidad de Representar en Matemática 21
  - 2.1.2 Metacognición 23
  - 2.1.3 Creatividad 24
- 2.2 Motivación 25
  - 2.2.1 Motivación en el Aprendizaje 26
- 2.3 Visualización Espacial 28
- 2.4 Elementos Matemáticos 31
- 2.5 Dificultades del proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría 32
- 2.6 Aprendizaje de la Geometría 35
- 2.7 Teoría de Representaciones Semióticas 39
  - 2.7.1 Semiosis y Noesis 49
  - 2.7.2 Motivación en la geometría del espacio 51
  - 2.7.3 Método COPISI 52
- 2.8 GeoGebra: TIC para el aprendizaje de la Geometría 54
- 2.9 Historia de la magia: Evolución hacia la Educación 57
  - 2.9.1 La Magia en la Educación 60
  - 2.9.2 La Magia y la Matemática 64
  - 2.9.3 La Magia y la Geometría 68
  - 2.9.4 La Magia y la Motivación en la Enseñanza 69

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO 70
3.1 Paradigma o enfoque de investigación 70
3.2 Diseño de investigación 70
3.3 Sujetos o población de estudio 71
3.4 Instrumentos 72
3.4.1 Análisis didáctico 73
3.4.2 Recursos didácticos 76
3.4.3 Grupo focal (E-focus group) 77
3.5 Validez y confiabilidad 78

CAPÍTULO 4: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN 78
4.1 Trabajo de campo o recogida de información 78
4.2 Análisis de la información 79
4.3 Tabla tercera sesión 80

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES 89

Bibliografía 92

ANEXOS 96
1. Elementos Matemáticos 96
2. Solicitud Implementación 113
3. Guía de Grupo Focal 114
4. Planificación de la Secuencia Motivacional de Enseñanza Aprendizaje 116
5. Registro Audiovisual 147
6. Documento de Validación 151
6.1 Objetivo general de investigación 153
6.2 Observaciones generales de las actividades 154
6.3 Registros observados de las actividades 159
6.4 Planificación de la secuencia enseñanza aprendizaje 160
6.5 Cuadro de validación 161

AGRADECIMIENTOS

Dar las gracias a mi papá y mi mamá, Eugenio Pavlovic y Pamela González, por haberme educado integralmente, dándome valores y todas las oportunidades y herramientas para desarrollarme deportivamente, artísticamente, y académicamente. Muchas gracias a esa fuente ilimitada de amor que es la familia, mi hermana Pola, y a mis mascotas Bruno, Gala y Canela.

También, agradecer al profesor Álvaro Figueroa por haberme apoyado, acompañado y aconsejado durante este proceso. A mi mejor amiga, Catalina Vergara, por estar motivándome y ayudándome desde que comenzó la pandemia.

Y un saludo especial, a el youtuber James Scholz, quien me impulsó a mis objetivos en pandemia, y, a no decaer sin importar las circunstancias, gracias por esas satisfactorias jornadas de aprendizaje y determinación a distancia.

Danko Pavlovic.

RESUMEN

En esta investigación se desea elaborar una propuesta de enseñanza aprendizaje enfocada en un objetivo del plan de Geometría 3D, a partir de la motivación que tienen las y los estudiantes al aprender geometría tridimensional, utilizando la tecnología y la magia como recursos motivadores. Esta propuesta se basa en la teoría de las representaciones semióticas, utilizando un marco COPISI. La metodología utilizada fue de carácter exploratorio con un enfoque cualitativo y diseño no experimental transversal, donde los sujetos de estudio fueron estudiantes de 3° y 4° medio, que mediante el método de investigación de grupo focal (e-focus group), fueron interpretadas sus percepciones y motivaciones en la propuesta de enseñanza aprendizaje. Las principales conclusiones obtenidas fueron la motivación que genera en el aprendizaje utilizar la combinación de la magia y la tecnología, junto a los planes de estudios elaborados por el Mineduc (Geometría 3D), así como el impacto innovador en el aprendizaje de la Geometría 3D, en estudiantes de 3° y 4° medio.

ABSTRACT

In this research we want to elaborate a teaching-learning proposal focused on an objective of the 3D Geometry plan, based on the motivation that students have when learning three-dimensional geometry, using technology and magic as motivating resources. This proposal is based on the theory of semiotic representations, using a COPISI framework. The methodology used was exploratory with a qualitative approach and non-experimental cross-sectional design, where the subjects of study were 3rd and 4th grade students, who through the research method of focus group (e-focus group), were interpreted their perceptions and motivations in the teaching-learning proposal. The main conclusions obtained were the motivation generated in learning by using the combination of magic and technology, together with the curricula developed by the Mineduc (3D Geometry), as well as the innovative impact on the learning of 3D Geometry, in 3rd and 4th grade students.

INTRODUCCIÓN

En el sistema de educación chileno a partir del año 2020 entraron en vigencia las Bases Curriculares de 3° y 4° medio de 2019 del Ministerio de Educación (MINEDUC), que establecen las asignaturas de la modalidad Humanista-Científica (HC). En este caso, en la modalidad HC Diferenciada Matemática se integraron nuevos planes en la formación general de las y los estudiantes, haciendo hincapié en Geometría 3D.

Se utilizó el marco COPISI (concreto, pictórico y simbólico) y la teoría de las representaciones semióticas cuya finalidad apunta a enseñar por medio de registros semióticos y de representaciones concretas, pictóricas y simbólicas. Asimismo, se utilizó la magia y las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) como herramienta motivacional para el proceso de enseñanza aprendizaje de un objetivo de aprendizaje del plan de Geometría 3D, pues se ha demostrado que se obtienen aprendizajes más significativos y un mejor desarrollo de habilidades en los y las estudiantes si son abordados creativamente (Mineduc, 2019).

En este marco, se pretende realizar un aporte a los y las docentes de Matemática, especialmente aquellos que enseñen Geometría 3D en los nuevos planes de estudio; presentando una propuesta didáctica para motivar el aprendizaje, con sus respectivas orientaciones docentes, innovando en el aprendizaje de las matemáticas, específicamente en el área de la geometría tridimensional.

La secuencia fue llevada a cabo en el liceo Sara Blinder, donde posteriormente en base al análisis de la información, se concluyó acerca del impacto que tenía la magia en el PEA (proceso de enseñanza aprendizaje) de la Geometría 3D. Observando cómo la magia afecta en la motivación de las y los estudiantes de 3° y 4° medio.

Las conclusiones obtenidas en la secuencia motivacional, fueron la gran influencia que genera la magia como herramienta motivadora en la enseñanza de la Geometría 3D, utilizando el software educativo GeoGebra. Donde las y los estudiantes manifestaron mayor interés, estimulación y motivación hacia los constructos matemáticos, además, de captar la atención y, por ende, desarrollar la habilidad de representar y de visualización espacial en el plano tridimensional.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes teóricos y/o empíricos observados

Entre los objetivos del Decenio de las Naciones Unidas de la Educación para el Desarrollo Sostenible (2005-2014), que la UNESCO coordina, figura transformar el cómo y el porqué del aprendizaje, alentando a los países a reorientar sus sistemas educativos (UNESCO, 2008). Tal como lo señala la Ley General de Educación (Ley N° 20.370), la educación es "El proceso de aprendizaje permanente que abarca las distintas etapas de la vida de las personas y que tiene como finalidad alcanzar su desarrollo espiritual, ético, moral, afectivo, intelectual, artístico y físico, mediante la transmisión y el cultivo de valores, conocimientos y habilidades" (Mineduc, 2016).

De esta forma en el actual sistema de educación chileno a partir del año 2020 entraron en vigencia las Bases Curriculares de 3° y 4° medio de 2019 del Ministerio de Educación (MINEDUC), que establecen las asignaturas de la modalidad Humanista-Científica (HC), y el Plan de Formación General para las HC, Técnico profesional y Artística. En este caso, en la modalidad HC Diferenciada Matemática se integraron nuevos planes en la formación general de las y los estudiantes, donde su currículo se profundizo con nuevos contenidos matemáticos, como Límites, derivadas e integrales, Probabilidades y estadística descriptiva e inferencial, Pensamiento computacional y programación, y Geometría 3D (Mineduc, 2019). Esto implica desarrollar las distintas competencias para las y los estudiantes de enseñanza media en el plan HC Diferenciada Matemática, donde se hará hincapié en este último de Geometría 3D.

Durante la elaboración de la propuesta de Bases Curriculares de 3° y 4° medio, se analizaron diversos currículos internacionales para contar con una base comparativa, especialmente en relación con el ciclo terminal de los dos últimos años de la enseñanza media. Se examinó una muestra de más de quince currículos a partir de diversos criterios, donde se revisaron casos de estudio de países que obtienen altos resultados en mediciones internacionales (Singapur, Finlandia, Canadá, Irlanda, Japón, Reino Unido, Holanda, Australia, Francia). Uno de los más destacados fue Francia. La didáctica francesa aparece, sin duda, como más unitaria y más teorizada, caracterizada por el hecho de que ella ha adoptado, desde sus comienzos, una aproximación sistémica relativamente global a los fenómenos de enseñanza (Grouws, 1992 & Kilpatrick, 1994). Su objetivo fue identificar tendencias con respecto a la prescripción de aprendizajes y a la manera en que se presentan las habilidades y conocimientos en los objetivos de aprendizaje (Mineduc 2019).

En la propuesta curricular para 3° y 4° medio se propició las habilidades descritas y se procuró avanzar en el tipo de situaciones en las que jóvenes resuelven problemas, formulan posibles explicaciones o conjeturas y efectúan demostraciones, como un paso más de la habilidad de representar. En particular, en esta etapa de su vida escolar, adquieran experiencia para formular, demostrar o refutar conjeturas (Mineduc, 2019).

El aprendizaje de la matemática, como el desarrollo de habilidades de la misma, se reconoce cada vez más como una herramienta fundamental en la comprensión científica de fenómenos. La geometría se ha utilizado para desarrollar una serie de lecciones sobre la importancia funcional de las matemáticas en la naturaleza (Christine, Helminski, Huber & Jones, 2015). Por su parte, Hugot (2005) analiza los problemas que tienen las y los alumnos en la geometría, entre los que menciona: el problema ligado a los movimientos del punto de vista de los objetos en el espacio y el problema ligado a las representaciones (Colomo, 2014).

Además, según el informe de resultados de admisión 2021 publicado por el Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE), de acuerdo al año de egreso, las y los estudiantes de promociones anteriores al 2020 obtuvieron un puntaje promedio de 512 puntos, y la generación actual de 495 puntos, una diferencia de 17 puntos. En comparación al proceso de admisión 2020 la diferencia entre estos grupos fue de 20 puntos. De igual forma, en la reciente Prueba de Transición Universitaria (PTU) sigue habiendo una considerable cantidad de preguntas en el campo de la geometría, y a la vez resulta ser un área donde las y los estudiantes presentan dificultades a la hora de su aprendizaje. En este sentido, la falta de motivación de las y los estudiantes, resulta ser una variable importante de los resultados escolares, así como de numerosos problemas de los centros educativos en su conjunto (Escaño & Gil, 2008).

Ahora bien, el eje de Geometría tendrá un nuevo énfasis en la Geometría 3D, es decir, en la geometría tridimensional, donde las y los estudiantes evidencian distintos comportamientos al momento de situarse en un espacio de dos y tres dimensiones. En este sentido, Gutiérrez (2014) declara que existen características diferenciadoras de la geometría espacial (tridimensional), especialmente de la complejidad de representar en el plano objetos espaciales, no olvidemos que la pantalla del computador es una superficie plana, y de la necesidad de uso intensivo de habilidades de visualización espacial por parte de las y los estudiantes.

Por consiguiente, se observan diversos e innovadores desafíos pedagógicos en el PEA del programa de Geometría 3D teniendo presentes las dificultades de las y los estudiantes en su aprendizaje. Además, Ovalle y Vásquez (2020), señalan, que en las aulas de clase las y los estudiantes no logran la motivación suficiente para favorecer los procesos de enseñanza aprendizaje, de ahí el interés de abordar el tema de la incorporación de recursos tecnológicos e innovadores para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Con el auge de las TIC y su aplicación en el campo educativo, el rol docente cambió de acuerdo a las exigencias de la sociedad actual, el o la docente debe familiarizar a los estudiantes con los nuevos recursos tecnológicos, y desarrollarlos de manera motivadora, con nuevas herramientas tecnológicas y didácticas (Ovalle & Vásquez, 2020). Palmero et al., (2012) expone que “para que existan cambios es necesario que éstos se produzcan en las prácticas de aula, de tal manera, que se busque un escenario innovador para las y los estudiantes, donde la tecnología es importante, pero no suficiente”.

La motivación constituye un aspecto en cada persona, ya que es la encargada de hacer que la persona haga o no determinados actos. Es la responsable de que cada individuo se plantee objetivos o metas determinadas, donde sea estimulado, logrando ser capaz de llegar a cumplirlos, o al menos intentarlo (Ferre, 2014). De acuerdo con Santrock (2002), “la motivación es el conjunto de razones por las que las personas se comportan de las formas en que lo hacen. El comportamiento motivado es vigoroso, dirigido y sostenido”.

Estas experiencias del aprendizaje matemático, tienen que promover un estilo de trabajo colaborativo y metódico, buscar soluciones a problemas de manera flexible y creativa, tener curiosidad e interés por el aprendizaje autónomo, mostrar una actitud positiva frente a sí y la disposición a enfrentar desafíos y situaciones nuevas, para cuestionar los propios procedimientos; asimismo, tiene que establecer espacios de diálogos reflexivos (Mineduc, 2019).

De hecho, ya se ha experimentado en espacios tridimensionales motivacionales, por ejemplo, en Taiwán, en la *National Central University*, se trabajó en un proyecto para la enseñanza de la geometría, para cálculo de volúmenes y áreas de las caras de objetos en tres dimensiones, en ambientes colaborativos, mediante la realidad virtual y diferentes herramientas multimedia como los tableros electrónicos, chats para mensajes, etc., donde cada estudiante, en su área de trabajo, resolvió y documentó los problemas que se le fueron presentando y así podía ver los tableros y las notas que sus demás compañeros iban realizando y podía compararlas con las suyas para observar los distintos métodos que se podían presentar para resolver un mismo problema (Wu-Yuin & Shin-Shin, 2013).

Tapia (2003), opina que la motivación por aprender matemática está asociada al interés y esfuerzo que las y los estudiantes ponen en el trabajo escolar, donde puede variar en función de la edad, de las experiencias escolares y del contexto sociocultural del sujeto. En el campo de la educación, para conseguir que las y los alumnos aprendan, no basta la explicación de contenidos. Es necesario despertar su atención, creando un genuino interés por el estudio y el conocimiento, estimular su deseo de conseguir los resultados previstos y cultivar el gusto por los trabajos escolares.

Escaño y Gil (2008), afirman lo siguiente: "la motivación y el esfuerzo están íntimamente relacionados. La motivación hace que se produzca el esfuerzo y el esfuerzo efectivo consigue buenos resultados, los cuales, a su vez, alimentan la motivación".

De esta manera, se necesita desarrollar situaciones motivacionales que generen un diálogo y una discusión en el ámbito de datos, representaciones y variaciones de ellos, el sentido de los contenidos matemáticos. Es necesario priorizar la interpretación de los resultados por sobre la repetición o mecanización de algoritmos, fórmulas y definiciones. Para esto, se debe establecer conexiones entre la situación, los conceptos matemáticos involucrados, las formas de representar, las variaciones posibles y sus significados en las respuestas (Mineduc, 2021). El desarrollo histórico de la geometría ha estado relacionado con actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas (Castiblanco, Urquina, Camargo, Acosta, 2004), situación que justifica un redireccionamiento de los procesos de enseñanza hacia el logro de una visión contextualizada de la geometría.

1.2 Definición del problema y pregunta de investigación

Si bien las evaluaciones internacionales, regionales y, en número cada vez mayor, nacionales realizadas desde mediados del decenio de 1990 demuestran que los resultados deficientes en lenguas, matemáticas y otras materias siguen siendo característicos de muchos países del mundo, se necesita con urgencia más reflexión e investigación sobre cómo abordar y enseñar estas importantes asignaturas en el sistema educativo formal sin sobrecargar los planes de estudios, y cómo hacerlo también en los contextos no formales e informales, para las y los alumnos de todas las edades y condiciones sociales. Asimismo, es necesario que las prácticas pedagógicas y las funciones de los docentes puedan evolucionar: la educación sólo puede cambiar si los maestros y los educadores también cambian (UNESCO, 2008).

En el contexto del currículum ajustado a las nuevas Bases Curriculares de 3° y 4° año de enseñanza media (Decreto Supremo N°193 de 2019), que inició su vigencia el año 2020 (Mineduc, 2021), surgen nuevas propuestas en el PEA de la Geometría 3D para estudiantes de 3° y 4° medio donde tengan que desarrollar la habilidad de representar y de visualización espacial dentro de un objetivo de aprendizaje.

Bajo la perspectiva del desarrollo del pensamiento cognitivo, el currículum considera la motivación como un motor o fuerza necesaria para iniciar y mantener la actividad mental (Pérez & Prieto, 1993). Esta perspectiva concede especial importancia al estudio de los aspectos motivacionales en el PEA. En la actividad escolar, las metas que cada estudiante se propone alcanzar, influyen de diferente forma sobre la predisposición que cada uno muestra hacia el esfuerzo, así como sobre las tareas de aprendizaje y, por consiguiente, sobre su propio rendimiento.

De acuerdo con Casassus (2006), las y los alumnos tienen una relación emocional con el aprendizaje, y asegura que uno de los problemas principales de la educación hoy en día, es la existencia de un supuesto erróneo en el currículo, donde se supone que las y los estudiantes estarán naturalmente interesados y motivados por los contenidos que han sido determinados por las autoridades educacionales. En efecto, Escaño y Gil (2008), señalan, que los bajos resultados obtenidos en relación al rendimiento académico se identifican especialmente con las y los estudiantes desmotivados, poco voluntarioso o voluntariosa; mientras que el alumnado motivado se relaciona con la o el estudiante competente.

En esta época de grandes y acelerados cambios sociales y tecnológicos, existe una preocupación de parte de la colectividad sobre la efectividad de las prácticas educativas, ya que, a pesar de contar con recursos como computadores, smartphone e internet, estas no difieren de las usadas desde los siglos pasados, llegándose a cuestionar los resultados en estos procesos (Díaz, 2017).

Además, los recursos utilizados son limitados. En la mayoría de los casos el proceso de enseñanza está condicionado por libros de texto conservadores, que impactan considerablemente el qué y cómo enseñar (Abrate, 2006). Frecuentemente la enseñanza de la geometría se limita a reconocer figuras y dibujarlas en el papel; las lecciones se desarrollan de manera abstracta, sin proporcionarle a los estudiantes ejemplos reales que le faciliten un mejor entendimiento de los contenidos (Goncalves, 2006).

Según Tovar y Mayorga (2014), Se puede notar con preocupación la problemática existente en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje (PEA) de la geometría en especial en el contenido de figuras y cuerpos geométricos. Se ha observado que las y los estudiantes tienen serias dificultades al enfrentarse a sus cursos de geometría, presentando errores en la representación, identificación, caracterización de figuras y cuerpos geométricos según su apariencia global. Al respecto, Ferreira (2010) indica que las y los estudiantes presentan dificultades para la adquisición de conocimientos geométricos, tales como: identificación, caracterización de figuras y cuerpos, esta situación es reflejo de deficiencias en la formación de conceptos al momento de identificar las diferentes formas en su entorno, diferenciar las figuras de los cuerpos, al igual que en el desarrollo del pensamiento geométrico, esto se refleja en que los estudiantes generan una falta de interpretación de cada uno de los objetos matemáticos (símbolos) presentes en la rama de la geometría al momento de visualizar, identificar, reconocer las figuras y cuerpos presentes en su entorno (Mayorga & Tovar, 2014).

Para Zemelman (1998), el objetivo principal al enseñar matemáticas es guiar a todas y todos los estudiantes al desarrollo de la capacidad matemática. Donde la motivación por el aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos, deben contemplar la capacidad de ver y creer que las matemáticas hacen sentido, y que son útiles para las y los estudiantes. Por tanto, la motivación, hará que las y los estudiantes justifiquen su esfuerzo y trabajo para aprender (Roa, 2007). La motivación escolar no es una técnica o método de enseñanza particular, sino un factor cognitivo presente en todo acto de aprendizaje. La motivación, además, condiciona la forma de pensar, y con ello, el aprendizaje resultante obtenido (Farias & Pérez, 2010).

Entonces, considerando las dificultades de las y los estudiantes en geometría más los distintos recursos de aprendizaje, de esta forma, se propone a la magia como una forma de motivación en el PEA del reciente plan de Geometría 3D propuesto en las nuevas bases curriculares del 2019 de 3° y 4° medio. De esta manera, interpretar las percepciones de las y los estudiantes desde un enfoque cualitativo, sustentado en la teoría de representaciones semióticas en marco COPISI con uso del software educativo GeoGebra.

En este caso, la herramienta motivacional, estará basada en el objetivo de aprendizaje señalado por el Mineduc de “Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales". Este objetivo corresponde al objetivo de aprendizaje 04 (OA04) del Plan de Geometría 3D, donde se relaciona con el desarrollo de la habilidad de representar y de visualización espacial de las y los estudiantes de 3° y 4° medio.

En estas secuencias motivacionales, deben utilizarse varios tipos de representaciones; por ejemplo: en una sesión de geometría, las figuras geométricas físicas representan visualmente propiedades geométricas, numéricas o algebraicas donde se puede transitar de una representación a otra. Además, se debe usar dichas representaciones de manera articulada para entender mejor lo que se está aprendiendo. Asimismo, la o el docente puede verificar si un alumno conoce un concepto, cuando transita de un tipo de representación a otra; es decir, desde el lenguaje natural al simbólico o desde un lenguaje pictórico a uno simbólico y viceversa. (Mineduc, 2021). En consecuencia, surge la siguiente pregunta:

¿Cómo influye la magia en la activación del PEA de los aprendizajes relativos a la formulación y verificación de conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, de las y los estudiantes de 3° y 4° medio?

1.3 Objetivos de Investigación

1.3.1 Objetivo General

Elaborar una secuencia motivacional que permita el desarrollo del objetivo de aprendizaje de formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por la rotación o traslación de figuras planas en el espacio, utilizando la magia y el software educativo GeoGebra. Desde un enfoque de la teoría de las representaciones semióticas en un marco COPISI.

1.3.2 Objetivos Específicos

1) Identificar las dificultades presentes en la literatura, de las y los estudiantes de 3° y 4° medio con respecto a la geometría en el plano (2D) y a la tridimensional (3D).

2) Proponer una secuencia motivacional basada en la teoría de las representaciones semióticas en un marco COPISI, que utilice la magia y el software educativo GeoGebra.

3) Describir como la magia influye en el proceso de activación de los aprendizajes relativos a la formulación y verificación de conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, de las y los estudiantes de 3° y 4° medio.

1.4 Supuestos del trabajo

La invención de la magia en la secuencia motivacional de aprendizaje propuesta, se observarán mejoras de la atención en las y los estudiantes, descubriendo un nuevo método para fomentar y generar la motivación del alumnado, donde los desafíos de aprendizajes por medio de actividades, resulten lúdicos y novedosos para las y los estudiantes, generando así, en el aula más atracción por los contenidos de geometría tridimensional.

Esta introducción de efectos de magia como explicación y retroalimentación de conceptos matemáticos, contribuye a favorecer la curiosidad y la motivación de las y los estudiantes en el PEA de geometría tridimensional, frente a otras metodologías de enseñanza en esta área. En las actividades propuestas dentro del PEA del plan de Geometría 3D, se encuentran diversas posibilidades didácticas, donde llevándolas a cabo con la magia, promoverá la activación de los aprendizajes de las y los estudiantes de 3° y 4° medio.

De esta manera, combinando los efectos de magia junto a los constructos matemáticos, se logrará captar la atención de las y los estudiantes, promoviendo un PEA motivacional, e influenciando en la aptitud y motivación previa frente a los contenidos geométricos, y así, generar una predisposición positiva para las y los estudiantes frente a los procesos de enseñanza. Sin trivializar los constructos matemáticos, enfocándose en el objetivo de aprendizaje relativo.

1.5 Justificación e importancia

La problemática descrita hace hincapié en la necesidad de elaborar recursos tecnológicos, motivadores e innovadores para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría 3D, teniendo en cuenta las dificultades de aprendizaje que tienen las y los estudiantes en geometría previamente al adentrarse al espacio tridimensional y en su desarrollo paulatino en ella.

Tal y como indican Molero y Salvador (2012), los programas de geometría dinámica permiten acercar las matemáticas a la realidad transformando un teorema matemático en una realidad observable. También comentan que la introducción de las nuevas tecnologías en la educación está imponiendo una reforma del currículo tanto en contenidos como en lo que se refiere a los cambios metodológicos y didácticos que hay que realizar para encontrar el lugar apropiado de las TIC en el PEA (Colomo, 2014).

En buena medida a su naturaleza digital, las TIC ofrecen posibilidades inéditas para el almacenamiento, el procesamiento, la representación, la transmisión, el acceso y el uso de la información, abriendo así el camino a la innovación pedagógica y didáctica, e invitando a la búsqueda de nuevas vías para mejorar la enseñanza y promover el aprendizaje (Coll & Martí, 2001).

Según Ferre (2014), la motivación puede llegar a ser un elemento clave para el aprendizaje. Si un estudiante se encuentra motivado, se mostrará mucho más implicado en las actividades académicas. Entonces, cuando se enfrente a problemas, hará todo lo posible por llegar a su resolución, buscando entre las posibles alternativas, la que mejor responde a su situación. Herrera et al. (2004), indica que, “el interés, la necesidad, el valor, la actitud y la aspiración dirigen la conducta y controlan la intensidad de ésta en la dirección señalada”.

Existen desafíos similares en contextos educativos no formales, en los que será preciso elaborar respuestas apropiadas a un amplio espectro de necesidades de aprendizaje. (UNESCO, 2008).

Las habilidades de alfabetización digital y uso de tecnologías que promueven las Bases Curriculares de 3° y 4° medio –como parte de las Habilidades para el siglo XXI– son fundamentales para que las y los alumnos trabajen en instancias de colaboración, comunicación, creación e innovación, mediante el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC). Estas habilidades de alfabetización digitales implican utilizar la tecnología como herramienta de trabajo donde se logra dominar las posibilidades que ofrece y darle un uso creativo e innovador (Mineduc, 2021).

Asimismo, la organización *Assesment & Teaching for the 21st Century Skills (ATC21)* establece cuatro categorías: maneras de pensar, maneras de trabajar, herramientas para trabajar y maneras de vivir en el mundo (Binkley et al, 2012). Este último modelo se tomó como base para establecer las habilidades para el siglo XXI de estas Bases Curriculares para los niveles de 3° y 4° medio, y a partir de algunas observaciones del Consejo Nacional de Educación (CNED), especialmente las contenidas en su Acuerdo 47/2017, en el cual observó la necesidad de que se incorporen las habilidades metacognitivas y tecnológicas, que se visualizan como ausentes en la propuesta y que se consideran necesarias para el siglo XXI.

Esto quiere decir que las estructuras y modalidades han de ser diversas y flexibles, y los planes de estudios, la pedagogía y las prácticas docentes deben mejorarse y adaptarse de modo que sean pertinentes para los estudiantes (UNESCO, 2008).

Por lo tanto, es evidente la necesidad de fomentar el interés y la motivación del estudiantado por las actividades que se realizan y las habilidades a desarrollar, de manera que les puedan asignar un sentido en lo que invierten tiempo, esfuerzo y atención. Por lo que fortalecer las emociones positivas, fomentan la confianza entre profesores y alumnos; el alto nivel de apoyo brindado por el docente, genera en el alumno una mayor motivación y compromiso (Díaz & Hernández, 2010). En la actividad escolar, las metas u objetivos que cada estudiante se propone, influyen de diferente forma sobre la predisposición a las tareas de aprendizaje y, por consiguiente, sobre su propio rendimiento.

Godino, Batanero & Font (2003), refieren que las aplicaciones matemáticas tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Si queremos estudiantes motivados, es importante que los ejemplos y situaciones que mostramos en la clase hagan ver, de la forma más completa posible, el amplio campo de fenómenos que las matemáticas permiten organizar. En este contexto, la magia contribuye a un mayor acercamiento en el aula escolar, fomentando la relación psicoafectiva entre docentes y estudiantes, creando una atmosfera relajada y motivadora, donde el aprendizaje sea más viable (Ruíz, 2013).

En consecuencia, promover la motivación en el desarrollo de nuevas competencias y de habilidades tanto curriculares como en el marco del siglo XXI. Asimismo, establecer la relevancia que influye esta manera de aprender geometría desde un paradigma de representaciones semióticas que estudie los registros, representaciones y la transición de los objetos geométricos a través de la magia, utilizando GeoGebra en un marco COPISI, y poder describir fenómenos por medio de figuras o cuerpos geométricos, ósea, visualizar la forma en que las cosas se nos aparecen en nuestra experiencia y como las experimentamos en un contexto geométrico. Para esto, se debe establecer conexiones entre la situación, los conceptos matemáticos involucrados, las formas de representar, las variaciones posibles y sus significados en las respuestas (Mineduc, 2021).

La o el docente como guía del PEA, encuentra su rol en el significado de las actividades de aprendizaje, a través de efectos de magia, donde se evidencia lo abstracto de ideas y nociones matemáticas en lo cotidiano, utilizando material en concreto. Además, con esto el PEA de la geometría se vuelve motivacional para la o el estudiante, gracias a la manipulación de material, dándole significado a lo aprendido (Fajardo et al., 2009). En relación a las y los estudiantes, la magia educativa les proporciona novedades didácticas que favorecen y promueven el aprendizaje innovador frente a los propios procesos estandarizados de enseñanza (Ruiz, 2013). Busca interpretar la realidad del contexto, logrando una representación visual para comprender cómo se pueden generar estrategias que potencien la motivación del aprendizaje de las matemáticas, de acuerdo con Trujillo, et al. (2019), estas estrategias innovadoras potencian la motivación, siendo esta la reflexión central dentro del proceso de aprendizaje.

Freudenthal (1991) anticipó que ésta es la forma natural de aprender matemáticas, y planteó que es imprescindible que las y los estudiantes adquieran el conocimiento matemático de forma progresiva, considerando diferentes niveles de comprensión que parten de lo concreto y finalizan en lo abstracto. Este planteamiento, válido para todos los conocimientos matemáticos, lo es especialmente para el aprendizaje de los conocimientos geométricos (Alsina, 2015).

Se requiere que la matemática sea generalizable y más motivadora, de manera que los educandos hagan explícito su conocimiento, se propongan conjeturas y las pongan a prueba, se generen representaciones, se discuta y verifiquen las ideas sobre los problemas planteados o conjeturas encontradas (Oteiza & Villarreal, 2005).

La motivación en el ámbito de la educación, según Woolfolk (1996), señala que “es un estado interno que activa, dirige y mantiene la conducta del estudiante”. Por su parte, Alves (1963), indica que “motivar es despertar el interés y la atención de los alumnos por los valores contenidos en la materia, excitando en ellos el interés de aprenderla, el gusto de estudiarla y la satisfacción de cumplir las tareas que exige”.

Gonzáles (2001), menciona: “un estudiante motivado alcanzará éxitos y podrá desarrollar sólidas intenciones profesionales”. Además, añade que la motivación constituye un condicionante decisivo en el rendimiento académico. En ese sentido, Martí (2003) expresa que la motivación es un factor muy importante en el rendimiento del estudiante. El rendimiento académico es el resultado de todos los esfuerzos, del o la docente, de los padres y madres, y, sobre todo, es el resultado del esfuerzo del propio estudiante. Además, un buen rendimiento va a depender en gran medida del grado de motivación e interés que el estudiante tenga (Kaczynka, 1986).

Así, la motivación hacia la matemática se relaciona no sólo con el comportamiento manifestado por las y los estudiantes frente a eventuales situaciones, sino también con la familia, y con el rol que el docente debe cumplir para cautivar a las y los estudiantes con el conocimiento y su utilidad. Por ende, la motivación es un conjunto de factores que influye en el accionar de las y los estudiantes (Gatica, 2017).

De esta manera, las y los docentes elaboran actividades para la enseñanza de diferentes contenidos geométricos, en todos los niveles educativos basándose en la manipulación de los entornos de geometría dinámica. Battista (2007) y Laborde (2006), han analizado la utilidad y eficacia de dichos entornos para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y han definido diferentes marcos teóricos que permiten analizar e interpretar la actividad de las y los estudiantes (Laborde, 2006 & Battista, 2007).

Por consiguiente, el programa de Geometría 3D ofrece a las y los estudiantes oportunidades de aprendizajes motivadores y contextualizados, tanto en la matemática misma como en diferentes entornos significativos, interdisciplinarios o de profundización matemática; de este modo, las y los estudiantes pueden sistematizar o aplicar los conocimientos y procedimientos aprendidos, y también idear y poner en práctica sus propias maneras de abordar fenómenos y problemas (Mineduc, 2021).

1.6 Limitaciones

Las limitaciones presentes fueron, por una parte, los constructos matemáticos, donde no se trabajaron homotecias, ecuaciones vectoriales, intersecciones de rectas en el plano, y la representación de objetos mediante cortes y proyecciones en el plano.

Además, se hizo hincapié en la habilidad de representar, limitándose a desarrollar las habilidades de resolver problemas, argumentar y comunicar, y de modelar.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1 Fundamentos Curriculares de Geometría 3D

Las bases curriculares de las asignaturas de matemática de 3° y 4° medio implementadas por el Mineduc presentan objetivos de aprendizaje de dos naturalezas: unos de habilidades comunes, a todas las asignaturas matemáticas del nivel, y otros de objetivos enfocados en el conocimiento y la comprensión (Mineduc, 2019). Ambos tipos de objetivos se relacionan en el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) junto con las propuestas desde el marco de las habilidades para el siglo XXI. Estas nuevas habilidades y competencias denominadas habilidades del siglo XXI, se proyectan como claves para que los jóvenes sean trabajadores efectivos y ciudadanos de la sociedad del conocimiento (OCDE, 2016).

De este modo se establecen los objetivos de aprendizajes (OA) que definen los desempeños que se espera que las y los estudiantes logren en cada asignatura, unidad y nivel de enseñanza. Estos objetivos integran habilidades, conocimientos y actitudes que se consideran relevantes para que los jóvenes alcancen un desarrollo armónico e integral que les permita enfrentar su futuro con las herramientas necesarias y participar de manera activa y responsable en la sociedad (Mineduc, 2021). La comunicación de ideas matemáticas se ve favorecida por la selección, interpretación, traducción y el uso de una variedad de representaciones tales como gráficos, tablas, diagramas, dibujos, ecuaciones, fórmulas y materiales concretos y digitales, que capturen una situación con tal que permitan interactuar con un problema y posibilitar la comprensión de los conceptos matemáticas involucradas (OCDE, 2018).

Por ello, en el plan de Geometría 3D al igual que el de formación general, fomenta el uso de las tecnologías digitales a través de software y aplicaciones digitales, como medios para alcanzar diferentes niveles de comprensión y aplicación de los conocimientos y procedimientos, al modelar y resolver problemas propios de la disciplina o relacionados con otras asignaturas, o bien de la vida cotidiana (Mineduc, 2019). De este modo una de las habilidades a desarrollar es la de representar, donde se espera que las y los estudiantes elaboren representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación y a su vez, evaluar diferentes representaciones, de acuerdo a su pertinencia con el problema por solucionar.

Por ello, se necesita aplicar diferentes enfoques a la solución de problemas vinculados al arte, la arquitectura, el diseño, la construcción, entre otros, en los cuales la creatividad y la innovación son el centro de las aplicaciones de la matemática (Mineduc, 2019). También, se incorporan los elementos de la geometría sintética, analítica y vectorial para estudiar figuras del plano y del espacio, y sus relaciones y atributos métricos para concebir estrategias de enseñanza y aprendizaje que permitan a sus estudiantes construir, visualizar y transformar figuras 2D y 3D en forma manual y digital, planteando conjeturas, demostrando propiedades y resolviendo problemas.

Además, ofrece oportunidades de aprendizaje vinculadas con situaciones en que intervienen la forma, el tamaño y la posición, formulando y verificando conjeturas de figuras 3D generadas en el espacio por rotaciones y traslaciones, donde las y los estudiantes han conocido con anterioridad conceptos de rotación y traslación, para ahora introducirse en los elementos básicos de la Geometría 3D donde se vinculan con el arte, la construcción o la arquitectura, mediante una contribución a la visualización espacial se sitúa en un contexto de espacio 3D con relación a el espacio 2D que permiten usar lo aprendido para la solución de problemas observados en el espacio tridimensional, y poder familiarizarse con el uso de recursos digitales especialmente diseñados para la Geometría 3D (Mineduc, 2019).

Es importante verificar que la secuencia de las actividades y estrategias elegidas sean las adecuadas para el logro de los objetivos de aprendizaje (Saphier, Haley-Speca & Gower, 2008).

En ese sentido, la o el docente comprende los elementos de la visión sinóptica, como la geometría sintética, analítica y vectorial para estudiar figuras del plano y del espacio, y sus relaciones y atributos métricos para concebir estrategias de enseñanza y aprendizaje que permitan a sus estudiantes construir, visualizar y transformar figuras 2D y 3D en forma manual y digital, planteando conjeturas, demostrando propiedades y resolviendo problemas.

Del mismo modo, la o el docente egresado es capaz de profundizar en el razonamiento inductivo y deductivo, y realizar demostraciones de relaciones geométricas en el plano y en el espacio, para utilizarlas en el diseño de actividades de aprendizaje de propiedades de figuras 2D y 3D, de modo que sus estudiantes puedan plantear conjeturas geométricas y argumentar sobre su validez. Construye, visualiza y transforma figuras manualmente y con herramientas tecnológicas, y fomenta en sus estudiantes la resolución de problemas, discusión y argumentación sobre elementos y propiedades métricas fundamentales de figuras planas y cuerpos (CPEIP, 2021).

El diseño de las secuencias de enseñanza aprendizaje, tienen una estructura que permite permear el conocimiento desde el programa general, pasando por el plan de estudio específico y los propósitos de los objetivos de aprendizaje para hacerlo acorde con la o las actividades de aprendizaje, que mediante una situación problemática o un fenómeno en concreto permita crear evidencias de desempeño y posteriormente aplicar un dispositivo de evaluación (Marín & Guzmán, 2013).

Se puede afirmar, según el Mineduc (2019), que el módulo ofrece múltiples oportunidades para establecer conexiones, tanto internas, propias de la geometría y la matemática en general, como externas, es decir, con otras áreas del conocimiento y el quehacer humano. Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto de la sala de clases como en la vida cotidiana (Mineduc, 2021).

2.1.1 Habilidad de Representar en Matemática

Para trabajar con matemática, se requiere de un lenguaje simbólico (abstracto). En estos niveles, al igual que en los anteriores, se propuso que los estudiantes transiten fluidamente entre diferentes formas de representación, desde lo concreto hasta alcanzar, progresivamente, el lenguaje simbólico. Las metáforas, las representaciones y las analogías juegan un rol clave en este proceso y los ayudan a construir sus propios conceptos matemáticos (Mineduc, 2019). Los estudiantes de estos niveles adquieren conocimientos por medio del “aprender haciendo” en situaciones realistas o reales y las traducen a diversas formas de representación, incluido el lenguaje simbólico. De esa manera, se espera que logren aprendizajes significativos.

En particular, se espera que extraigan información del entorno y elijan distintas formas de expresar datos (tablas, gráficos, diagramas de flujos, metáforas, representaciones digitales y símbolos matemáticos) según las necesidades de la actividad o la situación; que usen e interpreten representaciones concretas, pictóricas y/o simbólicas (COPISI) para resolver problemas e identifiquen la validez y las limitaciones de esas representaciones según el contexto (Mineduc 2019).

En este proceso, las exploraciones empíricas dan paso a los experimentos mentales, en los cuales la realidad se reconstruye mediante secuencias de eventos, y posteriormente estos son reemplazados por experimentos lógicos en los cuales los mecanismos de construcción se reflejan. (L. Camargo, 2011)

Al desarrollar la habilidad de representar las y los estudiantes manejarán una variedad de representaciones matemáticas de un mismo concepto y transitar fluidamente entre ellas, permitirá a las y los estudiantes lograr un aprendizaje significativo y desarrollar su capacidad de pensar matemáticamente. Un aprendizaje se dice significativo cuando los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del estudiante. Esto se logra gracias a un esfuerzo deliberado del alumno por relacionar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos y es producto de una implicación afectiva del estudiante; es decir, él quiere aprender aquello que se le presenta, porque lo considera valioso (Mineduc, 2021).

Toda representación debe transformarse de modo tal que puedan extraerse de ellas variados conocimientos, y así, no solo comunicar datos, sino que también transformar una representación para hacer explícito lo implícito (Duval, 1999).

Un momento importante en el aprendizaje de las matemáticas exento de la geometría, se presenta con la introducción de las fracciones, los decimales y la razón. Estos aprendizajes implican comprender relaciones entre cantidades, en el uso de nuevos sistemas de símbolos para representar dichas relaciones y en la ampliación del sistema de numeración decimal. Por otra parte, aprender las fracciones, los números decimales, porcentajes, razones y proporciones de manera relacionada y comprensiva lo constituye en un proceso de “tratamientos y cambios de registros de representación cada vez más complejos, que conservan ya sea todo el contenido de la representación inicial, o bien solamente una parte de ese contenido” (Duval, 1999).

Parzysz sugiere que, para ser eficaz y útil, cualquier forma de representación necesita compensar dicha pérdida de información mediante la utilización de determinados códigos, implícitos o explícitos, que aporten información complementaria a la contenida en la proyección gráfica. Para así facilitar el aprendizaje a los estudiantes, las y los profesores deben enseñarles a entender y manejar esos códigos y deben ser conscientes de las dificultades que en ocasiones conlleva dicho aprendizaje, en particular en los entornos de geometría dinámica 3-dimensional (EGD3d) (Gutiérrez, 2014).

También podemos constatar la representación geométrica en las danzas folklóricas (Sardella, 2004), en varias manifestaciones artísticas y decorativas de las culturas indígenas (Sardella, 2001) y en los diseños textiles de los pueblos indígenas (Micelli & Crespo, 2011). Además, se encuentran varias formas de artesanías, tradicionales y urbanas (Fiadone, 2003; Servetto, Castilla, Navarro & Vaquero, 1998; Maronese, 2004) y, en las artesanías de trenzados (Osornio, 1934 & Flores, 1960).

2.1.2 Metacognición

El concepto clave que surge como herramienta y, a la vez, como propósito de todo proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) corresponde al pensamiento metacognitivo, entendido como un conjunto de disposiciones mentales de autorregulación que permiten al aprendiz monitorear, planificar y evaluar su propio proceso de aprendizaje (Mineduc, 2021). La metacognición se relaciona al concepto de “aprender a aprender”. Se refiere a ser consciente del propio aprendizaje y de los procesos para lograrlo, lo que permite autogestionarlo con autonomía, adaptabilidad y flexibilidad (Mineduc, 2021).

El proceso de pensar acerca del pensar involucra la reflexión propia sobre la posición actual, fijar los objetivos a futuro, diseñar acciones y estrategias potenciales, monitorear el proceso de aprendizaje y evaluar los resultados. Incluye tanto el conocimiento que se tiene sobre uno mismo como estudiante o pensador, como los factores que influyen en el rendimiento. La reflexión acerca del propio aprendizaje favorece su comunicación, por una parte, y la toma de conciencia de las propias capacidades y debilidades, por otra. Desde esta perspectiva, desarrolla la autoestima, la disciplina, la capacidad de perseverar y la tolerancia a la frustración (Fadel et al, 2016).

Según el Mineduc (2021), la metacognición es un proyecto de las y los estudiantes, junto con la o el docente, donde deben reflexionar sobre lo que están aprendiendo, cómo están aprendiendo y por qué están aprendiendo. Flavell (1976), se refiere a la metacognición como a la capacidad para estar conscientes de nuestros propios procesos de aprendizaje y poder monitorearlos a la vez. Por lo tanto, implica tanto el conocimiento de los procesos cognitivos, como generar estrategias para monitorear, evaluar y regular nuestros PEA (Peters, 2000).

La metacognición juega un rol importante dentro de la matemática. La disciplina se aprende “haciendo matemática”, reflexionando acerca de lo hecho y confrontando la actuación propia con el conocimiento construido y sistematizado anteriormente. Por ello, están imbricadas en toda tarea matemática las habilidades de representar, modelar, argumentar y comunicar, y resolver problemas. El conocimiento de los fenómenos que construimos y las destrezas intelectuales que desarrollamos incluyen información sobre el contexto de la experiencia. La información sobre el contexto es parte del conocimiento que es construido por el estudiante para explicar o dar sentido a un fenómeno. La formación del sentido es desarrollada a partir de un problema, desacuerdo, confusión, error, o disonancia y, por consiguiente, ésta es la causa del proceso de construcción del conocimiento metacognitivo, cuando aparece el desequilibrio, la persona necesita reaccionar y encontrar una respuesta a esa disonancia (Gros, 2002).

Por otro lado, en el contexto de las representaciones semióticas según Tamayo (2006), adquiere gran importancia en el actuar del docente: la metacognición. El o la educadora que actúe metacognitivamente enseñaría a sus estudiantes a diferenciar los distintos tipos de representaciones que ellos emplean, a identificar los alcances y los límites de cada una de éstos, en lugar de pensar en erradicarlos de su sistema cognitivo.

2.1.3 Creatividad

El término creatividad significa: “innovación valiosa”, y surgió a partir de un célebre discurso de Guilford a la sociedad Americana de Psicología en 1950” (Martínez & Salanova, 2016). Las personas que aprenden a ser creativas poseen habilidades de pensamiento divergente, producción de ideas, fluidez, flexibilidad y originalidad. El pensamiento creativo implica abrirse a diferentes ideas, perspectivas y puntos de vista, ya sea en la exploración personal o en el trabajo en equipo (Mineduc, 2021).

La enseñanza para la creatividad implica asumir que el pensamiento creativo puede desarrollarse en todas las instancias de aprendizaje y en varios niveles: imitación, variación, combinación, transformación y creación original. Por ello, es importante que los docentes consideren que, para lograr la creación original, es necesario haber desarrollado varias habilidades y que la creatividad también puede enseñarse mediante actividades más acotadas según los diferentes niveles (Fadel et al, 2016).

La creatividad emerge a lo largo de esa variable multiplicidad: gracias a impulsos e hipótesis singulares, gracias a ejemplos que permiten visualizar el entronque entre las hipótesis y los conceptos, gracias a formas inventivas de demostración que permiten asentar la corrección del entramado (Zalamea, 2009).

Actualmente, surgen nuevas situaciones que necesitan respuestas y soluciones innovadoras, antes desconocidas, y es aquí donde juega un papel importante la creatividad, y es por eso que las y los docentes han de ser profesionales creadores ya que el aprendizaje debe ser empleado creativamente (Martínez-Salanova, 2016). El docente y mago Xuxo Ruiz (2013), menciona que debemos enseñar y aprender a desarrollar la creatividad del hemisferio derecho del cerebro, donde los procesos más imaginativos ocurren allí.

2.2 Motivación

De acuerdo con Santrock (2002), “la motivación es el conjunto de razones por las que las personas se comportan de las formas en que lo hacen. El comportamiento motivado es vigoroso, dirigido y sostenido”.

Ramírez, Roa y Herrera (2004) señalan que la motivación es una de las principales claves explicativas de la conducta humana, en referencia a la explicación de los tipos de comportamiento. Por ello, la motivación representa lo que desde un primer momento determina que la persona inicie o no una acción, se dirija hacia un objetivo determinado.

Por otro lado, Ajello (2003) entiende la motivación como la responsable de sostener el desarrollo de las actividades significativas para la persona, en las cuales toma parte. Además, señala que, en el plano educativo, la motivación debe ser entendida como la predisposición para aprender y continuar haciéndolo de forma autónoma.

Trechera (2005) explica, el término motivación deriva del verbo latino *moveré*, cuyo significado es mover, por lo tanto, motivación es la necesidad de activar la conducta dirigiéndola hacia un objetivo propuesto. Según el autor, para que un objetivo lleve a la motivación debe contener los siguientes elementos:

• Conocimiento: para alcanzar una meta se deben de conocer los medios requeridos para llegar hasta ella.

• Aceptación: resulta necesaria la existencia de un acuerdo acerca de aquello que se va a llevar a cabo.

• Dificultad: las metas deben suponer una dificultad, un reto; pero no deben resultar imposibles de alcanzar.

• Especificidad: los objetivos deben de ser concretos, ya que de esta forma resultará más sencillo aportar el esfuerzo necesario para conseguirlo.

Trechera (2005) cita a Locke y Latham, los cuales señalan que los objetivos que una persona se marque a la hora de establecer las metas a las que desea llegar resultan ser los orientadores de la acción, los responsables de que la persona se vea con ánimo de llevar a cabo las estrategias o planes de acción necesarios durante todo el proceso. Al centrar la atención en los objetivos marcados, la persona selecciona aquellas acciones que le son de mayor importancia y actúa en consecuencia a ello.

Tomando a estos autores como punto de referencia. Acerca de la relación entre la motivación y el rendimiento académico, donde las propuestas creativas repercuten en el entusiasmo de parte de las y los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas y sus áreas (Ryan et al., 2007; Chiu & Xihuaa, 2008).

2.2.1 Motivación en el Aprendizaje

Centrándonos en los y las adolescentes, especialmente en la población estudiantil, tal y como declara Rice (2000), debemos de tener presente que los cambios evolutivos que se van produciendo en las relaciones con sus iguales tienden a influir notablemente en su nivel de motivación hacia la institución educativa, así como en su implicación en ella. En la llegada de la adolescencia, así como en el transcurso de ésta, se producen grandes cambios fisiológicos y psicológicos, donde, sentirse aceptado en el entorno y contar con la aprobación del mismo provoca una gran influencia sobre la motivación de logro. Rice (2000) cita a Goodenow, el cual señala que esa sensación de pertenencia a un grupo está definida como el sentimiento que tiene la persona de ser valorada, incluida y motivada por otras.

Ahora bien, las teorías cognitivas defienden que todo aquello que una persona piensa acerca de algo acaba siendo realmente relevante para comprender lo que finalmente acaba sucediendo (Ajello, 2003). El sistema cognitivo recibe y envía diversa información al resto de sistemas: afectivo, comportamental y fisiológico, y es el encargado de regular el comportamiento de los mismo; bien a través de la puesta en marcha de ciertas respuestas o de la inhibición de las mismas, según el significado que le otorga a la información que posee (Farias & Pérez, 2010).

Santrock (2002) se muestra de acuerdo con esta perspectiva y afirma que en el caso concreto de la o el alumno que estudia, son sus pensamientos los encargados de guiar su nivel de motivación. Según Roa (2007), en el individuo existen dos etapas en el proceso de aprendizaje, una motivacional y otra cognitiva. La primera tiene que ver con los deseos y anhelos del individuo, y la segunda, contempla el conjunto de pasos orientados con respecto a la regulación y la planificación de las acciones para satisfacer los deseos.

En la motivación del aprendizaje, también influyen las metas y objetivos de las y los estudiantes. Con respecto a esto Tapia (2003) dice, que "las metas constituyen la principal variable que influye en la motivación", donde, además, señala la meta relacionada con la tarea. Esta se encuentra cuando el estudiante quiere aprender. Las metas centradas en la tarea pueden dar origen a tres posibles tipos de motivación: la intrínseca, de competencia, y la extrínseca, en la que el aprendizaje es secundario y no permanente.

Sobre la relación existente entre la motivación y el aprendizaje. Decharms (1984), puso especial énfasis en aquello que él denomina motivación intrínseca como un factor de potenciación del aprendizaje. La motivación intrínseca ocurre cuando se atrapa la atención del estudiante, bien sea porque el tema es interesante o porque las actividades que se desarrollan atraen la atención de quien aprende. Con esta motivación la o el alumno se siente a gusto propiamente con aquello que realiza. Según, Dweck y Elliot (1983) "el alumno puede estar incrementando sus conocimientos o sus destrezas, pero aquello que determina su actividad, no es tanto el interés por incrementar su competencia cuanto la propia actividad en la que se siente a gusto, y cuyo fin está básicamente en sí misma."

La motivación de competencia según Dweck y Elliot (1983), se activa cuando la o el estudiante se interesa por aprender lo que se encuentra estudiando, incrementando sus conocimientos, tanto por los contenidos como por los procedimientos que estudian, aunque no vayan a recibir recompensas por ello, repasan las tareas para no olvidar el procedimiento que los condujo al éxito.

Por otra parte, la motivación extrínseca, se produce cuando el aprendizaje es secundario para la o el estudiante, y no se puede garantizar; es el medio para conseguir otros fines. Lo importante en este tipo de motivación es la utilidad (Leeper et al., 1978). En esta motivación el aprendizaje surge como consecuencia de las acciones, factores o agentes diferentes a la temática en sí, alrededor de la cual gira el estudio. Entre estos factores Farias y Pérez (2010), citan los siguientes: las y los compañeros de clase, la forma y actitud en que explica el docente, las calificaciones que se obtengan, los recursos y medios didácticos utilizados en las actividades que se realizan en las clases o los beneficios que se perciben como consecuencia de adquirir ciertos conocimientos y desarrollar competencias.

2.3 Visualización Espacial

La inteligencia espacial, es en la habilidad de un individuo para transformar objetos dentro de su ambiente y para encontrar su camino en medio de un mundo de objetos en el espacio (H. Gardner, 1993). El espacio como objeto mental y como concepto matemático no está en el punto de partida de la geometría, sino que es el producto de un largo proceso de elaboración. Los objetos geométricos, como conceptos, están en el espacio, pero los objetos mentales correspondientes a esos conceptos, están en un contexto geométrico (Puig, 1997). La capacidad de relacionarse con el espacio es otra habilidad que puede desarrollarse a partir de la geometría, esto en función de que el individuo pueda comprender y admirar con mayores recursos su entorno natural (Lastra, 2005).

Howard Gardner (1993), señala que esta variedad de la inteligencia espacial todavía está restringida a situaciones y eventos específicos. La o el adolescente puede manejar la idea de espacios abstractos o reglas formales que gobiernan el espacio sólo durante la era de la operación formal de Piaget, por el tiempo de la adolescencia. Así, el adolescente (la niña o el niño matemáticamente precoz) aprecia la geometría, al poder apenas relacionar el mundo de las imágenes figúrales con declaraciones preposicionales, y razonar acerca de las implicaciones de diversas clases de transformación. Además, desde algunos puntos de vista, sería apropiado proponer el descriptor visual o de visualización porque, en los seres humanos normales, la inteligencia espacial está íntimamente relacionada con la observación personal del mundo visual y crece en forma directa de ésta (H. Gardner, 1993).

En ese sentido, surge el desarrollo de las habilidades de visualización, como una responsabilidad curricular y se ha constituido en objeto de análisis de diversos investigadores en la didáctica de la geometría (Bishop, 1980; Del Grande, 1990; Gal & Linchevski, 2010; Hoffer, 1981; Presmeg, 1986). La habilidad de visualización o visualización espacial en matemáticas según Parzysz (1988) nos avisa de la inevitable pérdida de información que se produce cuando se representa un objeto espacial sobre un plano, incluso cuando se trata de la imagen generada por un entorno de geometría dinámica 3-dimensional (EGD3d) y proyectada en la pantalla de un ordenador.

Arcavi (2003) describe la visualización espacial en términos muy generales como: "La capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas". Asimismo, considera que, en la matemática, se apoya fuertemente sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles, especialmente en el campo de la geometría (Cajaraville, Fernández & Godino, 2011).

Del mismo modo, Clements y Battista (1992) añaden, que la visualización espacial integra procesos por los cuales se obtienen por medio de representación de objetos en EGD2d y EGD3d donde las transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones, permiten estas relaciones de dimensiones.

Algunos objetos matemáticos están construidos bajo procesos dinámicos en función del tiempo, como es el caso de los sólidos de revolución o la rotación de figuras planas, por lo que el fenómeno a estudiar se torna más complejo, ya que no sólo involucra la aprehensión de saberes matemáticos, sino aspectos visuales, porque para realizar un bosquejo o un dibujo donde estén involucrados objetos reales con la visualización espacial y el uso de la perspectiva subyace la identificación de cuerpos geométricos. En relación con lo anterior Piaget (1991), señala que como seres humanos estamos limitados a visualizar la abstracción de la matemática en dos dimensiones o en EGD2d, que es diferente a nuestra cotidianeidad. (Andrade & Montecino, 2009).

Con respecto a la equidad e igualdad de género y el estigma social de que los hombres tienen más capacidad natural en matemáticas, en el ámbito de la visualización espacial en geometría, existen diversos estudios sobre el rendimiento de las niñas y niños. Estas diferencias de género que los autores han descrito en sus estudios pueden arraigarse con los procesos de visualización espacial; las investigaciones llevadas a cabo confirman que los logros en visualización espacial son mejores en los niños que en las niñas (Battista, 1990; Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1988; Fennema & Tartre, 1985, 1990).

Los resultados del estudio de Heredich, (2013) evidencian la preferencia masculina por la exploración de espacio virtuales para acceder a la información de diversos tipos, mientras que las mujeres recurren a este escenario principalmente como parte de su proceso de aprendizaje social.

En contraste, el estudio realizado por Presmeg y Bergsten (1995) muestra que en Suecia la puntuación media sobre visualización espacial es superior en las niñas que en los niños. Al respecto investigadores en psicología creen que esas diferencias de género se atribuyen con la organización del cerebro que tienen hombres y mujeres: “Las diferencias de género en habilidades espaciales y verbales pueden ser relacionadas con la forma diferente en que esas funciones se distribuyen entre los hemisferios cerebrales en hombres y mujeres” (Springer & Deutsch, 1981). Battista (1990) señala la diferencia que hay con respecto a la identidad de género en la educación secundaria, cuando se trata del razonamiento lógico y de las estrategias de resolución de problemas no hay diferencias de géneros. En cambio, los resultados también mostraron que los alumnos con una alta habilidad en visualización no utilizan ilustraciones ni diagramas en la resolución de problemas, mientras que las alumnas con alta habilidad en visualización se apoyan en estas representaciones.

Es de considerar que en los estudios de los autores nombrados se condiciona las diferencias de género a factores biológicos, psicológicos y socioculturales, lo cual se ha visto que depende de variantes e invariantes, donde cada tarea juega un papel importante. Se está de acuerdo con Clements & Battista (1992) en que las tareas deben promover el desarrollo de habilidades de visualización espacial en las niñas y niños por igual.

Por otra parte, en la tesis doctoral de León (2005) retoma esta conceptualización que hace de Guzmán (1996) para relacionar tres aspectos cognitivos que vinculan de manera natural de visualización con el aprendizaje sensorial, y la relación de las formas simbólicas del sistema semiótico de Duval:

• El primero, tiene que ver con su función en la elaboración del conocimiento matemático tanto en el desarrollo de procesos complejos para la matemática (conjeturas y demostraciones), como en la constitución de intuiciones básicas (como la de la noción de infinito) (De Guzmán, 1996).

• El segundo es la relación con la actividad sensorial que permite la aprehensión por medio de los sentidos de los objetos del mundo físico; desde esa perspectiva tenemos una forma de percepción que puede ser visual, táctil, gustativa, auditiva y olfativa, se destaca la percepción visual como una forma privilegiada para la visualización (Fischbein, 1987, 1998).

• La tercera relación se establece con el tipo de proceso semiótico que hace de la visualización espacial una forma de representación analógica, determinada por el tipo de aprehensión de las formas simbólicas del sistema semiótico, por las relaciones de estas formas en el sistema semiótico y por su nivel de referencia al objeto matemático. (Duval, 1999, 2004).

La visualización espacial puede utilizarse como recurso un pedagógico o habilidad (por parte de la alumna o alumno) para facilitar la comprensión del saber matemático abstracto involucrado en el proceso de transposición o en la interiorización de éstos por parte de las y los estudiantes (Andrade & Montecino, 2009).

2.4 Elementos Matemáticos

Según lo anteriormente expuesto, en el nivel de 3° y 4° medio en el plan de Geometría 3D, se desarrollará el OA04: "Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales". Donde se pueden divisar los siguientes constructos matemáticos: forma, área, volumen, sólidos de revolución, figuras 3D, rotación y traslación en el espacio, los cuales se definen en detalle en la tabla de anexos (1.).

Sin embargo, en este contexto, los elementos matemáticos como las figuras 3D junto a la rotación y traslación en el espacio, son claves en la secuencia motivacional propuesta. Con el auge de las TIC y su aplicación en el campo educativo hacen que estos nuevos recursos tecnológicos fomenten la motivación de las y los estudiantes en el aprendizaje de conceptos geométricos (Ovalle & Vásquez, 2020). Por ejemplo, en geometría tridimensional, Ovalle y Vásquez (2020), idearon un recurso motivacional del aprendizaje a través de la TIC de la realidad aumentada, donde constituyó una forma de estimular las emociones positivas y además la motivación del estudiante a través de escenarios inmersivos, lo que favoreció en los procesos cognitivos.

En la década de 1990, investigadores en educación matemática franceses empezaron a utilizar la teoría de la génesis instrumental para analizar y entender las dificultades que experimentaban los estudiantes de educación secundaria al utilizar calculadoras gráficas o simbólicas para aprender álgebra (Guin, Ruthven & Trouche, 2005). El éxito de los investigadores franceses en álgebra ha propiciado que, en la última década, se hayan llevado a cabo investigaciones que toman la teoría de la génesis instrumental como marco de referencia para analizar y entender las interacciones entre estudiante y máquinas en entornos de geometría dinámica en el plano (EGD2d) (Restrepo, 2008).

La complejidad de la geometría espacial hace que sólo sea posible adquirir habilidades en el uso de la geometría dinámica 3-dimensional (EGD3d) si paralelamente se van adquiriendo determinados conocimientos geométricos. Así, Mackrell (2006) describe un experimento de enseñanza basado en la manipulación de Cabri 3d e indica que los procesos de génesis instrumental deben incluir tanto la adquisición de destrezas en el uso de la aplicación como el aumento de la comprensión de la geometría espacial. Actualmente, se están iniciando investigaciones para analizar los problemas generados por los entornos de geometría dinámica 3-dimensional (EGD3d) para la enseñanza de la geometría espacial (Alba, 2012; Hugot, 2005; Mackrell, 2006 & Salazar, 2009).

Cabe señalar que una gran parte de las investigaciones que abarcan las dificultades sobre los recursos geométricos, icónicos, gráficos, entre otros, se centran principalmente en la articulación de registros de representación semiótica, por ejemplo, desde un registro algebraico a uno gráfico y viceversa (González, 2005; Anido, López & Rubio, 2006).

2.5 Dificultades del proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría

Los investigadores Báez e Iglesias (2007) señalan que, a nivel de educación básica, la enseñanza de las matemáticas presenta dificultades, particularmente la enseñanza y aprendizaje de la geometría, pues algunas veces los docentes no desarrollan los contenidos geométricos contemplados en los programas por desconocimiento de la importancia de la disciplina o poco dominio de los contenidos geométricos, y en aquellos casos en que sí se desarrollan, se hace enfatizando en el uso de fórmulas y cálculo de áreas.

En este sentido, Astolfi (1999) refiriéndose a las y los docentes que en las escuelas incorporan actividades tales como: el problema propuesto se resuelve sólo utilizando los nuevos conceptos aprendidos, por esto se desmotivan los educandos a responder alguna interrogante, entonces esperan al docente, para que resuelva el respectivo ejercicio o problema, esto ocurre también cuando desconfían de lo que están haciendo. Conjuntamente con esta clasificación se encuentran los errores debidos a una sobrecarga cognitiva de la actividad a realizar en el aula (Mayorga & Tovar, 2014).

En el caso de la geometría elemental en la que los objetos mentales son suficientes para organizar gran cantidad de fenómenos, la formación de conceptos puede hacerse con organizaciones locales en las en las que se resuelvan las distancias entre los objetos mentales y los conceptos (Puig, 1997). Chevallard (1999) señala que, el hecho de que el plano de puntos es un espacio de dimensión 2, no es empleado para fabricar una técnica de uso más fiable, fundada en la noción de representaciones en el plano para estudiantes de 15-16 años. Abordar los errores geométricos hasta llegar a superarlos implica un fuerte trabajo ya que deben generarse situaciones didácticas suficientes durante las diferentes sesiones de clase las cuales aborden las debilidades existentes y así el educando reestructure sus esquemas cognitivos (Mayorga & Tovar, 2014).

Vinner y Hershkowitz (1980) indican que las y los estudiantes al pensar geométricamente no usan las definiciones de los conceptos, sino las imágenes conceptuales; es decir, combinaciones de todas las imágenes mentales y las propiedades que han asociado con el concepto.

La problemática existente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en especial en el contenido de figuras y cuerpos geométricos, según Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, y Garza (2005) aseguran: "se ha observado que los estudiantes tienen serias dificultades al enfrentarse a sus cursos de geometría, en particular al hacer demostraciones, y una manifestación de esto es el alto índice de reprobados, lo cual es común en diferentes escuelas".

Esto indica, que las y los estudiantes presentan errores en la representación, identificación, caracterización de figuras y cuerpos geométricos según su apariencia global. Además, esta situación es la representación de las deficiencias en la formación de conceptos geométricos al momento de identificar las diversas formas en su entorno, diferenciar las figuras de los cuerpos en geometría, al igual que la falta de interpretación de cada uno de los símbolos matemáticos presentes en esta rama en el momento de identificar cualquier figura o cuerpo geométrico que se encuentre en su medio (Mayorga & Tovar, 2014).

Uno de los aspectos del análisis conceptual de la simetría es la identificación de diferentes tipos de simetrías (traslación, de reflexión y de rotación). Cada tipo de simetría puede considerarse una subestructura. El docente puede explorar si hay fenómenos asociados a cada una de estas subestructuras. Es decir, la subestructura motiva la búsqueda de fenómenos. (Gómez y Cañadas, 2009).

Algunos de los errores y dificultades en geometría de simetría (o transformaciones isométricas) que tuvieron estudiantes con respecto a rotaciones y traslaciones extraídos de los trabajos de: Moyer, Thomas, Schulz o Kidder citados por Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011) fueron los siguientes:

Rotación	Traslación
• Sólo en giros de 90º, la dificultad aumenta si se giran segmentos inclinados sobre segmentos verticales.	• Errores en la realización de traslaciones cuando la figura es poligonal y el vector es paralelo a algún lado del polígono.
• Es más fácil girar una figura si contiene el centro de giro que si es exterior.	• Dificultad al comprender el concepto de vector libre como asociado a una traslación.
• Los errores en giros se producen por no reconocer características básicas del giro: reconocimiento global, ángulo de giro, equidistancia al centro, ángulo entre el punto y su imagen y congruencia de figuras.	• Es la isometría más fácil de operacionalizar con respecto a otras transformaciones, restando importancia a estas.

Tabla 1: Dificultades de las y los estudiantes en la rotación y traslación (Flores, et al., 2011).

Por lo tanto, las y los alumnos se encuentran en una encrucijada cuando estudian geometría, porque el docente les dice que es importante para su futuro como individuo, pero, el mismo proceso educativo en el que se encuentra inmerso no le permite visualizar la importancia con suficiente claridad; de manera que el aprendizaje de la geometría carece de sentido y con el tiempo repercute en su estado anímico (Báez & Iglesias, 2007).

Más recientemente, la aparición de aplicaciones informáticas de entornos de geometría dinámica 3-dimensional (EGD3d) ha permitido ampliar el campo de aplicación de los entornos de geometría dinámica al estudio de la geometría espacial. Los EGD3d se diferencian con los entornos de geometría dinámica 2-dimensional (EGD2d) en características derivadas desde la geometría espacial respecto de la geometría plana.

Buena parte de la problemática docente e investigadora de los EGD2d es común a los EGD3d, pero estos, además, tienen una problemática propia, por una parte, de las características técnicas de las propias aplicaciones, especialmente de la necesidad de arrastrar tridimensionalmente objetos, mediante un instrumento bidimensional, como un ratón de ordenador (Gutiérrez, 2014).

2.6 Aprendizaje de la Geometría

La geometría es considerada como un campo reflexivo de la matemática que permite resolver problemas de diversa índole y comprender un mundo que ofrece una amplia gama de formas, sea en escenarios naturales o artificiales (Gamboa & Ballestero, 2009). Es también un soporte estratégico en la formación profesional en cualquier campo, dada su aplicación en diversos contextos y escenarios, así como el rol que puede jugar en el fortalecimiento del razonamiento lógico (Báez & Iglesias, 2007). Diversos estudios han reconocido el vínculo entre las acciones matemáticas de obtener y verificar resultados mediante la experimentación y las acciones que llevan a la organización deductiva de dichos resultados (De Villiers, 1986; Boero, 1996; Mariotti, 1997, 2005, 2006; Pedemonte, 2007; Douek, 2007 & Camargo, 2010). Asimismo, el vínculo del aprendizaje de la geometría con elementos visuales, da especial relevancia a la relación de visualización, comprensión y el aprendizaje, para las investigaciones en educación matemática (Hershkowitz,1990; Duval, 1999; Gal & Linchevski, 2010).

El psicólogo suizo Jean Piaget inició su carrera alrededor de 1920 como investigador trabajando en el laboratorio de Simón y pronto se interesó de manera especial en los errores que cometen las niñas y niños cuando encaran las cuestiones en una prueba de inteligencia. Piaget se interesó por investigar el aprendizaje de la geometría a partir de los “conjuntos prácticos”, según lo había propuesto Poincaré, pues estos conjuntos corresponden a las formas más elementales de la coordinación psicológica de la acción.

Uno de los asuntos que investigó Piaget, es la habilidad que tienen las niñas y niños para representar el espacio, ósea, las competencias en tareas de: figuras discriminar figuras geométricas, representar figuras geométricas, construir sistemas de referencias bi o tridimensionales y justificar afirmaciones sobre hechos geométricos. En colaboración con Inhelder (1967) llevó a cabo diversos experimentos, muchos de los cuales proponía a las niñas y niños realizar las competencias geométricas para representar el espacio. Ambos investigadores sostenían que, a pesar de que las niñas y niños desarrollan una percepción del espacio circundante desde muy temprana edad, en el periodo sensoriomotor, esto no significa que simultáneamente desarrollen una conceptualización del espacio tal que les permita construir una representación mental del mismo.

Piaget e Inhelder (1967) afirmaron que en los primeros estadios del desarrollo de las niñas y niños eran pasivos en sus exploraciones. Tocaban solo una parte del sólido y generaban una percepción táctil; después, tocaban otra parte y generaban una nueva percepción, no necesariamente ligada a la primera. Piaget, estudia la génesis de la geometría en el niño en la cual trata de la construcción de conceptos espaciales, topológicos, proyectivos y euclidianos (Prada, 2011).

Por lo tanto, sugirieron dos hipótesis relacionadas con las posibilidades de las niñas y niños de desarrollar una representación del espacio, citadas por Camargo (2011):

Hipótesis constructivista	Hipótesis de la primacía topológica:
La representación del espacio depende de una organización progresiva de las acciones motoras y mentales que permiten el desarrollo de sistemas operacionales.	La organización progresiva de ideas geométricas sigue un orden definido que es más lógico que histórico; inicialmente se desarrollan ideas topológicas, luego se construyen relaciones proyectivas y después, surgen las relaciones euclídeas.

Tabla 2: Hipótesis constructivista y de primacía topológica (Piaget & Inhelder 1967).

Los experimentos de Piaget e Inhelder (1967) les permitieron corroborar sus hipótesis. Algunos de ellos se han replicado con un interés puesto en la didáctica de la geometría, se consideran ilustrativos de los posibles desempeños que pueden tener los estudiantes al aprender geometría. La hipótesis constructivista sigue vigente y debe ser una referencia a tener en cuenta en el diseño curricular. Aunque la hipótesis topológica no se sostuvo ya que según Martín (1976) y Darke (1982) sugirieron que el uso de dicho término no era correcto de acuerdo a las matemáticas. En ese contexto, los términos quizás estaban haciendo referencia a nociones psicológicas más que matemáticas y no se habían definido con suficiente claridad. Sin embargo, también puede ser aprovechada en didáctica de la geometría procurando que los estudiantes experimenten procesos matemáticos, en los que las relaciones topológicas, proyectivas y euclídeas, sugeridas por Piaget e Inhelder (1967) se desarrollen al tiempo y de manera coordinada.

Según la teoría evolutiva de Piaget (1991) centrada en aspectos cognitivos de la inteligencia -mecanismos de acción, de pensamientos, la adquisición de habilidades y memorización de información-; plantea una evolución, mediante estadios, señalando que es uniforme para todas las niñas y niños indistintamente del contexto en el que se encuentren inmersos. Sus ideas acerca del desarrollo de la representación del espacio en las niñas y niños, y de la manera en cómo progresivamente organizan las ideas geométricas delinearon estudios investigativos encaminados a desarrollar el sentido espacial y el razonamiento de las y los estudiantes y condujeron trayectorias curriculares a partir de la época del setenta (L. Camargo, 2011). Piaget (1991) y Lowenfeld (1980) señalan que existen diferentes niveles de abstracción en el desarrollo de los estadios del pensamiento para los mismos rangos etarios, como se puede ver reflejado en la siguiente comparación descrita por Andrade y Montecino (2009).

Edad (estadio)	Piaget (1991)	Lowenfeld (1980)
2-3 años	Las niñas y niños son capaces de descubrir propiedades físicas de los objetos concretos que son manipulados, por ejemplo, las cualidades de perspectiva. Se relaciona con la resolución de problemas de tipo sensorio motor.	Se da comienzo a la autoexpresión, por lo que los individuos están más centrados en su cuerpo que en el entorno.
4-9 años	A los 6 se desarrolla la imaginación, los retos dejan de ser sensorio motores, sino más lógicos de manera razonable. Surgen las operaciones concretas, estableciendo el pensamiento lógico	Se establecen representaciones espaciales que constantemente influyen en las emociones. De los 7 a los 9 años son capaces de distinguir las formas de un objeto.

10-14 años	De los 10 a los 12 años, se manifiestan las operaciones formales, donde la o el adolescente puede razonar en términos abstractos, manejar situaciones hipotéticas y pensar acerca de posibilidades. Además, hasta los 14 años, las operaciones espaciales les permite establecer el espacio que ocupan los objetos y su desplazamiento.	Surge la necesidad de expresiones tridimensionales, lo cual es adquirida al descubrir que pueden realizar dibujos con ilusión de profundidad. Sin embargo, desde los 10 a los 12 años conllevan a dificultades para establecer relaciones espaciales debido a que se aíslan de su entorno y se centran en el yo.

Tabla 3: Desarrollo de estadios (Piaget, 1991 & Lowenfeld, 1980).

En la didáctica de las matemáticas de acuerdo a Brousseau (1985) estudia las actividades didácticas, es decir, las actividades que tienen como objetivo la enseñanza, evidentemente en lo que ellas tienen de específico para las matemáticas. En ella, se estudia la comunicación de los conocimientos y tiende a teorizar su objeto de estudio, pero solo puede revelar ese reto bajo dos condiciones. Poner en evidencia fenómenos específicos que los conceptos originales parezcan explicar e indicar los métodos de pruebas específicas que se utiliza en ello (Brousseau, 1985). Por lo tanto, la didáctica de la geometría está en deuda con Piaget y sus colaboradores pues sus trabajos delinearon el campo de indagación acerca de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación en geometría en las últimas décadas (Camargo, 2011).

Los holandeses Van-Hiele ya postularon que en los estadios iniciales del aprendizaje de la geometría las niñas y niños realizan descripciones visuales y tienden a asemejarlas con elementos familiares (Van Hiele, 1986). Más adelante, Clements (1999) auguró también que las y los alumnos de las primeras edades desarrollan la habilidad para desplazarse fijándose primeramente en señales, elaborando luego una ruta (series de señales conectadas) y, finalmente, situando muchas rutas y lugares en una especie de mapa conceptual. La alusión de Clements a la importancia de los puntos de referencia para situarse en el espacio es otra evidencia de la necesidad de partir de entornos reales para avanzar hacia la organización, estructuración y orientación espacial.

La solución a la interpretación y problemas de las formas de tercera dimensión entre las que se encuentran las de la naturaleza corresponde a la geometría descriptiva, que tiene como finalidad reproducir las formas del espacio mediante proyección de planos bidimensionales logrando resolver así con la geometría plana problemas sobre cuerpos tridimensionales (Lugo, 2013).

Ahora bien, en la didáctica de las matemáticas, cuando el objeto de estudio es la geometría tridimensional, se emplean los términos visualización o visualización espacial (Gutiérrez, 1991, 1996) para indicar los procesos y habilidades de los individuos para realizar tareas que requieren ver o imaginar mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar estos objetos y realizar operaciones o transformaciones geométricas con los mismos (Cajaraville, Fernández & Godino, 2006).

2.7 Teoría de Representaciones Semióticas

Uno de los temas de mayor interés en la actualidad en campos del saber tan diversos como la filosofía, ciencias cognitivas, la semiótica y la didáctica de las ciencias, es el de las representaciones. Según Tamayo (2006) desde la perspectiva de las ciencias cognitivas, las representaciones son consideradas como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior.

Las representaciones mentales internas, son aquellas que ocupan un lugar en la mente de los sujetos. Ellas nos permiten mirar el objeto en ausencia total del significante perceptible; pueden ser conceptos, nociones, modelos mentales, imágenes. Los conjuntos de signos o de símbolos que representan algo exterior, por ejemplo, los mapas, diagramas y dibujos son externos, elaborados con propósitos comunicativos y producidos por acciones determinadas, palabras y otras notaciones simbólicas de uso común. Estas representaciones externas son también conocidas como representaciones semióticas (Tamayo, 2006).

Una aproximación semiótica antropológica de Radford (2004), no puede evitar tomarse en cuenta el hecho de que el empleo que hacemos de las diversas clases de signos y artefactos cuando intentamos llegar a conocer algo está subsumido en prototipos culturales de uso de signos y artefactos.

Lo relevante en este contexto es que el uso de signos y artefactos alteran la manera en que los objetos conceptuales nos son dados a través de nuestros sentidos. La manera en que puede resolverse el misterio de los objetos matemático es considerar dichos objetos como patrones fijados de actividad humana; incrustados en el dominio continuamente sujeto al cambio de la práctica social reflexiva mediatizada. La idealidad del objeto matemático está directamente ligada al contexto cultural, es decir, de aquello que los vuelve generales es completamente tributaria de la actividad humana (Radford, 2005).

Duval (1995; 2006), fundador de la teoría de las Representaciones Semióticas (RS) o Registros de Representación Semiótica (TRRS) baso su teoría en las investigaciones del filósofo, lógico y científico estadounidense Charles Sanders Peirce (1839-1914) considerado el padre de la semiótica moderna o teoría de los signos, y también, influenciado por el filósofo, lingüista y semiólogo suizo Ferdinand de Saussure (1857-1913) quien desarrollo la lingüística moderna en el siglo XX.

Duval en la teoría de las RS remarca la existencia de múltiples y diversos sistemas semióticos que hacen referencia a un mismo concepto matemático, cada uno de los cuales tiene sus dificultades y limitaciones. Entiende por representación semiótica “La producción constituida por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento” (Duval, 1995). Puesto que cada representación es incompleta con respecto al concepto que representa, pues hace referencia a unas determinadas propiedades del objeto, y su contenido depende más del registro de representación que del objeto representado, se hace necesaria una interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático que se pretende adquirir (Sánchez, 2014).

En el aprendizaje de las matemáticas se presenta con la introducción de las fracciones, los decimales y la razón. Estos aprendizajes implican comprender relaciones entre cantidades, en el uso de nuevos sistemas de símbolos para representar dichas relaciones y en la ampliación del sistema de numeración decimal.

A su vez, aprender las fracciones, los números decimales, porcentajes, razones y proporciones, de manera relacionada y comprensiva lo constituye en un proceso de tratamientos y cambios de registros de representación cada vez más complejos, que conservan ya sea todo el contenido de la representación inicial, o bien solamente una parte de ese contenido (Duval, 1999).

Los principales obstáculos semióticos frente al aprendizaje son la poca distinción que se realiza entre representante y representado, entre forma y contenido, entre objeto matemático y su representación, y el que se da en la coordinación entre los diferentes registros de una representación semiótica, lo que implica que, desde el ámbito de la enseñanza, dediquemos esfuerzos no sólo a comprender estos procesos sino, lo que puede ser más importante, a reconocer sus formas de aplicación en el contexto de la enseñanza de las ciencias.

Por ello, Duval (2004) señala los siguientes registros de representación semiótica que en la actividad matemática se encuentran presentes. Descritos a través del objeto matemático de la circunferencia en el trabajo de Sánchez (2014):

• **Registro de la Lengua Natural (RLN):** El registro de la lengua natural permite introducir definiciones, así como hacer descripciones o designaciones:

“Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistante de otro fijo, llamado centro; esta distancia se denomina radio”

• **Registro Numérico (RN):** Las representaciones de tipo numérico permite apreciar algunas de las características y elementos identificados de los objetos matemáticos a los que hace referencia, así como vincularlos y relacionarlos con representaciones gráficas y geométricas.

Datos circunferencia: $C1\ (2,1)\ y\ P2\ (0,5)$

• **Registro Figural-Icónico (RFI):** Engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados.

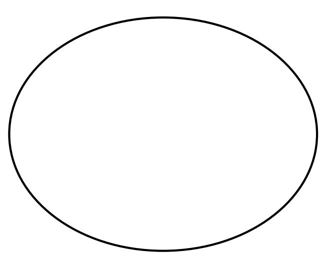


Fig 1. Circunferencia.

• **Registro Tabular (RT):** Los datos se presentan a través de un conjunto de filas y de columnas permitiendo visualizar la información de manera global, establecer relaciones y comparaciones entre los diferentes datos que en ella se recogen, así como descubrir propiedades y características del objeto de conocimiento representado.

Centro		Radio	Ecuación
X	Y		
0	3	2	
-4	0	2	

Fig 2. Tabla de Circunferencia.

• **Registro Algebraico (RA):** Permiten realizar generalizaciones, modelizaciones y señalar características particulares del objeto que representa, como puede ser longitud del radio, centro, posición en el plano, etc.

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = \mathrm{r} \leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

• **Registro Geométrico (RGe):** El registro geométrico admite operaciones de reconfiguración y manipulación que facilitan la comprensión y el establecimiento de conexiones entre diferentes objetos.

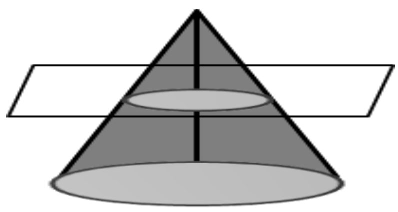


Fig 3. Circunferencia en bases.

• **Registro Gráfico (RGr):** El registro gráfico posibilita inferir, con un simple vistazo, el comportamiento que va seguir una determinada función, así como efectuar tratamientos propios de su registro como son las traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, dilataciones, etc; La representación gráfica-cartesiana hace patentes en estos elementos.

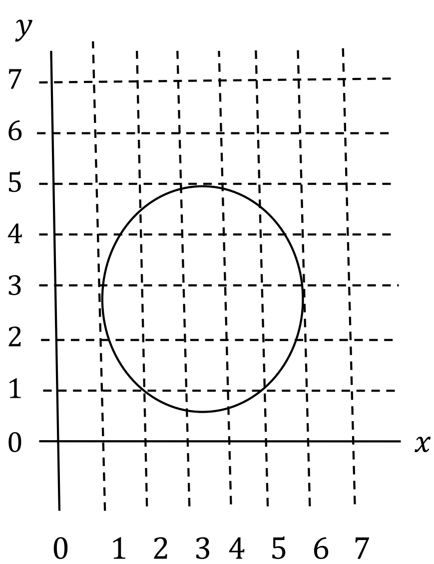


Fig 4. Circunferencia en el plano.

Cada una de las representaciones que hacen referencia a la circunferencia, lo hacen también a unas determinadas propiedades de la misma, es decir, cada registro de representación resalta unas características y propiedades determinadas del objeto matemático, obteniendo como resultado una configuración del concepto en toda su extensión y profundidad.

La combinación y coordinación de unas y otras da lugar a que el alumno aprehenda las nociones que se quieren transmitir a partir de aquellas que se adecuan más a su estilo de aprendizaje.

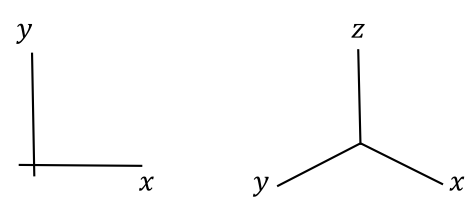
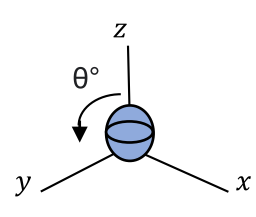
Sánchez (2014), señala que toda actividad y proceso matemático lleva consigo la capacidad y necesidad de cambiar de registro para poder obtener la comprensión. Es por ello que los objetos matemáticos no deben ser confundidos nunca con su representación.

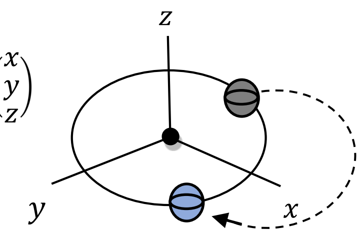
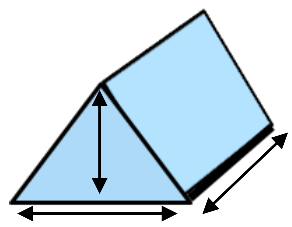
Esto da lugar a lo que Duval denomina la paradoja de la comprensión en matemáticas, donde los objetos matemáticos no deben ser confundidos nunca con su representación, sin prescindir de tales representaciones, pues la única manera de acceder a los conceptos matemáticos sin producir confusión entre el objeto matemático y la representación se hace necesario relacionar el trabajo con más de un registro semiótico, y que es donde la mayoría de los alumnos encuentran problemas.

Un objeto según Blumer (1969), es cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo. A su vez, un objeto matemático según Godino (2002), siguiendo la idea de Blumer (1969), es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas.

Algunos de estos objetos matemáticos son: términos, expresiones, diversos registros, representaciones, situaciones, operaciones, conceptos (D’Amore, 2006). Respecto a un objeto matemático observable, conocido sobre la base de prácticas compartidas, la descripción real responde plenamente a las características del objeto, es decir, de la práctica realizada alrededor de éste, y por tanto del sentido que todo esto adquiere por parte de quien dicha práctica (Duval, 2003).

Así, por ejemplo, para referirnos a la geometría en EGD3d y en el objeto matemático (constructo) podemos utilizar los siguientes tipos de registros de representación basados en la elaboración de Sánchez (2014).

Eje	Conversión de registros	Objetos matemáticos	Ejemplos de representación
		Descripción de conceptos: forma, área, volumen, dimensionalidad, esfera, rotación, ángulo de giro (θ) y traslación.	<u>Volumen</u>: Espacio que ocupa un objeto o cuerpo geométrico. <u>Área</u>: Superficie que ocupa un objeto o cuerpo geométrico. <u>Forma</u>: Espacio cerrado cuyos límites son puntos, rectas o superficies. 
Geometría 3D (EGD3d)	RLN ↔ RFI RGe ↔ RLN RNL ↔ RN RGe ↔ RGr	Utilizar conceptos de rectas, curvas, rotación y translación en planos 2D Y 3D.	¿Cuántas dimensiones puede tener una figura o cuerpo geométrico?,. Puede tener 2 y 3.  <u>Rotación</u>: Movimiento que realiza una figura en base a un punto y ángulo de giro. 

			<u>Traslación</u>: Movimiento en que una figura cambia de posición en base a una coordenada o un vector dado. $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 
Geometría 3D (EGD3d)	RLN ↔ RN RFI ↔ RN RGe ↔ RA	Interpretación y descripción de cálculo de volumen y traslación en EGD3d, involucrando las cantidades cúbicas.	Calcular la capacidad de la carpa con dimensiones: 3m de largo, 2m de ancho y 1 metro de alto. Si, $\mathrm{V} = $ Área basal × h $\mathrm{V} = 3\mathrm{m}^3$  ¿Qué transformación isométrica y cuál cuerpo geométrico se debió tener en cuenta para construir la carpa?, traslación de un prisma triángular.

<table>
<tr>
<td>Geometría 3D (EGD3d)</td>
<td>RLN ↔ RFI

RT ↔ RN

RFI ↔ RGe

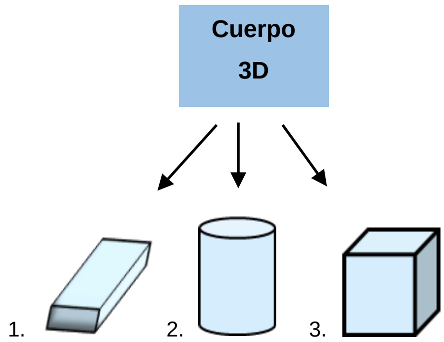
RGe ↔ RA</td>
<td>Identificar conceptos: caras, aristas, vértices, formula volumen. Y cuerpos generados en EGD3d: Prisma cuadrangular o paralelepípedo, cilindro, cubo o hexaedro.</td>
<td>Completar el siguiente cuadro tabulado indicando el cuerpo 3D y la cantidad de: caras, aristas, vértices y volumen.

<table>
<tr><th>Caras</th><th>Aristas</th><th>Vértices</th><th>Volumen</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
1. Cuerpo 3D: ________________
2. Cuerpo 3D: ________________
3. Cuerpo 3D: ________________</td>
</tr>
</table>

Tabla 4: Registros semióticos en EGD3d (Elaboración propia, referencia de Sánchez, 2014).

La pluralidad de registros semióticos permite diversificar las representaciones de un mismo objeto, y, de esta forma, amplia las capacidades cognitivas de los sujetos y, por tanto, sus modelos mentales. La transformación de un registro de representación semiótica en otra, exige poner en relación el dominio del conocimiento de las ciencias cognitivas y el de las relaciones entre la ciencia y su enseñanza, y muy particularmente, el concepto de transposición didáctica (Chevallard, 1985 & Gómez, 2005).

Según Duval, poder movilizar y coordinar varios registros en el desarrollo de una misma tarea y en el aprendizaje de un concepto, o bien poder elegir un registro en lugar de otro, es esencial en la actividad matemática (Sánchez, 2014). Duval (2012) añade, con respecto a los registros semióticos, que la coordinación de varios registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de objetos.

Es preciso que un objeto no sea confundido con sus representaciones y que sea reconocido en cada una sus representaciones posibles (Cruzado & Salazar, 2017). Un estudiante puede tener varias representaciones alternativas, cada uno de los cuales son estables en el tiempo y pueden ser aplicados de manera coherente mediante un amplio rango de fenómenos, lo cual lleva a considerar la posibilidad de coexistencia del conocimiento cotidiano con el científico (Duit, 1997; Giere, 1992; Schnotz & Peuss, 1997).

Para Duval (2004), involucrar una secuencia de actividades cognitivas, como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, requiere la utilización de distintos registros de representación y de expresión como, por ejemplo, el lenguaje natural, la representación mediante imágenes, símbolos, entre otros.

Asimismo, Duval (2012) indica que un registro es un campo de variación de representación semiótica en función de los factores cognitivos que le son propios. De acuerdo con el investigador, las representaciones semióticas se pueden considerar como un medio para exteriorizar las representaciones mentales. Por ello, afirma que en un sistema semiótico los registros de representación semiótica, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales que se detallan a continuación (Duval, 1993, 1995)

• <u>Formación o identificación</u>: Esta actividad se refiere a la expresión mental; es decir, a la identificación de un objeto en un determinado registro semiótico, lo cual implica que se debe seleccionar un conjunto de símbolos o rasgos en el contenido, permiten constituir lo que se representa.

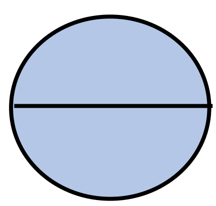


Fig 5. Formación.

• Tratamiento: Esta actividad consiste en la transformación de una representación en el mismo registro donde fue formado; es decir, es una transformación interna que se hace dentro del mismo registro, cambia su forma, pero no su formato de representación.

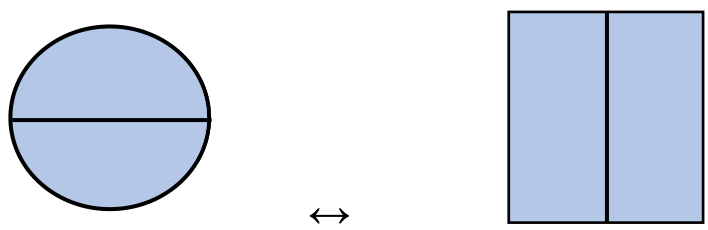


Fig 6. Tratamiento.

• Conversión: Esta actividad se refiere a la transformación de una representación hecha de un objeto de un registro a otro, en el cual se puede conservar la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial y por ello se dice que es una transformación de carácter externo, es decir, cambia su formato de representación.

$$\frac{1}{2}$$

Fig 7. Conversión.

En el conocimiento de los procesos de construcción y transformación de representaciones intervienen diferentes tipos de actividades, dentro de las que destacan las de formación, como aquellas representaciones de algo a partir de un conjunto de caracteres e intencionalidades; las de tratamiento, cuando una transformación produce otra dentro de un mismo registro; y las de conversión, cuando la transformación produce otra representación en un registro distinto al de la representación inicial, por ejemplo, la transformación analógica a la digital (Duval, 1999).

En el proceso de construir representaciones semióticas, una de las funciones principales de los docentes, sino la más importante referida al PEA, es la de hacer evidente a sus estudiantes los procesos de transformación y de conversión que se requieren para el paso de una representación a otra. Para el PEA de la Matemática, por lo tanto, la cuestión de cómo se puede acceder a los objetos matemáticos se vuelve crucial, y es relacionada estrechamente con aquella de los procesos semióticos específicamente aquellos movilizados en Matemática. Está en esto, precisamente, la construcción cognitiva del objeto matemático (D'Amore, 2013). De aquí la necesidad de tomar conciencia del fenómeno para poder reconocer, interpretar y afrontar las dificultades de comprensión que el aprendizaje de la Matemática inevitablemente evidencia en todos los niveles escolares (D'Amore, Fandiño, Iori & Matteuzzi, 2014).

Duval (1993) manifiesta que en las representaciones semióticas constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Para ello, un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite las tres actividades cognitivas descritas, que se relacionan con la semiosis y noesis; la formación, tratamiento y conversión.

2.7.1 Semiosis y Noesis

La teoría general de los signos ya había sido estudiada por los antiguos griegos. La palabra "*semeiosis*", por ejemplo, aparece en el tratado De *Signis* del filósofo epicúreo Filodemo de Gadara (110 a.C., - 35 a.C.,), también los dominicos de la orden de predicadores, desde Tomás de Aquino (1225 - 1274) hasta Juan de Santo Tomás (1589 - 1644), realizaron estudios de semiótica. En la modernidad el término "semiótica" aparece en el Ensayo Sobre el Entendimiento Humano del filósofo y médico inglés John Locke (1632 - 1704), de cuya definición de semiótica parte Charles Sanders Peirce (1839 - 1914), donde busca explicar la "relación de signo" (*sign relation*), una relación triádica, y utiliza su tríada de categorías metafísicas, para llegar así a comprender las diversas posibilidades implícitas en dicha relación. En su forma genuina, la relación triádica existente entre un signo, su objeto, y el pensamiento interpretante, él mismo un signo, considerado como constitutivo del modo de ser signo. Un signo mide al otro signo interpretando su objeto.

El conocimiento, en la concepción de Peirce, es un proceso de significación con una estructura triádica fundamental, conformada por un objeto, un signo y un "interpretante", o concepto en la mente del intérprete. Las definiciones que da Peirce de signo tienen elementos comunes, algunos como: el carácter mediador del signo, la determinación del concepto mental por el objeto a través del signo, y la esencial producción del interpretante en la relación triádica que es el conocimiento. Este último rasgo común, la producción del interpretante, es denominado “semiosis” por Peirce, y constituye uno de sus aportes más importantes en materia semiótica (Néstor, 2003).

Duval (1993, 1995, 1996, 2006), llama semiosis a la actividad ligada a la producción de representaciones, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas, y noesis a la actividad ligada a la aprehensión conceptual de los objetos representados, incluyendo las diferentes actividades y procesos cognitivos desarrollados por el sujeto. La idea de signo, dado que para la matemática esta forma de representación es específica; el signo es de por sí especificación de lo particular, pero esto puede ser interpretado dando sentido a lo general; al respecto Radford (2005) añade que el signo es la representación adecuada del significado.

Por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no pueden ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Duval (1999) agrega que no existe noesis sin semiosis, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis. Por lo tanto, la aprehensión conceptual, no va a ser posible sin recurrir al recurso de una gama de sistemas semióticos, pero aún más no basta el conocimiento de esta gama de sistemas semióticos, sino la coordinación de registros es una condición esencial para la aprehensión conceptual.

Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo para el aprendizaje. La relación que existe entre la semiosis y el pensamiento radica en que los signos se utilizan para hacer inteligible nuestras ideas, es decir; la semiosis es la que permite que estas ideas sean transformadas en símbolos. Ahora bien, la noesis es la representación mental, que es expresada a la noosfera en forma de signos o símbolos a través de la semiosis; la noosfera concepto desarrollado por el científico ruso Vladímir Vernadski (1863-1945), es el conjunto que forman los individuos con el medio o contexto en el que viven (Aguirre, Cruz, Flores, González & Ramírez, 2017). En ese sentido, la labor docente en la sala de clase puede considerarse como un sistema de adaptación del estudiante a la sociedad (Bagni & Radford, 2006).

Al no existir noética sin semiótica, debemos pasar a través de varias representaciones semióticas para alcanzar la gradual y consciente construcción cognitiva del objeto, es decir, lograr que la o el estudiante se percate que, frente a un objeto O, existen varias representaciones semióticas R_i de O (i = 1,2,3…). Cuando se dominen dichas representaciones, utilizándolas en contextos oportunos y transformándolas unas en las otras, entonces podremos decir que la o el estudiante ha construido cognitivamente O. Esta es la propuesta filosófica didáctica de D'Amore (2003).

Además, cabe señalar que un sistema semiótico en el desarrollo de las 3 actividades de formación, tratamiento y conversión, donde interactúan estos signos de semiosis y noesis se denomina función semiótica. La idea de función semiótica por D'Amore y Godino (2006), se establece entre dos objetos matemáticos cuando entre dichos objetos se establece una dependencia representacional o instrumental, esto es, uno de ellos se pone en lugar del otro o uno es usado por otro. En concreto, los objetos matemáticos pueden ser gráficos, símbolos, conceptos y representaciones, son entidades que se evocan al hacer matemáticas, en forma textual, oral o gestual (D'Amore & Godino, 2006). De igual forma, desde una mirada filosófica, para Platón, la noesis (noética) es el acto de concebir a través del pensamiento; para Aristóteles, es el acto mismo de la comprensión conceptual (D'Amore, 2016).

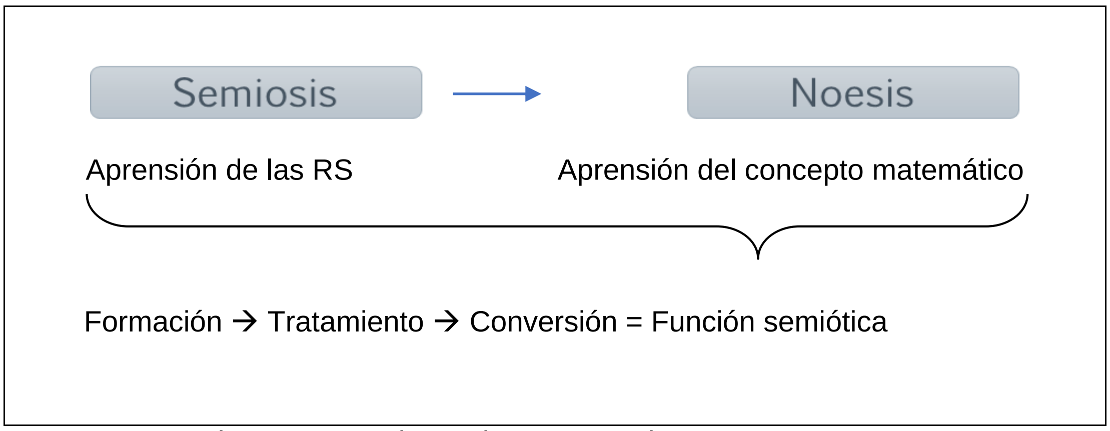


Tabla 5: Cuadro sinóptico de la función semiótica (Elaboración propia, referencia de D'Amore, 2016).

2.7.2 Motivación en la geometría del espacio

El conocimiento matemático, en este caso el de geometría espacial, puede ser generado de forma motivacional. Una de estas formas se observó en la investigación de Ovalle y Vásquez (2020), con la necesidad de representar las figuras sólidas o en 3D, en el aula de clase implementando la realidad aumentada como una herramienta motivacional que le permita a las y los estudiantes comprender detalladamente los conceptos de tridimensionalidad, agregando imágenes virtuales, donde se utilizaron aplicaciones libres (*AR Platonic Solids* y *Aumenthaty authorque)* que permitieron, desde un dispositivo móvil, que las y los alumnos visualizarán los cuerpos geométricos rotándolos en el espacio. Estos autores concluyeron que el estudiante manifiesta motivación a través de características, evidenciadas en la observación participante frente al aprendizaje de geometría tridimensional con el uso de realidad aumentada utilizando la estrategia. Se comprobó que el estudiante identifica atributos y propiedades de objetos tridimensionales relacionados con elementos de su entorno.

Se evidencio la necesidad de utilizar diferentes materiales para reforzar el aprendizaje de la geometría espacial, por medio de la observación de las figuras y cuerpos geométricos en la realidad aumentada. Las y los estudiantes a través de un estímulo visual y motivacional, pudieron desarrollar de manera fácil y dinámica el concepto geométrico espacial.

Además, este recurso motivacional para la enseñanza de la geometría espacial, también fue utilizado en Taiwán, en la *National Central University*, donde se trabajó en un proyecto para la enseñanza de la geometría 3D, para cálculo de volúmenes y áreas de las caras de objetos en tres dimensiones, en ambientes colaborativos, mediante la realidad virtual y diferentes herramientas multimedia como los tableros electrónicos. De esta forma, las y los estudiantes podía compararlas para observar los distintos métodos que se podían presentar para resolver un mismo problema (Wu-Yuin & Shin-Shin, 2013).

En conclusión, estas investigaciones manifiestan que cuando un sujeto se siente motivado intrínsecamente, el proceso de aprendizaje aumenta, es decir, si confía en sus propias capacidades y es capaz de poseer altas expectativas de autoeficacia, sabrá apreciar las tareas y se mostrará competente a los objetivos de aprendizaje (Núñez et al., 1995).

2.7.3 Método COPISI

Diversos autores, incluyendo las Bases Curriculares, expresan abiertamente que el uso de material concreto es una de las mejoras formas de enseñanza, con respecto a esto Bermejo (2004) señala, que el uso de material concreto es especialmente importante en el inicio de los aprendizajes, ya que los estudiantes que utilizan materiales concretos desarrollan una comprensión mental más precisa, están más motivados, tienen mejores ideas matemáticas y las aplican mejor en la vida cotidiana (Arévalo, Reveco & Zapata, 2018). El uso de material concreto, como el ábaco, en el inicio de la enseñanza de las matemáticas, en donde los estudiantes manipulen, tengan contacto y evidencien de manera concreta que es lo que sucede al realizar una división, es la forma correcta de iniciar el tratamiento del contenido, de manera que avanzar a las representaciones pictóricas no sea una fuente de problemas.

Al finalizar estas dos primeras etapas los estudiantes pueden desarrollar el pensamiento simbólico que solo será un paso más para adquirir el contenido de manera formal. En relación a esto las Bases Curriculares (2012) mencionan: Los estudiantes de todas las edades necesitan dar sentido a los contenidos matemáticos que aprenden, para que puedan construir su propio significado de la matemática. Especialmente en los primeros niveles, esto se logra de mejor manera cuando los estudiantes exploran y trabajan primero manipulando una variedad de materiales concretos y didácticos para posteriormente dar paso a las representaciones pictóricas y simbólicas.

Por otro lado, de manera similar refiriéndose al uso de material concreto, las representaciones pictóricas y al pensamiento simbólico. Lee Peng Yee (2014) alude a Jerome Bruner (1960) haciendo hincapié en la idea de que el aprendizaje es un proceso activo, y señala que para que los alumnos adquieran una comprensión conceptual completa, tienen que pasar por tres etapas: representativa, icónica y simbólica.

En Chile estas tres etapas se conocen como concreta, pictórica y simbólica, las que se representan, según las Bases Curriculares, como el enfoque o método COPISI, que se asemeja a lo propuesto por el Método Singapur en la década de los 90´ en su enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto). Ambos enfoques buscan un aprendizaje significativo de las matemáticas (Arévalo, Reveco & Zapata, 2018). La habilidad de representar, utiliza representaciones concretas, pictóricas y simbólicas, donde crea relatos basados en una expresión matemática simple, ecuación o representación, utilizando tablas o esquemas con lenguaje matemático, transfiriendo una situación de un nivel de representación a otro (Mineduc, 2016).

Otra posibilidad que tiene la o el docente en utilizar secuencias de enseñanza aprendizaje es elaborarlas personalmente, de acuerdo a materiales en concreto con un fin didáctico. Berenguer (2011), lo indica como "la artesanía del profesor". El docente artesano es sensible a las cualidades didácticas y plásticas del material a elaborar. Tiene disposición a buscar materiales, diseñarlos, emplearlos él mismo en sus clases y divulgarlos. El docente artesano tiende a dejar correr su imaginación, comienza por ser sensible a las potencialidades didácticas de los materiales del entorno, e ir haciendo una recopilación sistemática que le permita generar su propio material para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Todos los materiales y recursos que puede usar el docente en su labor pedagógica han de jugar un papel muy concreto en ese proceso. Como señala Gómez (2004), el éxito de su empleo depende de que el profesor diseñe y lleve a la práctica el currículo de tal forma que los recursos elaborados junto a la tecnología contribuyan al aprendizaje de las y los estudiantes.

En condiciones de entornos de geometría dinámica 3-dimensional (EGD3d), la visualización se suele referenciar con figuras o representaciones pictóricas externas (medio material) o internas (imagen mental). Presmeg (1986) alude diversos tipos de imágenes mentales:

• Imágenes concretas pictóricas: Son imágenes figurativas de objetos físicos.
• Imágenes de fórmulas: Son la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las vería.
• Imágenes de patrones: Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas o representaciones gráficas.
• Imágenes cinéticas: Son imágenes parte físicas y parte mentales.
• Imágenes dinámicas: Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Tabla 6: Imágenes mentales (Presmeg, 1986).

La experiencia práctica y la comprensión intuitiva de nociones, relaciones y propiedades matemáticas ha de ir enriqueciéndose progresivamente con formas de representación que permitan trascender la manipulación concreta de objetos (Batanero, Font & Godino, 2004).

2.8 GeoGebra: TIC para el aprendizaje de la Geometría

El software educativo de GeoGebra es una multiplataforma creada en el año 2001 como un proyecto de tesis de Markus Hohenwarter, que combina la facilidad de uso de otros softwares de geometría dinámica con las versátiles posibilidades del software algebraico. La idea básica de GeoGebra es unir geometría, álgebra y cálculo, que otros paquetes abordan por separado, en un solo paquete que se puede utilizar para la enseñanza de la geometría desde el nivel elemental hasta la formación universitaria (Hohenwarter & Preiner, 2007). Autores como, Navarro, Robles, Ansaldo y Castro (2016), Bustos y Vásquez (2016) y Cuevas, Rodríguez y Gonzáles (2014), muestran cómo un ambiente de representaciones dinámicas, como el GeoGebra, favorece en la comprensión de manera intuitiva e interpretación de los métodos de la derivada para hallar máximos y mínimos de funciones en una variable real (Cruzado & Salazar, 2017).

La enseñanza de la geometría escolar desde una perspectiva dinámica es un campo relativamente nuevo en la docencia, pero con una presencia cada vez más frecuente y relevante (Ferreira, 2009 & Duval, 2000). Por ello, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) promueve el uso de software de geometría dinámica en las aulas, entre ellos GeoGebra.

En el campo específico de la enseñanza de la geometría, los estudios de Ferreira (2019), sobre intervenciones que emplearon el software GeoGebra con docentes previamente calificados en su manejo, reportan que esos mismos docentes percibieron que el paquete facilitaba alcanzar ambientes de aprendizaje interactivos o aprendizajes basados en procesos colaborativos (García, 2011). Esta es una condición indispensable resaltada en un estudio previo por Parsad, Lewis & Farris (2001), quienes sostienen que las habilidades tecnológicas de los docentes son claves para integrar las TIC en un marco de buena enseñanza. En ese sentido, una capacitación tecnológica integral resulta estratégica para que un software como GeoGebra se torne en una herramienta productiva y, lo que es más importante, los docentes la perciban como tal (Bulut, 2011; Tatar & Yilmaz, 2016).

Según Gutiérrez (2014), el uso de TIC facilita a las y los profesores la tarea de diversificar sus programaciones de las clases para que estudiantes de diferentes intereses o capacidades matemáticas sigan ritmos de trabajo distintos (Gutiérrez, 2014). La interactividad de los entornos simbólicos apoyados en las TIC, permite un mayor protagonismo del estudiante, mejorando su motivación y autoestima, facilitando la adaptación de la enseñanza a sus características, junto con promover la comprensión y el aprendizaje de los contenidos (Coll, 2004).

A su vez, Méndez (2014), señala que hallaron mejoras en dimensiones como la velocidad en realizar actividades o hallar respuestas, la comprensión de conceptos, el enfoque en determinados temas o la motivación por profundizar en ellos, además que el uso de GeoGebra tiene incidencia en que las y los estudiantes alcancen mejoras al realizar actividades o para llegar a respuestas concretas, así como en la comprensión de conceptos u objetos.

Sánchez (2003), plantea que GeoGebra posee un conjunto de atributos que resultan especialmente adecuados si se busca fortalecer capacidades matemáticas en los estudiantes, como, por ejemplo:

• Dimensionalidad: Posibilidad de construir nuevos escenarios a partir de la combinación de objetos en espacio y tiempo. • Navegabilidad: Posibilidad de explorar de manera libre y flexible, a diferencia de otros paquetes que emplean rutas fijas, lineales y secuenciales. • Interactividad: Sistema que provee al usuario retroalimentación en tiempo real, además de adaptar o modificar dinámicamente su comportamiento en función de los eventos e información recibida. • Calidad del contenido: Fiabilidad, relevancia, organización y accesibilidad de la información que contiene el software, que adicionalmente puede ser adaptada a diversos tipos de audiencias. • Interfaz: Pantalla con que el aprendiz interactúa, que captura la atención del aprendiz, guía sus acciones y refleja el estado del sistema.

Tabla 7: Atributos de GeoGebra (Sánchez, 2003).

Aplicar herramientas tecnológicas digitales contribuye a generar oportunidades de aprendizaje desde una perspectiva de laboratorio; es decir, de desarrollar integradamente las habilidades de representar, modelar, resolver problemas, y argumentar y comunicar. Ellas, a su vez, permiten desplegar otras habilidades esenciales para aprender esta disciplina, como explorar, experimentar, visualizar, graficar, conjeturar, comprobar y generalizar, de modo que las y los estudiantes sean parte de un espacio para construir matemática (Mineduc 2019). Otero (2012), afirma que el uso del GeoGebra ayuda en la visualización espacial y en las condiciones de un problema de optimización; sin embargo, señala una deficiencia propia del software educativo, como por ejemplo la escala, ya que no permite que las y los estudiantes logren la conversión entre distintos tipos de registros.

En España ya existen los denominados Institutos GeoGebra (Instituto GeoGebra de Andalucía y de Cantabria), que tienen presencia internacional y que promueven la realización de encuentros, de cursos de formación y suministran un espacio para compartir y discutir propuestas y experiencias (Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín, & Molina, 2011). Además, como señala Gómez (2004), el éxito de su empleo depende de que el docente diseñe y lleve a la práctica el currículo, de tal forma, que la tecnología contribuya al aprendizaje de las y los estudiantes.

2.9 Historia de la magia: Evolución hacia la Educación

La magia para el experimentado mago chileno Enrique Hidalgo, más conocido como Ling-Fu (1947), es un arte y no del tipo intuitivo, donde se realizan experimentos que se van creando e imaginando mediante situaciones convenientes y adversas de la lógica (Hidalgo, 2008). El término deriva de la palabra "*magi"* (magia), uno de los elementos religiosos babilónicos que fueron incorporando los magos, casta de sacerdotes de la antigua Persia que se ocupaban de todo lo relacionado con el ocultismo. Se le denominaba "*Magnus*" a los sacerdotes de los medas. Estos primeros magos eran estudiosos de la astrología, espiritismo, ocultismo, brujería y de la alquimia, y utilizaban la magia para acrecentar la eficacia de las ceremonias religiosas o rituales (Ramiro & Rodríguez, 2016).

Almanaque (2004), relaciona ese vocablo con "*mágoi apó anatolón*" que en la Biblia se relaciona con los magos de oriente, indicando que ellos representaban los sabios que estudiaban la realidad para dominarla. Para el Círculo Dorado (2005) es el arte de producir cambios en la conciencia o en la percepción, produciendo alteraciones en la realidad objetiva. Para García Sierra (1999), la magia es "la manipulación de objetos, según secuencias que se suponen concatenadas de modo necesario e impersonal" (Ruiz, 2013). El diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (RAE, 2021), define la magia como: "Arte o ciencia oculta con que se pretende producir, valiéndose de ciertos actos o palabras, o con la intervención de seres imaginables, resultados contrarios a las leyes naturales".

La magia es una de las artes más antiguas que se conocen, se tiene conocimiento desde el año 1700 a.C., En el año 1825, en una tumba de Egipto el aventurero británico Henry Westcar descubrió el relato más antiguo escrito acerca de la magia, encontró un papiro, llamado *Westcar Papyrus* o Papiro Westcar (Papiro de Berlín 3033, expuesto en el Museo Egipcio de Berlín) escrito en el tiempo de los hicsos (1650 a.C. - 1540 a.C.), donde ya se relataba la actuación de un mago egipcio llamado "*Dyedi* o Dedi". Este documento, que proviene del Antiguo Egipto, contiene relatos acerca de actos mágicos realizados por Dedi. Dyedefhor (Hardyedef) hijo de Keops, quien narra en el Papiro Westcar, relata que el mago actuaba en el palacio de Menfis en el reinado de Jufu (Keops), la residencia de los faraones. Cuenta como Dedi, para asombrar al faraón Keops cortaba la cabeza a animales como la oca (ganso), aves y bueyes, donde posteriormente las unía, además, de domesticar leones y conocer el lugar secreto de las habitaciones del santuario de Thot (Ramiro & Rodríguez, 2016; Taimí, 2008; Parys, 2017).

En tiempos de la Antigüedad Clásica de Grecia y Roma, los magos utilizaban su magia para entretener al público. Algunos de estos magos fueron: el faquir Cratístenes, el "*Acetabularius"* Theodorus, y Diophites (Ruiz, 2013). En Roma se le llamaba acetabularius aquel que hacía efectos de magia con vasos y bolas (primer efecto de magia conocido con objetos, actualmente, se realiza con cubiletes). Séneca (4 a. C. - 65 d. C.), en su cuadragésimo quinta carta a Lucilio, describe que ha visto un fascinante efecto de ilusión en el que unas bolas aparecían y desaparecían bajo unos cubiletes. El filósofo, nos indica la esencia de por qué los efectos de magia nunca deben explicarse (Blasco, 2007).

Tras la caída del imperio romano de Occidente en el año 476, inicia la Edad Media comprendida entre los siglos V y XV, considerada como la época oscura. Fue donde se origina lo que se conoce como la "magia negra", aquí nace la figura del mago galés Merlín. En esta época conocida como los años oscuros, al artista prestidigitador se le veía envuelto en poderes sobrenaturales que le conferían la destreza para realizar ilusiones (Taimí, 2008). Las creencias supersticiosas y las limitaciones culturales de la época, convirtieron a los magos en una gran amenaza para la religión oficial. Se creía que los magos pactaban con el diablo para poder realizar sus efectos mágicos, y fueron perseguidos por la Inquisición. En la época Moderna datada del siglo XV y el XVIII, sobresalen los primeros magos italianos como Jonas, Androletti y Antonio Carlotti, como máximos exponentes en el ilusionismo (Ruiz, 2013). En el Renacimiento entre el siglo XIV y XVI, la magia vuelve a tomar fuerza. El inglés Reginald Scott (1538 - 1599), escribe en 1584 el libro "*The Discovery of Witchcraft*", el descubrimiento de la brujería, considerado el primer tratado de magia del mundo moderno en inglés. En él se explicaban las destrezas de la prestidigitación, con la intención de mostrar que las proezas de los magos se debían al ingenio y habilidad, y no a dioses o demonios, ni poderes sobrenaturales (Ruiz, 2013).

Entre el siglo XVII y XVIII, en Europa, los magos que más predominaban eran los ambulantes, que, junto a juglares y titiriteros, recorrían los principales pueblos y ciudades para exhibir sus espectáculos. En esta época destaca Ockes Bockes, mago que se considera el creador de las mágicas palabras ¡*Hocus Pocus*!., Encontramos a Isaac Fawkes (1675 - 1732), del cual registra como el primer mago en sacar un conejo del sombrero, pero uno de los maestros en este campo fue el italiano Joseph Pinetti (1750 - 1803), mago de la corte de Luis XVI, que consiguió un gran éxito en los teatros de la época, convirtiéndose en el primer mago en utilizar la publicidad para sus espectáculos, y siendo conocido como el primer profesor de magia natural de la historia, donde empleaba la magia en clases de matemáticas y física para sus estudiantes (Ruiz, 2013; Rodríguez, 2010).

Pero no es hasta principios del siglo XIX cuando el relojero e inventor francés Jean Eugène Robert-Houdin (1805 - 1871) fue quién revoluciono la magia conocida hasta el momento, por la magia moderna, conocido, como el "Padre de la magia moderna", a él se le debe la clásica vestimenta de mago con frac, basaba sus espectáculos en una presentación, combinando la habilidad manual y en el ingenio de los adelantos científicos. Fue creador de autómatas, y además uno de los primeros en utilizar la electricidad en sus ilusiones. Asimismo, comenzó a aplicar sus conocimientos en la creación de ilusiones mágicas, realizando efectos de magia donde utilizaba los avances de la Revolución Industrial (1760 - 1840), que estaban a su alcance, comenzando con la innovación en los efectos o ilusiones, creando nuevos aparatos mágicos (Ruiz, 2013).

En 1845 Robert-Houdin, produjo un gran número de ilusiones totalmente nuevas en un pequeño teatro en el Palais Royal, combinando los recursos de las ciencias mecánicas y eléctricas con la destreza manual y la presentación efectiva. Sus sesiones causaron gran expectación en París situándolo a la cabeza de su profesión. Gracias a él, la magia se popularizó. Emergiendo nuevas ilusiones, magos, instituciones, cofradías e identidades mágicas, convirtió la magia en un arte. Actualmente, los principios del ilusionismo son los mismos sobre los que Robert-Houdin basó su magia (Taimí, 2008 & Ruiz, 2013). Cabe destacar también a Johann Nepomuk Hofzinser (1806 - 1865), un oficinista y mago austríaco-húngaro que apenas salió de Viena, y que inventó gran cantidad de pases en la magia con las cartas (cartomagia) basados en propiedades matemáticas (Ruiz, 2013).

Posteriormente, en el siglo XX y XXI, la magia ha continuado desarrollándose y expandiéndose como un arte, que se ha complementado con distintas áreas del conocimiento, desde el primer profesor de magia natural y matemáticas, Joseph Pinetti (1750 - 1803), hasta en España con Juan Tamariz (1942) y Arturo de Ascanio (1929 - 1997), quiénes han sido autores de varios libros de magia, entre ellos algunos de teoría de la magia, donde también, establecieron las bases para complementar la magia con otras disciplinas. Para trabajar ciertas áreas del currículo, adaptando y modificando las actividades, la magia se puede aplicar en casi todas las áreas educativas. Ruiz (2013), señala las siguientes actividades: educación física y salud; psicomotricidad (educación diferencial), expresión corporal; educación artística; creación o fabricación de aparatos mágicos, dramatización (teatro); educación científica; experimentos mágicos, magia corporal; en lenguaje y comunicaciones; y en las matemáticas.

La magia es un arte que ha ido evolucionando a lo largo de su historia. Comenzó siendo una herramienta para el espectáculo; pero durante su evolución, su papel ha ido cambiando hasta llegar a formar parte de la educación, ya sea, en aprendizajes cognitivos y kinésicos (Ruiz, 2013). Los principales exponentes relacionados en la materia, son los españoles, magos y docentes Xuxo Ruiz, Álvaro Conde, Pedro Alegría, Juan Tamariz y Arturo de Ascanio, el mago canadiense Dai Vernon y los magos americanos Martin Gardner y David Copperfield, junto al mago informático inglés Alex Elmsley (Rodríguez, 2010).

2.9.1 La Magia en la Educación

La práctica pedagógica actual es concebida como toda orientación que, dada en el momento oportuno, permite a las y los estudiantes continuar desarrollando su proceso de enseñanza aprendizaje, utilizando todos los medios disponibles para favorecer y orientar este proceso, sin renunciar a priori a ninguno de ellos (Yábar, 2000). Junto con ello, el Mineduc (2021), proporciona orientaciones didácticas para cada disciplina y una gama amplia y flexible de actividades de aprendizaje y de evaluación que pueden utilizarse como base para nuevas actividades acordes con las diversas realidades de los establecimientos educacionales.

Estas actividades se enmarcan en un modelo pedagógico cuyo enfoque es el de la comprensión profunda y significativa, lo que implica establecer posibles conexiones al interior de cada disciplina y también con otras áreas del conocimiento, con el propósito de facilitar el aprendizaje. Estas actividades de aprendizaje y de evaluación se enriquecen con sugerencias al docente, recomendaciones de recursos didácticos complementarios y bibliografía para las y los profesores y estudiantes (Mineduc, 2021).

La magia educativa, como bien expone Ruiz (2013), se puede conseguir llevar al aula al interpretar cualquier imagen o representación mental, cuyo objetivo es reforzar y retroalimentar la explicación de los contenidos. Ruiz (2013) indica tres principios de por qué los efectos de magia favorecen en el aprendizaje de las y los estudiantes y cómo deben ser llevados a cabo, en el aula escolar.

• Presentación: Se presentan las actividades mágicamente, de manera visual y expectantes, estimulando la atención y el interés por aprender de las y los estudiantes.

• <u>Impacto</u>: Los efectos de magia generan una mayor impresión a nivel psicológico, captando la atención, debido a procesos neurocientíficos. • <u>Conocimiento</u>: Lo aprendido y construido con la magia tiende a ser recordado durante más tiempo, consecuentemente, por la implicación emocional y psicológica por parte de la o el estudiante, ya que sus células cerebrales han estado más activas durante el proceso de enseñanza aprendizaje. Además, los efectos de magia en el aula escolar, deben tener una razón de hacerse, para explicar alguna idea o concepto, y a la vez, captar el interés y expectación de las y los estudiantes, generando una atmosfera mágica que les convenza que está ocurriendo algo mágico. El término "atmósfera mágica" fue creado por Arturo de Ascanio en 1956, en sus obras "Navajas y Daltonismo", y se refiere al ambiente de sorpresa y misterio que un mago consigue cuando ejecuta sus efectos de magia.

Tabla 8: Principios de la magia educativa (Ruiz, 2013).

Martínez (2000), indica que el uso de la magia en la educación vuelve las clases en una actividad lúdica y motivadora, logrando captar la atención de las y los alumnos hacia los contenidos. El foco para elegir o modificar las actividades radica en el interés que provocan en cada contexto escolar, a fin de motivar a la clase a trabajar en ellas. (Mineduc, 2021). Captar el interés, mantener el misterio y la intriga en el efecto de magia, despierta la curiosidad y el sentimiento mágico del espectador, según indica el mago americano Darwin Ortiz (1999).

La psicología en la magia es, sin duda, el aspecto más importante para un mago. Sin ella, es imposible que ocurra la magia. Es incluso más importante que la habilidad manual. Para sorprender a tus estudiantes es casi obligatorio conocer los mecanismos psicológicos del cerebro. Conocer los fallos de la atención, memoria o percepción, y usarlos a tu favor para conseguir ilusionarlos mágicamente utilizando la "*Misdirection*". En el argot mágico el concepto de misdirection se define como: desviar la atención. Por lo tanto, la misdirection es saber manipular y distraer la atención en un momento determinado, para ocultar una acción secreta frente a tus estudiantes. Uno de los grandes referentes de la distracción fue el mago italiano Tony Slydini (1901 - 1991), quién estudió y desarrollo la misdirection (Ruiz, 2013 & Cimailu, 2008).

Según Ruiz (2013), para una niña o un niño la magia sería cualquier experiencia nueva, cualquier cosa fuera de lo común, aunque sea algo simple. Por ejemplo, cuando por primera vez mezclan una témpera roja con una amarilla y les sale el color naranja, eso para ellas y ellos, es magia. Esa experiencia para la infanta o el infante no es algo normal, es mágico. Ha utilizado algo usual, las témperas de colores, y ha conseguido algo fuera de lo normal.

Cuando las y los estudiantes visualizan un efecto de magia, comienzan a preguntarse espontáneamente: ¿Cómo lo ha hecho?, ¿Y si hubiese hecho esto?, ¿Y si hubiera usado esto?,. Se trata de un mecanismo que se corresponde con la necesidad esencial de comprender su entorno para poder interactuar con él (Ruiz, 2015). En relación con su eficacia, se puede decir que un efecto de magia siempre reside en la imaginación y en la voluntad de quien organiza la actividad, eso quiere decir que cuando se utiliza en el aula de clases, la o el docente que hace uso de ella debe ser creativo, impactante e innovador en la presentación de la experiencia mágica, para así captar la atención de las y los estudiantes involucrados en la experiencia de aprendizaje (Martínez, 2007).

Ahora bien, las y los adolescentes entre 12 y 18 años ya tienen habilidades para la lectura, escritura y el razonamiento matemático. Es una etapa donde interpretan todo desde sus perspectivas. Viven el asombro, pero lo hacen de un punto de vista más cerebral, por eso es importante que sientan la imposibilidad de las cosas. Entonces, se genera la magia o ilusión, lo imposible para ellas y ellos, aunque lo exterioricen menos, en este sentido, funcionan los efectos de magia inmediatos, porque no les da tiempo de preguntarse o cuestionarse propiamente cómo sucedió (Ruiz, 2013). En este contexto, Ruiz (2015) expone que los mensajes y las ideas que capten durante esos instantes tendrán un mayor peso y perdurarán durante más tiempo que si sólo escuchan a una o un docente que se limita a dar su clase de la manera convencional. Asimismo, señala, que el recuerdo de un experimento mágico puede ser permanente, debido a su peso emotivo, pues, el cerebro cognoscitivo, donde se procesa la información, trabaja mejor si se apoya en el cerebro emocional.

Juan Tamariz, en su libro “Los Cinco Puntos Mágicos”, publicado en 1981, muestra cómo comunicar y transmitir en el mundo de la magia, partiendo de cinco puntos: mirada, voz, manos, cuerpo y pies. Trabajando estos aspectos de manera coordinadas y utilizando la magia, se puede conseguir a unos estudiantes abiertos, decididos, extrovertidos y motivados para realizar sus propias explicaciones, con las que podrán expresar sus ideas y pensamientos a la sociedad (Ruiz, 2013).

De igual forma, el mago Godoy (2008) en el congreso de magia infantil “Tru La La” se refirió a que hay una serie de cualidades que son desarrolladas al realizar efectos de magia, como la confianza, destreza, disciplina, creatividad y coordinación.

Cabe señalar, que en la cualidad de coordinación mencionada por Godoy (2008), Markos (2008) aclara la existencia de hospitales que utilizan la magia como terapia de rehabilitación. En 1981 el famoso mago David Copperfield (Metuchen, 1956) junto a Julie DeJean organizaron el "*Project Magic"* o proyecto mágico, como una forma innovadora de ayudar a todas las personas con discapacidades físicas durante su proceso de terapia, independiente de su edad, mostrando y enseñando magia para fomentar la alegría y desarrollo de la coordinación motora. Un año más tarde, en 1982, la Asociación Estadounidense de Terapia Ocupacional (AOTA) respaldó formalmente el *Proyect Magic*, donde señalaron que ha proporcionado motivación, mayor autoestima y esperanza en las y los pacientes, al contribuir con un enfoque alternativo para obtener beneficios terapéuticos en miles de personas de todas las edades. Desde entonces, los programas del proyecto mágico se han establecido en casi todos los estados de EE. UU. Y a ha sido desarrollado, implementado y guiado a nivel internacional en más de 30 países. Ahora bien, Chile, no se ha quedado atrás, en el 2008 el mago y médico Álvaro Ortega creó Magia X una Sonrisa (MXS), fundación voluntaria donde en un principio se enfocó solamente en realizar risoterapia, globoflexia y espectáculos de magia para niñas y niños en hospitales terapéuticos con la finalidad de que crean que nada es imposible, según Ortega (2008), que de cierta manera en el proceso de su recuperación asimilen que nada será imposible para ellas y ellos poder superar. Asimismo, al pasar los años ya por el 2012, los objetivos de MXS se asociaron más al del *Proyect Magic*, de no solamente brindarles sorpresa y alegría, sino, que mostrar y enseñar magia a personas con dificultades físicas, principalmente en niñas y niños, fomentando así estas prácticas para el área de la educación diferencial y en estudiantes con necesidades educativas especiales (Markos, 2008).

En España, el sacerdote, educador y mago italiano, Giovanni Bosco (1815 - 1888) conocido como Don Bosco, fue nombrado patrono protector de los magos e ilusionistas en 1953, en un congreso celebrado en Segovia. Los mismos magos le escogieron, a petición de un sacerdote y mago español: el Padre Wenceslao Ciuró (1895 - 1978). Don Bosco, necesitaba una manera de conseguir que las y los jóvenes más necesitados se interesaran en ir la iglesia, así que utilizó el arte del ilusionismo para conseguirlo. De joven, solía mirar a saltimbanquis y a magos. Después, de observar analíticamente, lograba descubrir cómo hacían los efectos de magia estos magos. Practicándolos, consiguió dominarlos para luego presentarlos en la misa. Juntaba a las y los jóvenes de su pueblo para contarles las historias de la Biblia, mientras lo hacía, realizaba efectos de magia para mantener su atención, animándolos a través de ellas a ser buenos cristianos y honestos ciudadanos (Ruiz, 2013).

Aunque las biografías de Don Bosco no cuentan demasiado sobre su faceta de mago, las pocas historias, incluyen algunos efectos mágicos que él realizaba con cuerdas, que transformaba tres en una sola sin nudos, explicando el misterio de la trinidad cristiana, y también, que sacaba monedas de los oídos y que transformaba piedras en dinero, maravillando a las niñas y niños pobres y marginales que cuidaba. Antes de fallecer, en el año 1888, Don Bosco nos dejó la frase: “Los ilusionistas llevan al diablo en las manos y a Dios en el corazón” (Ruiz, 2013).

En el campo de la neurociencia y más concretamente en cómo funcionan nuestros mecanismos de percepción, atención y memoria a nivel neuronal. Resulta que los magos a través de la historia, ya dominaban estos conceptos sin conocerlos, que hoy en día, los neurocientíficos están empezando recientemente a desarrollar (Conde, 2016)

Jiménez (1996) señaló, que en el futuro las escuelas desarrollarán metodologías donde lo lúdico será el pilar de la actividad cognoscitiva. En matemáticas, por ejemplo, diseñar estrategias para encontrar las explicaciones matemáticas que justifican la obtención de determinados resultados que, en primera instancia, parecen fruto de una actividad mágica pero que, finalmente, responden a una aplicación de determinados conceptos o propiedades matemáticas de los contenidos que subyacen en el seno de la situación (Martínez, 2007). De esta manera, las y los docentes harán un ambiente más ameno para el aprendizaje, construyendo la concepción de la atmosfera mágica. Por consiguiente, en cada sesión académica, las y los estudiantes podrán llevar sus ideas y conjeturas a la experimentación y visualización, fortaleciendo así el conocimiento sobre el objeto matemático de estudio (Fajardo, Guataquira, Gutierrez, Rodríguez & Velásquez, 2009).

2.9.2 La Magia y la Matemática

Ya es conocido que tanto la matemática como otras áreas del saber pueden ser aprendidas, reforzadas o evaluadas utilizando actividades innovadoras. Eso quiere decir que existen posibilidades para provocar el interés y la motivación de los estudiantes hacia la realización de actividades matemáticas presentadas en formatos de dinamismo, interés, acción, ingenio y magia (Ruiz, 2013).

Las matemáticas y la magia son disciplinas que pueden llegar a ser complementarias. La descripción del primer efecto de magia con matemáticas, se tiene constancia del libro *"Viribus Quantitatis"* (Sobre el poder de los números) del matemático italiano Luca Pacioli, amigo y colaborador de Leonardo Da Vinci (Seguí, 2001). En él aparecen ya efectos o juegos de magia numérica, puzles, jeroglíficos, enigmas y problemas matemáticos. Además, este libro no solo muestra los efectos mágicos, sino que también indica cómo se deben representar. Fue redescubierto por el matemático americano David Singmaster (2008). A su vez, el primer libro impreso que hace referencia a la magia matemática "*De Subtilitate rerum*", data del siglo XVI y su autor es el médico, astrólogo, filósofo y matemático italiano Gerolamo Cardano (1501-1576). Obras posteriores mezclan con armonía la matemática, física, química y la magia, siendo destacado el titulado "*Récréations Mathématiques et Physiques*" escrito por Jaques Ozonam, donde incluye efectos de magia con herramientas científicas (Seguí, 2001).

Walter William Rouse Ball (1851 - 1925), abogado y académico en matemática del Trinity College, Cambridge, publico en 1892 "*Mathematical Recreations and Essays"*, un libro dedicado a la matemática recreativa y donde detalla ejemplos del ilusionismo matemático, se interesó activamente en la prestidigitación. Fue fundador y primer presidente del Pentacle Club, una sociedad mágica de la Universidad de Cambridge, que sigue existiendo actualmente (Ruiz, 2013).

En el siglo XX el fotógrafo, matemático y lógico británico Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898), conocido como Lewis Carroll, ya realizaba actuaciones de magia y empleaba acertijos numéricos. Su pensamiento matemático se entremezclaba con su gusto por la magia, dando lugar a un conjunto de enigmas matemáticos, paradojas lógicas, juegos de cartas y acertijos relacionados con el tablero de ajedrez y su estructura matemática.

Tal como indica Martin Gardner (1996), su interés por estos dos últimos se ve plasmado en dos de sus obras más famosas: Las aventuras de Alicia en el País de las Maravillas (1865) y Alicia a través del espejo (1871). En la actualidad, muchos de sus efectos de magia utilizando la matemática, siguen siendo empleados actualmente por algunos magos en sus exhibiciones de magia (Ruiz, 2013).

En cuanto a la recopilación de efectos de magia basados en las matemáticas, hay que resaltar la labor del filósofo y científico americano Martin Gardner (1914-2010). Que se dedicó a trabajar con las matemáticas, la magia, la física y la ciencia, en general. Gardner compaginaba su trabajo con otras aficiones como la lectura de libros que le marcaron enormemente, como El Mago de Oz y Alicia en el País de las Maravillas de Lewis Carroll, y también, el ajedrez, a partir del cual desarrolló multitud de efectos de magia matemáticos. De hecho, su libro publicado en 1956 "*Mathematics, Magic and Mystery"* se dedica completamente a la magia matemática (Blasco, 2007).

Asimismo, Martin Gardner (1987), señala en relación al uso de las matemáticas desde una filosofía recreativa, afirma: "Con seguridad, el mejor modo de despertar interés de un estudiante consiste en presentarle un juego o efecto de magia matemático, una paradoja, o una representación bajo un modelo premeditado".

Tal como Martín Gardner, el programador y mago inglés Alex Elmsley (1929-2006), es uno de los pocos magos matemáticos que han investigado las propiedades de los sistemas de barajado de cartas matemáticamente, junto a el filósofo, matemático, estadístico y mago americano, Persi Diaconis (Nueva York, 1945) y el mago canadiense Dai Vernon (1894-1992) conocido como "El Profesor" y el único mago que pudo engañar al famoso escapista austrohúngaro Erik Weisz (1874-1926) conocido como Harry Houdini.

El mago-informático Alex Elmsley uno de los grandes innovadores en la cartomagia del siglo XX, dio el nombre de "Principio de Penélope" a la siguiente propiedad explicada por Alegría (2011):

"En una baraja de 2n cartas, si se retiran k cartas de la parte inferior, una mezcla faro hace que la carta que ocupa la posición n pase a ocupar la posición k". En una mezcla faro, la baraja se divide en dos partes iguales, que luego se intercalan perfectamente una a una.

Básicamente, Elmsley afirma que, basta conocer el valor de la carta central de la baraja (entendiendo por central la carta de la posición "n" si la baraja tiene "2n" cartas) para colocarla en el lugar indicado por el número de cartas retiradas mediante una apropiada mezcla faro. Teniendo en cuenta que el resultado no depende del número de cartas retiradas de la baraja, este principio se presta a presentarlo como un efecto de magia de predicción.

Se puede plantear el principio de Penélope (Elmsley) más general, como:

"Si se retiran "x" cartas de la parte superior e "y" cartas de la parte inferior de una baraja, cualquier carta del paquete central se traslada mediante una mezcla faro a la posición: (k + y – x), donde “k” es una constante que depende de la posición de la carta antes de la mezcla faro realizada”.

La definición del término Matemágica parece no estar formalmente establecida. Por ello se hacen unas primeras aproximaciones del mismo, analizando los significados de los dos vocablos que pudieron haberla generado: Matemática y Magia (Ruiz, 2013). Cuando se hace referencia a la “Matemagia”, los autores utilizan el término para desplegar actividades matemáticas generalmente cargadas de curiosidades y propiedades matemáticas.

Actualmente en España, se destaca a Juan Tamariz (Madrid, 1968), como autor de diversos juegos de magia con cartas, basados en propiedades matemáticas, denominados como efectos o juegos de magia automáticos. Por otro lado, resalta la labor de otros expertos en magia matemática, que ejercen como profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos, como por ejemplo Fernando Blasco (Madrid, 1968), profesor de la Universidad Complutense de Madrid, con un perfil didáctico y divulgador y otros docentes como Pedro Alegría (UPV/EHU), Álvaro Conde (CSEU La Salle, Madrid), Carlos Vinuesa (profesor del IES Villa de Valdemoro), así también, como blogs y páginas web de divulgación de juegos matemáticos, entre las que destaca DivulgaMAT o el portal Magia Matemática (Ruiz 2013).

Particularmente, el empleo de las matemáticas aplicado a la magia potencia y desarrolla el pensamiento matemático de las y los estudiantes. Además, propicia el desarrollo de una actitud positiva hacia las matemáticas, presentándolas de una manera más atractiva de lo normal (Corbalán, 1994 & Ruiz, 2015). Cabe añadir, como explica Conde (2016), que la magia educativa desarrolla el pensamiento lógico-matemático.

Una entrevista a Don Albers (Albers & Gardner, 2005), comenta las nuevas reformas de la enseñanza de las matemáticas. Donde declara, que no se siente conforme con algunas nuevas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas, las cuales se definen como matemáticas difusas. Afirma que la idea de esos métodos consiste en organizar a las y los estudiantes en pequeños grupos que trabajen en cooperación para desarrollar teoremas. Y continúa diciendo: Habría entonces grupos a quienes, en lugar de construir el teorema de Pitágoras, dejaríamos cortando triángulos para que trataran de descubrirlo (Alegría, 2011).

2.9.3 La Magia y la Geometría

Para los antiguos griegos y egipcios, un episodio descrito por Herón de Alejandría, en el año 62 a.C., describe como las puertas de un templo se abrieron misteriosamente y los ídolos de piedra se comunicaban. Aparentemente, estos milagros se explicaban como el resultado de los cambios de presión y del aire dentro de los templos, debido a su forma geométrica (Ancient, 2018).

El mundo del ilusionismo o de la magia, junto a la geometría, son originados en las mismas tierras, Egipto, donde ya se relató la actuación del mago egipcio llamado Dedi ante el faraón Keops, y cómo este de alguna manera conocía el lugar de las habitaciones secretas del santuario de Thot (Taimí, 2008). Esto implica, que de alguna forma el mago Dedi, tenía conocimientos de cartografía y geometría espacial.

El historiador griego, Heródoto (484 a.C.- 425 a.C.), llamado el padre de la historia, pensaba que la geometría había nacido en Egipto, a partir de la necesidad práctica de volver a medir las tierras después de las inundaciones del río Nilo (Prada, 2011).

Serres (1996), menciona que el origen de la geometría fue en las orillas del río Nilo, cuando en épocas de lluvia el río se desbordaba, los límites de las tierras se perdían, por esta razón, aquéllos que se dedicaban a la agricultura se veían en la necesidad de acudir a los que tenían conocimiento de las medidas para repartir nuevamente las tierras, surge así, la necesidad de encontrar los cálculos que aseguren la exactitud de las medidas de estos terrenos. La geometría es una invención del ser humano, para establecer parámetros métricos a los cuales se les dio una aplicación práctica y que posteriormente evolucionó a la geometría plana y la del espacio.

Arquímedes de Siracusa inventó la forma de medir el área de superficies limitadas por figuras curvas y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas, cuyos objetos tridimensionales fueron usados por los romanos (Guerrero & Romero, 2015). Siglos más tarde, en Roma los magos conocidos como acetabularius mediante objetos como vasos y pelotas lograban crear efectos de magia donde eran la atracción en las bacanales (fiestas) y con reputación dentro de la sociedad romana. Utilizaban estos objetos debido a sus formas geométricas que eran fácilmente de manipular, como cilíndricas y esféricas (Ancient, 2018).

2.9.4 La Magia y la Motivación en la Enseñanza

Según lo expuesto anteriormente, desde la evolución de la magia como un arte, y sus aplicaciones en la educación. Los diversos autores citados, apuntan a que la magia aumenta la curiosidad, capta la atención y la motivación de los educandos al aprender conceptos cognitivos en un entorno lúdico. Para Guzmán (1994), "aprendemos en todos los órdenes gracias a situaciones nuevas". Por lo tanto, en aula escolar al utilizar el recurso de la magia, este despierta la atracción y la creatividad de las y los estudiantes frente a los diversos contextos de enseñanza.

La magia en el aula de matemáticas, Blasco (2007), afirma: "como elemento didáctico, los efectos de magia son interesantes, puesto que permiten retroalimentar conceptos y representar de forma concreta el porqué de algunos resultados". Teniendo relación con los fines educativos que propone Ruiz en su libro "Educando con magia". Este libro nos presenta los argumentos pedagógicos que sustentan el ilusionismo como recurso motivacional. Comenzando con el por qué, el cómo, el para qué y el cuándo utilizar la magia en nuestras aulas, este autor, además, nos explica los fundamentos de la magia educativa y las posibilidades que nos ofrece esta herramienta para inducir a la motivación, atención, e incluso fascinación de las y los estudiantes, así como para el desarrollo de habilidades cognitivas y comunicativas (Páez, 2021).

Corbalán (2002) citado por Páez, apunta a que "una de las principales ocupaciones del docente de matemáticas, es procurar cambiar la disposición de las y los estudiantes respecto a las matemáticas". Además, agrega que, puede parecer una contradicción la utilización de efectos de magia en la enseñanza. Sin embargo, aclara que no hay que desvirtuarlos, es decir, la función de los efectos de magia en matemáticas, es para aprender y retroalimentar los conceptos matemáticos de una forma creativa. Este recurso ha sido utilizado en diversas áreas del conocimiento. González (2016) mediante el estudio de "La magia como herramienta pedagógica", indica que la magia como herramienta motivacional, transmite conocimientos, emociones, resolución de conflictos y desarrollo de la psicomotricidad.

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

3.1 Paradigma o enfoque de investigación

La investigación se encuentra enmarcada en un diseño de investigación cualitativa, la cual se fundamenta en entender el significado de lo que construye un grupo o individuo de la mejor manera posible bajo un cierto comportamiento, es decir, la forma en que dan sentido a su mundo y las vivencias que han tenido en este. Blasco y Pérez (2007), indican que la investigación cualitativa estudia la realidad en su contexto natural.

El enfoque cualitativo se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados (Punch, 2014; Lichtman, 2013; Morse, 2012; *Encyclopedia of Educational Psychology*, 2008; Lahman & Geist, 2008; Carey, 2007, & Delyser, 2006). El enfoque cualitativo es recomendable cuando el tema del estudio ha sido poco explorado o no se ha hecho investigación al respecto en ningún grupo social específico (Marshall, 2011 & Preissle, 2008).

3.2 Diseño de investigación

Según el objetivo de aprendizaje (OA) involucrado; "OA04: Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales". La investigación está considerada con un diseño no experimental transversal y de estudio exploratorio.

El diseño no experimental, podría definirse como la investigación que se realiza sin manipular deliberadamente variables. Es decir, la investigación no experimental son estudios que se realizan sin la manipulación deliberada de variables y en los que sólo se observan los fenómenos en su contexto natural para analizarlos (Sampieri, 2014). Mertens (2010) señala que la investigación no experimental es apropiada para variables que no pueden o deben ser manipuladas o resulta complicado hacerlo.

Ahora bien, en esta investigación no experimental se cataloga como transversal, ya que en este diseño transversal o transeccional se recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único (Liu, 2008 & Tucker, 2004). Su propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado. Asimismo, este diseño transversal es de tipo exploratorio. Sampieri (2014), señala que en este tipo de diseños se comienza a conocer una variable o un conjunto de variables, una comunidad, un contexto, un evento, una situación. Se trata de una exploración inicial en un momento específico. Por lo general, se aplican a problemas de investigación nuevos o poco conocidos. En este sentido, la investigación sigue un alcance de estudio exploratorio. Donde el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes. Es decir, cuando la revisión de la literatura reveló que tan sólo hay guías no investigadas e ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio, o bien, si deseamos indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas. Los estudios exploratorios sirven para familiarizarnos con fenómenos relativamente desconocidos (Sampieri, 2014).

3.3 Sujetos o población de estudio

En esta investigación los sujetos del estudio no experimental transversal, serán estudiantes de 3° y 4° medio del plan matemático. Se entiende por población al conjunto total de individuos o sujetos, objetos o medidas que poseen algunas características comunes observables en un lugar y en un momento determinado (Hernández, 2013). Así, una población es el conjunto de todos los casos que concuerdan con una serie de especificaciones (Lepkowski, 2008).

Los sujetos estarán bajo un contexto híbrido en el Liceo Sara Blinder Dargoltz, donde las y los estudiantes de 3° y 4° medio, compartirán a través de la plataforma de Google Meet una secuencia motivacional de enseñanza aprendizaje de Geometría 3D, utilizando la magia y el software educativo GeoGebra, para posteriormente compartir un grupo focal (e-focus group) mediante el instrumento de guía focal confeccionada previamente, donde será dirigida por un moderador. Un moderador es quien invita a las y los participantes calificados a compartir impresiones mediante preguntas, y da inicio a la sesión en un tiempo preestablecido, formando parte del grupo focal (Barra & Quezada, 2009).

Para guiar la discusión, el moderador usa una combinación de preguntas predeterminadas con otras generales, sujeto al desarrollo que ésta tenga. El moderador en tiempo real, va generando conocimientos y opiniones más profundas sobre el tema, mediante las apreciaciones o visiones de las y los entrevistados, que en este caso serán las y los estudiantes de 3° y 4° medio, del diseño no experimental transversal.

3.4 Instrumentos

Con el propósito de obtener la información requerida para el análisis de la secuencia motivacional de enseñanza aprendizaje de Geometría 3D en estudiantes de 3° y 4° medio matemático, se elaboró un guion a través del grupo focal como principal instrumento. Donde se compartirán las percepciones u opiniones de las y los estudiantes de 3° y 4° medio, para el posterior análisis de la información y constatación mediante el registro audiovisual. Esta guía focal, para la instancia del e-focus group fue elaborada según Barra y Quezada (2009) y Cóndor (2010). Cuyo motivo es, analizar e indicar los resultados obtenidos para poder responder a la pregunta de investigación:

¿Cómo influye la magia en la activación del PEA de los aprendizajes relativos a la formulación y verificación de conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, de las y los estudiantes de 3° y 4° medio?

En este contexto, además, se aplicaron dos técnicas para la recolección de información del diseño no experimental para estudiantes de 3° y 4° medio. En este caso son una autorización para la implementación, y un grupo focal. Asimismo, los instrumentos tecnológicos utilizados fueron un PPT y GeoGebra, además, utilizando la magia como recurso motivacional. Es necesario mencionar que PowerPoint es una herramienta digital que se incluye en las licencias de Microsoft para equipos de sistema operativo Windows. También, GeoGebra es un software libre, por lo tanto, su uso está permitido para utilizarlo libremente con cualquier finalidad, redistribuido con cambios o mejoras sobre ellas. En la secuencia motivacional, se expondrá un PPT con los constructos matemáticos junto a recursos de GeoGebra validados por un experto y confeccionados de acuerdo al objetivo de aprendizaje relativo, una planificación, los elementos matemáticos descritos en anexos (1.) y un análisis didáctico.

Cabe señalar que las o los estudiantes estando de manera presencial, deberán entregar o enviar una autorización previa para poder participar en las sesiones de la secuencia motivacional de aprendizaje. De acuerdo a esto, se constata legalmente el registro audiovisual de la investigación bajo un documento de implementación obteniendo el derecho audiovisual autorizado previamente a la realización de la secuencia motivacional, bajo la ley de la Protección Integral de la Niñez y de la Adolescencia, de 2009. Estableciendo en su art.46, que "Se prohíbe, a través de cualquier medio, divulgar, exponer o utilizar la imagen de niñas, niños y adolescentes en contra de su voluntad y sin el conocimiento y aprobación de sus madres, padres, representantes o responsables”.

A continuación, se presenta el análisis y los recursos didácticos del eje de Geometría 3D, específicamente del objetivo de aprendizaje OA04, con la finalidad de entregar herramientas pedagógicas para una planificación de la secuencia motivacional a desarrollar, acorde con el currículo escolar chileno, y agregando los fundamentos para la elaboración de la guía para el grupo focal (e-focus group). Además, los instrumentos señalados: la solicitud de implementación, la guía de grupo focal, y la planificación, se encuentran en Anexos (2., 3., 4., respectivamente).

3.4.1 Análisis didáctico

NIVEL Y EJE	Nivel: 3º y 4º medio, Eje: Geometría 3D.
OBJETIVO DE APRENDIZAJE	**OA04**: Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.
PALABRAS (CONCEPTOS CLAVES)	Forma, área, volumen, figuras planas, plano tridimensional (3D), plano cartesiano (2D), rotación y traslación en el espacio.
INDICADORES DE EVALUACIÓN	• Resuelven problemas que involucran calcular área o volumen de figuras 3D generadas por traslación y rotación de figuras planas (2D). • Explican de forma visual los procedimientos para generar figuras 3D a partir de figuras 2D. • Identifican los elementos centrales de una figura 3D, que provienen de rotar o trasladar una figura 2D. • Discriminan entre diferentes figuras 2D que permiten generar determinadas figuras 3D.
PROCEDIMIENTO (Habilidad General)	Formular, verificar y evaluar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas en el espacio, mediante distintos tipos de representaciones, de forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

HABILIDADES ESPECÍFICAS	**h.** Evaluar diferentes representaciones, de acuerdo a su pertinencia con el problema por solucionar.
CONOCIMIENTOS PREVIOS	**6º Básico:** • MA06OA13: Demostrar que comprenden el concepto de área de una superficie en cubos y paralelepípedos, calculando el área de sus redes asociadas. •MA06OA18: Calcular la superficie de cubos y paralelepípedos expresando el resultado en cm^2 y m^2. • MA06OA19: Calcular el volumen de cubos y paralelepípedos, expresando el resultado en cm^3, $m^3\ y\ mm^3$. **7º Básico:** •MA07OA11: Mostrar que comprenden el círculo: Describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo. Estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo. Aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria. •MA07OA13: Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios. •MAOA14: Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica. **8º Básico:** •MA08OA11: Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros: Estimando de manera intuitiva el área de superficie y volumen. Desplegando la rede de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie aplicando las

	aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas y de la vida diaria. •MA08OA13: Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando: los vectores para la traslación. Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión. Los puntos del plano para las rotaciones.
ACTITUDES	• Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas. • Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
MATERIALES (Recursos)	<u>Recursos físicos</u>: Plumones (1 color rojo), 1 lápiz grafito, Transportador, Tijeras, Borrador, Pizarra, Notebook, Cámara Web (opcional), Proyector, Bolsa, 6 papeles, 1 clip o alfiler, Caja de fósforos, Papel flash, Bola y Cubo de esponja. <u>Recursos tecnológicos</u>: Internet, PPT, GeoGebra, Reuniones Online (Opcional), como; Meet, Zoom, Discord, Skype., entre otros.
CONTEXTO (Aplicación)	Contexto híbrido en el Liceo Sara Blinder Dargoltz, donde las y los estudiantes de 3° y 4° medio, del plan matemático, compartirán a través de la plataforma de Google Meet, una secuencia motivacional de enseñanza aprendizaje de Geometría 3D, utilizando la magia y el software educativo GeoGebra, para posteriormente compartir un grupo focal (e-focus group), donde será dirigido por un moderador.

Tabla 9: Análisis didáctico (Elaboración propia).

3.4.2 Recursos didácticos

Recursos	Clasificación	Función	Hipótesis de aprendizaje
1. Papel flash.	Instrumento para preparación previa de actividades.	Realizar el efecto mágico que genere la rotación.	Construir previamente el material necesario para producir la magia.
2. Bola de esponja.	Instrumento semiótico: concreto y manipulativo.	Generar una esfera mediante la transformación isométrica de rotación.	Reconocer y conjeturar propiedades, área, y volumen de la esfera.
3. Cubo de esponja.	Instrumento semiótico: concreto y manipulativo.	Generar un cubo mediante la transformación isométrica de traslación.	Reconocer y calcular concepto de volumen total como una suma de volúmenes de cuerpos 3D.
4. Power Point (PPT)	Instrumento semiótico: Icónico y textual.	Proyectar las diapositivas realizadas para la sesión de Geometría 3D.	Evidenciar pictóricamente a través de representaciones figural-icónicas, las distintas diapositivas de las sesiones.
5.GeoGebra	Instrumento semiótico: Geométrico y textual.	Mostrar la generación de los sólidos de revolución generados a través de la rotación y traslación de figuras 3D en el espacio. (cubo, paralelepípedo, prismas, cilindro, cono, troco de cono, esfera).	Visualizar a través de representaciones gráficas y manipulativas las distintas generaciones de cuerpos 3D por medio de rotaciones y traslaciones en el espacio.

Tabla 10: Recursos didácticos (Elaboración propia).

3.4.3 Grupo focal (E-focus group)

Un e-focus group es un tipo de grupo focal, y es un subconjunto de métodos de investigación online. Un moderador invita a compartir perspectivas, ideas, opiniones de las y los entrevistados calificados, quienes representan el interés del estudio (Barra y Quezada, 2009). Los e-focus group son apropiados para la investigación cualitativa, y donde los sujetos de estudios interactúan a través de un software virtual. Los autores señalan que al igual que en los grupos focales presenciales, la calidad del guion focal, y la capacidad de vincular los argumentos e ideas, con el análisis de los resultados, son fundamentales para el valor de la investigación.

Barra y Quezada (2009), indican que las y los participantes, son capaces de observar y dialogar con los demás sujetos en línea y comunicarse con el moderador durante el desarrollo de la sesión, pudiendo influir en la dirección del e-focus group. Asimismo, las y los encuestados no tienden a ser intimidados por la presencia de una grabadora de video o de un espejo unidireccional, por lo tanto, tienden a ser más objetivos y directos en sus argumentos. Los grupos focales son ideales para la comprensión de las necesidades, motivaciones y prejuicios de las y los sujetos de estudio. Además, en los e-focus group, se realizan ejercicios de pizarra y de habilidad para marcar conceptos u otros estímulos visuales (Barra & Quezada, 2009).

En este caso, es necesario mencionar, que se utiliza este tipo de grupo focal con el fin de interactuar paralelamente con las y los estudiantes de 3° y 4° medio, de manera virtual y presencial. De tal modo, que se entreguen las experiencias de las y los sujetos de acuerdo a la realización de la experiencia motivacional de aprendizaje mediante el recurso de la magia, donde, se den a conocer sus percepciones, ideas, y opiniones con respecto de este recurso motivacional.

La guía del e-focus group de la secuencia motivacional, fue diseñada según Barra y Quezada (2009) y Cóndor (2010). Este último autor, Cóndor (2010), indica la técnica del "*brainstorming*" o lluvia de ideas, donde en un grupo de trabajo se facilita el surgimiento de ideas sobre un tema, preguntas o problema determinado. Este método de lluvia de ideas, consiste básicamente en que todas y todos los participantes expongan sus ideas, siendo anotadas, luego comentadas, para finalmente llegar a conclusiones observando la revisión directa del diagrama confeccionado. De esta forma, profundizar en la investigación en un área determinada (Cóndor, 2010). En ese sentido, en la guía focal elaborada, en el punto 6., se utiliza esta técnica, con el fin de exponer un concepto o idea de la secuencia motivacional, con respecto al recurso de la magia.

3.5 Validez y confiabilidad

Para la validez y confiabilidad en la secuencia motivacional, se presentó un documento de validación propuesto que fue sometido a la validación de un experto, que en base a su experiencia y conocimientos otorgo un análisis de este. Dicho documento, presenta el objetivo general de la investigación, observaciones generales y registros observados de las actividades, la planificación y por último el cuadro de validación.

En este proceso participo un académico de la Universidad Católica Silva Henríquez (UCSH). La evaluación fue realizada mediante un cuadro de validación, donde el experto señala si se observan los registros semióticos en las actividades, y paralelamente, el marco COPISI, entregando observaciones si corresponde. La evaluación de validez de este documento se encuentra en los Anexos (6.).

CAPÍTULO 4: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

4.1 Trabajo de campo o recogida de información

Para la recolección de la información que se presentará a continuación, se atravesó por las fases descritas en el marco metodológico, éstas abarcaron la realización de clases de manera híbrida a través de la plataforma Google Meet. Además, en el grupo experimental de la sesión de enseñanza aprendizaje propuesta, junto al e-focus group, fueron en total 21 estudiantes, 10 de manera online y 11 de manera presencial.

Los e-focus group se limitan entre 8 - 10 participantes online (Barra & Quezada, 2009). Para esto, el día martes 30 de noviembre se realizó la solicitud de la implementación, para está poder realizarse el día viernes 3 de diciembre a las 9:00 hrs, en los primeros 3 bloques (45 minutos cada uno), en la sala del 3°A, del liceo Sara Blinder. Las etapas en la cual se efectuó la secuencia motivacional de enseñanza aprendizaje de Geometría 3D se dividieron en 3, las cuales, fueron las siguientes:

- Se da inicio a la sesión híbrida a través de Google Meet, donde las y los estudiantes de 3° y 4° medio ingresan por medio de un link previamente enviado. Donde se desarrollarán las sesiones (1 y 2), y de esa forma poder observan cómo se desarrollan las preguntas, actividades y reflexiones que se van generando a medida que va progresando la secuencia motivacional de enseñanza aprendizaje híbrida. De manera, que se pueda observar si en las y los estudiantes logra un impacto al utilizar la magia como recurso motivacional para la enseñanza del objetivo de aprendizaje OA04 de Geometría 3D.

- Luego se da comienzo al grupo focal (e-group) de acuerdo a los momentos a realizar, basado en una guía focal confeccionada previamente para el propósito de la sesión focal (3), donde el moderador (el investigador), dirigirá la sesión.

- Al finalizar con la primera y segunda etapa, se realizó una transcripción audiovisual (audio-texto y fotográfica), enfocada en la tercera sesión, que corresponde al e-focus group. Y posteriormente con los resultados obtenidos del análisis de la información, determinar las conclusiones respectivas.

4.2 Análisis de la información

En esta investigación bajo el diseño no experimental transversal, fueron analizados los sujetos que corresponden a las y los 21 estudiantes en total de 3° y 4° medio, distribuidos en modalidad híbrida. El análisis de la información, fue realizada en base al instrumento correspondiente a la guía del grupo focal (e-focus group), propuesta para la tercera sesión de la secuencia motivacional.

Estos resultados de transcripción audiovisual y de observación, estarán establecidos en una tabla que contenga el tipo de registro, contexto, sujetos de estudio, sala, fecha, hora, descripción, y análisis e interpretación de la sesión analizada de la secuencia motivacional. Esta tabla, está estructurada sobre la transcripción realizada de las experiencias y apreciaciones de las y los estudiantes de 3° y 4° medio, llevadas a cabo en la secuencia motivacional.

De esta forma, las distintas perspectivas fueron dialogadas y compartidas en el e-focus group por las y los estudiantes en la tercera sesión, mediante la guía focal y su correspondiente cronograma. Donde, en un comienzo, se presenta el moderador (investigador) explicando el motivo del grupo focal. Luego se presentan las y los estudiantes para comenzar la introducción, junto a las preguntas generales y predeterminadas propuestas. Finalmente, se concretó la lluvia de ideas, donde cada estudiante, ya sea, presencial u online, entrego un concepto o idea con respecto a la secuencia motivacional que se observan en la imagen 10. y 11. de los registros audiovisuales en anexos (5.).

A continuación, se presentará la tabla de la tercera sesión, con los resultados obtenidos de la transcripción del instrumento aplicado en el e-focus group. Enfocado en las respuestas de las y los estudiantes que dieron a las distintas preguntas de la guía para el grupo focal. En ella, se identifican a las y los estudiantes con el acrónimo: "E_i_O = Estudiante Online", "E_i_P = Estudiante Presencial", con "E_i" correspondiente a la o el estudiante que intervenga en sesión, E_i de E (i = 1,2,3……n).

Al término del análisis de la información, se procede con determinar las conclusiones correspondientes a la investigación, de acuerdo a la tabla elaborada en la tercera sesión.

4.3 Tabla tercera sesión

Registro de: Audio.		
Contexto: Contexto híbrido en el Liceo Sara Blinder Dargoltz, donde las y los estudiantes de 3° y 4° medio, del plan matemático, compartirán a través de la plataforma de Google Meet, una secuencia motivacional de enseñanza aprendizaje de Geometría 3D, utilizando la magia y el software educativo GeoGebra, para posteriormente compartir un grupo focal (e-focus group), donde será dirigido por un moderador.		
Sujetos de estudio: 21 estudiantes. 10 online y 11 presencial.		
Sala: 3°A.		
Fecha: 03-12-2021		
Hora	Descripción de la sesión:	Interpretación y análisis:
10:50	En la sesión de e-focus group, se realizó de manera virtual en Google Meet en la misma sesión donde se desarrolló la secuencia motivacional de la primera y segunda sesión. El moderador (investigador) señalo el motivo: "Analizar los resultados para poder responder a la pregunta de investigación:	En la sesión de grupo focal se llegó a concluir que las y los estudiantes pudieron aprender de una forma innovadora e interesante para ellas y ellos geometría en el espacio, utilizando la magia y la tecnología. Ya que, señalan que para aprender geometría ellas y ellos, necesitar de recursos físicos (reglas, compas, transportador) para aprender, y además algunos tecnológicos

	¿Cómo influye la magia en la activación del PEA de los aprendizajes relativos a la formulación y verificación de conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, de las y los estudiantes de 3° y 4° medio? Donde luego, el moderador mostro un cronograma de preguntas que serán respondidas en base a la secuencia motivacional de aprendizaje de Geometría 3D realizada. El moderador presenta a las y los estudiantes online con los presenciales, indicando que las y los estudiantes que están conectados vía online, puedan participar escribiendo en el chat y sus respuestas serán leídas si es que no quieren participar por voz (micrófono). El estudiante: E_8_P: *"Saluda a las y los compañeros online., (algunos muestran sus rostros)".* Las y los estudiantes respondieron lo siguiente de acuerdo a las preguntas generales y predeterminadas:	(Mencionan el GeoGebra). Sin embargo, existen dificultades en la identificación de las fórmulas, conceptos de ángulos y simbología, señalando que a veces se necesita ocupar mucho la memoria para aprenderlas. Por otra parte, en la pregunta general 2., se interpreta que las y los estudiantes necesitan conocer las aplicaciones y utilidad de la matemática, ya que no todas y todos los estudiantes de estudio, saben aplicar los conocimientos matemáticos obtenidos, para utilizarlos en la vida diaria, en aplicaciones matemáticas u otra área del conocimiento. Cabe señalar, que un estudiante menciona su deseo por estudiar ingeniería, implicando en el interés propio que conlleva el aprendizaje de la geometría y sus aplicaciones en la ciencia. Por esto, que la magia y la aplicación de diversos tipos de representaciones por medio de las TIC, las y los estudiantes visualizaron, interpretaron y explicaron los distintos constructos matemáticos de la geometría en el espacio, determinando conjeturas y resolviendo problemas aplicados a la vida cotidiana, en base al cálculo de área y volumen y generación de cuerpos 3D. Donde incluso, se

	Preguntas generales: 1. ¿Cuáles son sus mayores dificultades a la hora del aprendizaje de la geometría plana y del espacio?" E_3_O: *“Ninguna”.* E_2_P: *“Diferenciar que formula ocupar para un ejercicio”.* E_7_P: *“Lo complejo de los ejercicios, a veces me cuestan los ángulos”.* E_4_P: *“A mí no me dificulta tanto, tal vez me falta la motivación a hacerlo”.* E_{11}_P: *“Lo mismo que la compañera no sé cómo se podrían pensar las fórmulas”.* E_4_P: *“Son muchas formulas a veces”.* E_3_O: *“Las fórmulas”.* E_7_P: *“A veces me complica la simbología”.* E_4_P: *“Yo creo que hay muchas formas distintas y fórmulas que aprenderse a veces, entonces muchas veces es memoria”.*	comentó que si se podría repetir de nuevo la generación de la esfera en el GeoGebra. Por lo tanto, resultó muy llamativo visualizar los conceptos geométricos representados por medio de la magia y la tecnología. Argumentando que nunca lo habían visto antes en clases de matemáticas, y que en la secuencia motivacional fue una forma de representación innovadora para ellas y ellos. A su vez, las y los estudiantes señalan, que hoy en día por más que haya tecnología, la mayoría de sus clases siguen siendo desarrolladas de manera tradicional por la mayoría de sus profesores. Implicando así, la falta de motivación que la mayoría de las y los estudiantes carecen en el aula escolar. Por ende, es fundamental que se fomenten nuevas formas didácticas y motivacionales de aprender los conocimientos matemáticos. En este punto se menciona que mientras más herramientas tenga el docente en el aula de clases, para las y los estudiantes, el aprendizaje es más atractivo, ya que, las y los estudiantes, hacen hincapié que no todas y todos aprenden de la misma forma y con los mismos recursos disponibles.

	2. ¿Alguna vez han sentido que ya no necesitan estudiar más geometría para poder desarrollar sus habilidades matemáticas? E_5_P: *“No, pero en la vida real a veces no encuentro la utilidad de las matemáticas”.* E_1_P: *“Creo, que a veces nos cuesta ver para que sirven las cosas que aprendemos”.* E_6_P: *“No, pero no sabemos a veces como podemos aplicar a estos conocimientos”.* E_4_P: *“Es que yo quiero estudiar una ingeniería entonces creo que seguiré estudiando geometría más adelante, dudo que no lo necesite”.* 3. ¿Qué herramientas o recursos utilizan para el aprendizaje autónomo de la geometría? E_5_P: *“Reglas, compas, transportador”.* E_7_P: *“La aplicación que uso recién, GeoGebra”.* E_3_O: *“Los recursos cotidianos no más, tecnológicos casi nada”.* 4. ¿Cómo creen que influenciaron los tipos de representaciones	Las y los estudiantes comentaron que nunca habían visto magia en clases de matemáticas, señalando que solamente ven lo común (libros, guías, ppt). Aludiendo, que el uso de la magia como recurso motivacional en la experiencia concretada, hizo la secuencia más entretenida y fácil de captar la atención para el aprendizaje. Donde se reflejó en la pregunta predeterminada 2., cuando se preguntó cuáles fueron los momentos que más le llamaron la atención. Respondiendo enfáticamente a los efectos de magia realizados para la explicación, generación y retroalimentación de las actividades que involucran la esfera y el cubo. Asimismo, las y los estudiantes comentaron que la secuencia motivacional influenciada por la magia, aparte de ser innovadora, fue interesante, atractiva y llamativa. Infiriendo que este recurso motivacional repercute en la predisposición y motivación por el aprendizaje de la geometría espacial. También, se argumentó la forma novedosa de aprendizaje, y cómo este influyó en la atención de las y los estudiantes, ya que una estudiante menciona que todas sus compañeras incluida ella, pusieron atención en la secuencia

	vistos en cuanto al desarrollo de las actividades realizadas? E_4_P: *“Para entender mejor, porque uno siempre aprende de lo visual”* E_7_P: *“Mientras más representaciones de algo mejor”.* E_{11}_P: *“Bien porque todos aprendemos distintos y mientras más formas haya mucho mejor”.* E_3_P: *“Parece innovador e interesante el empleo de la magia en la geometría del espacio. ¿Podría explicar de nuevo el tema de la generación de la esfera?”* Moderador: La esfera se genera por un semicírculo (Se vuelve a mostrar el GeoGebra, utilizando además los deslizadores para poder determinar una mejor visualización) E_6_P: *“Usando la magia se hace más llamativo”.* 5. ¿Cuál es su opinión acerca de utilizar la magia junto a la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de la geometría 3D? E_3_P: *“Innovador, llamativo, no lo había visto, entretenido,*	motivacional. Donde, además, se agregó que todas y todos los estudiantes volverían a asistir a una clase de matemática donde se utilice la magia como recurso motivacional. Finalmente, con respecto a la lluvia de ideas de las y los estudiantes, se observaron e identificaron las siguientes palabras, ideas o concepto: Por una parte, las y los estudiantes presenciales escribieron: “emocionante, entretenido, sale de lo común, interesante, bacán, buenísimo, fantástico, divertido”. Repitiéndose mayormente las palabras “interesante y entretenido”. Por otra parte, las y los estudiantes online escribieron en el chat de Google Meet: “muy buena clase, interesante, entretenida, motivadora, diferente, motivante, divertida, innovadora, buena, sorprendente”. Repitiéndose la motivación y el interés que genero la secuencia motivacional. En conclusión, se manifiesto por parte de las y los estudiantes por medio de la lluvia de ideas, que el

	interesante como que a una le da más ganas de aprender". E$_6$_P: *"Interesante porque además se explican las cosas geométricas que hay".* Preguntas predeterminadas: 1. ¿Han tenido alguna vez alguna clase de matemáticas de cualquier eje como números, álgebra, estadística o geometría, que la o el docente utilice la magia como recurso didáctico? E$_3$_P: *"No, nunca, primera vez, no que yo recuerde, siempre libros, guías, ppt, lo más común, pero magia, no".* E$_3$_P: *"No, nunca, primera vez".* E$_9$_O: *"No profe".* 2. ¿Cuáles fueron el o los momentos que más les llamó la atención de la secuencia de enseñanza aprendizaje de la geometría 3D? E$_5$_P*: "Las bolas cuando las empujo y se transformó en un cubo".* E$_8$_P: *"Cuando genero la esfera con magia usando el papelito del semicírculo".*	uso de la magia como recurso motivacional, es un elemento innovador, motivador y atractivo para el aprendizaje de las y los estudiantes.

	E_3_P: *"El del cubo como finalidad de la actividad".* E_2_P: *"La magia que hizo para explicar".* 3. ¿De qué modo influyo en ustedes el uso de la magia para la enseñanza y desarrollo del aprendizaje de la geometría 3D? E_5_P: *"Innovador, llamativo, no lo había visto, entretenido, interesante como que a una le da más ganas de aprender".* E_3_P: *"Mientras más representaciones de algo mejor".* E_4_O: *"A mí me pareció como entretenido y además es más fácil para aprender".* E_2_P: *"Si profe, es más entretenido y fácil de prestar atención".* E_1_P: *"Pude ver de mejor forma como se desarrollan los problemas de geometría".* E_7_P: *"Llamó más mi atención".* 4. ¿Creen que, si todas y todos los docentes utilizaran alguna herramienta innovadora para el aprendizaje en las clases de matemáticas, los distintos	

	conceptos y temas tratados, sería más comprensibles y accesible para ustedes? E_8_P: *“Si, es una forma nueva de aprender, a mi antes me iba mal en matemáticas y una vez un profesor enseñó de una forma muy interesante, pero no usaba magia”.* E_5_P: *“Hoy en día casi todos los profes usan lo mismo de siempre, y por lo que aprendí hoy… Creo que utilizar cosas interesantes como la magia, ayuda más para entender”.* E_3_P: *“Si profe, por lo menos de parte mía, creo que utilizar cosas no cotidianas para aprender es mucho mejor”.* 5. ¿Volverían a asistir a una clase de matemática donde se utilice la magia como recurso didáctico para su enseñanza y aprendizaje? Todos/das E_P: *“(Sí)”.* E_3_P: *“Sí porque es interesante, aparte no todas aprendemos de la misma manera, y con magia me fue más llamativo, y ahora todas pusimos atención”.*	

	E_7_O: *“Si me pareció una forma muy novedosa de aprender geometría profe”.* E_4_P: *“No solamente a de geometría profe, a de estadística y álgebra también”.* E_2_P: *“Si porque además de que fue interesante me llamo la atención la forma entretenida de ver la geometría”.*	
11:43	Finalmente, antes de cerrar el grupo focal, se conforma una lluvia de ideas *(brainstorming)*, donde cada participante entrega solo un concepto, idea o palabra, de acuerdo a cómo fue su experiencia en la sesión motivacional.	

Tabla 11: Tabla tercera sesión (Elaboración propia).

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

El propósito de esta investigación fue la elaboración de una secuencia motivacional que permita el desarrollo del objetivo de aprendizaje de formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por la rotación o traslación de figuras planas en el espacio, utilizando la magia y el software educativo GeoGebra. Desde un enfoque de la teoría de las representaciones semióticas en un marco COPISI. Para responder a la pregunta de investigación planteada: ¿Cómo influye la magia en la activación del PEA de los aprendizajes relativos a la formulación y verificación de conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, de las y los estudiantes de 3° y 4° medio?

En términos generales, este propósito investigativo junto a los objetivos específicos planteados y el análisis realizado, se puede concluir, que el objetivo de aprendizaje propuesto se cumple de manera exitosa, ya que, se contó con la disposición de un centro educativo (Sara Blinder) para la realización de esta investigación, y la posibilidad de desarrollar una secuencia motivacional en tres sesiones de clases, utilizando el software educativo GeoGebra, junto a la magia como recurso motivacional.

En efecto, luego de analizar las percepciones de las y los estudiantes en la sesión de grupo focal (e-focus group), se puede determinar que los distintos registros semióticos utilizados, junto al recurso motivacional de la magia, influyen directamente en la predisposición de las y los estudiantes de 3° y 4° medio con respecto al aprendizaje de la geometría espacial. La magia constituye una forma de estimular las emociones positivas del estudiante a través de escenarios inmersivos que favorecen los procesos cognitivos. Las y los estudiantes manifestaron que el conocimiento matemático puede ser generado de forma lúdica, motivadora, e innovadora al observar la necesidad de representar las figuras sólidas o en 3D en el aula de clase a través de efectos de magia.

Esto, junto a la aplicación de las TIC en el aula, permite optimizar los procesos de enseñanza aprendizaje, a través de recursos lúdicos y didácticos que permitan acercar novedosamente a las y los estudiantes al conocimiento geométrico tridimensional de manera motivadora y significativa. Permitiendo abordar la enseñanza de la Geometría 3D, de manera creativa, donde los constructos matemáticos desarrollados se enriquecieron con reflexión, motivación y colaboración entre las y los estudiantes junto al docente. En consecuencia, considerando los tipos de motivaciones y los factores que la generan, es el docente quien mayormente influye en la motivación de las y los estudiantes de 3° y 4° medio. Donde, al proporcionarles herramientas innovadoras y motivacionales, induce a las y los estudiantes a generar emociones positivas en el aprendizaje y, por tanto, generar la motivación intrínseca. Asimismo, se observó que los efectos de magia presentados producen un buen ambiente en la sala de clases, lo que es conocido como motivación extrínseca. Por lo tanto, se promueven la activación de los aprendizajes a nivel individual y social entre los educandos. De esta forma al sentirse motivados y motivadas y partícipe de las actividades, permite que las y los estudiantes enfrenten desafíos en el desarrollo de sus competencias cognitivas

Frente a esto, la teoría de representación semiótica en un marco COPISI, junto a la magia, desarrollan la visualización espacial en la enseñanza de la geometría tridimensional, puesto que beneficia la motivación de competencia, por ende, la obtención de resultados descubiertos por las y los estudiantes, provocando que se involucran más en su aprendizaje matemático. En este caso, para permear los niveles de motivación del estudiante se requiere de algunas condiciones y acciones: conocer el tema tratado, retroalimentando conceptos de manera innovadora, instrumentar la participación, y creando discusiones a través de preguntas reflexivas. De esta manera, se puede disponer a que el estudiante se presente más activo y receptivo con el conocimiento que se le está brindando. Desde esta perspectiva, los niveles de motivación hacia la asimilación de conceptos, y a la participación, son mucho más significativos.

Cabe señalar que esta investigación, no pretendió formar estudiantes magos ni magas, sino utilizar la magia como un recurso motivacional, complementando el uso de la tecnología, y fomentar estas nuevas prácticas metodológicas de enseñanza motivacional. Considerando que actualmente se siguen desarrollando e incorporando nuevas técnicas didáctica y de tecnología para la enseñanza de las matemáticas.

Igualmente, existe una estrecha relación entre los efectos de magia y la geometría tridimensional, hasta el punto en el que los planteamientos de problemas dentro de un espacio tridimensional (EGD-3d), se pueden extrapolar e interpretar mediante la observación de efectos de magia. En consecuencia, es posible utilizar la magia en las clases de Geometría 3D; si bien es cierto que no debe abusarse de su uso. Si se emplean exclusivamente los efectos de magia como un recurso motivacional, en función de la motivación y la relación con conceptos de geometría espacial, resulta de gran impacto en las y los estudiantes, tanto en su propia atención como en su motivación.

Si bien la tecnología es fundamental para el aprendizaje de la geometría del espacio, el recurso motivacional de la magia, en su uso educativo, repercute considerablemente en la motivación, interés, atención, y participación de las y los estudiantes de 3° y 4° medio. De esta manera, se llegaron a las siguientes afirmaciones:

- La magia como recurso motivacional utilizada en la teoría de las representaciones semióticas en un marco COPISI, genera mayor interés y aproximación a los contenidos geométricos de las y los estudiantes de 3° y 4° medio, incluyendo el desarrollo de la habilidad de representar.

- Las y los estudiantes necesitan nuevas e innovadoras herramientas de aprendizaje, que estimulen los distintos tipos de motivación para los conocimientos que dicta el Mineduc en el programa de Geometría 3D.

- La magia al captar la atención y generar motivación, impacta en la habilidad de visualización espacial en las y los estudiantes, de manera que, a través de los efectos de magia en las actividades propuestas, se evidencio cómo esta influye en procesos de visualización y metacognición con respecto a las figuras 3D en el plano tridimensional.

Esta investigación se llevó a cabo en pandemia, esto influyó, que la participación de las y los estudiantes presenciales fuera en mayor grado que la online, como se ha observado durante la pandemia en los establecimientos escolares.

Además, como proyecciones para futuros estudios se podría plantear las preguntas ¿Cómo influye la magia en los otros objetivos de aprendizaje?, ¿Podría servir la magia como recurso didáctico en Álgebra o Estadística?, ¿Se podría llevar a cabo una unidad completa del Mineduc, utilizando la magia como herramienta motivadora?, Si la magia actúa como una herramienta motivacional, ¿Cómo influye la magia en relación al rendimiento académico?

Para finalizar, como investigador me pareció muy interesante poder trabajar la tecnología con el arte de la magia, donde, a pesar del contexto (Covid-19) y las limitaciones, se pudo generar una secuencia motivacional de enseñanza aprendizaje eficaz, llegando a determinar conclusiones en base a las distintas percepciones y perspectivas entregadas de las y los estudiantes de 3° y 4° medio.

Bibliografía

Alegría, P. (2011). Magia y Matemáticas de la Mano de Martin. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 76*, 19-29.

Andrade, M., & Montecino, A. (2011). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano.* Obtenido de researchgate: https://www.researchgate.net/publication/283684064_La_problematica_de_la_tridimensionalidad_y_su_representacion_en_el_plano

Barra, R., & Quezada, I. (2009). *Investigacion de mercados online.* Santiago de Chile. Obtenido de https://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/112464/Tesis%20IMOL.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Calderon, P. (2014). *Percepciones de los y las docentes del primer ciclo básico, sobre la implementación del método singapur en el colegio mario bertero cevasco de la comuna de isla de maipo.* Santiago, Chile. Obtenido de https://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/130579/Tesis%20Pedro%20Calderon%20Lorca.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Revista Colombiana de Educación*, 41-60. Obtenido de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-39162011000100003

Cano, D., & Gómez, A. (2014). *Ecología del concepto de volumen en una institución escolar: Una aproximación desde la TAD.* Santiago de Cali: Universidad del Valle. Obtenido de https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/9635/3487-0473436.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Carrillo, J., & Cortés, J. (2016). Secuencias didácticas con realidad virtual: En el área de geometría en educación básica. *Faro Fractal, 1*(23), 279-304. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5612412

Casassus, J. (2006). Aprendizajes, emociones y clima de aula. *Paulo Freire. Revista de Pedagogía Crítica*, 81-93. Obtenido de http://www.academia.cl/biblioteca/publicaciones/paulo_freire_06/081-095.pdf

Coll, C. (2010). Enseñar y aprender en el mundo actual: desafíos y encrucijadas. *Pensamiento Iberoamericano*, 47-66. Obtenido de http://congreso.dgire.unam.mx/2019/Ensenar-y-aprender-en-el-mundo-actual.pdf

Colomo, O. (2014). *Enseñanza de geo en 3° de ESO por cabri 3D como herramienta didáctica.* Pamplona: Universidad Internacional de la Rioja. Obtenido de https://reunir.unir.net/handle/123456789/2425

Cóndor, C. (2010). *Análisis de averías aplicado al quemador weishaupt n°1 de la empresa general motors de la ciudad de quito.* Riobamba. Obtenido de http://dspace.espoch.edu.ec/bitstream/123456789/1744/1/25T00128.pdf

CPEIP. (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemáticas.* Obtenido de estandaresdocentes.mineduc: https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2021/08/Matematica-Media.pdf

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentio. *Relime, Número Especial*, 177-195. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2161582.pdf

D'Amore, B., Pinilla, M., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 177-212. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v18n2/v18n2a3.pdf

DEMRE. (2021). *Informe de resultados 2021.* Obtenido de https://demre.cl/estadisticas/documentos/informes/2021-informe-resultados-admision-2021.pdf

Diaz, L., Rodríguez, J., & Lingan, S. (2018). Enseñanza de la geometría con el software GeoGebra en estudiantes secundarios de una institución educativa en Lima. *Propósitos y representaciones*, 217-251. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6725714

Durán, P. (2015). *Percepciones de la asignatura de matemáticas en estudiantes de enseñanza media en dos liceos de la comuna de Chillan.* Chillan. Obtenido de http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1173/1/Duran_Quijon_Patricio.pdf

Farias, D., & Pérez, J. (2010). Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas y la. *Formación Universitaria*, 33-40. Obtenido de https://scielo.conicyt.cl/pdf/formuniv/v3n6/art05.pdf

Fernández, C. (2017). *Matemáticas a través de la magia.* Obtenido de https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/13145?show=full

Fernández, R., & Lahiguera, F. (2015). Matemagia y su influencia en la actitud hacia las matemáticas en la escuela rural. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 89*, 33-53.

Ferre, M. (2014). *Estudio sobre la motivación y su relación en el rendimiento académico.* Obtenido de http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/3064/Trabajo.pdf?sequence=1

Gamboa, R., & Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 113-136. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/21235/

Gardner, H. (1983). *La Teoría de las Inteligencias Múltiples.* Nueva York: Basic Books, división de Harper Collins Publisher Inc.

Godino, J. (2004). *Didáctia de las matemáticas para maestros.* Granada: GAMI, S. L. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/

Gros, B. (2002). Constructivismo y diseños de entorno virtuales de aprendizaje. *Revista de Educación*, 225-247. Obtenido de https://www.educacionyfp.gob.es/revista-de-educacion/numeros-revista-educacion/numeros-anteriores/2002/re328/re328-13.html

Gutiérrez, Á. (2014). Los entornos de geometría dinámica 3d y la enseñanza de la geometría espacial. Claros y sombras. 11-21. Obtenido de uv: https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut14.pdf

Londoño, C., & Prada, B. (2011). Lecciones epistemológicas de la historia de la geometría. *Cartas sobre la Educación Infantil*, 183-211. Obtenido de https://www.semanticscholar.org/paper/Lecciones-epistemol%C3%B3gicas-de-la-historia-de-la-Ramos-M%C3%A1rquez/e0c7ebb13af46bc6496266e584da40eff0be97b3

Martínez, O. (2005). Dominio Afectivo en educación matemática. *Paradigma, XXIV*, 7-34. Obtenido de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512005000200002

Martínez, O. (2007). Matemágica: Un mundo de posibilidades. *Educere, 11*(37), 223-232. Obtenido de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35603707

Mineduc. (2008). *Marco para la buena enseñanza.* Obtenido de docentemas: https://www.docentemas.cl/docs/MBE2008.pdf

Mineduc. (2016). *Habilidad de representar.* Obtenido de media.mineduc: https://media.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/28/2016/09/1-Habilidad-de-representar-web.pdf

Mineduc. (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° medio.* Obtenido de Curriculum Nacional: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf

Mineduc. (2019). *Fundamentos Bases Curriculares 3° y 4° medio.* Obtenido de curriculumnacional: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-244031_recurso_pdf.pdf

Mineduc. (2021). *Programa de Estudio Geometría 3D de 3° y 4° medio Formación Diferenciada.* Obtenido de curriculumnacional:

https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140147_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

Ovalle, S., & Vásquez, J. (2020). Realidad aumentada, una herramienta para la motivación en el aprendizaje de la geometría. *Revista Conrado*, 56-60. Obtenido de http://scielo.sld.cu/pdf/rc/v16n75/1990-8644-rc-16-75-56.pdf

Pardo, A. (2018). *Desafíos de la Gestión de Aula.* Obtenido de valoras.uc: http://valoras.uc.cl/images/centro-recursos/docentes/RolDocente/Fichas/Desafios-de-la-Gestion-de-Aula-2018.pdf

Rodríguez, D. (2003). *La teoría de los signos de Charles Sanders Peirce: Semiótica filosófica.* Buenos Aires. Obtenido de https://www.unav.es/gep/TesisDoctorales/TesisMRodriguez.pdf

Ruiz, X. (2013). *Educando con Magia: El ilusionismo como recurso didáctico.* Madrid: NARCEA, S. A.

Sampieri, R. (2014). *Metodología de la Investigación.* Santa Fe: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Sánchez, J., Páez, M., Narváez, M., & Maiza, L. (2017). Un portal de magia con la matemática, comprensión de textos. *Revista de Comunicación de la SEECI, 43*, 1-14. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6073589

Suárez, W., & León, O. (2016). El aprendizaje de la visualización espacial en niños y en niñas. *Revista Horizontes Pedagógicos, 18*(2), 110-119. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5896173.pdf

Tamayo, Ó. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, 39-47. Obtenido de https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/download/6085/5491/0

Tovar, E., & Mayorga, L. (2015). Errores en el aprendizaje de figuras y cuerpos geométricos en Educación Media General. *Revista ciencias de la educación*, 174-186. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7471139

UNESCO. (2008). *Educación de calidad, equidad y desarrollo sostenible.* Obtenido de academicosxlaeducacion: https://academicosxlaeducacion.files.wordpress.com/2012/03/educacion-de-calidad-equidad-sostenible.pdf

Villamil, D., & Bermúdez, E. O. (2017). Análisis de contenido del concepto de área en educación superior. *Rev.Investing.Desarro.Innov*, 265-278. Obtenido de http://www.scielo.org.co/pdf/ridi/v8n2/2027-8306-ridi-8-02-00265.pdf

ANEXOS

1. Elementos Matemáticos

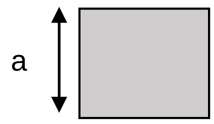
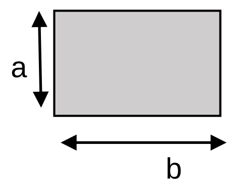
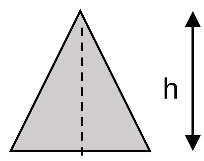
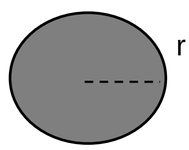
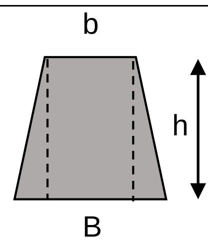
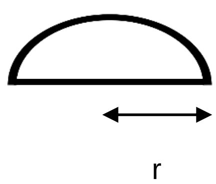
Nivel y eje	Nivel: 3º y 4º medio, Eje: Geometría 3D.
OBJETIVO DE APRENDIZAJE	**OA04**: Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.
PALABRAS (CONCEPTOS CLAVES)	Forma, área, volumen, sólidos de revolución, rotación y traslación en el espacio.
DEFINICIONES	**1. Forma:** La palabra forma, posee variados significados y connotaciones dependiendo del contexto y situación en que se emplee el término. La forma es el estudio de figuras rígidas, sus propiedades y su relación entre una y otra; asimismo, se encuentran las figuras planas en 2D y las figuras espaciales en 3D (Lugo, 2013). Surge dentro de la geometría como la necesidad de explicar y establecer propiedades para los objetos que nos rodean. Gerstner (1988), definió a la forma geométricamente como el objeto de estudio de la geometría, es un aspecto que representa la naturaleza, tiene un tamaño y además puede contar con varias dimensiones. Asimismo, para Muñan (1985) las formas son de dos tipos, las geométricas que son aquéllas propias de la geometría y las orgánicas, que se encuentran en la naturaleza. Por otro lado, Ching (1996) define a los perfiles básicos de la forma señalando que mientras más simple y regular sea una forma, será más fácil de percibir y comprender, por ejemplo, el círculo, triángulo y el cuadrado. Éstos últimos los define respectivamente como: a) Al círculo como un conjunto de puntos dispuestos y equilibrados por igual en torno a otro punto.

	b) Al triángulo como una figura plana de tres lados y tres ángulos c) Al cuadrado como la figura plana de cuatro lados iguales y cuatro ángulos. Además, Ching (1996) agrega que las formas geométricas se clasifican por su presentación en: • Formas regulares: Aquellos cuyas partes están relacionadas entre sí en una manera coherente y ordenada: esfera, círculo, cubo, cono y pirámide, esto quiere decir que sus partes se relacionan entre sí según una relación de orden. • Formas irregulares: Aquellas cuyas partes son diferentes en naturaleza y se relacionan con unos y otros de forma incoherente. Por lo general, son asimétricos y más dinámicos que la forma regular, esto es por la desigualdad de sus partes en cuanto a características y relaciones, son asimétricas y ordenadas. **2. Área:** Apostol (1984), presenta el concepto de área como una función de un conjunto, es decir, cuando asignamos un área a una región plana, asociamos un número a un conjunto "S" del plano. Esto significa, que se tiene una función "a" (función área) que asigna un número real a(S) (el área de S) a cada conjunto S de una cierta colección de conjuntos dada. Una función de esta naturaleza, cuyo dominio es una colección de conjuntos y cuyos valores son números reales, se llama función de conjunto. Supongamos que existe una clase M Del conjunto del plano medible y una función de conjunto a, cuyo dominio es M con las siguientes propiedades:

	a) Propiedad de no negatividad. Para cada conjunto S de M, se tiene $a(S) \geq 0$. b) Propiedad aditiva. Si S y T pertenecen a M, también pertenecen a $M, S \cup T$ y $S \cap T$, se tiene: $$a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$$ c) Propiedad de la diferencia. Si S y T pertenecen a M, siendo $S \subseteq T$, entonces $T - S$ está en M, y se tiene: $$a(T - S) = a(T) - a(S)$$ d) Invariancia por congruencia. Si un conjunto S pertenece a M, y T es congruente a S, también T pertenece a M, por lo tanto, $a(S) = a(T)$ e) Elección de escala. Todo rectángulo R pertenece a M. Si los lados de R tienen longitudes h y k, entonces: $a(R) = hk$ f) Propiedad de exhaución. Sea Q, un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T, de modo que: $S \subseteq Q \subseteq T$. Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades $a(S) \leq c \leq a(T)$, para todas las regiones escalonadas S y T que satisfagan lo anterior. Entonces Q es medible y $a(Q) = c$.

	El método que plantea Apostol (1984), busca definir las propiedades del área como axiomas, de esta manera, cualquier conjunto que satisfaga los axiomas a), b), c), d), e), y f) se llamará función de área. Por otro lado, la definición geométrica del área, a pesar del carácter riguroso que se le adjudica a la matemática de la antigua Grecia, las magnitudes tales como el área no eran expresadas mediante un valor numérico, mucho menos se trataba con unidades de medida, por lo tanto, el objeto matemático del área fue estudiado por los antiguos griegos bajo la certeza que ofrece la geometría y las representaciones estrictas de las figuras, mas no tuvieron como propósito formular una definición del área para enfrentarse a los problemas de la cuadratura. De acuerdo a Corberán (1996) los procedimientos geométricos más frecuentes se realizan por la comparación directa o indirecta de las superficies. Estos procedimientos proponen actividades que involucran la superposición o un recorte a "trozos" de una o de las dos superficies con el fin de establecer una comparación del área considerada como el "espacio ocupado por una región". Respecto a los procedimientos geométricos, Corberán (1996), argumenta que facilitan la conservación del área de una superficie y en consecuencia propician un estudio comprensivo de las propiedades del área. Larson, Hostetler y Edwards, definen el cálculo de regiones poligonales a partir del método de exhaución de Arquímedes como un proceso de límite en el que el área se encierra en polígonos, unos inscritos y otros circunscritos a la región en cuestión. En Stein (1984), se define al área como "la integral definida de las longitudes de las secciones". En Larson (1995), sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ En Leithold (1998), si f es función continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$

puede interpretarse geométricamente como la medida del área de R. Los matemáticos han trabajado estas ideas y han formulado la superficie o el área de las siguientes figuras planas que se observan en la siguiente tabla (Cano & Ruco 2014).

Figura Plana	Representación	Área Total
Cuadrado		$Á = a^2$
Rectángulo		$Á = a \times b$
Triángulo		$Á = \frac{b \times h}{2}$
Círculo		$Á = \pi r^2$
Trapecio		$Á = \frac{B + b}{2} \times h$
Semicírculo		$Á = \frac{\pi r^2}{2}$

Fuente: Ecología del concepto de volumen (Cano & Ruco, 2014).

3. Volumen:

La razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo fue un tema que suscitó interés en la Antigüedad. En torno a 2000 a.C. los babilonios hicieron la observación de que la circunferencia tenía aproximadamente una longitud de 3 veces su diámetro. Fue Arquímedes de Siracusa quien realmente inició la teoría matemática de π, en torno a 225 a.C. (Crilly, 2011).

Arquímedes (250, a.C.) utiliza el método mecánico donde involucra el peso y el centro de gravedad, para el cálculo del volumen de un cuerpo X, él, utiliza otros dos cuerpos B y C tal que, se conocen sus volúmenes y de B se conoce su centro de gravedad. Arquímedes calcula un volumen desconocido en términos del volumen de otros cuerpos conocidos, permitiéndole encontrar áreas y volúmenes de figuras más complejas que las pensadas por Eudoxo (409-356 a.C.).

Desde un punto de vista dinámico que asume el concepto de volumen como un proceso en constante cambio, donde las fórmulas no son estáticas, sino que adquieren un carácter funcional (es decir, relacionado con el concepto de función cubica) donde las variables independientes y dependientes explicitan el movimiento a medida que se manipulan sus valores numéricos y los parámetros.

La definición del volumen por medio de la axiomática establece relaciones para calcular el volumen de objetos tridimensionales mediante el uso de cuerpos geométricos y poliedros conocidos y el fortalecimiento y enriquecimiento de las definiciones y relaciones del volumen con la física (Cano & Ruco 2014).

La definición de volumen por medio de la axiomática de Sáiz (2002):

Sea M un conjunto de subconjuntos de R^3.
Sea v una función real definida sobre M tal que:

	a) La función v es no negativa. Esto es, si $P < M,$ entonces $v(P)$ es mayor o igual que cero. b) La función v es aditiva. Esto es, si $P\ y\ Q \in M$ y no tienen ningún punto interior común, entonces: $P \cup Q \in M$ y v ((P ∪ Q))= $v(P) + v(Q)$. c) La función v es invariante bajo traslaciones (desplazamientos paralelos). Esto es, si $P \in M$ y P' es la imagen de P al aplicarle una traslación, entonces: $P' \in M\ y\ v(P) = v(P')$. d) La función v es normalizada. Es decir, el cubo unidad $Q \in M$ y $v(Q) = 1$. Una función con las propiedades descritas en a), b), c) y d) se define su volumen. Del olmo y et ál. (1993) mencionan que el volumen es considerado como el espacio ocupado o reclamado y la capacidad como el espacio vacío o creado con posibilidad de ser llenado. Además, aducen, “que la capacidad puede ser vista desde el punto de vista como espacio creado (espacio vacío) y el volumen como espacio reclamado (espacio ocupado)”. El volumen se relaciona con la capacidad, esta es una magnitud, y es una propiedad medible que tienen ciertos cuerpos. La capacidad se refiere a la cantidad del espacio que hay en el interior de un recipiente. De esta manera la forma de algunos recipientes les permite contener líquidos o sustancias, de estos

se puede medir su capacidad y su volumen, también se puede determinar el volumen del contenido.

Asimismo, con lo relacionado al volumen como espacio ocupado, Piaget, Inhelder y Szeminska (1970) hacen referencia a la cantidad de espacio ocupado por las unidades que conforman un cuerpo en su totalidad, en relación con otros objetos a su alrededor.

De esta manera, el espacio ocupado es aquel que ya no puede ser usado por otro objeto. Por ejemplo, si tenemos un balde vacío, este posee un volumen, ya que este ocupa un lugar en el espacio, se puede medir también su capacidad y el volumen del líquido vertido en él. Pero existen cuerpos a los cuales se les puede medir su volumen, pero no se les puede determinar su capacidad, es el caso de una piedra (Cano & Ruco 2014).

A partir de lo anterior se puede decir que; la capacidad es una propiedad que tienen ciertos cuerpos de poder contener cierta cantidad de alguna cosa hasta un límite determinado. Diferentes significados de capacidad pueden formar parte del campo semántico personal del concepto volumen en un individuo (Sáiz, 2002).

Desde el punto de vista de la Real Académica Española el volumen se define como el "espacio ocupado por un cuerpo; Magnitud física que expresa la extensión de un cuerpo en tres dimensiones, largo, ancho y alto, y cuya unidad en el sistema internacional es el metro cúbico (m^3)".

En la época de Newton (1642-1727) y de Leibniz (1646-1716) quienes son considerados los inventores del cálculo el cual se fundamenta en la derivada y la integral, estando ligados a problemas de obtención de longitudes de arco, áreas de regiones en superficies y volúmenes de cuerpos. De tal manera que con la integración es posible calcular el volumen de un cuerpo que este acotado por dos superficies y así obtener el volumen de un sólido

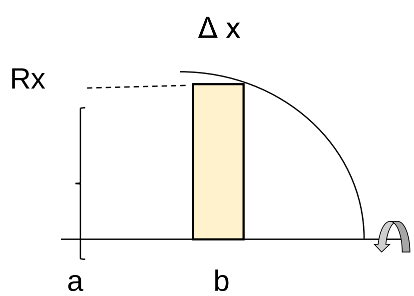
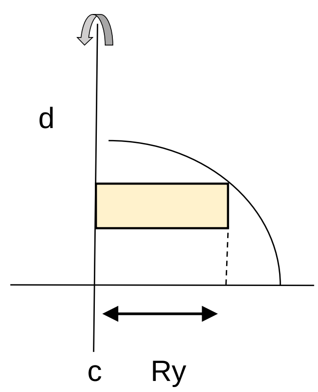
	de revolución. La siguiente definición de volumen de Marsden y Tromba, (1991): Sea D una región en el plano, y R un rectángulo que contiene a D, entonces: $f = R \rightarrow R$ continua y, f^* la función tal que: $f^*(x,y) = f(x,y), si\ (x,y) \in \mathrm{D}$ y $f^*(x,y) = 0\ si\ x \notin D$ Defínase: $\int_D f(x,y)\, dA = \int_D f^*(x,y)\, dA$ Con esta definición, si $\mathrm{f(x,y)} \geq 0$ en D, el valor de la integral corresponde al volumen de la región tridimensional entre la gráfica de f y D. **4. Sólidos de revolución:** Los sólidos de revolución son figuras tridimensionales que se forman al hacer girar una superficie plana alrededor de un eje. Algunos cuerpos generados, como el cilindro, el cono y la esfera, presentan un determinado volumen específico, los cuales se pueden calcular utilizando el cálculo integral y el método de los discos (Guerrero & Romero, 2015). El método de los discos, consiste en observar el volumen de un disco para encontrar el volumen de un sólido general de revolución formado al girar la región plana alrededor del eje indicado. Para determinar el volumen de este sólido, se considera un rectángulo representativo en la región plana. Cuando este rectángulo gira alrededor del eje de revolución, genera un disco representativo cuyo volumen es: $\Delta \mathrm{V} = \pi \times \mathrm{R}^2\, \Delta \mathrm{x}$

Aproximando el volumen del sólido por el de los "n" discos de anchura Δ x, produce:

Volumen del sólido $\approx \sum_{i=1}^{n} \pi[\,R(xi)]^2\,\Delta\,\mathrm{x}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \pi[\,R(xi)]^2\,\Delta\,\mathrm{x}.$$

En Larson (2010), para encontrar un sólido de revolución con el método de los discos, se señalan las siguientes fórmulas según el eje de revolución.

<u>Eje de revolución horizontal</u>	<u>Eje de revolución vertical</u>
$Volumen = \pi \int_a^b [R(x)^2 dx$	$Volumen = \pi \int_c^d [R(y)^2 dy$
	

Fuente: Cálculo de una variable (Larson, 2010).

Los sólidos de revolución son figuras tridimensionales que se forman al hacer girar una superficie plana alrededor de un eje. Algunos cuerpos generados, como el cilindro, el cono y la esfera, estos presentan un determinado volumen específico, los cuales se pueden calcular utilizando el cálculo integral.

Wentwort, Jorge y Smith (2003) definen los siguientes cuerpos generados por sólidos de revolución:

a) <u>Cubo o Hexaedro</u>: Llámese cubo o hexaedro un paralelepípedo cuyas caras y bases son cuadradas. Las caras y bases del cubo se originan por la unión de aristas adyacentes las cuales concurren en diferentes puntos llamados vértices. Cada una de estas caras cúbicas tienen su respectivo nombre: cara superior, cara inferior, cara lateral derecha, cara lateral izquierda, cara frontal y finalmente tenemos la cara posterior.

b) Prisma: Llámese prisma a un poliedro en el cual dos de sus caras son polígonos iguales situados en planos paralelos y cuyas otras caras son paralelogramos. El número de caras en forma de paralelogramo dependerá del número de lados que tenga el polígono de las bases y dependiendo de esto el prisma recibirá un nombre específico (prisma; triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, heptagonal, octagonal, etc.)

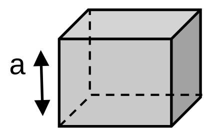
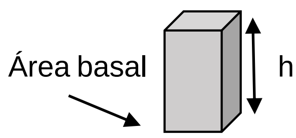
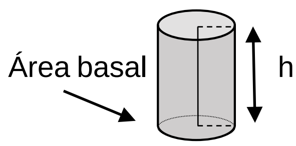
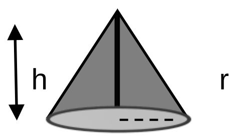
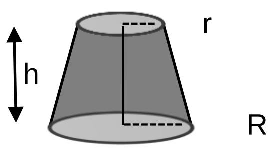
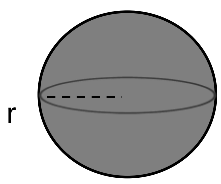
c) Cilindro: Llámese cilindro a un sólido limitado por una superficie cilíndrica y dos superficies planas paralelas.

d) Cono: Llámese cono a todo sólido limitado por una superficie cónica y por un plano que corta todas las generatrices. La superficie cónica se llama superficie lateral del cono, su vértice se denomina vértice del cono; la base es la superficie plana y las generatrices del cono son las de la superficie cónica que la limita. La altura del cono viene dada por la recta que une el centro del círculo con el vértice.

e) Tronco de Cono: Llámese cono truncado o tronco de cono la parte de un cono comprendida entre la base y una sección paralela a la base. La sección y la base del cono se llaman bases del tronco.

f) Esfera: Llámese esfera un sólido limitado por una superficie cuyos puntos equidistan de un punto interior. Este punto se llama centro, la superficie se llama superficie esférica. La mitad de una esfera se llama hemisferio o semiesfera.

Cano y Ruco (2014) dan con una visión del volumen desde un punto de vista estático que asume este concepto como el resultado de la aplicación de un algoritmo muy puntual materializado normalmente en fórmulas, como se presenta en la siguiente tabla (para cuerpos geométricos y poliedros regulares), el uso de integrales y derivadas como procedimientos mecánicos, el trabajo en dos dimensiones R^2 dejando a un lado R^3 Y R^n y el cálculo de magnitudes físicas como medio de enseñanza para este concepto.

Cuerpo Geométrico	Representación	Volumen
Cubo o Hexaedro		V = a^3
Prisma		V = Área basal × h
Cilindro		$V = \pi r^2 h$
Cono		$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Tronco de Cono (Garófalo)		$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + R^2 + rR)$
Esfera		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Fuente: Ecología del concepto de volumen (Cano & Ruco, 2014).

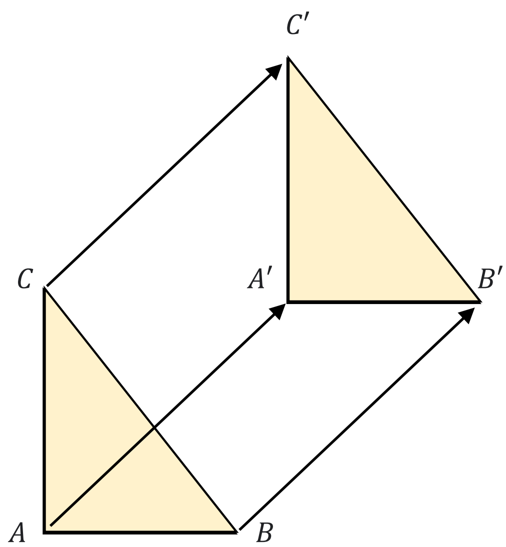
	5. Transformaciones Isométricas. Podemos evidenciar históricamente que la geometría es estudiada a través de la aritmética del espacio, en la que tuvo lugar el pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en Rn, la cual, considera los sistemas matemáticos a partir de relaciones numéricas. Por su parte, el arquitecto e ingeniero francés Girard Desargues (1591-1661), fue un precursor de la idea de transformación en geometría y de la utilización de propiedades invariantes. Sus trabajos se inscriben particularmente en el marco de la teoría de las cónicas. Pascal (1623-1662), siguiendo a Desargues, retoma los métodos proyectivos de este último para redactar su tratado de las cónicas. Como Desargues, Pascal continúa expresando las cónicas como imagen de la circunferencia del círculo estableciendo de nuevo el lazo con la perspectiva (Ruco, 2013). En este período histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, pero quedan en el contexto de las cónicas, y no son consideradas como objetos de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prima la noción de invariante. En el siglo XVII se introduce el "método de las coordenadas" acuñado paralelamente por Fermat (1601-1665) y por Descartes (1596-1650), gracias a ello las propiedades de las transformaciones pasan a ser demostrables algebraicamente y el trabajo de las figuras puede desarrollarse desde las coordenadas de sus puntos. Stone (1961), afirma que los griegos eran conscientes de realizar ciertas operaciones y tratan de resolver problemas algebraicos desde la geometría. La carencia de técnicas algebraicas sencillas y la falta de nivel de abstracción desaparecen con la aparición de

	la geometría cartesiana en el siglo XVII. Las transformaciones isométricas dejan de ser objetos matemáticos implícitos e inician a ser reconocidas y estudiadas bajo el concepto de funciones biyectivas, de donde podemos comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde de la siguiente forma. Sea E una recta del plano cartesiano. Definamos la función: $E\colon\ R^2 \rightarrow R^2$ De tal manera que $SE(x, y)$ es el punto del plano que satisface: a) $SE(x, y)$ está en la recta perpendicular a E que pasa por (x, y) b) Si M es el punto de corte de E con la recta perpendicular a E que pasa por (x, y), entonces: La distancia de (x, y) a M, es igual a la distancia de M a $SE(x, y)$. Sean E y L dos rectas del plano cartesiano. Se define la función compuesta: $SE \text{ o } SL(x, y)$ Una transformación del plano se dice que es isométrica si y sólo si la distancia entre cualquier par de puntos y es la misma que la distancia entre sus imágenes en dicha transformación (Montoya & Trejo, 2012). Entonces, $PQ = P'Q'$, para todo par de puntos P y Q Una función $f\colon Rn \rightarrow Rn$ es una isometría si preserva distancia. Si para todo par $(x, y) \in Rn$ se cumple $d(x, y) = d[f(x), f(y)]$. Las transformaciones en el plano euclidiano son: traslaciones, rotaciones y simetrías. Así como en el espacio 2D, en el espacio

tridimensional la traslación se define a partir de un vector, ahora con 3 componentes. Para un cuerpo clásico (y, por tanto, moviéndose en un espacio euclídeo), una traslación es la operación que modifica las posiciones de todos los cuerpos según la fórmula:

$$(x, y, z) \rightarrow (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

Donde (Δx, Δy, Δz) es un vector constante, donde dicha operación puede ser generalizada a otras coordenadas. Una traslación matemática es una isometría del espacio euclídeo.



Por otra parte, las rotaciones son transformaciones lineales que conservan las normas en espacios vectoriales en los que se ha definido una operación de producto interior. La matriz de transformación tiene la propiedad de ser una matriz unitaria, es decir, es ortogonal y su determinante es 1.

La rotación es un movimiento que consiste en girar en un ángulo determinado todos los puntos de una figura en torno a un punto llamado centro de rotación.

Sea un vector A en el plano cartesiano definido por sus componentes x e y, descrito vectorialmente a través de sus componentes:

$$A = \begin{pmatrix} Ax \\ Ay \end{pmatrix}$$

La operación de rotación del punto señalado por este vector alrededor de un eje de giro puede siempre escribirse como la acción de un operador lineal (representado por una matriz) actuando sobre el vector (multiplicando al vector). En dos dimensiones la matriz de rotación para el vector dado puede escribirse de la manera siguiente:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Al hacer la aplicación del operador, es decir, al multiplicar la matriz por el vector, obtendremos un nuevo vector A' que ha sido rotado en un ángulo θ en sentido horario: $RA = A'$, ósea:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax \\ Ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'x \\ A'y \end{pmatrix}$$

Donde:

$$A'x = (Ax)\ cos(\theta) + (\mathrm{Ay})\ \sin(\theta)$$
$$A'y = -(Ax)\ sen(\theta) + (\mathrm{Ay})\ \sin(\theta)$$

Son las componentes del nuevo vector después de ser rotado.

Ahora bien, las rotaciones en el espacio tridimensional al igual que en dos dimensiones, se utiliza una matriz para aplicar una rotación de un punto (x, y, z) y determinar sus nuevas coordenadas (x', y', z'). La matriz utilizada es una matriz de 3×3.

$$A \ = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Multiplicando la matriz por un vector que representa el punto, se obtiene el resultado:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

El conjunto de todas las matrices propias junto con la operación de multiplicación de matrices forma el grupo de rotación $SO(3)$. La matriz A es un miembro del grupo ortogonal tridimensional $SO(3)$, es decir, se trata de una matriz ortogonal con determinante uno.

Fig 1.

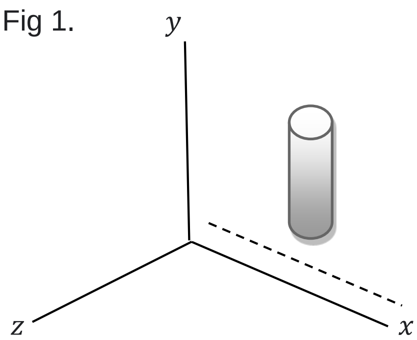


Fig 2.

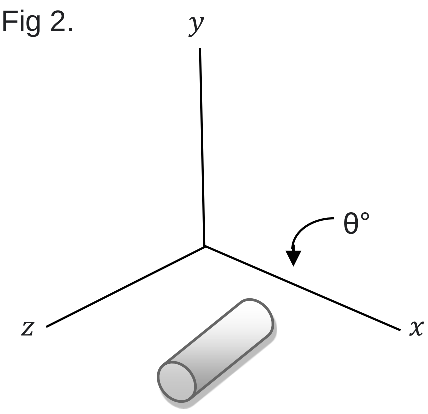


Fig 1. Rotación con respecto al eje x. Fig 2. Rotación de cilindro en ángulo θ.

Las transformaciones isométricas producen cambios de posición de una figura o cuerpo determinado que no alteran o cambia la forma ni el tamaño de ésta. La palabra isometría tiene origen griego: "*iso*", que significa igual, y "*metría*", que significa medida. Por lo tanto, estas distintas transformaciones son realizadas a figuras y cuerpos sin llegar a variar en sus medidas. Etimológicamente, las transformaciones isométricas pueden ser traducidas como "transformaciones de igual medida".

</td>
</tr>
</table>

Tabla 12: Elementos matemáticos (Elaboración propia).

2. Solicitud Implementación

Santiago, 30 de noviembre del 2021.

Solicitud de implementación del instrumento de evaluación para estudiantes de 3ro y 4to medio.

Estimado apoderado/da:

Le solicito a usted la autorización de poder implementar el siguiente test, el día viernes 3 de diciembre, el cual tiene por objetivo “Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio”, utilizando la magia y software educativo.

Para luego compartir un grupo focal donde se entregan las percepciones y opiniones de las estudiantes al respecto de la sesión (modalidad híbrida). Además, la autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente de la estudiante otorga el derecho audiovisual que será utilizado con fines pedagógicos de la investigación.

Este objetivo está basado en la tesis: “La magia como herramienta motivadora para la enseñanza de Geometría 3D en estudiantes de 3° y 4° medio, un estudio exploratorio”.

Desde ya, muy agradecido por su colaboración.
Se despide Danko Pavlovic, profesor practicante de matemáticas.

____

Firma Apoderado/da

3. Guía de Grupo Focal

Cronograma:

1. Presentación del moderador.
2. Explicar el motivo del grupo focal.
3. Presentación de las y los estudiantes de 3° y 4° medio (presencial y online).
4. Explicación introductoria para la sesión grupal.
5. Preguntas generales y predeterminadas.
6. Crear una lluvia de ideas, o *brainstorming*, donde cada participante entrega solo un concepto o palabra, de acuerdo a cómo fue su experiencia en la sesión de enseñanza aprendizaje.

Preguntas generales:

1. ¿Cuáles son sus mayores dificultades a la hora del aprendizaje de la geometría plana y del espacio?

2. ¿Alguna vez han sentido que ya no necesitan estudiar más geometría para poder desarrollar sus habilidades matemáticas?

3. ¿Qué herramientas o recursos utilizan para el aprendizaje autónomo de la geometría?

4. ¿Cómo creen que influenciaron los tipos de representaciones vistos en cuanto al desarrollo de las actividades realizadas?

5. ¿Cuál es su opinión acerca de utilizar la magia junto a la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de la geometría 3D?

Preguntas predeterminadas:

1. ¿Han tenido alguna vez alguna clase de matemáticas de cualquier eje como números, álgebra, estadística o geometría, que la o el docente utilice la magia como recurso didáctico?

2. ¿Cuáles fueron el o los momentos que más les llamó la atención de la secuencia de enseñanza aprendizaje de la geometría 3D?

3. ¿De qué modo influyo en ustedes el uso de la magia para la enseñanza y desarrollo del aprendizaje de la geometría 3D?

4. ¿Creen que, si todas y todos los docentes utilizaran alguna herramienta innovadora para el aprendizaje en las clases de matemáticas, los distintos conceptos y temas tratados, sería más comprensibles y accesible para ustedes?

5. ¿Volverían a asistir a una clase de matemática donde se utilice la magia como recurso didáctico para su enseñanza y aprendizaje?

4. Planificación de la Secuencia Motivacional de Enseñanza Aprendizaje

	Planificación: Geometría 3D. Noviembre, 2021.	**Asignatura:** Matemáticas, formación diferenciada. **Curso: 3 y 4° Medio.**

N° de clases: 2

N° horas pedagógicas: 2 (60 min cada una).

Unidad 3: Generación de cuerpos utilizando patrones geométricos.

Objetivo de aprendizaje (OA):

OA04: Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes:

• Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

• Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Habilidades: Representar.

h. Evaluar diferentes representaciones, de acuerdo a su pertinencia con el problema por solucionar.

Conocimientos previos:

-Transformaciones isométricas (rotación, traslación).

-Plano 2D (cartesiano) y 3D (vectorial).

-Forma, área y volumen.

Indicadores de evaluación formativa: • Resuelven problemas que involucran calcular área o volumen de figuras 3D generadas por traslación y rotación de figuras planas (2D). • Explican de forma visual los procedimientos para generar figuras 3D a partir de figuras 2D. • Identifican los elementos centrales de una figura 3D, que provienen de rotar o trasladar una figura 2D. • Discriminan entre diferentes figuras 2D que permiten generar determinadas figuras 3D. **Recursos necesarios** Recursos físicos: Plumones (1 color rojo), 1 lápiz grafito, Transportador, Tijeras, Borrador, Pizarra, Notebook, Cámara Web (opcional), Proyector, Bolsa, 6 papeles, 1 clip o alfiler, Caja de fósforos, Papel flash, Bola y Cubo de esponja. Recursos tecnológicos: Internet, PPT, GeoGebra, Reuniones Online (Opcional), como; Meet, Zoom, Discord, Skype., entre otros.

Tabla 13: Planificación Geometría 3D (Elaboración propia).

Desarrollo de Sesiones

Preparar el Aprendizaje: Presentación, objetivos y motivación.

La o el docente saluda a las y los estudiantes presenciales y online (dependiendo del contexto de cada institución debido a la pandemia, y, por consiguiente, realizar clases en una modalidad híbrida).

Se anuncia el objetivo de aprendizaje a desarrollar (OA04): “Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.” (Fig 1.)

Se menciona que es necesaria la motivación, comunicación, y colaboración para participar. Utilizando la imaginación y creatividad para ser proactivo y encontrar soluciones innovadoras a las actividades propuestas.

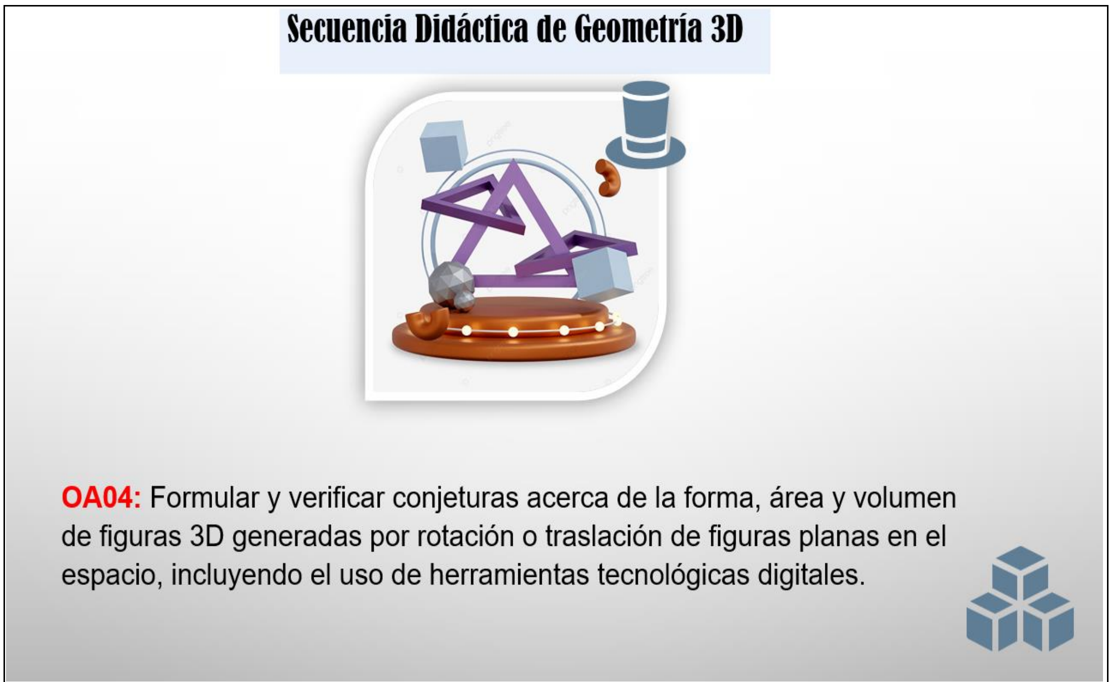


Fig 1: PPT Diapositiva 1.

MOMENTOS 1° CLASE

Inicio (15 minutos): Cuestionar, reforzar ideas y conocimientos previos.

Se inicia dialogando y compartiendo en conjunto conocimientos previos y relevantes, como la forma, volumen, área, tridimensionalidad, rotación y traslación.

<u>Actividad 1</u>:

1. Discute con tus estudiantes sobre las siguientes preguntas:

a. ¿Qué es el volumen, el área y una forma geométrica?

b. ¿Cuáles son sus características?

c. ¿Cuántas dimensiones puede tener una figura o cuerpo geométrico?

d. ¿Cómo se definen las transformaciones isométricas de rotación y traslación?

Terminada la discusión se definen y relacionan estos conceptos a instrumentos científicos (vaso precipitado y matraz) y a planos en 2D y 3D, mostrando una imagen tridimensional de un videojuego (Valorant, Riot Games, 2020). Donde se pregunta:

¿Qué conceptos o formas geométricas se pueden observar? ¿Pueden identificar algún plano 2D o 3D? (Fig 2.)

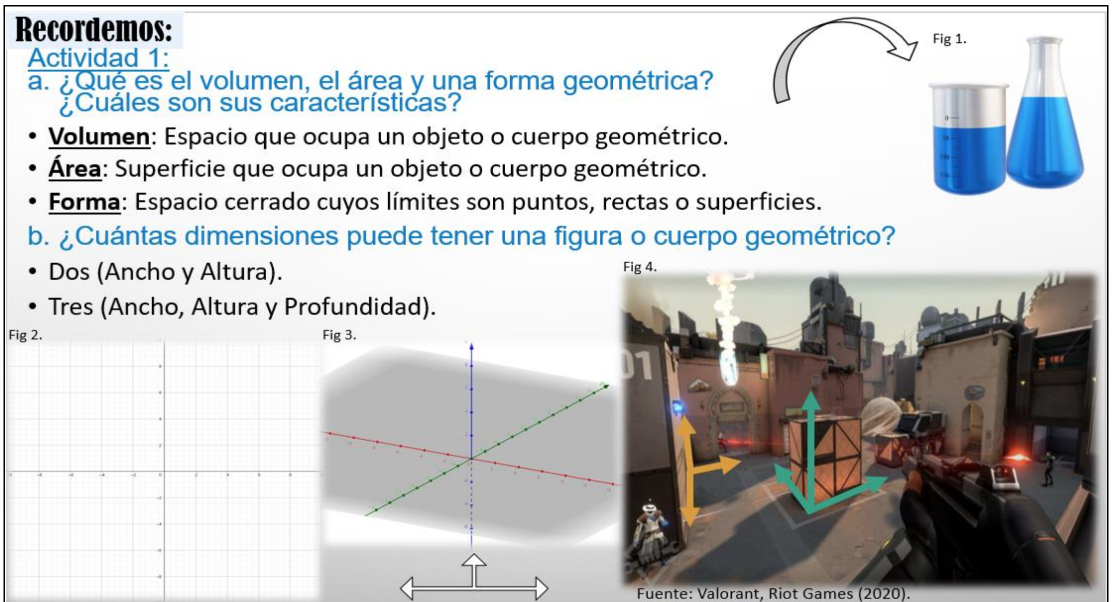


Fig 2: PPT Diapositiva 2.

Luego, se observan ejemplos pictóricos de rotación y traslación, basados en la rotación de la Tierra sobre su eje y la traslación elíptica de ella al Sol.

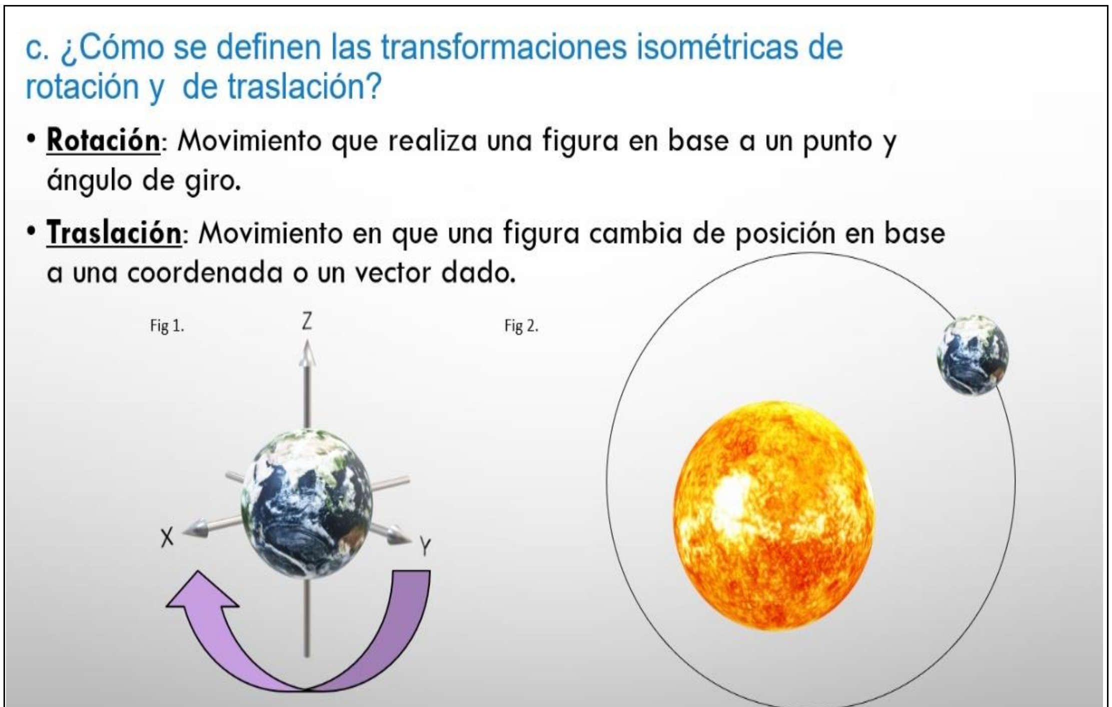


Fig 3: PPT Diapositiva 3.

Recomendaciones docentes:

1. Al mostrar el ejemplo del vaso precipitado y el matraz (Fig 2.), puedes agregar preguntas como: ¿Cuál es su forma geométrica? ¿Existe alguna relación entre ellos?, comentando que ambas comparten la misma forma de su base y sus

unidades métricas (cm^3). Procurando que sepan diferenciar entre capacidad y volumen.

2. En los planos 2D y 3D (fig 2.) que hacen referencia a la pregunta b. ¿Cuántas dimensiones puede tener una figura o cuerpo geométrico?, puedes reforzar el concepto de forma, coordenada y vectores, ya que al tener los planos en ambas dimensiones pueden representar y dibujar los estudiantes manualmente una forma o cuerpo geométrico ya sea en el plano cartesiano o vectorial (tus estudiantes a distancia pueden escribir en el chat online o indicar por voz las coordenadas). De tal manera que las y los estudiantes noten la diferencia de forma y representación de un plano con el otro.

3. En las preguntas complementarias: ¿Qué conceptos o formas geométricas se pueden observar? ¿Pueden identificar algún plano 2D o 3D?, puedes agregar que estos videojuegos están programados en bases matemáticas e informáticas, como, por ejemplo; en matrices, donde los gráficos del ordenador y la pantalla del monitor son una matriz de píxeles y cuyas operatorias con transformaciones isométricas nos permite visualizar en 2D Y 3D.

   Ya que tus estudiantes son del nivel de 3° y 4°, podría ser de interés para la o el estudiante complementar con información relevante a este campo y sus aplicaciones matemáticas.

4. Al visualizar los movimientos de rotación y traslación basados en la Tierra y el Sol (Fig 3.), después de la pregunta: c. ¿Cómo se definen las transformaciones isométricas de rotación y traslación?, puedes preguntar: ¿Qué efectos o consecuencias tienen?, para luego añadir que, gracias a una rotación de la Tierra sobre su eje, provoca “El día y la noche”, del mismo modo que la Tierra describe un movimiento de traslación elíptico mientras gira alrededor del Sol provocando las distintas estaciones del año. Estableciendo conexiones interdisciplinares.

5. Las preguntas complementarias de las preguntas: a. ¿Cuál es su forma geométrica?, a. ¿Existe alguna relación entre ellos?, b. ¿Qué conceptos o formas geométricas se pueden observar?, b. ¿Pueden identificar algún plano 2D o 3D?, c. ¿Qué efectos o consecuencias tienen?, se desarrollan

paralelamente al PPT (Fig 1,2,3), ya que este recurso tecnológico está diseñado con las animaciones necesarias para realizar estas intervenciones oportunamente.

6. Cabe precisar que, para las situaciones en contextos de ubicación, orienta a las y los estudiantes a decidir puntos cardinales en base a vectores. Se elige el eje X (abscisas) en correspondencia al sentido de la rotación propia de la Tierra (del oeste al este) y la dirección Y (ordenadas) correspondiente a la dirección y orientación (al norte) de los mapas geográficos. Para la orientación del eje Z (cota), se considera elegir la perpendicular hacia arriba.

Desarrollo (40 minutos): Generación de cuerpos 3D por medio de GeoGebra.

Realizado el inicio se presenta la generación de cuerpos 3D, por medio de la traslación de figuras planas (2D). Donde son definidos y desarrollados con el uso de GeoGebra. Se aplica la traslación y rotación para el cilindro ya que puede ser generado por ambas transformaciones (Fig 4.).

Actividad 2:

2. Comparta con sus estudiantes sobre las siguientes preguntas:

a. ¿Podríamos conjeturar el volumen y el área de un cubo?

b. Observando los siguientes prismas: ¿Cómo se obtiene el volumen y área total de ellos?

c. ¿Qué diferencias hay entre la generación del cilindro por traslación y rotación?

d. ¿Se podría formular su área total?

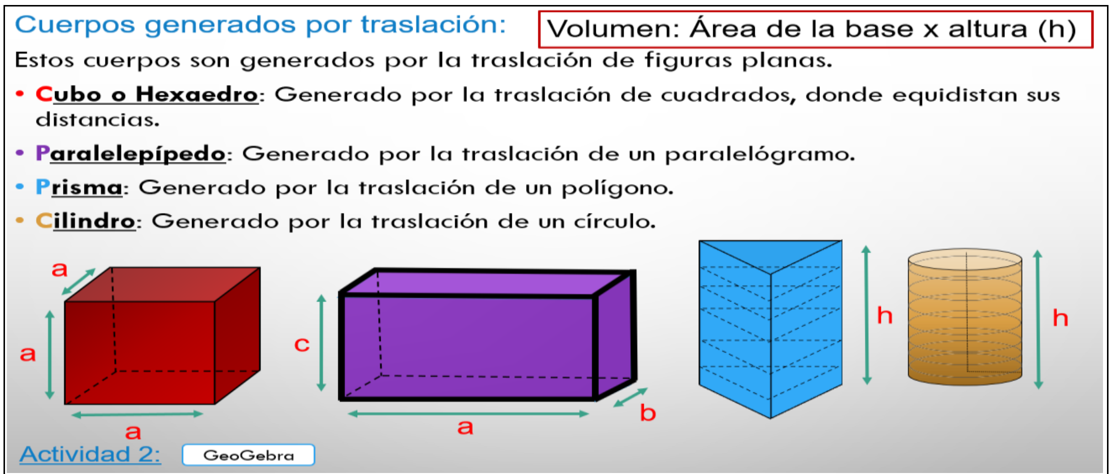


Fig 4: PPT Diapositiva 4.

<u>Recomendaciones docentes</u>:

1. Utiliza GeoGebra para observar qué ocurre al trasladar un cuadrado como polígono o como segmentos de vectores. Para esto, usa el recurso “Cubo.ggb” (Fig 5.), para que las y los estudiantes conociendo el volumen de un prisma (Á. basal x altura) formulen el volumen del cubo (Á. basal x h = Lado^3). Asimismo, orientarlos y utilizar las herramientas del GeoGebra para que deduzcan el área del cubo (Á = 6 x Lado^2). Para ello, relaciona su construcción (puedes utilizar la animación “b” para esto, además, desmarcar en la entrada “a_1=Cubo (A, B, E)” para una mejor visualización) con la cantidad de caras y su perímetro. Conjeturado una vez el volumen y área puedes preguntar: ¿Cuál es el área de un cubo, cuyo volumen es 64 cm^3?, puedes comparar los resultados de tus estudiantes “apareciendo” los textos (texto1, texto2), de GeoGebra donde se encuentran las fórmulas para su cálculo a través de un deslizador (Lado). Utilízalo para observar las variaciones del cubo en el plano 3D.

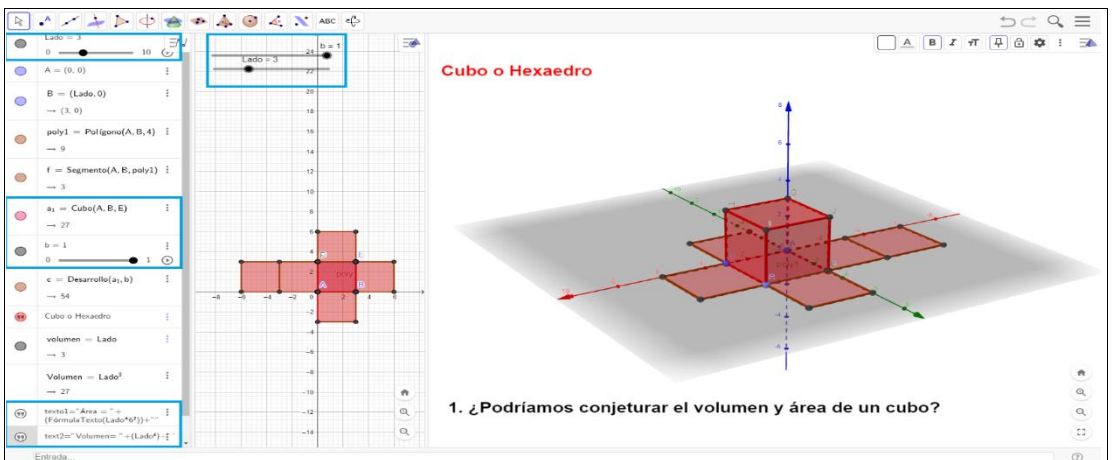


Fig 5: GeoGebra: Cubo o Hexaedro.

2. Use el recurso “Prisma.ggb” (Fig 6.) de GeoGebra para realizar simulaciones en 3D de construcción de distintos prismas dado su cantidad de lados. Utiliza los deslizadores (Lado, Longitud, Altura), puedes desmarcar “poly1” en la entrada utilizando la animación “a” para que las y los estudiantes deduzcan el área total de un prisma (2 x Á. Basal + Á. Lateral). Una vez formulado el área total, preguntar ¿Cuál es el área total de un paralelepípedo de medidas 7 cm de largo, 3 cm de ancho y 5 cm de alto?, además, en la entrada puedes marcar los text2, text3 y parecer los cálculos de volumen y área total para que las y los estudiantes compartan sus respuestas y las comparen. Modifica el número de “Lado” para visualizar distintos prismas y haz que reflexionen: ¿Por qué el mínimo de número de lados de un prisma puede ser 3?

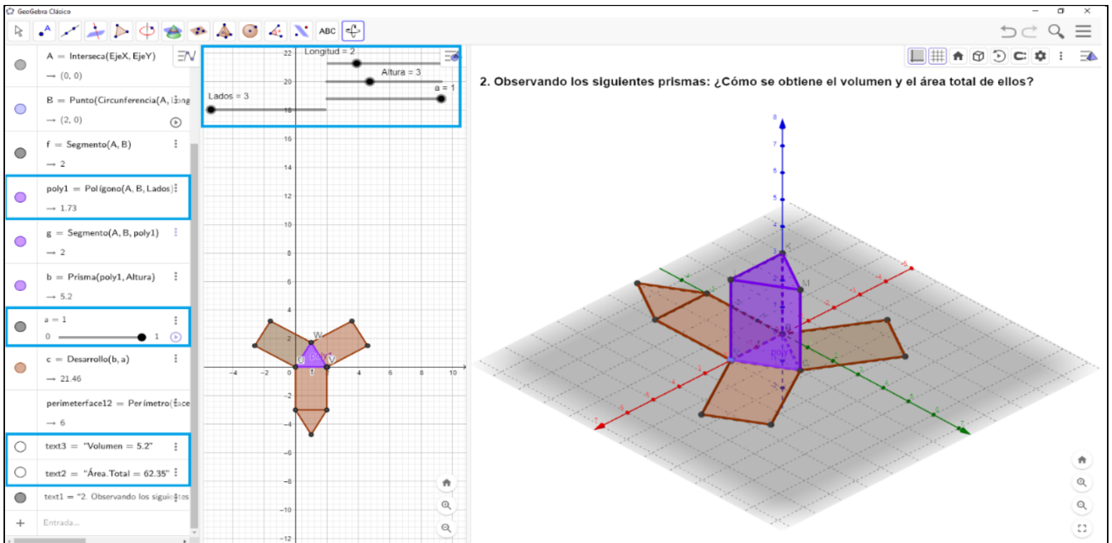


Fig 6: GeoGebra: Prismas.

3. Utilizando el recurso “Cilindro.T.ggb” (Fig 7.), por GeoGebra genere el cilindro por traslación mediante la estructura en 2D y 3D que se puede observar, compárelas de modo que las y los estudiantes vean las distintas representaciones del plano. Guíe a las y los estudiantes a que puedan explicar y argumentar: ¿Cuál es el polígono que genera la figura 3D resultante?, ¿Cuál es la diferencia de un círculo con una circunferencia? ¿Cuál es la mejor estrategia para calcular el perímetro de la figura plana de dicho modelo (P. circunferencia = $2 \cdot r \cdot \pi$) ?, utilice los deslizadores del radio (r) y altura (h) para visualizar la generación del cuerpo con distintas dimensiones.

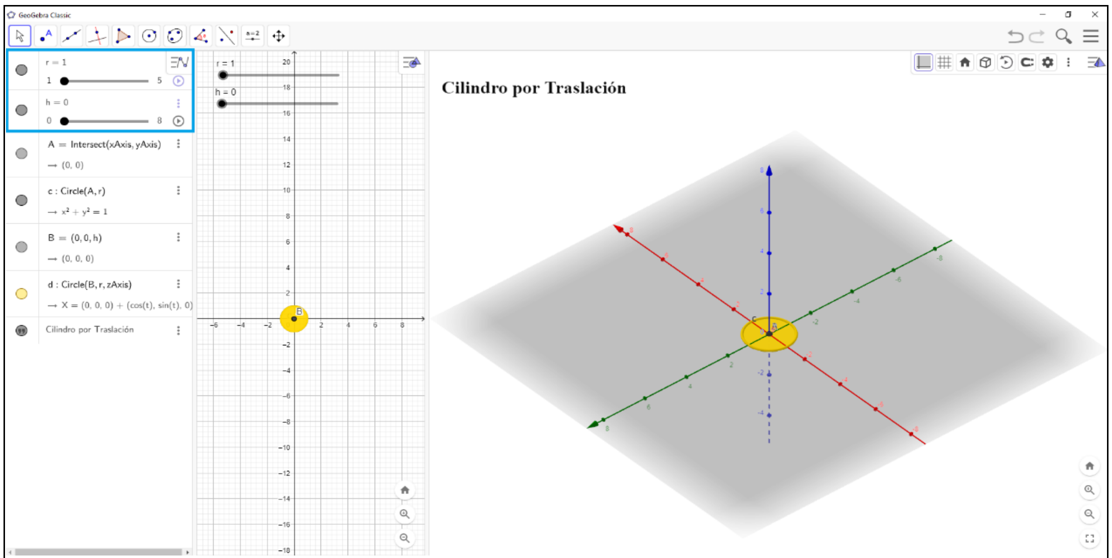


Fig 7: GeoGebra: Cilindro por traslación.

4. Luego de haber generado el cilindro por traslación se sugiere que habrá el recurso “Cilindro.R.ggb” (Fig 8.) de GeoGebra para responder a las preguntas, ¿Qué diferencias hay entre la generación del cilindro por traslación y rotación?, ¿Se podría formular su área total?, si es necesario puede abrir los dos archivos a la vez (Fig 7. y Fig 8.), para distinguir las distintas generaciones por traslación y rotación se sugiere preguntar: ¿Cuándo se puede asociar la transformación con rotación?, ¿Cuándo se puede asociar la transformación con traslación?,. Haga énfasis en el polígono para diferenciar entre una transformación con la otra, utilizando los deslizadores del radio (r), altura (h) y ángulo (α) para deducir el área total y aplicar el concepto de rotación y traslación entre un mismo polígono.

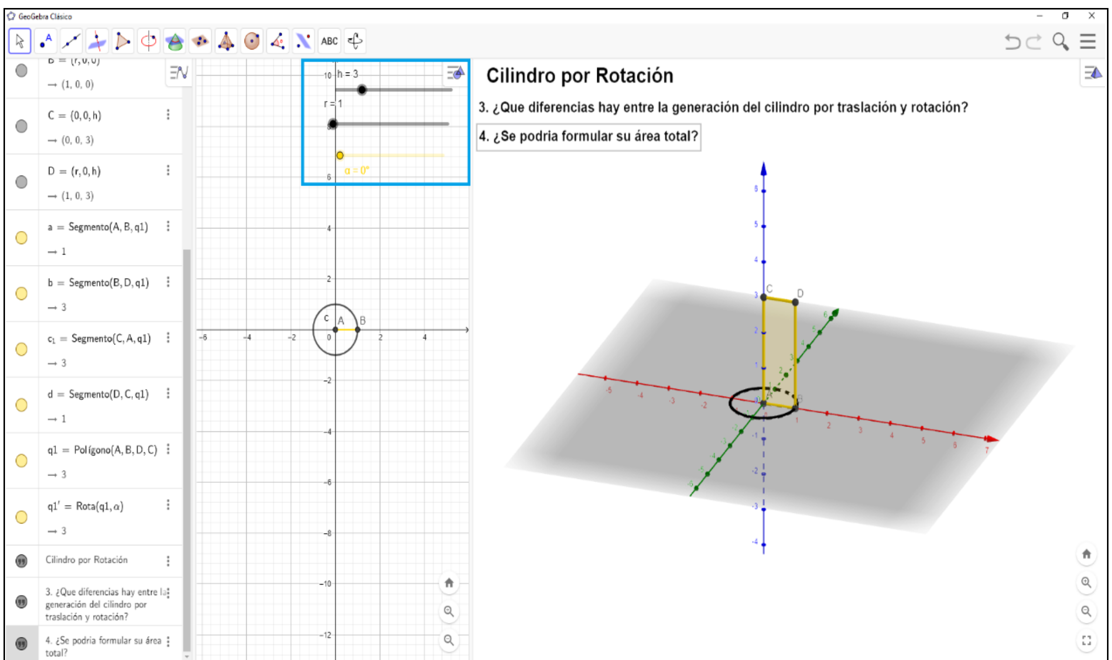


Fig 8: GeoGebra: Cilindro por rotación

Actividad 3:

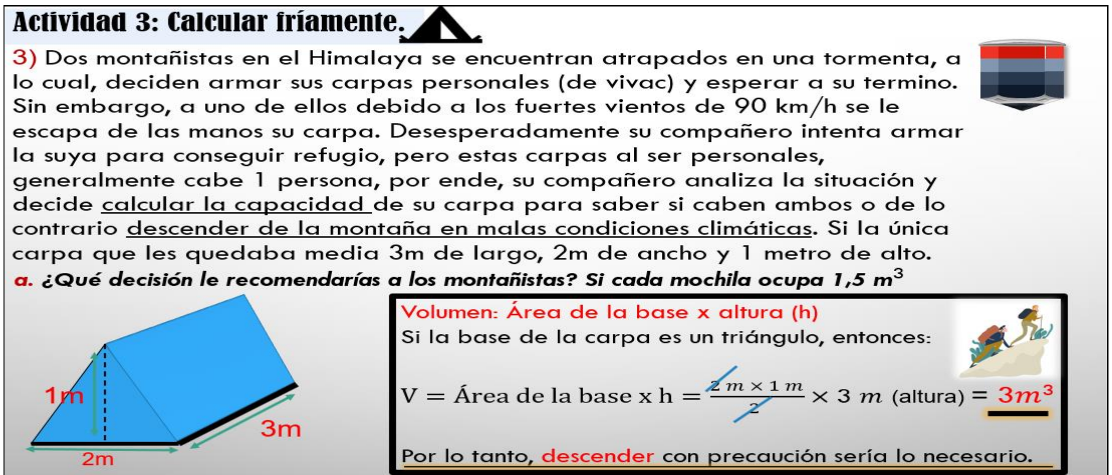


Fig 9: PPT Diapositiva 5.

Recomendaciones docentes:

1. En la actividad 3, en la pregunta a., es necesario aplicar conceptos de forma, área, y volumen (Fig 9.). Asimismo, asociar los conceptos de área en 2D con el volumen en cuerpos 3D. Comparte con las y los estudiantes las siguientes preguntas: ¿Se puede construir la carpa con un solo tipo de transformación y una sola figura plana? ¿Qué transformación y cuerpo geométrico se debió tener en cuenta para construir la carpa?

Actividad 4:

Fig 10: PPT Diapositiva 6.

Cierre (5 minutos): Resolver dudas o consultas de preguntas, representaciones y modelos de GeoGebra (PPT diapositiva 7. Equivalente a la 1.).

Concluido el desarrollo de la primera sesión se comparten las dudas, consultas y los distintos resultados que se pudieron haber dado. Es importante señalar a las y los estudiantes que analizar las relaciones 2D y 3D en el plano, el área y el perímetro de figuras planas, y el área y el volumen de cuerpos geométricos es fundamental para la Geometría 3D.

MOMENTOS 2° CLASE

Inicio (10 minutos): Reforzar ideas y conceptos de la sesión anterior.

Se inicia dialogando y recordando lo visto previamente; plano 2D y 3D, características y ejemplos de la traslación y concepto de rotación (Fig 11.).

<u>Actividad 1</u>:

1. Discute con tus estudiantes sobre las siguientes preguntas:

a. ¿Cómo se distingue el plano 2D del 3D?

b. ¿Qué características tenía que cumplir una rotación?

c. ¿Cuáles figuras planas podrían generar cuerpos por traslación? ¿Qué cuerpos pueden ser generados? ¿En qué objetos reales se representan?

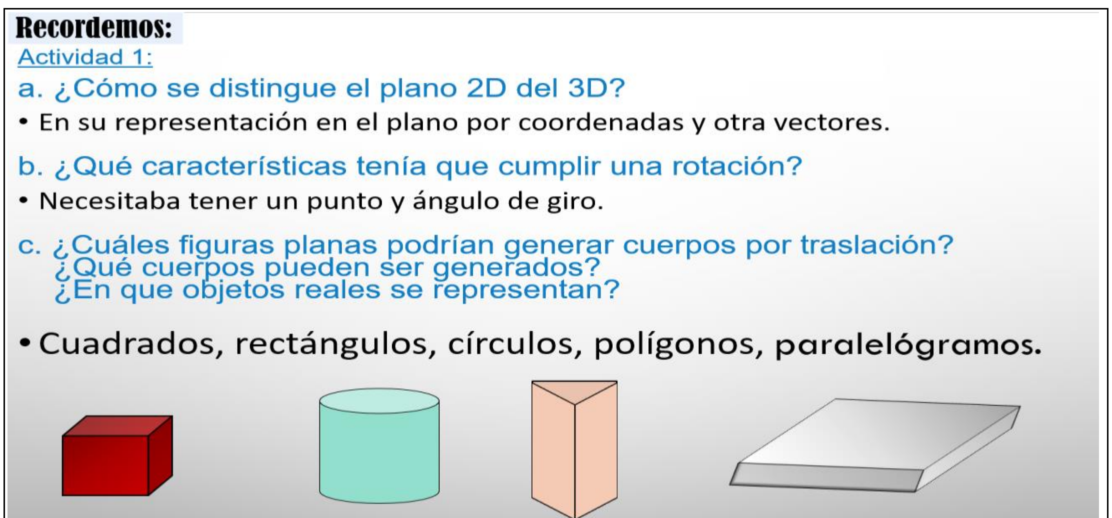


Fig 11: PPT Diapositiva 8.

Recomendaciones docentes:

1. En la pregunta a. ¿Cómo se distingue el plano 2D del 3D?, se recomienda que las y los estudiantes expliquen ejemplos y puedan responder preguntas complementarias como: ¿Qué diferencia hace la cantidad de vértices de una figura 2D con respecto al cuerpo? Haz la estructura en 2D en GeoGebra; podrás emplear las herramientas rectas, polígonos, circunferencia. Puedes abrir algún archivo GeoGebra para ello, o bien, realizarlo manualmente. Haz un polígono (ej. triángulo) para que las y los estudiantes puedan determinar las coordenadas de los vértices del triángulo o la figura dada.

2. Para las preguntas: b. ¿Qué características tenía que cumplir una rotación? Y c. ¿Cuáles figuras planas podrían generar cuerpos por traslación?, las y los estudiantes deben situarse en un contexto 2D, que argumenten: ¿A qué se debe específicamente la diferencia de estas transformaciones? ¿Qué se puede modificar en la traslación de una misma figura plana? ¿Cómo se puede representar situaciones por medio de cuerpos generados por patrones de traslación?, además, en la pregunta c. ¿En qué objetos reales se representan?,. puedes hacer referencia a que observen y manipulen sus lápices, estuches, gomas de borrar, etc. (Fig 11.)

Desarrollo (45 minutos): Generación de cuerpos 3D por medio de GeoGebra y Actividades.

Realizado el inicio se presenta la generación de cuerpos 3D, por medio de la rotación de figuras planas (2D). Donde son definidos y desarrollados con el uso de GeoGebra. (Fig 12.)

Actividad 2:

2. Comparta con sus estudiantes sobre las siguientes preguntas:

a. Según la generación del cono: Formule una conjetura de su área.

b. Si los siguientes cuerpos geométricos comparten la misma base y altura. ¿Existe alguna relación entre ellos?

c. Observe el siguiente cuerpo: ¿Con cuáles objetos o figuras en el espacio podríamos asociarlo?
d. ¿Cómo se genera la esfera? ¿Con cuál polígono de 2D se relaciona?

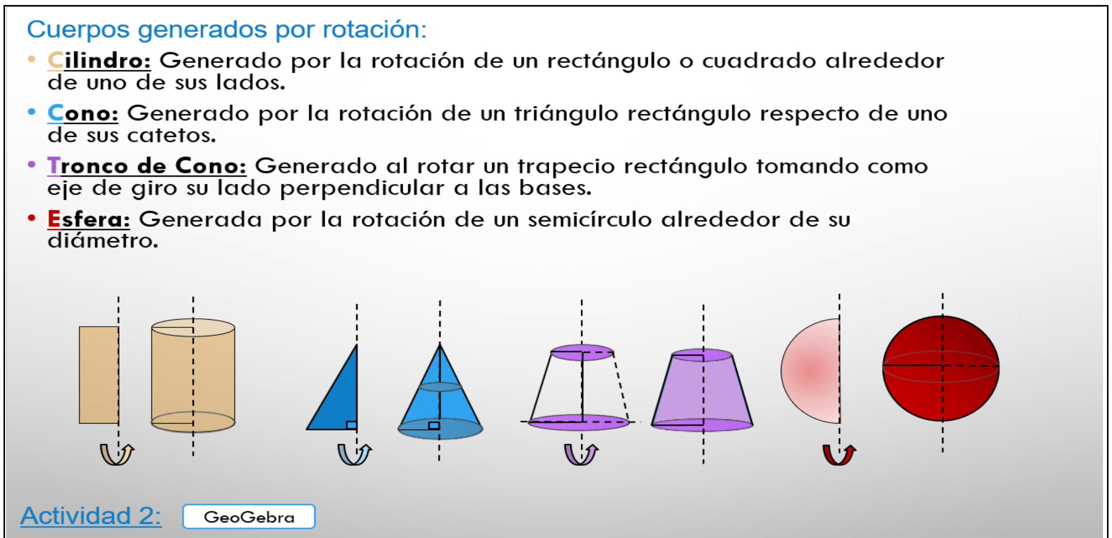


Fig 12: PPT Diapositiva 9.

Recomendaciones docentes:

1. Para la formulación de la conjetura del área del cono en la pregunta a., orienta a las y los estudiantes que visualicen la figura en 2D, pregunta: ¿Cuáles polígonos pueden identificar?, puedes hacer uso del teorema de Pitágoras para que identifiquen la generatriz e ir concluyendo el área total (Á. Basal + Á. Lateral). Para esto, puede ejemplificar con el perímetro de la circunferencia y el área del círculo (P. circunferencia = $2{\cdot}r{\cdot}\pi$ y el A. Círculo = $\pi \cdot r^2$), más el recurso de GeoGebra disponible como “Cono.ggb.” (Fig 13.), utilizando los deslizadores disponibles radio (r), altura (h) y animación del ángulo(α).

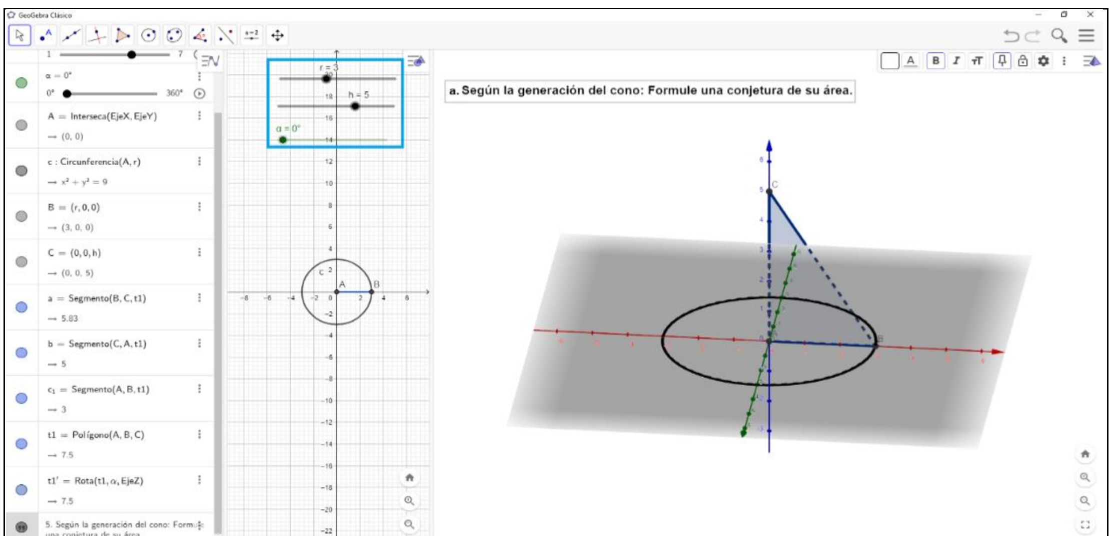


Fig 13: GeoGebra: Cono.

2. Para comprender la pregunta número b. ¿Existe alguna relación entre el cilindro y el cono? las y los estudiantes deben identificar la relación de sus volúmenes. Donde el volumen de un cono equivale a la tercera parte del volumen del cilindro. Sugiere que se basen en el área de la base (Círculo = $\pi \cdot r^2$) en relación a su altura (h). También, por medio del recurso de GeoGebra "RelaciónCC.ggb" (Fig 14.), pueden aparecer los cálculos de sus volúmenes apareciendo los text1 y text2 para que deduzcan la diferencia numérica de ellas. Asimismo, direccionar la vista gráfica 3D en vista de alzado, perfil y planta, para una mejor perspectiva visual.

Sitio web sugerido para la demostración física y algebraica de sus volúmenes: https://www.youtube.com/watch?v=2bH_sb9HspI&ab_channel=AnaMar%C3%ADaPertupeV%C3%A1squez

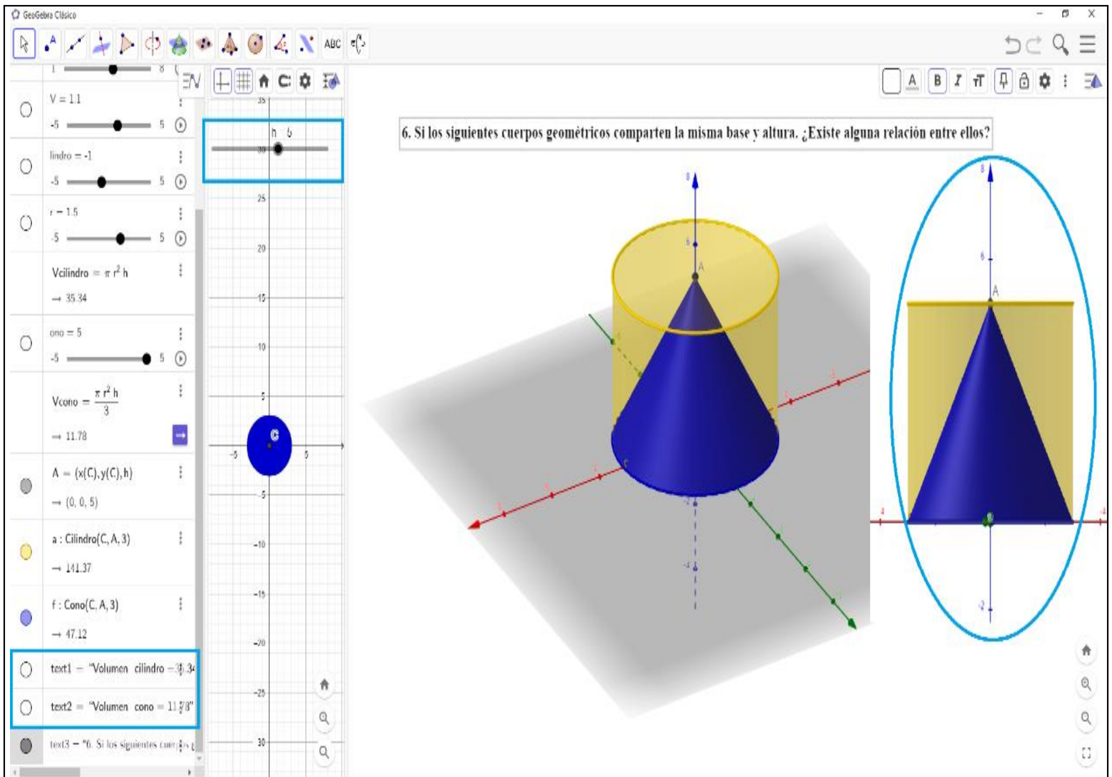


Fig 14: GeoGebra: Relación cono y cilindro, igual base y altura.

3. En la pregunta c., de cuáles objetos o figuras en el espacio se relacionan al Tronco de Cono. Se recomienda que las y los estudiantes reflexionen además si otros tipos de trapecios pueden generar cuerpos 3D como el tronco de cono (Fig 15.). Asimismo, evaluar posibles relaciones entre los radios (mayor y menor).

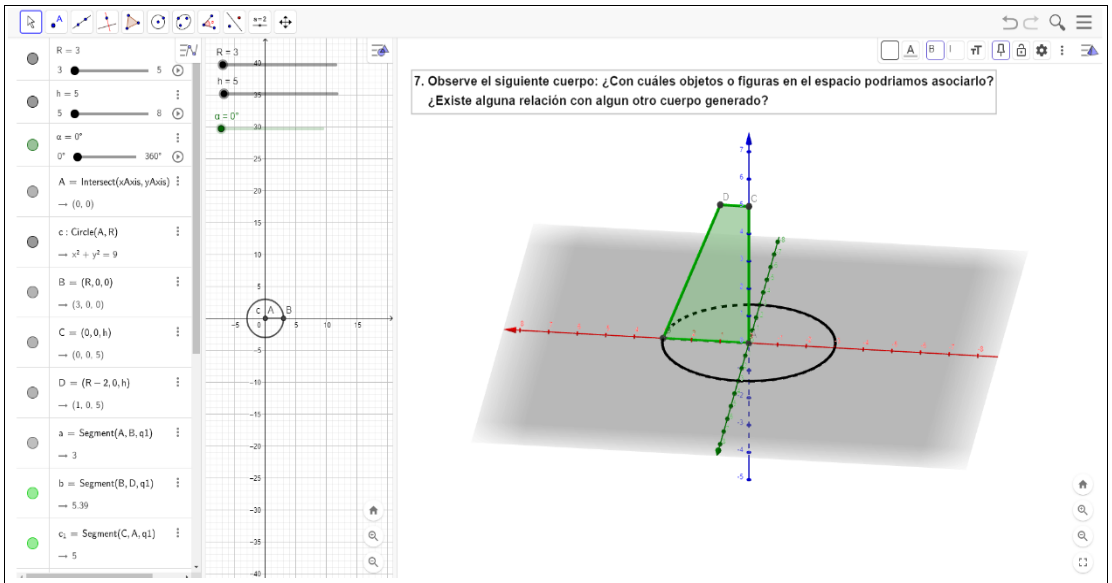


Fig 15: GeoGebra: Tronco de cono.

4. Para la generación de la esfera en el apartado d., antes de generar la esfera, haz que las y los estudiantes primero visualicen el plano 2D y puedan deducir cuál es la figura 2D que la genera (semicírculo). Luego, utiliza los deslizadores del radio (r) y del ángulo (α) para observar su formación por medio de la rotación del semicírculo sobre su diámetro. Cambia el eje de giro “Rotar (c, α, EjeX) por (EjeY)” (Fig 16.), si tienes el GeoGebra en inglés digita “yAxis”. Pregunta a las y los estudiantes ¿Varía la generación del cuerpo 3D respecto al eje de giro? ¿Qué diferencia hay entre rotar un polígono contenido en el eje de rotación y rotar un polígono o segmento que no está contenido en un eje de rotación?

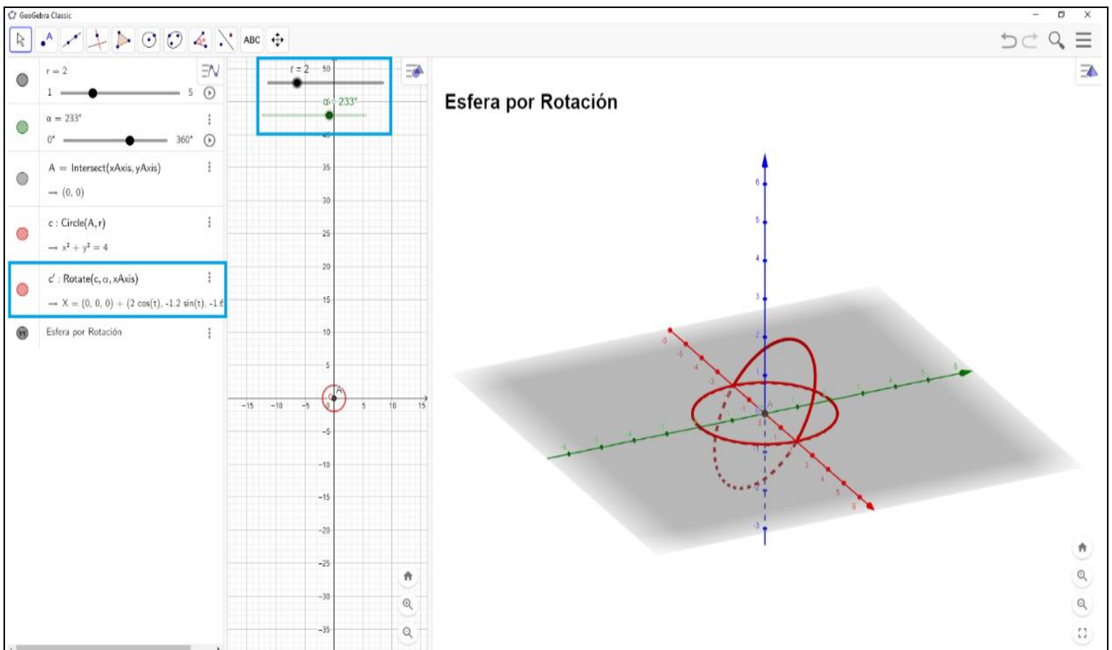


Fig 16: GeoGebra: Esfera.

Actividad 3:

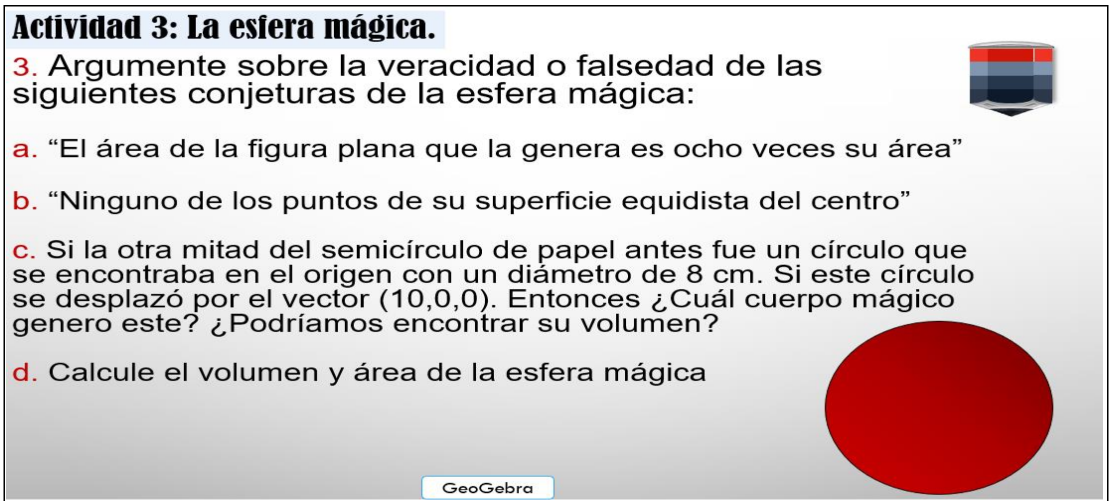


Fig 17: PPT Diapositiva 10.

Recomendaciones docentes:

1. Finalizada la generación de la esfera de la actividad 2, pregunta d., realizando la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro usando GeoGebra (Fig 16.), se indica a las y los estudiantes que se les va a demostrar una última representación de esta, a lo cual la o el docente se dirige a su mochila a sacar una caja de fósforos, de donde saca un papel rojo con forma de semicírculo con un fósforo en su diámetro. Luego, toma el papel del fósforo y lo hace rotar explicando una vez más cómo se genera la esfera, para luego prender el fósforo y hacer contacto con el papel y ¡Pum!, una esfera mágicamente se ha generado.

Para iniciar las actividades y realizar este juego de magia de la aparición de una esfera, necesitas los siguientes materiales:

-1 plumón rojo.
-1 lápiz grafito.
-1 caja de fósforos.
-1 clip o alfiler.
-Transportador.
-Tijeras.
-Papel flash.
-Bola de esponja.

- El papel flash es un tipo de papel especial compuesto de nitrocelulosa, el cual es un tejido que recibe un tratamiento con ácido nítrico para arder al instante cuando hace contacto con el calor, este “flash” provocado, no produce humo ni cenizas, sin embargo, lo más importante es soltar el papel a tiempo para no quemarse uno, ni algo o alguien alrededor nuestro, debo hacer hincapié que no es un papel peligroso si lo usas bien, ya que el “fogonazo” dependerá del tamaño del papel (8 cm. x 4 cm, aprox en nuestro caso) y del tipo de papel flash, ya que hay gruesos, delgados y con chispas. Te sugiero siempre comenzar con el grueso si es que no tienes experiencia previa, ya que su combustión es más lenta, por lo tanto, puedes estimar de mejor manera el tiempo de combustión.

- La bola de esponja se adquiere en tiendas de magia o fabricándose mediante las esponjas de baño, no se recomienda este método, ya que nunca quedan tan circular, a menos que tengas a disposición una cuchara de helados “sacabolas”, para realizar un corte más limpio.

Preparación del juego de magia:

Paso 1: Para elaborar este efecto de magia, primero tienes que preparar el “semicírculo”; este lo haces cortando un trozo rectangular de 8 cm. x 4 cm. de “Papel flash”, poniendo el transportador sobre él y marcando con el lápiz grafito el arco y el diámetro (línea punteada azul en la imagen), el transportador tiene la ventaja que nos permite dibujar un semicírculo en él. Una vez terminado, debes cortarlo.

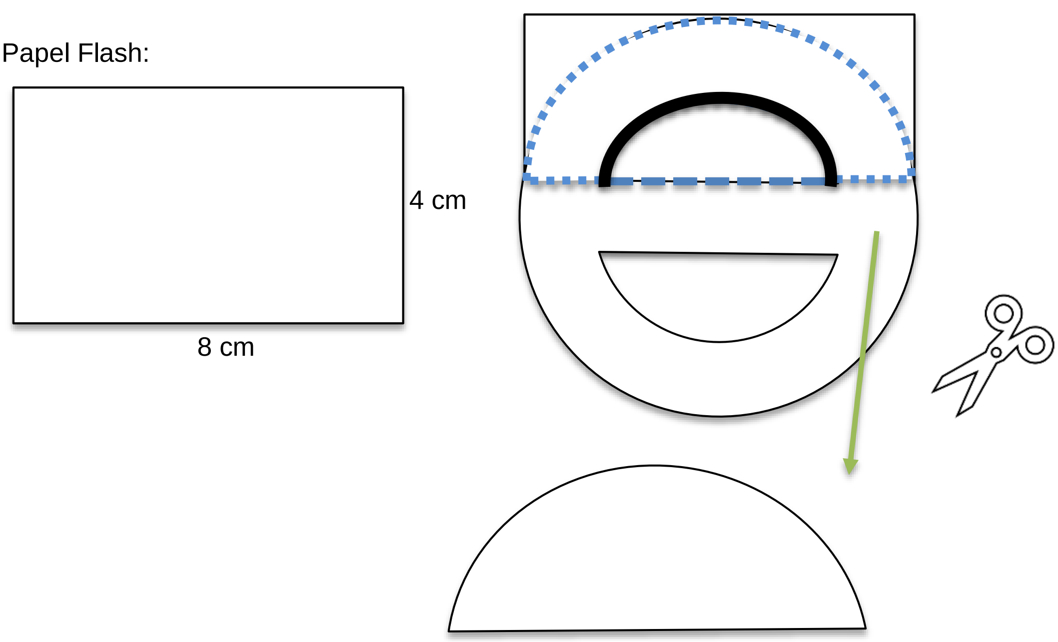


Ilustración 1: Paso 1, preparación actividad 3.

Paso 2: Teniendo ya tu semicírculo de Papel flash debes pintarlo del color de tu bola de esponja (en este caso es roja, pero hay de varios colores) con el plumón. Ya una vez pintado, con el clip o alfiler necesitas hacerle dos hoyos en la parte del diámetro para colocar el fósforo que hará de eje en la rotación de tu papel flash, es importante que el fósforo quede ligeramente corrido hacia fuera o salido unos 2 cm para una buena rotación. Además, recomiendo el uso de fósforos gruesos (mayor tensión), ya que los más delgados pueden romperse o deformar tu semicírculo.

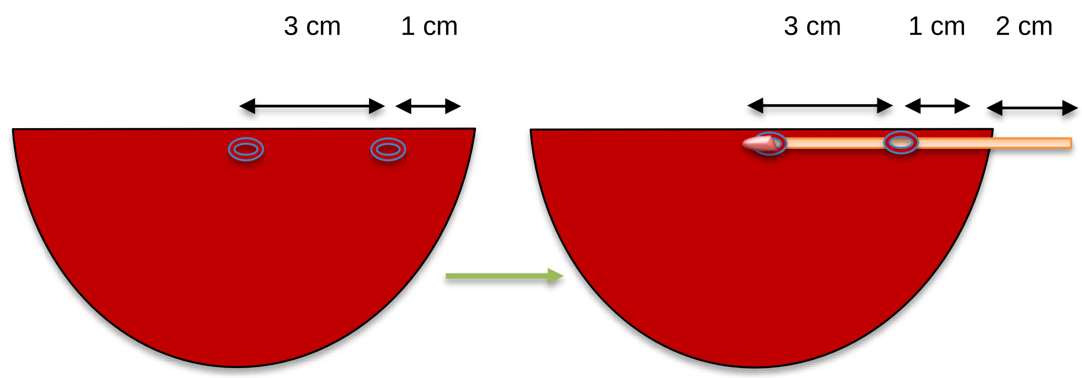


Ilustración 2: Paso 2, preparación actividad 3.

Paso 3: Ahora sólo debes poner el semicírculo junto a su fósforo dentro de la caja junto a los demás, al centro y arriba de todos para tenerlo listo para su uso.

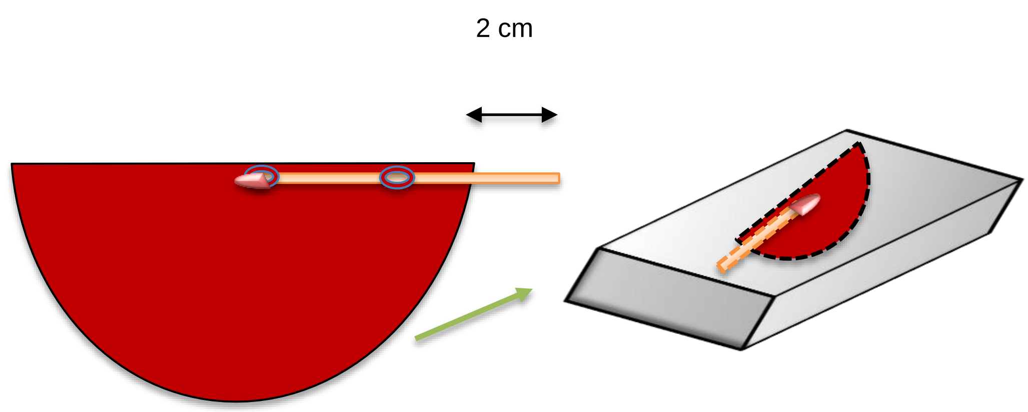


Ilustración 3: Paso 3, preparación actividad 3.

Ejecución del juego de magia:

Paso 1: Colocar la caja de fósforos previamente (con el semicírculo adentro) junto con la bola de esponja (al lado o encima) en un lugar donde tengas que ir a buscarla para mostrarla como “ejemplo de un paralelepípedo”, los puedes llevar en tu bolso, mochila (cajas más grandes) o bolsillos (cajas más chicas). Recomiendo en el bolso o mochila ya que es más cómodo y directo para “cargarte la bola de esponja”, en la jerga del ilusionismo, el concepto de “cargar” se refiere a tomar un objeto sin levantar sospechas de los demás. En este caso al sacar la caja de fósforos tienes que a su vez cargar la bola de esponja entre tus dedos meñique, anular y medio, esta posición se le llama “empalme de dedos”. Tu otra mano hace de apoyo para abrir la caja de fósforos con la misma mano que tienes la bola escondida (en este punto debes estar relajado y ser natural).

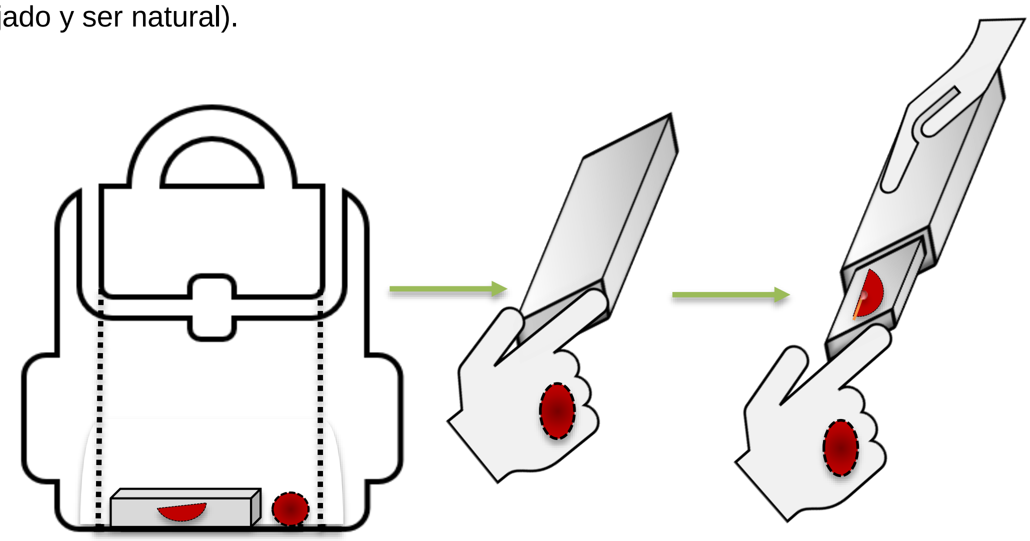


Ilustración 4: Paso 1, ejecución actividad 3.

Paso 2: Abierta la caja de fósforos tienes que tomar tu semicírculo y dejar la caja en un lugar cercano. El semicírculo lo sostienes de la punta del fósforo (la que sobresale por 2 cm) con el índice y pulgar, donde tienes que hacer rotar con la misma posición de empalme de dedos tu semicírculo (ya que la bola sigue escondida allí) expresando a tus estudiantes que este es el movimiento de rotación para generar una esfera. Es importante captar la atención en este instante, ya que ahora vendrá la gran ilusión.

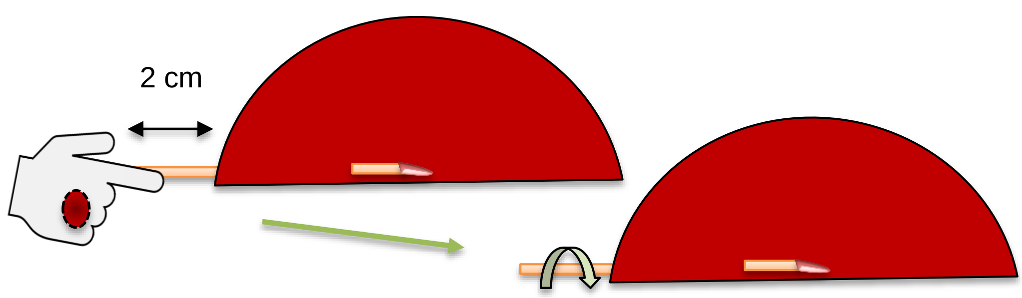


Ilustración 5: Paso 2, ejecución actividad 3.

Paso 3: Al momento de terminar la rotación, retira el fósforo dejando el semicírculo con tu otra mano (vacía) en tu hombro (1.) o mesa (2.) pero cercano a ti y a la vista de todas y todos. Recomiendo el hombro, para que el campo visual de tus estudiantes tanto presencial como a distancia, no se altere. Luego, prende el fósforo con su respectiva caja (3.). El encendido lo haces con la mano que tienes escondida la bola de esponja, ya que la cargamos en empalme de dedos desde que sacamos el semicírculo de la caja, por eso dejamos por unos segundos de lado el papel semicircular.

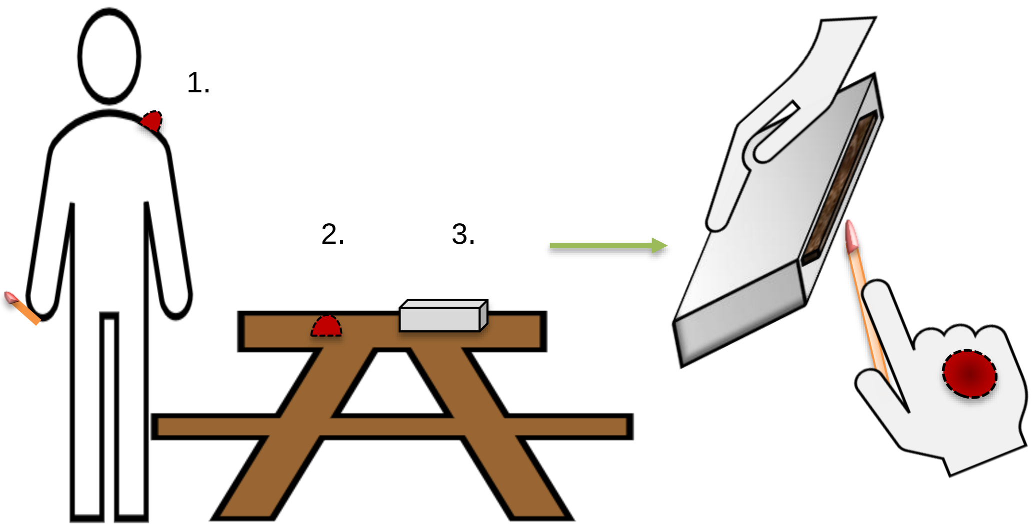


Ilustración 6: Paso 3, ejecución actividad 3.

Paso 4: Encendido el fósforo dejamos la caja de lado y mientras se está encendiendo cambiamos rápidamente el fósforo de mano mientras tomamos nuestro papel semicircular con la mano que tiene la bola empalmada. Aquí debes esperar entre 2-3 segundos porque tus estudiantes ya estarán con toda su atención. Ahora solo debes acercar el fuego a tu papel semicircular (papel flash) para que esta prenda y ¡Pum!, mágicamente haces aparecer la bola de esponja (esfera). Para hacerlo, sólo debes con tu pulgar empujar la bola hacia arriba y agarrarla con el dedo índice. Realizado ya el efecto de magia puedes dar la bola a revisar y luego dejarla cerca para el otro juego de magia (Actividad 6.)

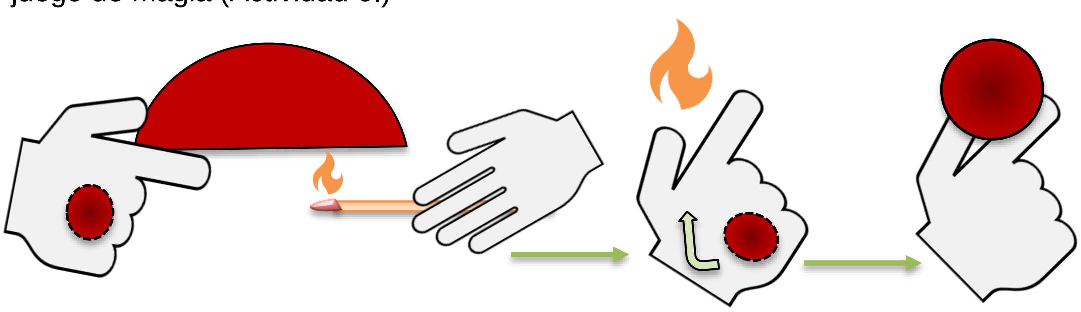


Ilustración 7: Paso 4, ejecución actividad 3.

¡Ojo!: Cuando quemas tu papel **no olvides soltarlo hacia arriba** porque así la velocidad de combustión es más lenta. De todas formas, sugiero los siguientes vídeos para que te apoyes técnicamente (solamente usamos una técnica: el empalme de dedos que se utiliza para desaparecer objetos, pero en este efecto de magia solo usamos la "posición" de esta técnica, en el vídeo lo puedes ver en el minuto 3:00) y además tengas más conocimiento sobre el uso y cuidado del papel flash.

Sitios web:

https://www.youtube.com/watch?v=rL7JCrpQktk&ab_channel=BrowsersDenofMagic
(Técnica empalme).
https://www.youtube.com/watch?v=R1LCqDmV4Ek&ab_channel=EnjoytheMagic
(Uso y cuidados del papel flash).

2. Luego de haber hecho el juego de magia, en la tercera actividad (Fig 17.), en el caso de la conjetura a., encamina a las y los estudiantes que recuerden el área de un círculo (Círculo = $\pi \cdot r^2$) para que infieran el área del semicírculo (que sería la mitad). Y así, relacionar el área con el enunciado de manera algebraica. Esta conjetura es verdadera.

3. En el caso de la conjetura b., de la actividad 3, es falsa, ya que todos los puntos de su superficie equidistan del centro. Comenten: ¿A qué se refiere que equidistan sus puntos? ¿Cuántos ejes de simetría tiene la esfera? ¿Puede generar algún cuerpo tridimensional si gira en algún eje?

   Puedes dar la esfera mágica a tus estudiantes para que la examinen y comprueben concretamente que todos los puntos de su superficie equidistan del centro.

   La esfera tiene infinitos ejes de simetría, ya que por su forma hay infinitos planos dimensionales donde tiene eje de revolución. A su vez, la distancia de todos los puntos de la circunferencia (el borde) a su centro es igual al radio, es decir, los puntos de la superficie equidistan del centro. Al ser un cuerpo que no tiene caras, si esta revoluciona en torno algún eje sigue generando una esfera.

4. En la pregunta c., de la actividad 3, sitúe a las y los estudiantes en el plano dimensional, guíalos a que recuerden conceptos como: origen, diámetro,

traslación, forma, generación de cuerpos 3D. A su vez, que apliquen la fórmula conjeturada del volumen de un cilindro. En este caso, se aplicó el vector (10,0,0), ósea, se trasladó por el eje de las abscisas 10 unidades. Utilice la fórmula del volumen del cilindro, además puede comentar con las y los estudiantes, ¿Cuál es el área basal del cilindro mágico?,. gráfique el esquema (Ilustración 8.).

5. Para la pregunta d., de la actividad 3, es necesario que los estudiantes utilicen las conjeturas formuladas anteriormente.

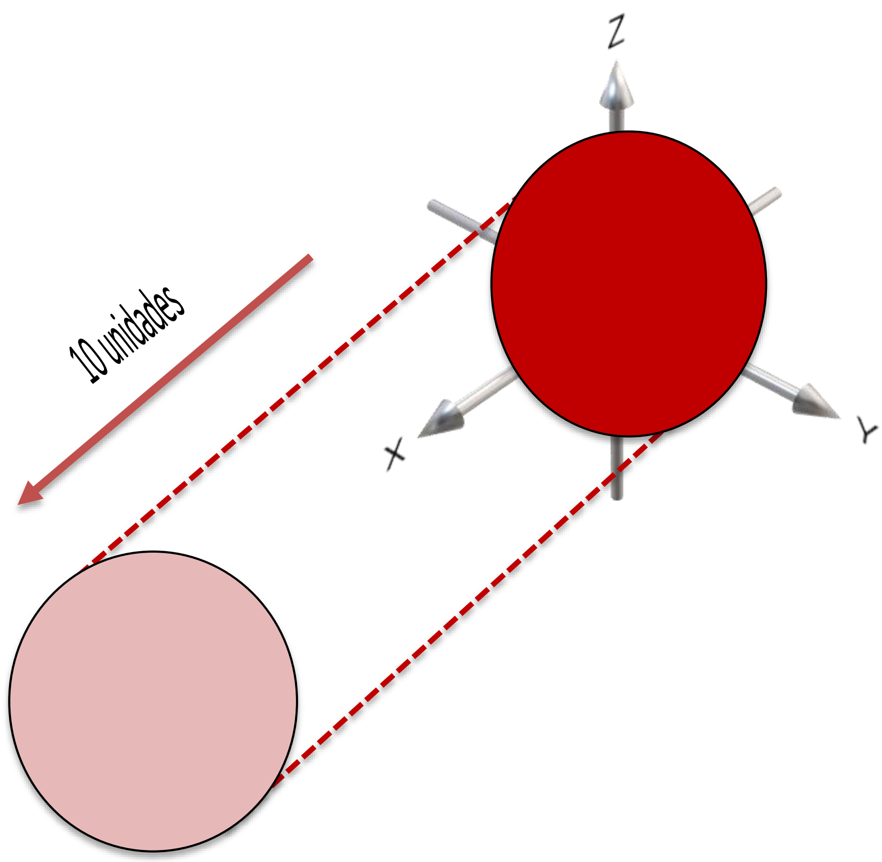


Ilustración 8: Esquema tridimensional.

6. En la pregunta d. de la actividad 3, utilice como recurso el GeoGebra "Esfera.M.ggb." que se encuentra disponible en el PPT junto a la actividad. El diámetro en un inicio era 8cm, por lo tanto, su radio (r) mide 4cm. Utiliza esta medida u otra que estimen tus estudiantes. Dentro del GeoGebra utilice los deslizadores de su radio (r) y ángulo (α) para generar la esfera en el plano 3D. Asimismo, seleccione los text1, text2, text3 y tex4., para observar los resultados (Fig 18.)

7. Recuerda ir resolviendo cada pregunta a, b, c. de la actividad 3, en paralelo al PPT (Fig 17.).

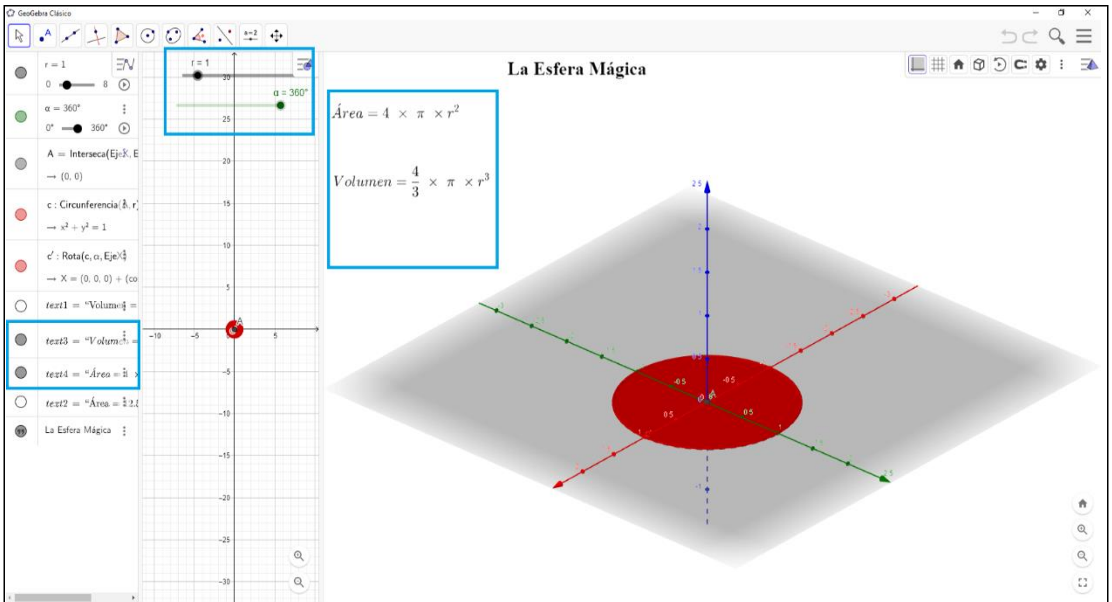


Fig 18: GeoGebra: Esfera mágica.

<u>Actividad 4</u>:

Fig 19: PPT Diapositiva 11.

Recomendaciones docentes:

1. Para la actividad 4., es necesario que se formen parejas para participar en la pizarra. Primero, debes tener una bolsa aparte con 6 papelitos que tengan una pregunta o desafío aleatorio sobre su objeto o figura geométrica, pueden ser:

   ¿Cuál es el área basal?, ¿Qué forma geométrica tiene?, ¿Cuántas caras tiene?, ¿Cuál es su volumen?, ¿Cuál es el área total?, ¿Cuál es su representación 2D? Dibújela, ¿Su objeto o cuerpo representa: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$? (Puede variar las representaciones algebraicas) etc. Si deseas, puedes añadir otras preguntas.

   La idea es que uno responda lo que se indica y la o el compañero lo que salga en el papel. Todo es aleatorio para las y los estudiantes, desde que objeto o figura geométrica aparecerá, hasta el papelito a sacar.

2. Guíese por el PPT, las animaciones, momentos y respuestas, están sincronizados. Además, puede utilizar el lápiz en la esquina superior derecha (Fig 19.) como pregunta extra si tiene un papel adicional (Este es generado por la rotación de un rectángulo y un triángulo rectángulo), Comente: ¿Qué figuras planas están relacionadas con los objetos o cuerpos geométricos que elegimos?

Actividad 5:

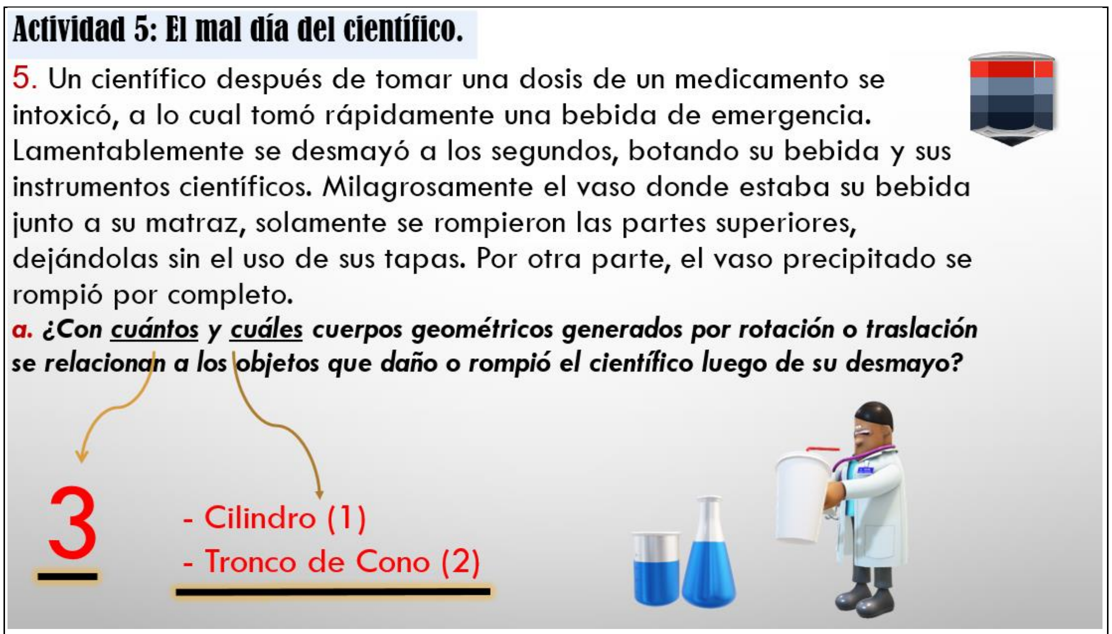


Fig 20: PPT Diapositiva 12.

Recomendaciones docentes:

1. En la actividad 5 (Fig 20), en la pregunta a., la identificación de figuras 3D es necesaria para distinguir el cilindro y los troncos de cono, puede comentar, además, ¿Cuál es la relación que tienen los 3 objetos reales con respecto a su forma?,. La forma de la cara basal de los 3 objetos es la misma, circular.

2. Comente junto a sus estudiantes: ¿Cuáles polígonos en 2D fueron necesarios para generar estos instrumentos?

Actividad 6:

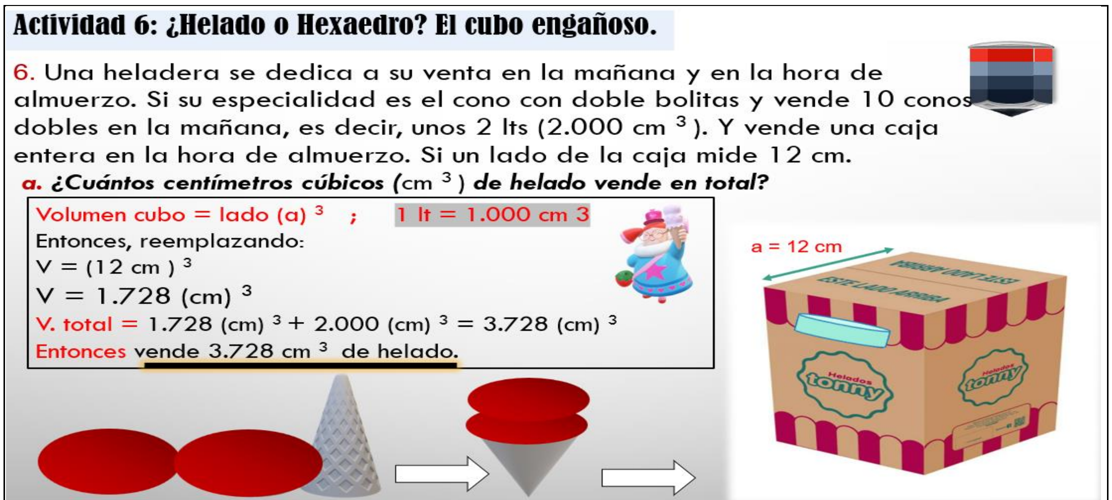


Fig 21: PPT Diapositiva 13.

Recomendaciones docentes:

1. La actividad 6., se sugiere que sea de forma individual (Fig 21.), para que después de compartir los resultados aun sin saber la respuesta correcta, el o la docente haga una retroalimentación con la misma esfera mágica que utilizó en la actividad 3., pero ahora basándose en la venta de la heladera de la actividad 6. Donde de pronto, de forma mágica transforma el cono de doble pelotas en un cubo o hexaedro (aludiendo a la explicación del problema, donde era el cálculo de la suma de volúmenes).

2. Para realizar el juego de magia de la actividad 6., necesitas los siguientes materiales:

-1 bola de esponja (la misma que apareció mágicamente).
-1 cubo de esponja (gimmick).

- Un gimmick es un aparato o "truco" que se utiliza sin ser visto por los presentes en el acto, la bola de esponja, por ejemplo, no necesita de un gimmick. En este caso el cubo podríamos decir que es "especial", ya que tiene un agujero en una de sus caras.

Cubo normal:

Cubo gimmick:

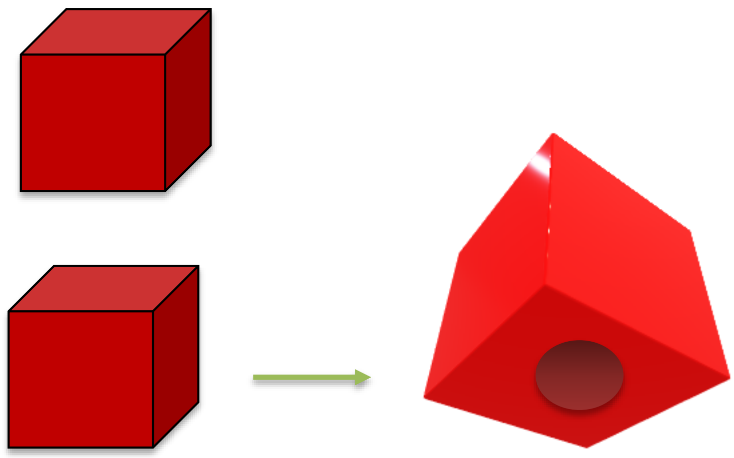


Ilustración 9: Comparación de cubos.

Preparación para el juego de magia:

Paso 1: Colocar previamente a la segunda sesión el cubo gimmick en uno de tus bolsillos en forma de bola de esponja, como contiene un agujero puedes desdoblar el cubo hacía afuera quedando como una bola de esponja idéntica a la anterior, ósea, la mágica (asegúrate de no ocupar el mismo bolsillo si es que pones la caja de fósforos del juego anterior en uno de ellos). Recomiendo poner el cubo en el bolsillo derecho trasero del pantalón.

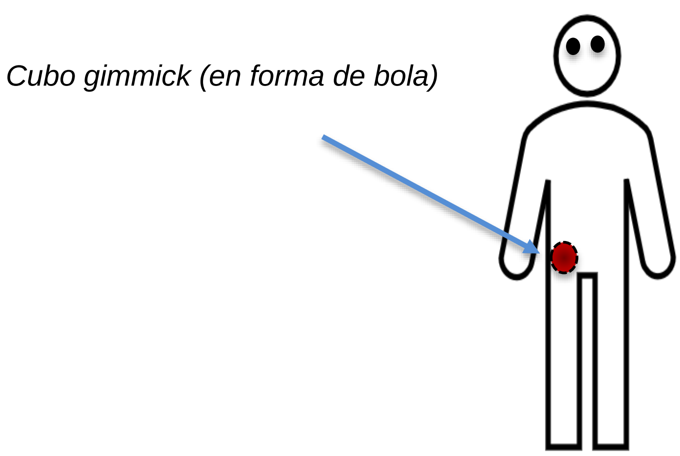


Ilustración 10: Paso 1, preparación actividad 6.

Ejecución del juego de magia:

<u>Paso 1</u>: Luego de desarrollar la actividad 6., obtendrás variadas respuestas, tanto como correctas o incorrectas. En el momento en que muestres el resultado correcto (Fig 21.), justo en ese momento estarán con su atención distraída a ti, específicamente de tus manos. Su atención está en el resultado correcto, y es ahí cuando sutilmente debes cargar el cubo gimmick en tu mano en la misma posición de la técnica anterior, el empalme de dedos. A lo cual, dices que vas a explicar y retroalimentar el ejercicio propuesto (recuerda ser natural y estar relajado, has cuenta como si de verdad no tuvieras nada).

En la jerga de los magos esto se llama “Misdirection”, que básicamente es “distraer la atención”, es la psicología de la magia, y el aspecto más importante, incluso más que la técnica manual, no olvidemos que la magia o una ilusión, ocurre gracias a procesos neurocientíficos y de perspectiva (Geometría 3D).

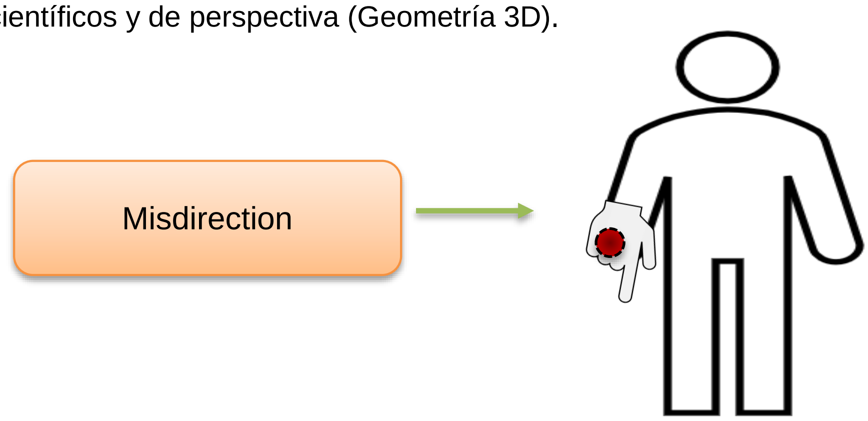


Ilustración 11: Paso 1, ejecución actividad 6.

<u>Paso 2</u>: Luego de haber dicho que vas a explicar la actividad debes interpretar a la heladera, simulando que tienes un cono de helado con doble pelota, pero en realidad te llevas la bola (el cubo gimmick) detrás de tu cabeza y la haces aparecer en tu oreja o boca, con la técnica del empalme de dedos (la puedes ver en el vídeo anterior recomendado) aquí es donde usamos “el movimiento y la posición” de la técnica. Es importante que una vez aparecida no enseñes la parte inferior (recuerda que tiene un agujero, por lo tanto, si la muestras mucho se podría ver).

Debido al contexto híbrido de las clases, y las condiciones sanitarias que eso provoca (usar mascarilla) no puedes hacerla “aparecer de tu boca”, a menos que te bajes la mascarilla unos segundos (no recomendado), sino, puedes hacerla aparecer de tu oreja (1.), axila (2.), rodilla (3.), hasta de tus propios estudiantes (en todas las variaciones se utiliza la misma técnica). Todo está bajo tu imaginación y creatividad.

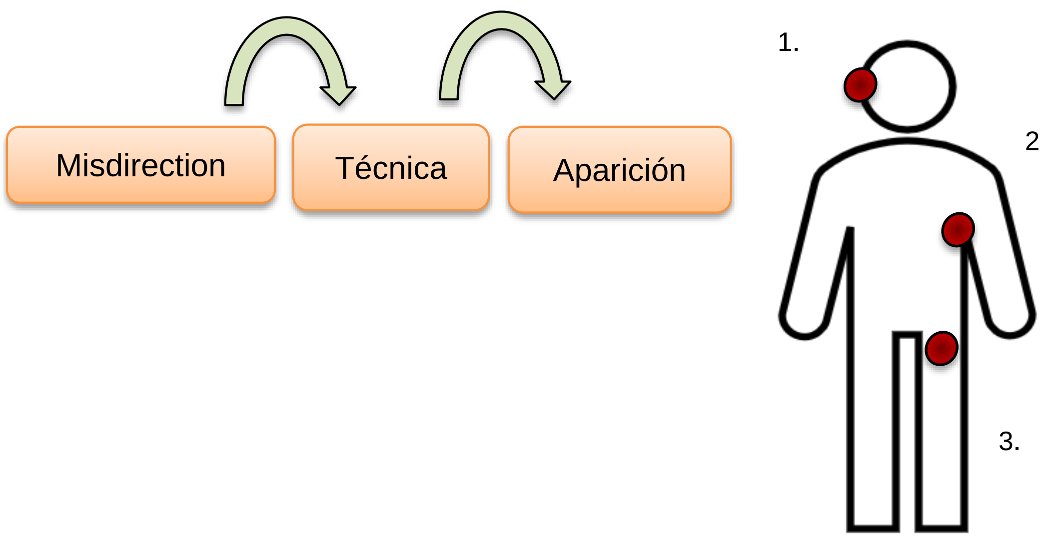


Ilustración 12: Paso 2, ejecución actividad 6.

<u>Paso 3</u>: Luego de hacer aparecer la bola (cubo gimmick) debes colocar ahora tu puño cerrado con la bola (cubo gimmick) arriba de él con el agujero siempre hacia abajo y luego poner tu otra bola de esponja que utilizaste anteriormente encima de esta apoyándola con tu otra mano (simulando un cono de helado con doble pelotas).

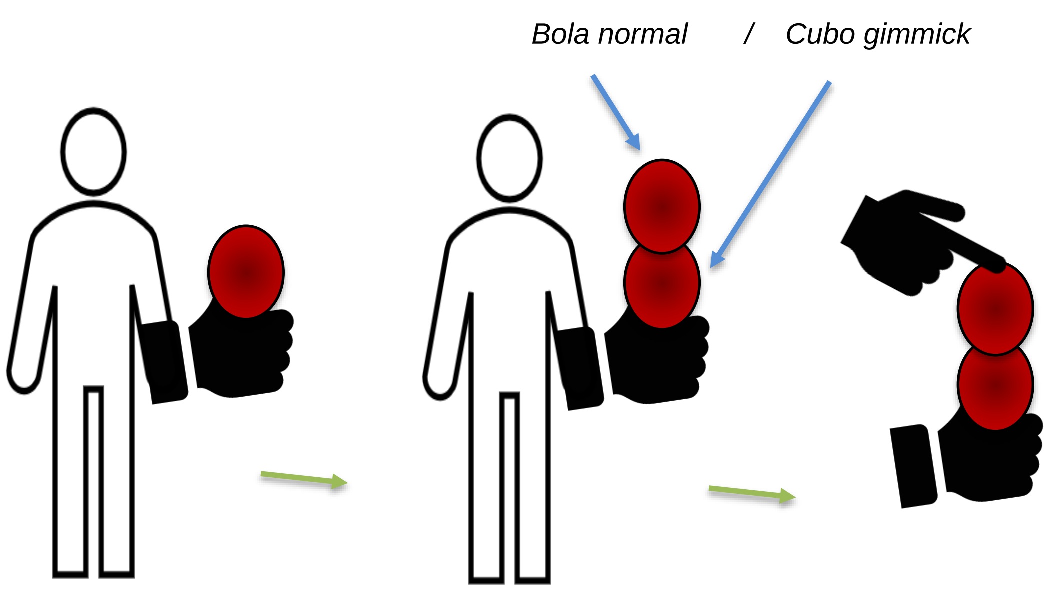


Ilustración 13: Paso 3, ejecución actividad 6.

Paso 4: Teniendo listo la forma de un cono de helado (imaginario) con doble pelotas, ahora necesitas presionar la bola de esponja normal hacia abajo (tienes que abrir levemente el puño) para que la bola normal desdoble hacia adentro el cubo gimmick. Esto hará que vuelva a su forma original (cubo con un agujero) y al mismo tiempo ocultándose dentro de este. Ahora solo debes abrir tu mano y ¡Pum!, las dos bolas ahora se han transformado en un cubo.

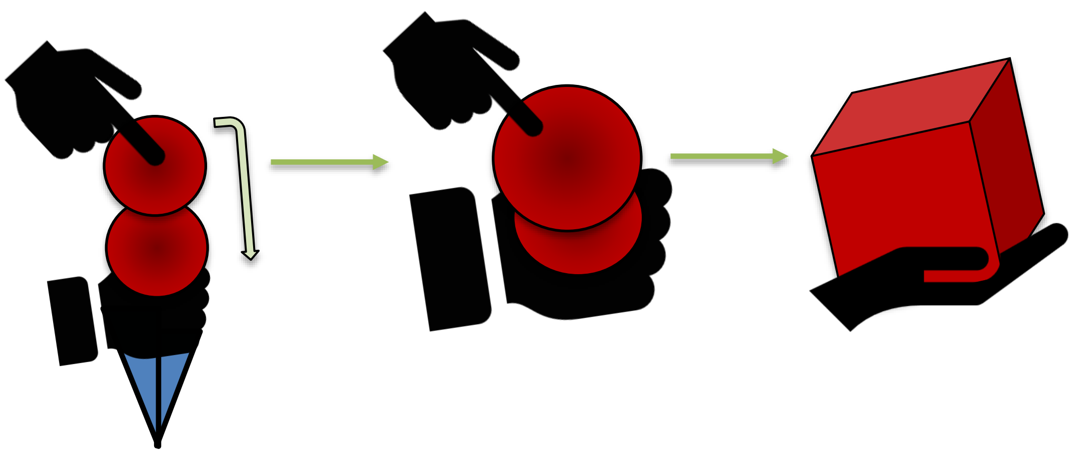


Ilustración 14: Paso 4, ejecución actividad 6.

¡Ojo!: Al revelar la transformación del cubo, **no puedes mostrarlo como si nada**, recuerda que en una de sus bases está el agujero junto a la otra bola de esponja. Te recomiendo que una vez transformado el cubo para mostrarlo "limpiamente", con tus dedos medio y anular puedes tapar este agujero y dará la ilusión perfecta.

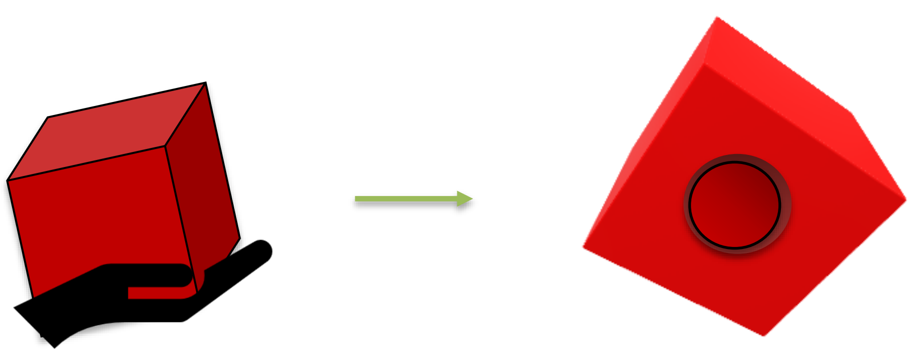


Ilustración 15: Paso 5, ejecución actividad 6.

3. Si deseas seguir perfeccionando tu técnica de magia (en estos efectos de magia solo utilizamos 1: empalme de dedos) te recomiendo que compres un libro, cualquiera, allí encontraras un mundo nuevo de ideas, todo sirve. Ahora bien, si deseas seguir aprendiendo magia con esponjas te recomiendo el libro “Esponjas y algo más” del Gran Henry.

4. Recomiendo estas páginas webs de tiendas de magia para la compra de los productos de magia (esponjas: bola y cubo gimmick y papel flash). Las 3 cosas rondan los 8.000 pesos en total aproximadamente, y solamente tendrías que comprar papel flash cuando se te acabe (con una hoja puedes hacer unos 15-20 semicírculos aproximadamente).

   Sitios web:

   - https://magichouse.cl/
   - https://enjoythemagic.biz/
   - https://somosmagia.cl/

5. Para obtener los archivos de GeoGebra y el PPT, puedes obtenerlos en el siguiente link:

   Sitio web:

   - https://drive.google.com/drive/folders/1xjX8qNBib9CZ4d1g2twVBJrI3KUsxN3h

Cierre.

Termino (5 minutos): Retroalimentación final del aprendizaje de Geometría 3D (0A04).

Para finalizar se realiza una síntesis y retroalimentación general, comentando y respondiendo algunas dudas finales (Fig 22.). Asimismo, se incentiva a las y los estudiantes que sigan aprendiendo autónomamente, a través de la Geometría 3D, se les recomienda que utilicen los recursos de GeoGebra que se usaron en estas sesiones para que los manipulen desde sus propios ordenadores.

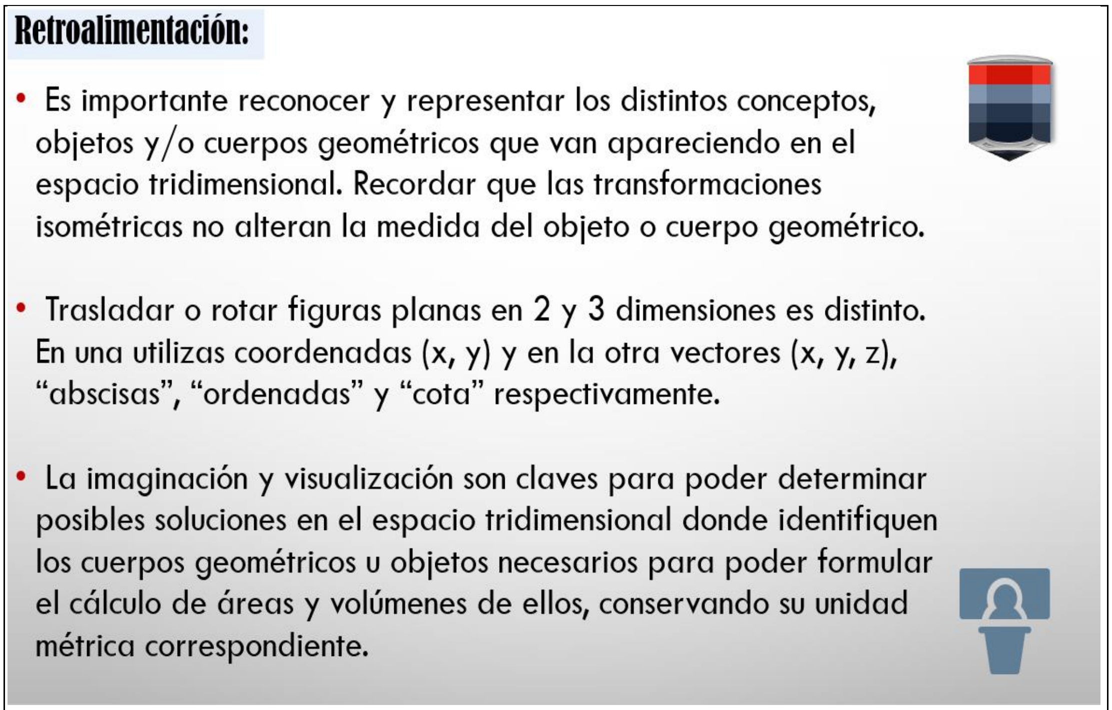


Fig 22: PPT Diapositiva 14.

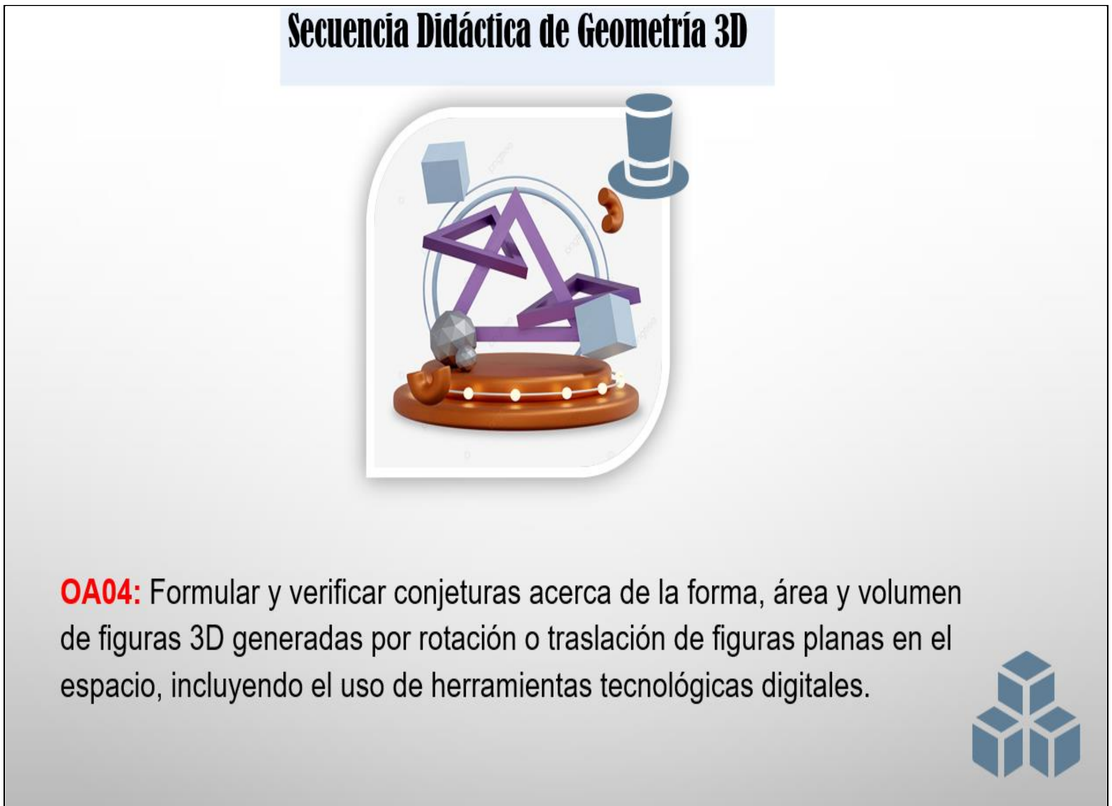


Fig 23: PPT Diapositiva 15.

5. Registro Audiovisual

Imagen 1: Estudiantes presenciales antes de iniciar la secuencia de enseñanza aprendizaje de Geometría 3D.

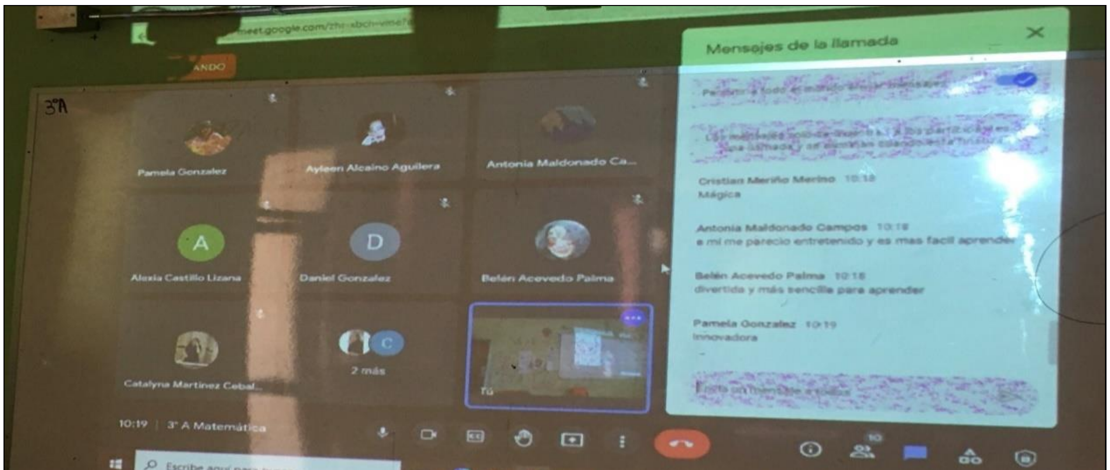


Imagen 2: Estudiantes online en la secuencia de enseñanza aprendizaje de Geometría 3D.

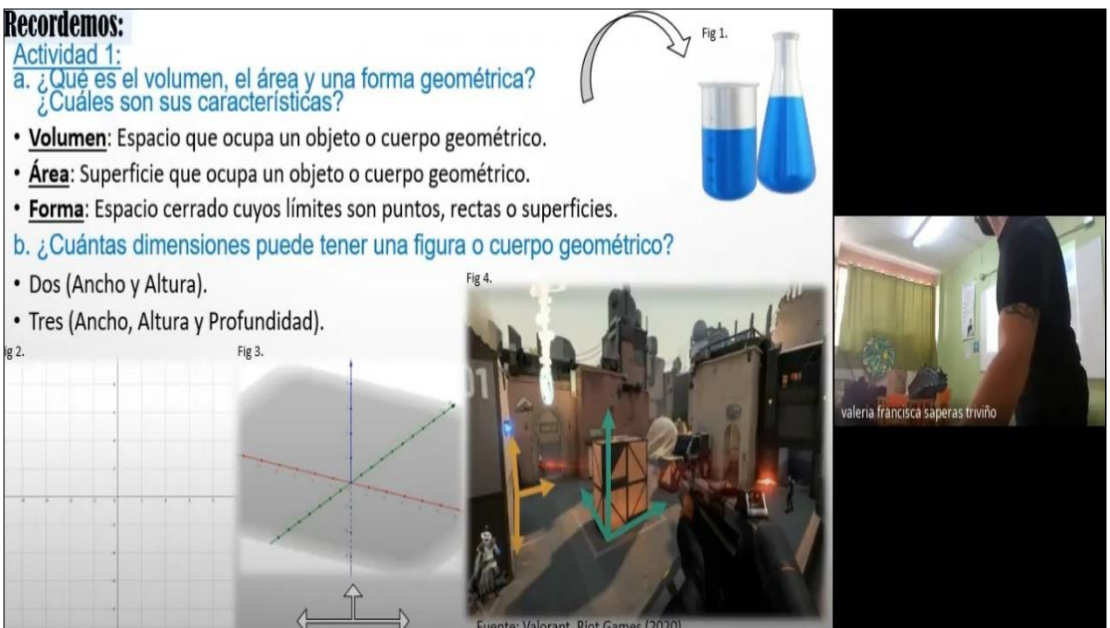


Imagen 3: Inicio de secuencia de aprendizaje.

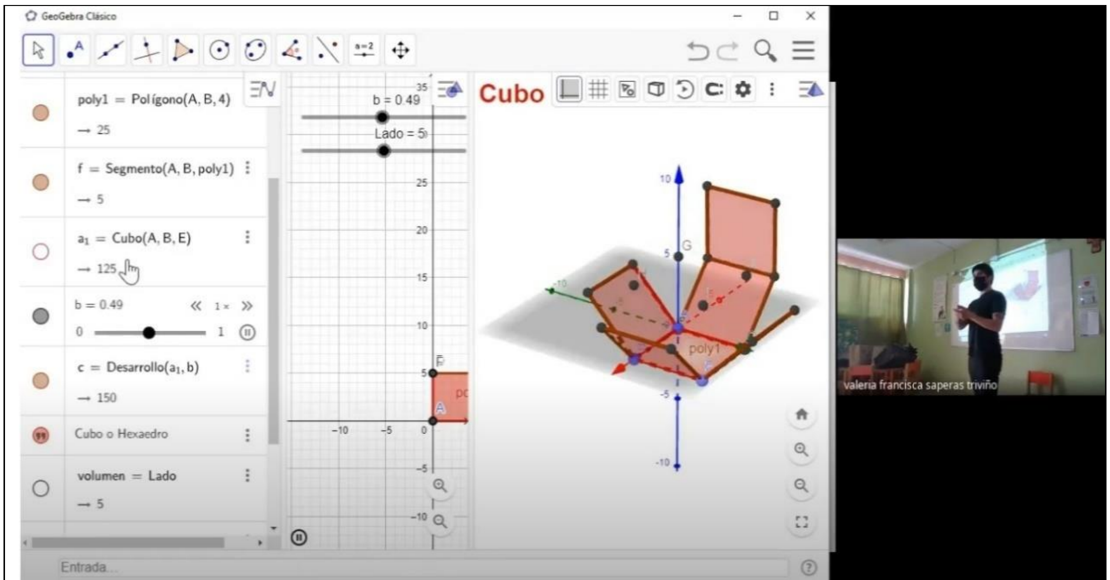


Imagen 4: Generación de cuerpos 3D en GeoGebra.


Imagen 5: Generación de la esfera a través de la magia.

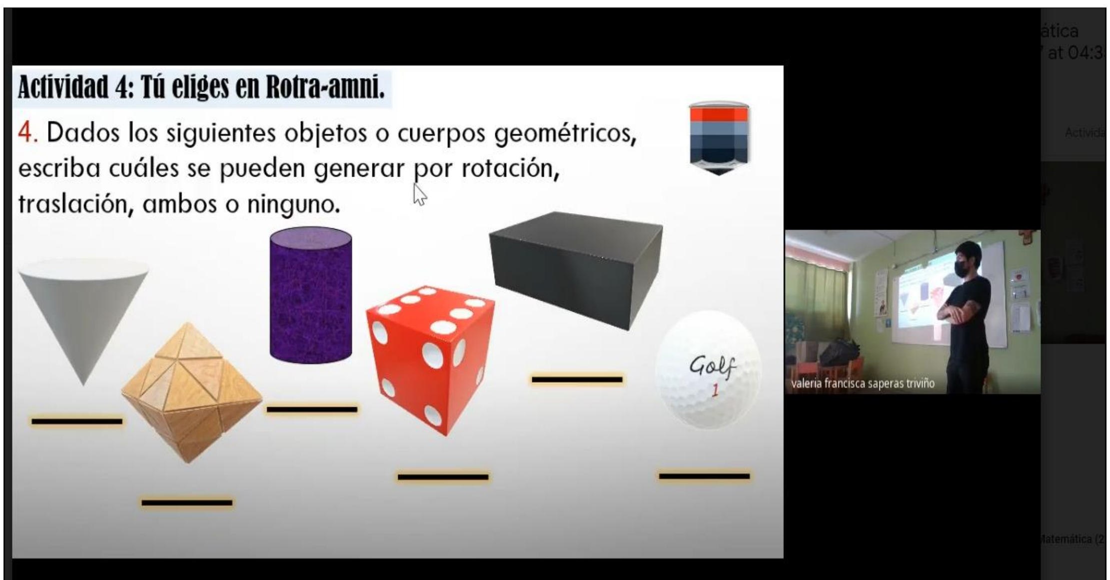


Imagen 6: Secuencia de PPT.

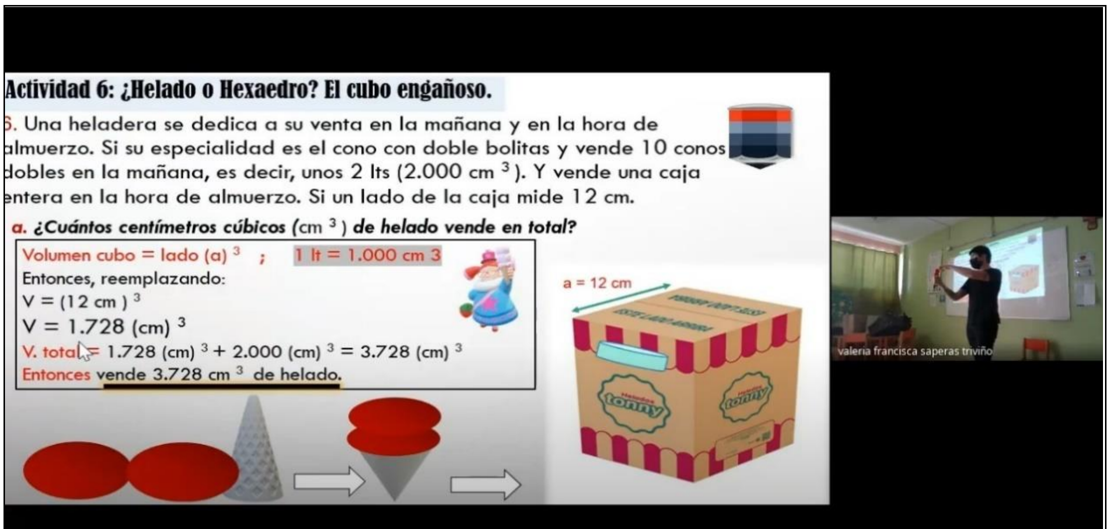


Imagen 7: Desarrollo de última actividad.


Imagen 8: Generación del cubo a través de la magia.


Imagen 9: Estudiantes escribiendo un concepto para la lluvia de ideas.

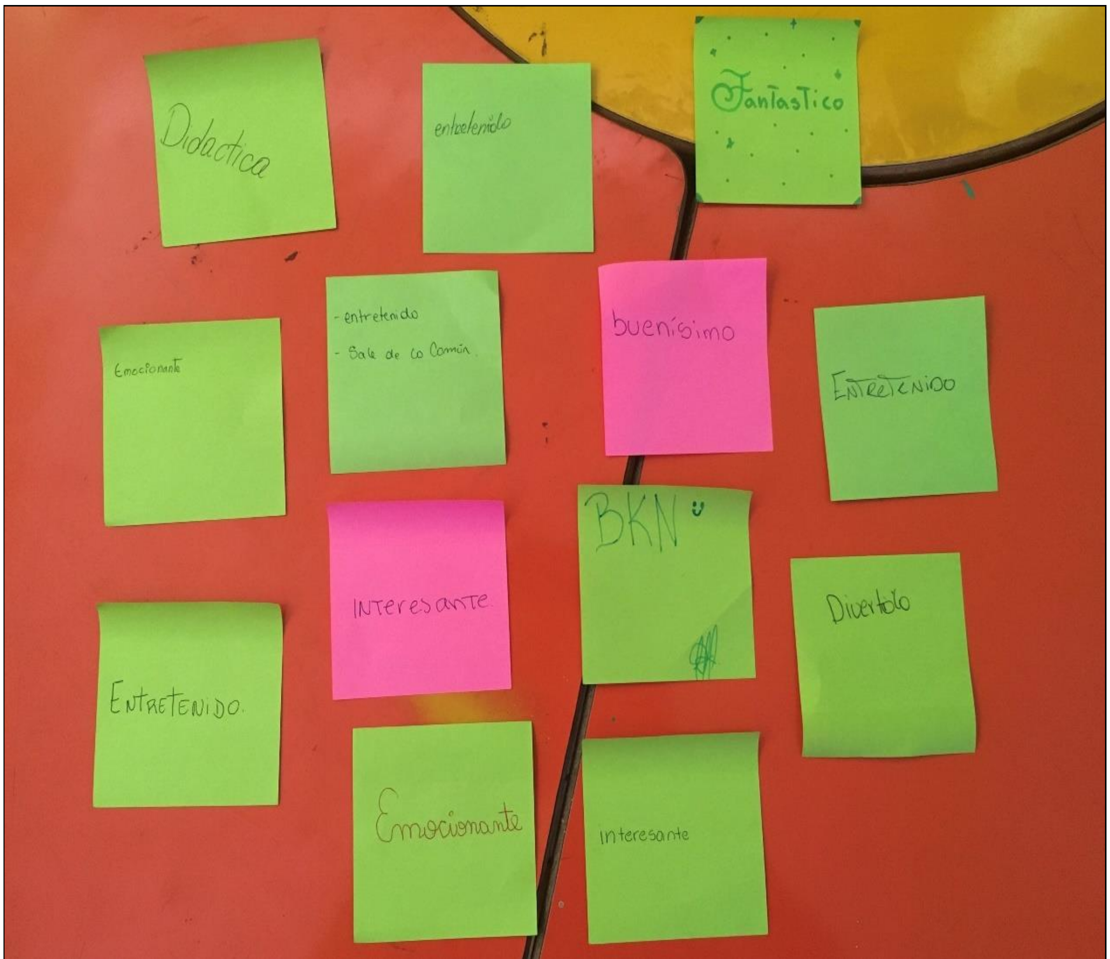


Imagen 10: Lluvia de ideas de estudiantes presenciales.

Estudiante Anónimo/ma.
11:37
Muy buena clase

Estudiante Anónimo/ma.
11:38
Interesante

Estudiante Anónimo/ma.
11:38
entretenida

Estudiante Anónimo/ma.
11:39
motivadora

Estudiante Anónimo/ma.
11:40
estuvo diferente profe

Estudiante Anónimo/ma.
11:41
a mi me parecio motivante

Estudiante Anónimo/ma.
11:41
divertida

Estudiante Anónimo/ma.
11:42
Innovadora

Estudiante Anónimo/ma.
11:42
Estuvo muy buena

Estudiante Anónimo/ma.
11:42
sorprendente

Imagen 11: Lluvia de ideas de estudiantes online (chat Google Meet).

6. Documento de Validación

Documento de validación

Estudiante:

Pavlovic, Danko.

Profesor Guía:

Figueroa, Álvaro.

Carrera: Pedagogía en Matemáticas e informática educativa.

Fecha: 25-11-2011

Índice

1. Objetivo general de investigación____________________________________3

2. Observaciones generales de las actividades__________________________4-6

3. Registros observados de las actividades_______________________________7

4. Planificación de la secuencia enseñanza aprendizaje_____________________7

5. Cuadro de validación____8-11

6.1 Objetivo general de investigación

“Elaborar una secuencia de enseñanza aprendizaje que permita el desarrollo de la habilidad de representar y visualización espacial de las y los estudiantes de 3° y 4° medio, a través de la formulación y verificación de conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales. Utilizando la magia y software educativo, basado en la teoría de las representaciones semióticas y el marco COPISI.”

6.2 Observaciones generales de las actividades

	ACTIVIDADES	PROPOSITO DE LA ACTIVIDAD	REPRESENTACIONES SEGÚN MARCO COPISI	REGISTROS TRABAJADOS SEGÚN TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTACIONES SEMIOTICAS
CLASE 1	Actividad 1	Las y los estudiantes discuten acerca de conceptos del plano 2D (cartesiano) y plano 3D (vectorial) dibujando manualmente sus distintas representaciones en el plano. Asimismo, comprenden conceptos como la forma, área y volumen. Donde, además, los relacionan con la rotación y traslación. Además, exploran la diferencia entre un cuerpo con y sin capacidad, y que apliquen dichos conocimientos para resolver problemas en contexto.	CONCRETO PICTORICO	RLN, RN, RFI, RGe, RGr.
	Actividad 2	Se espera que las y los estudiantes conjeturen y verifiquen el área total y volumen de cuerpos 3D generados por traslación y rotación, utilizando herramientas	PICTORICO SIMBOLICO	RLN, RN, RFI, RA, RGe, RGr.

		tecnológicas digitales e identificando las diferencias entre transformaciones isométricas para un cuerpo cilíndrico.		
	Actividad 3	Las y los estudiantes resuelvan problemas relacionados con el área basal de figuras 2D vinculándolo con figuras 3D, donde aplican diferentes estrategias y conceptos para el cálculo del área y volumen, e identifican cuáles polígonos se trasladaron para generar el cuerpo 3D.	PICTORICO SIMBOLICO	RLN, RN, RFI, RA, RGe.
	Actividad 4	Las y los estudiantes valoran el aporte de la geometría en los diferentes campos del diseño y las representaciones 2D tabulares, donde identifican y caracterizan manualmente cuerpos 2D antes de generarlos en 3D. Se pretende identifiquen las principales componentes de un polígono plano.	PICTORICO	RLN, RN, RFI, RT.
CLASE 2	Actividad 1	Se pretende que las y los	CONCRETO PICTORICO	RLN, RN, RFI, RGe.

		estudiantes comprendan las diferencias del plano 2D y 3D, donde a la vez pueden discriminar entre ellos para relacionarlos a objetos reales en base a la transformación isométrica que los genero (traslación o rotación).		
	Actividad 2	Las y los estudiantes representan cuerpos geométricos en el espacio tridimensional, utilizando la rotación y traslación de figuras. Se espera que aprovechen las herramientas disponibles para aprender sobre la generación de cuerpos y para dar respuestas a problemas. Además, observan los elementos geométricos que se relacionan con el área y el perímetro de figuras planas para conjeturar, calcular áreas y volúmenes de los cuerpos 3D generados con el uso de	PICTORICO SIMBOLICO	RLN, RN, RFI, RA, RGe, RGr.

		herramientas digitales.		
	Actividad 3	Se espera que las y los estudiantes aprovechen las herramientas disponibles tanto digitales como innovadoras para comprender la generación de la esfera y puedan dar respuestas a conjeturas donde tengan que plantearse en un espacio tridimensional y calcular el volumen y área, con la ayuda de herramientas digitales.	CONCRETO PICTORICO SIMBOLICO	RLN, RN, RFI, RA, RGe, RGr.
	Actividad 4	Las y los estudiantes exploran la diferencia entre una rotación y traslación observado objetos o cuerpos geométricos 3D, aplican estos conocimientos para resolver diversos problemas o desafíos aleatorios. En parejas, proactivamente.	CONCRETO PICTORICO	RLN, RN, RFI, RA, RGe.
	Actividad 5	Las y los estudiantes visualizan cuerpos geométricos en el espacio tridimensional y los relacionan con	PICTORICO	RLN, RN, RFI.

		objetos reales, de manera numérica e identificando su forma y buscando relaciones geométricas entre ellos.		
	Actividad 6	Se espera que las y los estudiantes aprovechen las herramientas disponibles tanto digitales como innovadoras para comprender la suma de volúmenes, calculando el volumen de un cubo basado en un contexto matemático.	CONCRETO PICTORICO SIMBOLICO	RLN, RN, RFI, RA, RGe.

6.3 Registros observados de las actividades

• **Registro de la Lengua Natural (RLN):** El registro de la lengua natural permite introducir definiciones, así como hacer descripciones o designaciones: Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistante de otro fijo, llamado centro; esta distancia se denomina radio.

• **Registro Numérico (RN):** Las representaciones de tipo numérico permite apreciar algunas de las características y elementos identificados de los objetos matemáticos a los que hace referencia, así como vincularlos y relacionarlos con representaciones gráficas y geométricas: Datos Circunferencia: C1 (2,1) y P2 (0,5)

• **Registro Figural-Icónico (RFI):** Engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados.

• **Registro Tabular (RT):** Los datos se presentan a través de un conjunto de filas y de columnas permitiendo visualizar la información de manera global, establecer relaciones y comparaciones entre los diferentes datos que en ella se recogen, así como descubrir propiedades y características del objeto de conocimiento representado.

• **Registro Algebraico (RA):** Permiten realizar generalizaciones, modelizaciones y señalar características particulares del objeto que representa, como puede ser longitud del radio, centro, posición en el plano, etc.

• **Registro Geométrico (RGe):** El registro geométrico admite operaciones de reconfiguración y manipulación que facilitan la comprensión y el establecimiento de conexiones entre diferentes objetos.

• **Registro Gráfico (RGr):** El registro gráfico posibilita inferir, con un simple vistazo, el comportamiento que va seguir una determinada función, así como efectuar tratamientos propios de su registro como son las traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, dilataciones, etc; La representación gráfica-cartesiana hace patentes en estos elementos.

6.4 Planificación de la secuencia enseñanza aprendizaje

La planificación que fue sometida al proceso de validación y utilizada en la secuencia motivacional de enseñanza aprendizaje de Geometría 3D se encuentra en Anexos (4.). A continuación, se encuentra el cuadro de validación del evaluador experto.

6.5 Cuadro de validación

La validación será a través de los siguientes criterios:

- **Criterio 1:** ¿Cumple con el propósito?

Donde 1: No cumple; 2: Cumple levemente; 3: Cumple moderadamente; 4: Cumple; 5: Cumple en la totalidad.

Respuesta: 5.

- **Criterio 2:** ¿Se visualiza cada una de las representaciones COPISI declaradas?

Donde se responde Si o No.

Respuesta: Si.

- **Criterio 3:** ¿Se visualiza cada una de registros declaradas bajo la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas?

Donde se responde Si o No.

Respuesta: Si.

Y finalmente se solicita ingresar alguna observación de la actividad si es necesario.

A continuación, se presenta la tabla de validación:

Sesión	Actividades	Criterio 1 (1,2,3,4,5)	Criterio 2 (Si, No)	Criterio 3 (Si, No)	Observaciones de la Actividad
1	Actividad 1	5	CONCRETO Si PICTORICO Si SIMBOLICO Si	RLN Si RN Si RFI Si RGe Si RGr Si	Sin observaciones.
1	Actividad 2	5	PICTORICO Si SIMBOLICO Si	RLN Si RN Si RFI Si RA Si RGe Si RGr Si	Sin observaciones.
1	Actividad 3	5	PICTORICO Si SIMBOLICO Si	RLN Si RN Si RFI Si RA Si RGe Si	Sin observaciones.
1	Actividad 4	5	CONCRETO Si PICTORICO Si SIMBOLICO Si	RLN Si RN Si RFI Si RT Si	Sin observaciones.
2	Actividad 1	5	PICTORICO Si SIMBOLICO Si	RLN Si RN Si RFI Si RGe Si	Sin observaciones.
2	Actividad 2	5	PICTORICO Si SIMBOLICO Si	RLN Si RN Si RFI Si RA Si RGe Si RGr Si	Sin observaciones.
2	Actividad 3	5	CONCRETO Si PICTORICO Si SIMBOLICO Si	RLN Si RN Si RFI Si RA Si RGe Si RGr Si	Sin observaciones.

2	Actividad 4	5	PICTORICO Si SIMBOLICO Si	RLN Si RN Si RFI Si RA Si RGe Si	Sin observaciones.
2	Actividad 5	5	PICTORICO Si SIMBOLICO Si	RLN Si RN Si RFI Si	Sin observaciones.
2	Actividad 6	5	CONCRETO Si PICTORICO Si SIMBOLICO Si	RLN Si RN Si RFI Si RA Si RGe Si	Sin observaciones.
Observaciones generales: Sin observaciones., se realizaron los cambios solicitados.					

Nombre del o la validadora: Gabriel Alejandro Meza Pereira.

Firma: ______________________