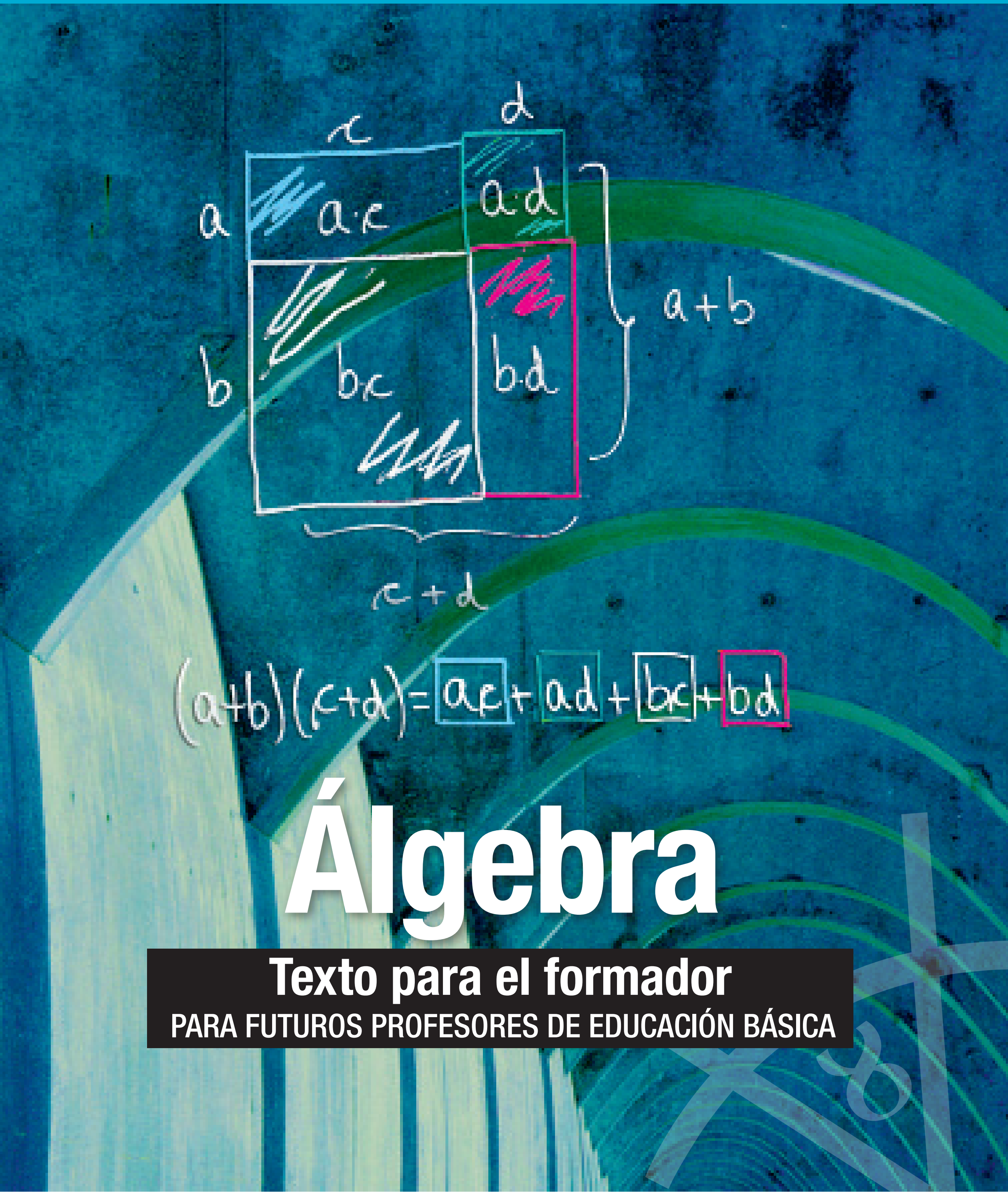
ReFIP Matemática

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA



Álgebra

Texto para el formador

PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Proyecto FONDEF – CONICYT D09 I1023 (2011 – 2014)
Directora de Proyecto: Salomé Martínez
Autores: Eugenio Chandía
Alejandro López
Salomé Martínez
Francisco Martínez
Daniela Rojas

Dirección editorial: Arlette Sandoval Espinoza
Corrección de estilo: María Paz Contreras Aguirre
Dirección de arte: Carmen Gloria Robles Sepúlveda
Coordinación diseño: Katherine González Fernández
Diseño Portada: José Luis Jorquera Dölz
Diagramación: Katherine González Fernández
Producción: Andrea Carrasco Zavala

Primera edición: marzo 2014

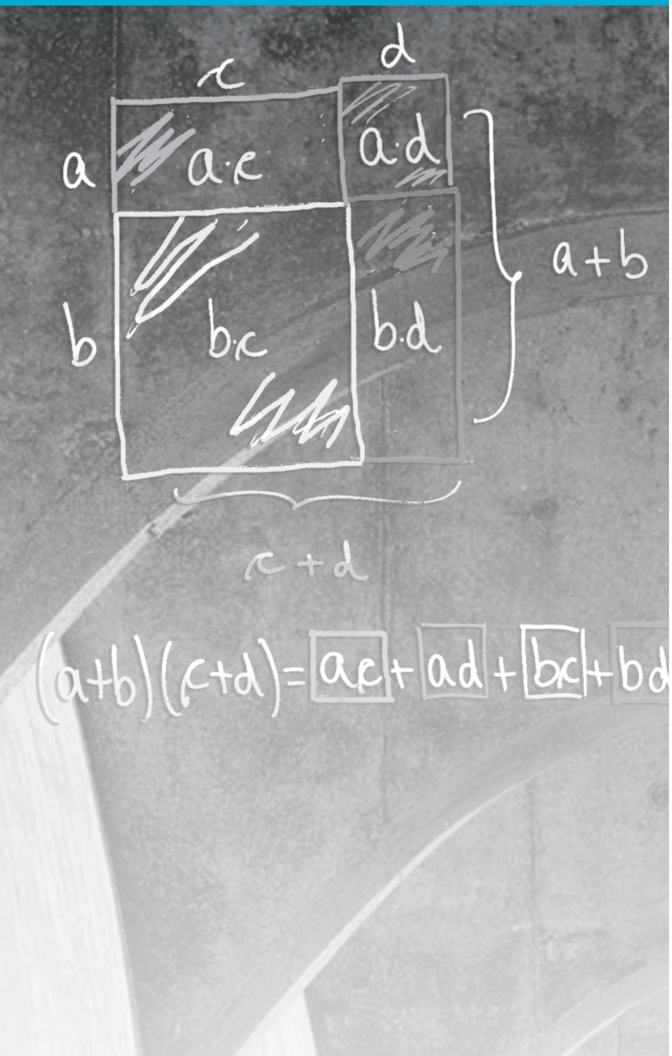
Coyancura 2283, oficina 2013,
Providencia. Santiago de Chile.

www.ediciones-sm.cl
Atención al cliente: 600 381 13 12

Impreso en Chile/ Printed in Chile

ReFIP Matemática

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL
DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA



Álgebra

Texto para el formador

PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

AUTORES:

Eugenio Chandía,
Universidad de Chile

Alejandro López,
Universidad Andrés Bello

Salomé Martínez,
Universidad de Chile

Francisco Martínez,
Universidad de Chile

Daniela Rojas,
Universidad de Chile

ReFIP Matemática

Recursos Pedagógicos para la Implementación de los Estándares de Formación Inicial de Profesores de Enseñanza Básica en Matemáticas. Proyecto FONDEF - CONICYT D09 I1023 (2011 - 2014).

Institución ejecutora principal	Centro de Modelamiento Matemático (CMM), Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
Institución ejecutora asociada	Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile
Entidades asociadas	Ediciones SM Chile, Ministerio de Educación, Fundación Luksic y Academia Chilena de Ciencias

Directora	Salomé Martínez (Universidad de Chile, Centro de Modelamiento Matemático)
Director alterno	Héctor Ramírez (Universidad de Chile, Centro de Modelamiento Matemático)
Equipo de Autores y Co-autores	• Anita Araneda (Pontificia Universidad Católica de Chile) • Eugenio Chandía (Universidad de Chile) • Luis Dissett (Pontificia Universidad Católica de Chile) • Macarena Larraín (Universidad del Desarrollo) • Renato Lewin (Pontificia Universidad Católica de Chile) • Alejandro López (Universidad Andrés Bello) • Rubén López (Universidad Católica de la Santísima Concepción) • Salomé Martínez (Universidad de Chile) • Andrés Ortiz (Universidad Católica de la Santísima Concepción) • Cristián Reyes (Universidad de Chile) • Daniela Rojas (Universidad de Chile) • Horacio Solar (Universidad Católica de la Santísima Concepción) • María Alejandra Sorto (Texas State University) • María Leonor Varas (Universidad de Chile) • Pierina Zanocco (Universidad Santo Tomás)
Colaboradores	• José Luis Abreu (Universidad Nacional Autónoma de México) • Pablo Dartnell (Universidad de Chile) • Joel Espinoza (Universidad Nacional Autónoma de México) • María José García (Pontificia Universidad Católica de Chile) • Nancy Lacourly (Universidad de Chile) • Francisco Martínez (Universidad de Chile) • María Victoria Martínez (Universidad de Chile) • Josefa Perdomo (Universidad de Chile) • Elizabeth Suazo (Universidad de Concepción) • Rodrigo Ulloa (Universidad Católica de la Santísima Concepción) • Claudia Vásquez (Pontificia Universidad Católica de Chile, sede Villarrica)
Asesores	• María Aravena (Universidad Católica del Maule) • Miguel Díaz (Universidad de Viña del Mar) • Patricio Felmer (Universidad de Chile) • Arturo Mena (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso) • Raimundo Olfos (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso)
Comité editorial	• Patricio Felmer (Universidad de Chile) • Carmen Montecinos (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso) • Jaime Sánchez (Universidad de Concepción)
Evaluadores	• Guido Del Pino (Pontificia Universidad Católica de Chile) • Pedro Gómez (Universidad de Los Andes, Colombia) • Dinko Mitrovic (Universidad de Santiago de Chile) • Elizabeth Montoya (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso) • Carlos Pérez (Universidad de Concepción) • Francisco Rojas (Pontificia Universidad Católica de Chile) • Pierre Romagnoli (Universidad Andrés Bello) • Marisol Valenzuela (EducaUC)

Este libro es un complemento de la colección ReFIP Matemática "Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica en Matemática", la cual es una serie de cuatro textos: Números, Geometría, Álgebra y Datos y Azar, enfocados en la matemática para enseñar que requieren los profesores de educación básica. Esta colección fue elaborada en el proyecto FONDEF-D09I1023, por un equipo de expertos disciplinarios y pedagógicos de distintas universidades, liderados desde el Laboratorio de Educación del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile.

La colección de textos ReFIP está diseñada teniendo como marco los Estándares Orientadores para Egresados de Carreras de Pedagogía en Educación Básica y las Bases Curriculares para Educación Básica de 1° a 6° básico. Es así, que esta colección es una herramienta de apoyo para implementar los estándares en las carreras de pedagogía.

El presente texto es un material de apoyo a la colección y está dirigido a los formadores de profesores con el propósito de entregar orientaciones que permitan vincular el contenido de la colección con los Estándares y herramientas para su implementación en el aula universitaria.

En el capítulo I se presenta el proyecto ReFIP, la motivación para su realización y el contexto en el que se desarrolla. Se hace una breve reseña del marco teórico que sustenta la forma en que escribieron los textos: el *Conocimiento Matemático para Enseñar*[1]. Se describe además el proceso de elaboración de los textos, dando cuenta de la magnitud del proceso de pilotaje, tanto en cantidad de alumnos de pedagogía que usaron las versiones iniciales de los textos, como en la diversidad de universidades que participaron en el proyecto.

En el capítulo II se presenta una investigación realizada con datos obtenidos durante el proyecto, sobre la ansiedad matemática. Se muestra cómo la ansiedad matemática afecta el desarrollo del proceso de aprendizaje, y cómo las creencias y expectativas de los profesores afectan a los niños y niñas. Se muestra la relación de la ansiedad matemática de acuerdo con el género. Se presenta un test para medirla, y finalmente se ofrece una actividad para tratar este tema con estudiantes de pedagogía básica.

En el capítulo III se presenta el texto ReFIP, Álgebra, explicando el formato en que aparece el material, así como los contenidos cubiertos. Se entrega una lista de la bibliografía consultada, comentando los recursos más relevantes usados en la elaboración del texto. Se entregan, además, tablas que relacionan el texto ReFIP con el eje Álgebra de los estándares de formación, y se dan ejemplos de esta cobertura. Se entregan también tablas sobre la vinculación del currículum con el texto, y ejemplos de uso para cubrir la progresión de los contenidos presentes en el currículum.

---

[1]BALL, D. L., HILL, H. C., BASS H. (2005), Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? American Educator, 29(1), pp. 14-17, 20-22, 43, 46.

I. Presentación de la colección de textos ReFIP

En la última década, el Ministerio de Educación –consciente de la necesidad de reforzar la calidad de la formación inicial docente– ha venido impulsando un conjunto de acciones estratégicas, entre las cuales destacan la definición de Estándares Orientadores para egresados de las carreras de Pedagogía, la Evaluación Diagnóstica de los conocimientos de los egresados de carreras de Pedagogía (Prueba Inicia), la creación de la Beca Vocación de Profesor, la implementación de convenios para mejorar el desempeño de las Facultades de Educación de la universidades nacionales y la promoción de la Carrera Docente, entre otras.

El proyecto Fondef, ReFIP Matemática se propuso producir una colección de textos para estudiantes de Pedagogía en Educación Básica, y material de apoyo para formadores de profesores, en línea con los Estándares, buscando contribuir en la mejora de la preparación para enseñar matemática de futuros profesores, a través de la interpretación de los Estándares. Asimismo, el proyecto buscó aportar a la formación de capacidades locales, en instituciones de educación superior de todo el país, para favorecer la implementación de los mismos Estándares, en los distintos programas de Pedagogía en Educación Básica.

En línea con los Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Básica, se elaboraron cuatro textos, en correspondencia con los cuatro ejes de matemática: Números, Geometría, Álgebra y Datos y Azar. El contenido matemático de los textos está centrado en el *Conocimiento Matemático para Enseñar*, concepto en el que profundizaremos más adelante, abordando aspectos como razonamiento matemático, lenguaje matemático, representaciones, resolución de problemas, uso de material concreto, errores y dificultades, entre otros.

Cada capítulo de los textos de la colección ReFIP, está organizado de manera que el futuro profesor aprenda y ejercite los conceptos matemáticos importantes. Se comienza con el desarrollo del conocimiento matemático para enseñar, profundizando en aquellos aspectos que permiten argumentar propiedades, algoritmos, etc. En este desarrollo se espera motivar en los futuros profesores la necesidad de contar con nuevas herramientas, presentando luego los contenidos asociados, para suplir dicha necesidad. Cada vez que resulta necesario, el texto destaca en recuadros las principales ideas y conceptos que se han desarrollado hasta allí. Además, el desarrollo del contenido se va articulando con propuestas para la reflexión, ejemplos y ejercicios que buscan consolidar los aprendizajes de los futuros profesores. Se presentan además recursos multimedia para estudiantes de pedagogía, producidos dentro del proyecto, para cada uno de los ejes del currículum.

En su esencia, los textos persiguen:

- Abordar las dimensiones de los Estándares que cruzan los ejes: saber la matemática para enseñar y saber enseñar la matemática.
- Favorecer la integración del conocimiento disciplinar y pedagógico.
- Incorporar los contenidos acordes al currículum escolar vigente en el país.
- Poner el foco en el Conocimiento Matemático para Enseñar, que comprende el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico de la matemática.
- Abordar el conocimiento del currículum escolar, dificultades y errores, el uso de material concreto y distintos tipos de representaciones.
- Incluir actividades de reflexión.
- Abordar el razonamiento matemático, el uso de lenguaje matemático y la resolución de problemas.

1. El conocimiento matemático para enseñar

Hoy existe evidencia de que la matemática que se pone en juego en la sala de clase es un conocimiento disciplinar especializado para la tarea de enseñar, distinto del conocimiento que se requiere, por ejemplo, para realizar operaciones matemáticas cotidianas o para hacer cálculos de ingeniería[2] . Este conocimiento forma parte de lo que se ha denominado "conocimiento matemático para enseñar" o MKT (Mathematical Knowledge for Teaching), que incluye conocimientos disciplinares y conocimientos pedagógicos del contenido (ver recuadro). Se trata de un conocimiento disciplinar que es exclusivo del profesor y que en general no desarrolla ni requiere ningún otro profesional que haga uso de las matemáticas en su trabajo.

En este sentido, el proyecto trabajó teniendo claro que la matemática escolar no es una matemática trivial, sino una matemática profunda y especializada; y que para lograr el dominio que requiere un profesor, se necesita tiempo y dedicación.

A partir del concepto de "conocimiento pedagógico del contenido[3] introducido por Lee Shulman en la década de los 80, se produjo un gran movimiento tendiente a identificar y describir conocimientos de los profesores que se encontraban en una región intermedia entre los conocimientos pedagógicos generales y los conocimientos disciplinares puros.

[2] Ver cita anterior.

Más recientemente, investigadores de la Universidad de Michigan, agrupados en el proyecto *Learning Mathematics* for Teaching, han aportado sustantivamente a precisar tanto estos conocimientos pedagógicos situados en los contenidos como - y principalmente- a caracterizar el conocimiento disciplinar contextualizado en la enseñanza. Hacia fines de la primera década de este siglo el modelo propuesto por este grupo considera un conjunto de seis componentes que integran el conocimiento matemático para enseñar[4].

(*)El proyecto ReFIP se propuso que este tipo de conocimiento fuera el foco de los textos para formación de profesores. El esfuerzo se orientó a cubrir el conjunto de seis componentes que conforman el conocimiento matemático para enseñar.

Los componentes, como se observa en la figura, se organizan en dos grandes grupos: conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido.

El conocimiento matemático para enseñar

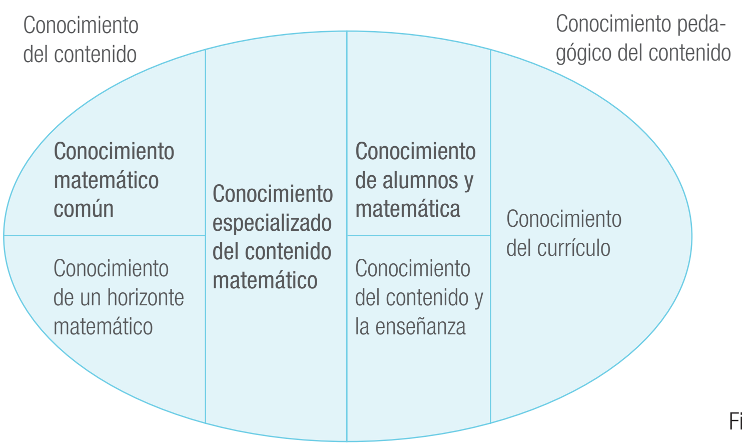


Figura 1

Para ilustrar las diferencias entre los distintos componentes de este conocimiento, el siguiente ejemplo muestra cómo en torno a una misma tarea matemática (multiplicar) se despliegan distintos conocimientos vinculados a cada una de las componentes del modelo:

- Conocimiento matemático común: → Saber multiplicar números de tres cifras
- Conocimiento especializado del contenido matemático: → Reconocer la validez de procedimientos alternativos al algoritmo de multiplicación usual.
- Conocimiento de un horizonte matemático: →reconocer el rol de la propiedad distributiva en distintos contextos matemáticos como la multiplicación de expresiones algebraicas o la regla de los signos para multiplicar enteros.

---

[3] Shulman, L. S.(1986). "Those who understand: Knowledge growth in teaching." Educational Researcher Feb. 1986: 4-14.(AERA Presidential Address).

[4] BALL, D. L., THAMES, M. H., PHELPS, G. (2008), Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special? Journal of Teacher Education, 59(5), pp. 389-407.

- Conocimiento de alumnos y matemática → Conocer las dificultades y errores frecuentes de los niños en este ámbito y saber diagnosticarlos.
- Conocimiento del contenido y la enseñanza → Saber cómo enfrentar las dificultades de los estudiantes con la multiplicación de modo de superarlas.
- Conocimiento del currículum → saber cómo secuenciar tareas de multiplicación de números de diverso tipo de acuerdo a las exigencias del currículo nacional.

Los tres dominios destacados con letra negra en la figura (Conocimiento de un horizonte matemático, Conocimiento del contenido y la enseñanza, y Conocimiento del currículo) han sido evaluados masivamente en profesores de Estados Unidos, Noruega, Corea, Irlanda, Alemania, Indonesia, Ghana y Chile. En estudios longitudinales realizados en Estados Unidos[5] y en Alemania[6], que incluyeron evaluaciones a los estudiantes, se logró probar la relación entre mayores ganancias de aprendizaje de los alumnos con mayor conocimiento de su profesor. Es más, este conocimiento es el que mejor explica el mayor aprendizaje de los niños, en comparación con el impacto de otros factores, tales como el conocimiento disciplinar puro, la cantidad de asignaturas de matemática cursadas por los profesores, el conocimiento pedagógico general. Es decir, se trata de un conocimiento valioso.

2. Elaboración de los textos

La elaboración de los textos ReFIP fue una tarea que requirió de miradas diversas y de la incorporación de los usuarios finales del material que se elaboraría, los estudiantes de carreras de pedagogía en enseñanza básica y sus profesores (formadores). Por eso desde un comienzo el equipo comprendió que para emprender una tarea de esta naturaleza era imprescindible llevar adelante un proceso participativo, que contara además con mecanismos efectivos de retroalimentación.

Teniendo presentes estos factores, el diseño del proyecto consideró la temprana validación de los textos en elaboración, mediante un proceso amplio de pilotaje (prueba en el aula) en asignaturas dentro de programas de formación inicial de profesores. En cuanto a la elaboración de los textos, la opción fue convocar también a un trabajo colaborativo, para la redacción de las versiones que serían utilizadas en el proceso de pilotaje. En una segunda etapa, la información recogida como resultado de los pilotajes y otras formas de evaluación de los textos, fue usada por el equipo del proyecto para ajustar y editar la versión final de los textos.

[5] HILL, H. C., ROWAN, B., BALL, D. L. (2005), Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. American Educational Research Journal, 42(2), pp. 371-406

[6] BAUMERT, J., KUNTER, M., BLUM, W., BRUNNER, M., VOSS, T., JORDAN, A., KLUSMANN, U., KRAUSS, S., NEUBRAND, M., TSAI, Y.M. (2010). Teacher's Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. American Education Research

2.1 Versiones iniciales

La elaboración de las versiones iniciales de los textos, que se usarían en el proceso de pilotaje[7], se llevó adelante en un trabajo de grupos de autores en torno a cada uno de los textos. El esquema de trabajo consideró que en esta etapa los textos fueran de autoría colectiva, concordando aspectos fundamentales de ellos.

Estaba previsto que los temas se abordaran con un enfoque y un lenguaje común, mostrando conexiones entre las distintas áreas de la matemática y homogeneidad en la redacción. De este modo, si bien los autores trabajaron en grupos centrados en la elaboración y redacción de contenidos de cada uno de los textos, fue el equipo en su conjunto el que aportó con sugerencias o críticas a los avances presentados en cada reunión. Los grupos de trabajo en torno a cada texto no fueron siempre estables, sino que algunos autores fueron rotando y otros se fueron incorporando en forma gradual, para dar respuesta a requerimientos específicos.

Las versiones iniciales de los textos se probaron en aula en un pilotaje amplio para así poder incorporar la visión de los usuarios acerca del material producido. Además, mediante este proceso se recopiló información sobre el uso de los textos, aprovechando esta instancia para promover la transferencia del proyecto a las universidades que imparten carreras de Pedagogía en Educación Básica.

[5] El *pilotaje* de un texto corresponde a su uso en una sección de alguna asignatura relacionada con matemática dentro de un programa de Pedagogía en Educación Básica.

El proceso de pilotaje permitió al Proyecto ReFIP Matemática:

- Retroalimentar a los autores, desde la perspectiva de los formadores y de los futuros profesores, en el proceso de elaboración de los textos.
- Recopilar material para la elaboración del texto del formador.
- Medir el impacto del uso de los textos, y a partir de ello iniciar diversas investigaciones en el ámbito de la formación inicial docente.

El pilotaje se realizó en un conjunto de universidades distribuidas a lo largo del país y que imparten la carrera de Pedagogía Básica. Se consideró una muestra de universidades que estuvieran interesadas en participar y que representaran la diversidad existente en el país, en cuanto a localización geográfica, tipo de universidad (pública, privada, perteneciente o no al Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas, CRUCH), exigencias de ingreso a los alumnos (Prueba de Selección Universitaria y puntajes de ingreso), entre otros factores.

En total, durante los dos semestres de 2012 y el primer semestre de 2013 participaron en el proceso de pilotaje 16 universidades, ubicadas entre Iquique y Punta Arenas, que imparten la carrera de Educación Básica:

- En el primer semestre de 2012 se probaron dos de los textos en 13 universidades (56 secciones), sumando 2.300 alumnos aproximadamente.
- En el segundo semestre de 2012 se probaron los textos en 14 universidades (75 secciones), sumando 2.700 alumnos aproximadamente.
- En el primer semestre de 2013 se usaron los textos en 3 universidades (7 secciones), sumando 200 alumnos aproximadamente.

Las universidades que participaron en los pilotos fueron las siguientes:

Región	Universidad
Tarapacá	Universidad Arturo Prat.
Valparaíso	Universidad de Playa Ancha, Universidad de Viña del Mar, Universidad de Las Américas.
Metropolitana	Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad de las Américas, Universidad Santo Tomás, Universidad Diego Portales, Universidad del Desarrollo, Universidad Alberto Hurtado, Universidad San Sebastián, Universidad de Los Andes.
Bío Bío	Universidad de las Américas, Universidad San Sebastián, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Universidad del Bío Bío, Universidad de Concepción.
La Araucanía	Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad Católica de Temuco.
Los Ríos	Universidad San Sebastián.
Los Lagos	Universidad San Sebastián.
Magallanes	Universidad de Magallanes.

Para el desarrollo de los pilotajes, se utilizaron versiones preliminares de los cuatro textos, que fueron distribuidas a cada uno de los formadores y a todos los estudiantes de pedagogía básica participantes en el proceso. Cada formador decidió la forma como utilizar el libro en apoyo a su curso, en una o varias unidades o módulos, dependiendo de la estructura del programa de cada asignatura.

En la etapa de pilotaje (2012), los libros fueron utilizados como material de clase o de apoyo por aproximadamente 5000 estudiantes de 131 secciones. Además se realizaron capacitaciones a los académicos que impartieron los cursos.

Texto	Número de pilotos	Número de alumnos
Números	44	1.865
Álgebra	29	937
Geometría	33	1.295
Datos y azar	25	858
Total	131	4.955

Para evaluar el uso y el impacto de los textos se aplicaron a lo largo del proceso de pilotaje una serie de instrumentos orientados tanto a los docentes como a los estudiantes: encuestas para alumnos (de satisfacción, y de creencias y actitudes[8]), pruebas de Conocimiento Matemático para Enseñar[9] y encuestas de Expectativas Docentes y Ansiedad Matemática.

Los textos en su versión inicial fueron también sometidos a evaluación por parte del Comité Asesor del proyecto y otros evaluadores externos. Adicionalmente, a través de un taller de trabajo con un grupo de estos evaluadores, se logró obtener y socializar consensos en torno al valor de los textos como herramientas pedagógicas y la pertinencia de sus enfoques y contenidos. También se recogió información relevante, complementaria a la obtenida a través de las evaluaciones individuales de cada texto, sobre los ajustes o mejoras necesarias, del enfoque y los contenidos, para contribuir al proceso de elaboración final.

[8] Desarrollada por el proyecto Teacher Education and Development Study in Mathematics, TEDS-M, de la International Association for the Evaluation of Educational Achievement, IEA.

[9] Desarrolladas por el proyecto LMT, Learning Mathematics for Teaching, de la Universidad de Michigan.

2.2 Versiones Finales

En la etapa final, el trabajo se concentró en la redacción de las versiones definitivas de los textos, sobre la base de la acumulación de aprendizajes obtenidos en distintos momentos del proyecto: elaboración de las versiones iniciales, opiniones de usuarios y evaluación experta.

El trabajo de elaboración de las versiones definitivas se centró en dar coherencia global a cada texto, introduciendo ajustes de contenido y forma. Para ello, cada libro quedó a cargo de un grupo de autores responsable de producir el texto final.

Los textos finales, si bien se elaboraron a partir de las versiones iniciales, tienen características distintas a aquellas de los textos usados en los pilotajes, ya que buscan constituirse en un texto guía de un curso.

En esta última etapa se presentaron las versiones revisadas de los textos a los miembros del Comité Editorial. Ellos discutieron, en una reunión con miembros del equipo del proyecto, las proyecciones del material elaborado y el proyecto en general.

II. Investigación realizada en el proyecto refip

Los aspectos socioafectivos de la educación matemática: conociendo la ansiedad matemática

Cuando los egresados de pedagogía comienzan su ejercicio profesional y toman contacto con el aula escolar, descubren rápidamente que enseñar matemáticas es más que transmitir contenidos y desarrollar habilidades. Los niños desarrollan desde muy temprano actitudes hacia la asignatura que serán relevantes para su posterior trayectoria académica y profesional. Se espera que un profesor de matemáticas efectivo sea capaz de formar estudiantes que se relacionan positivamente con las matemáticas y que creen en sus propias capacidades para adquirir conocimiento matemático. Sin embargo, la formación inicial de profesores presenta generalmente pocas instancias para abordar estos aspectos socioafectivos de la educación matemática. En la presente sección realizamos una síntesis de información relevante desde un fenómeno concreto que muchos académicos formadores de profesores observan en sus estudiantes: la ansiedad matemática.

¿Qué es la ansiedad matemática?

La ansiedad matemática es un estado de tensión que se produce en algunas personas cuando realizan operaciones numéricas o resuelven problemas matemáticos en diferentes situaciones académicas y cotidianas (Richardson & Suinn, 1972). Resolver un ejercicio en la pizarra frente a compañeros de curso o calcular cómo dividir la cuenta en un restaurant son situaciones que pueden resultar amenazantes y difíciles para las personas con alta ansiedad matemática, desarrollando en una verdadera matemafobia que los lleva a evitar este tipo de situaciones. De acuerdo a una reciente investigación, este malestar incluso puede observarse claramente en el cerebro: cuando las personas que padecen este tipo de ansiedad anticipan que deberán resolver un ejercicio de matemáticas se registra una activación de la ínsula dorsal posterior, la zona del cerebro que normalmente se activa con el dolor físico y el rechazo social (Lyons & Beilock, 2012).

La ansiedad matemática no se hereda ni es intrínseca a algunas personas, sino que se desarrolla tempranamente en los niños a partir de sus vivencias relacionadas a las matemáticas y la educación matemática. Este proceso puede entenderse como un ciclo negativo de evitación que se repite en el tiempo (Mitchel, 1987; Robertson, 1991): en la primera etapa, un estudiante tiene una experiencia negativa con las matemática; como respuesta, en la segunda etapa, el estudiante evita las situaciones que involucran matemáticas, incluyendo aquellas situaciones que conducen a aumentar sus competencias en matemáticas (por ejemplo, estudiar en el hogar); el estudiante finalmente tiene una mala preparación en matemáticas (etapa 3), que lo lleva a tener un mal rendimiento en matemáticas (etapa 4) y nuevas experiencias negativas.

La sala de clases, un punto de partida para la ansiedad matemática

El ciclo de evitación de las matemáticas es un modelo conceptual muy útil para comprender la ansiedad matemática y reconstruir analíticamente sus orígenes. Se ha preguntado directamente a sujetos con alta ansiedad por las primeras experiencias negativas que los llevaron a desarrollar una aversión hacia las matemáticas. En estos estudios (Freiberg, 2005; Perry, 2004) uno de los antecedentes mencionado más frecuentemente es haber tenido malas experiencias con profesores durante la enseñanza básica. La escuela y la sala de clases juegan un rol clave en el desarrollo inicial de actitudes hacia las matemáticas. Muchas veces se tiene poca conciencia de algunas situaciones de aula que pueden tener gran impacto en los niños, por ejemplo, cuando no pueden resolver un ejercicio en la pizarra frente a sus compañeros.

Los académicos formadores de profesores suelen conocer muchos estudiantes que se ajustan a este perfil: jóvenes con un largo historial de episodios de frustración con la matemática que parecen estar convencidos que las matemáticas simplemente superan los límites de sus capacidades.

¿Cómo afecta la ansiedad matemática a las personas?

A nivel cognitivo, la ansiedad matemática afecta la capacidad de resolver problemas matemáticos reduciendo la memoria de trabajo disponible (Ashcraft & Kirk, 2001). La memoria de trabajo es un recurso limitado para el procesamiento de información y las personas ansiosas utilizan una parte importante de ella preocupándose por la tarea que deben realizar. Consideremos el caso de un estudiante con ansiedad matemática que resuelve un problema en una prueba. Su memoria y atención se dividen en 3 focos: retener las instrucciones que contextualizan el problema, aplicar los algoritmos matemáticos que debe ocupar y, finalmente, la ansiedad que la situación suscita. Comparado con un estudiante sin ansiedad matemática, este alumno dispone de menos memoria de trabajo para responder la pregunta. Esto es un hallazgo fundamental, ya que implica que los resultados en pruebas estandarizadas de los estudiantes que padecen ansiedad matemática pueden ser un reflejo distorsionado de sus capacidades reales (Ashcraft & Moore, 2009).

A nivel personal, la ansiedad matemática afecta el gusto por las matemáticas, la educación matemática y las decisiones vocacionales (Hembree, 1990). Existe una alta correlación negativa entre la ansiedad y el gusto por las matemáticas y esto explica por qué los estudiantes con alta ansiedad matemática evitan tomar cursos electivos que involucren esta materia. Cuando llega el momento de tomar decisiones vocacionales y seguir estudios superiores, los estudiantes excluyen de sus opciones las carreras que creen que son intensivas en matemáticas (Scarpello, 2005). De hecho, muchos estudios han comprobado que los niveles de ansiedad matemática no se distribuyen uniformemente entre estudiantes de distintas carreras universitarias. De manera paradigmática, existe una gran prevalencia de ansiedad matemática en estudiantes de pedagogía, especialmente entre estudiantes de pedagogía básica (Baloglu & Koçak, 2006; Bessant, 1995). La alta incidencia de la ansiedad matemática en la profesión docente resulta preocupante, especialmente cuando se considera que los profesores serán unos de los principales referentes con que las nuevas generaciones de niños establecerán su relación con las matemáticas.

El género y la transmisión de la ansiedad matemática

La relación entre el género y la ansiedad matemática es un tema de gran interés y ha sido investigado de manera extensa. Una pregunta central de la literatura ha sido las diferencias en niveles según sexo: ¿tienen mayor ansiedad matemática los hombres o las mujeres? La evidencia al respecto es contradictoria. Existen estudios que han mostrado niveles más altos en las mujeres que en los hombres (Wigfield y Meece, 1988; Yüksel-Şahin, 2008; Baloglu y Kocak, 2006; Woodart, 2004), otros han mostrado niveles más altos en hombres que en mujeres (Abed & Alkhateeb, 2001; Reavis, 1989; Sandman, 1979) y un último grupo de estudios que no encuentra diferencias significativas según sexo (Newstead, 1998; Chiu y Henry, 1990; Chinn, 2009; Devine et al. 2012). También existen estudios que evalúan si las diferencias de género influyen en la relación entre la ansiedad matemática y el desempeño matemático, produciendo nuevamente variados resultados (Betz, 1978; Miller y Bichsel, 2004; Birgin et al. 2010). Considerando toda la evidencia, una explicación plausible es que es el contexto cultural el factor que determina realmente la magnitud y dirección de la relación entre género y ansiedad matemática, de la misma forma en que las diferencias de rendimiento en matemáticas entre hombres y mujeres se deben principalmente a factores culturales y no biológicos (Hanna, 1989).

Un aspecto en que el género y la ansiedad matemática parecen tener una relación más clara es que las profesoras mujeres con altos niveles de ansiedad aumentan la ansiedad de sus alumnas mujeres. En un reciente estudio se realizó un seguimiento a profesoras mujeres de enseñanza básica y sus alumnos (Beilock et al. 2010). Tras un año escolar, se observó que las alumnas mujeres de profesoras con alta ansiedad matemática adhirieron más a estereotipos de género (“los hombres son mejores que las mujeres para las matemáticas”) y tuvieron peor rendimiento en matemáticas que las alumnas mujeres de profesoras no ansiosas y los alumnos hombres de todos los grupos. Otras investigaciones han confirmado resultados similares (Antecol, 2012; Gunderson et al. 2012). En este sentido, si bien no es posible afirmar que las mujeres tengan mayores niveles de ansiedad matemática que los hombres, hay fuerte evidencia de que las alumnas mujeres son especialmente susceptibles a repetir patrones de ansiedad matemática cuando los observan en sus profesoras mujeres.

¿Cómo afecta la ansiedad matemática a los profesores?

Múltiples estudios han explorado como la ansiedad y las actitudes negativas hacia las matemáticas se traducen en prácticas docentes poco adecuadas. Los profesores con actitudes negativas suelen utilizar estrategias pedagógicas donde los estudiantes tienen poca autonomía individual y desarrollan dependencia hacia la figura del profesor (Karp, 1991). También se ha observado que los profesores con altos niveles de ansiedad matemática dan menos espacio a preguntas durante la clase: los cursos de profesores sin ansiedad matemática pueden llegar a hacer el doble de preguntas en clase que el curso de un profesor ansioso (Bush, 1989). En general, la ansiedad matemática individual acarrea una ansiedad para enseñar matemáticas en los profesores (Hadley & Dorward, 2011) que puede manifestarse de múltiples formas.

Existen también investigaciones y evidencia sobre los efectos de la ansiedad matemática en estudiantes de pedagogía, ya que son una población más accesible para los investigadores de este fenómeno. Para estos estudiantes, la ansiedad a las matemáticas está relacionada de manera fuerte y negativa con convicciones de eficacia docente por las matemáticas: mientras más ansiedad sienten, menos seguros están de poder enseñar las matemáticas (Bursal & Paznokas, 2006; Swars et al. 2006; Gresham, 2008). En una reciente investigación realizada en Chile se descubrió que la ansiedad matemática puede influir el ejercicio docente de maneras significativas pero sutiles, por ejemplo, a través de la formación de expectativas y creencias sobre los estudiantes. Los estudiantes de pedagogía que tienen un nivel de ansiedad sobre la mediana asignan peores expectativas de futuro académico a niños que tienen dificultades con las matemáticas en el colegio, y también son más proclives a recomendar que los niños con dificultades en la asignatura sean enviados a cursos de educación especial (Martínez, Martínez y Mizala, 2014).

Analizando los resultados de una encuesta sobre ansiedad matemática en 420 estudiantes chilenos de pedagogía general básica provenientes de distintas universidades, fue posible constatar que la relación afectiva hacia las matemáticas debe ser un eje relevante en la formación inicial de profesores. Resulta especialmente llamativo que existen estudiantes con nivel alto de ansiedad matemática incluso entre quienes toman la mención específica en matemáticas (figura 1). Además, se observó una relación significativa entre el grado de ansiedad y las creencias hacia las matemáticas (figura 2): los estudiantes más ansiosos son más cercanos a creer en métodos de aprendizaje dirigido y más cercanos también a la creencia que características fijas de las personas determinan su capacidad para aprender matemáticas (por ejemplo, que los hombres son mejores que las mujeres, o que la habilidad matemática no cambia a lo largo de la vida). En conjunto, estos resultados dibujan un desafío doble para la formación inicial de profesores en Chile: ¿los programas de pedagogía logran disminuir la ansiedad matemática de los futuros profesores?, y por otra parte, ¿se entregan herramientas para que ellos afronten la ansiedad matemática de sus futuros alumnos?

Figura 1. Porcentaje de estudiantes con y sin mención en matemáticas, según tramo de ansiedad matemática

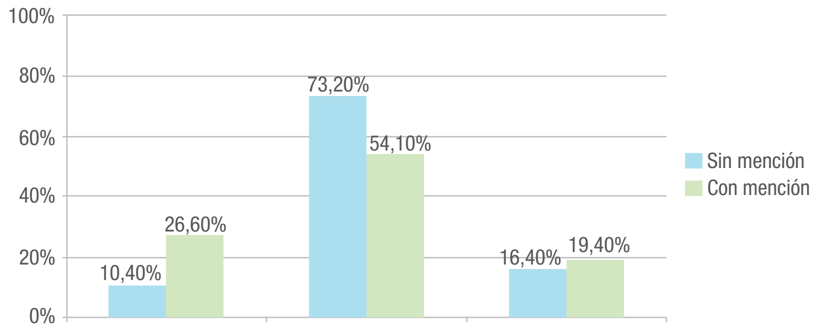
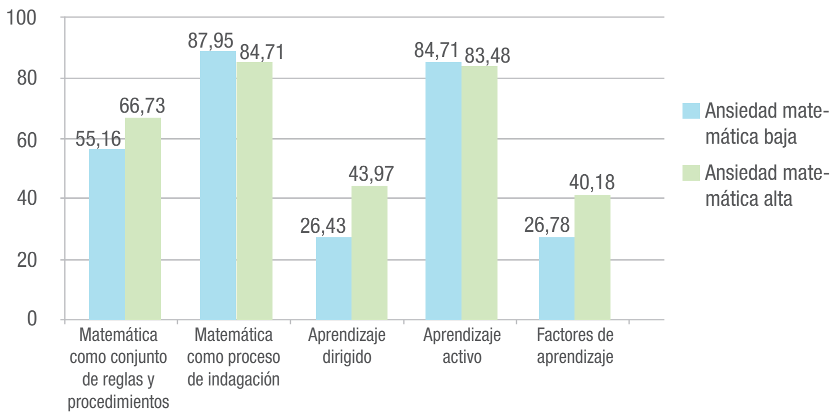


Figura 2. Niveles de ansiedad matemática según creencias hacia las matemáticas

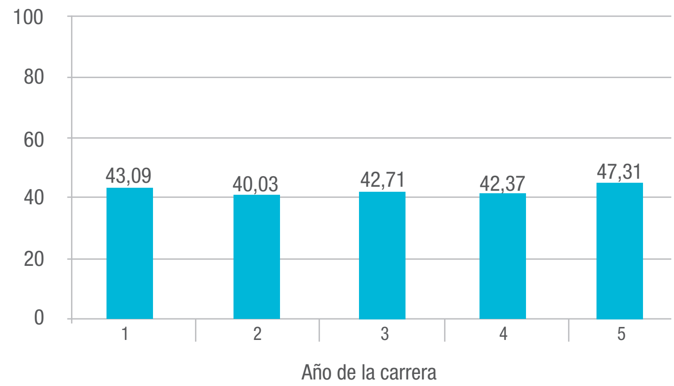


Nota: puntajes de 0 a 100%, donde mayor porcentaje indica mayor grado de acuerdo con el set de creencias.

¿Cómo enfrentamos la ansiedad matemática en la formación de profesores?

Según la evidencia disponible, la ansiedad matemática no es tratada sistemáticamente en la formación inicial. De acuerdo a una revisión de mallas y programas de pedagogía de 11 universidades chilenas, ninguna incluía mención a la ansiedad matemática en ninguno de sus cursos (Varas et al. 2008). Al analizar los resultados de la encuesta de ansiedad matemática en estudiantes de pedagogía chilenos, es posible notar que los niveles de ansiedad son parejos entre estudiantes que cursan distintos años de la carrera (figura 3). Es decir, tomar y aprobar los cursos de matemática y pedagogía en matemáticas de las carreras no mejora sustantivamente la actitud que los futuros profesores tienen hacia la disciplina.

Figura 3. Niveles de ansiedad matemática según año en la carrera de pedagogía



Nota: puntajes de 0 a 100%, donde mayor porcentaje indica mayor ansiedad matemática

En parte, estos déficits para abordar el fenómeno pueden vincularse a la carencia de instrumentos diseñados para medir y diagnosticar los niveles de ansiedad matemática. Si bien la ansiedad matemática ha sido estudiada por académicos norteamericanos desde la década de 1970, recién el año 2013 se validó en español un cuestionario para medir ansiedad matemática y se realizaron las primeras investigaciones sistemáticas al respecto en muestras chilenas. La disponibilidad actual de estos instrumentos puede ser un factor clave para generar mayores evidencias y sensibilizar la comunidad educativa nacional sobre la relevancia de la ansiedad matemática en la educación escolar y la formación de profesores.

Midiendo la ansiedad matemática

La preocupación académica por la ansiedad a las matemáticas data de la década de 1950 en Estados Unidos. Sin embargo el tema comenzó a discutirse más profusamente con la aparición del primer cuestionario que permitió medir la ansiedad matemática de manera confiable y objetiva: la escala MARS (Mathematics Anxiety Rating Scale). La escala MARS se compone de 98 ítems, cada ítem presenta una breve descripción de comportamientos en situaciones que involucran matemáticas y los encuestados deben responder cuánto se parece la situación descrita a su propia realidad. Este instrumento psicométrico tiene la desventaja de ser muy extenso y requerir considerable tiempo para su aplicación.

Otros investigadores han desarrollado nuevos instrumentos que buscan mantener la confiabilidad de la medición utilizando menos preguntas. Ejemplos de estos instrumentos abreviados son la encuesta MARS-R (Alexander & Martray, 1989) y AMAS (Hopko et al. 2003). Un segundo aspecto a considerar en la medición de este constructo es que investigaciones recientes postulan que la ansiedad matemática es un concepto multidimensional: por ejemplo, Alexander & Martray (1989) proponen que la ansiedad matemática se compone de tres ansiedades relacionadas: ansiedad las pruebas matemáticas, a los ejercicios numéricos y a las clases de matemáticas (Alexander & Martray, 1989).

Por último, los cuestionarios para medir la ansiedad matemática también se diferencian según la población objetivo que contesta el instrumento. Existen grandes diferencias en las situaciones matemáticas que vive un niño de enseñanza básica y las situaciones que enfrenta un estudiante universitario o un adulto. En este sentido, es recomendable escoger un instrumento cuyos ítems presentan situaciones que serán verosímiles para los encuestados.

Para acceder a cuestionarios gratuitos en español para medir la ansiedad matemática, se recomienda ingresar al sitio web: http://refip.cmm.uchile.cl/, administrado por el Laboratorio de Educación del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile.

No existe una receta única para aliviar la ansiedad matemática, ni una metodología estándar para abordar la ansiedad matemática dentro del currículo de formación de profesores, pero un necesario primer paso es tomar conciencia del fenómeno y abrir la discusión. A continuación proponemos una actividad que el académico formador de profesores puede utilizar para introducir el concepto de ansiedad matemática en su curso y estimular una reflexión colectiva.

Una actividad modelo para introducir el concepto de ansiedad matemática en un curso de pedagogía

Objetivos de la actividad:

- Que los estudiantes conozcan el concepto de ansiedad matemática y sus causas.
- Facilitar en los estudiantes el desarrollo de un autoconcepto positivo en relación a las matemáticas.
- Facilitar el intercambio de experiencias entre estudiantes en torno a la ansiedad matemática

Contexto ideal:

- Una sesión de clase o taller de un curso de matemáticas o didácticas de las matemáticas.

Duración:

- Entre 70 y 90 minutos de actividades presenciales.

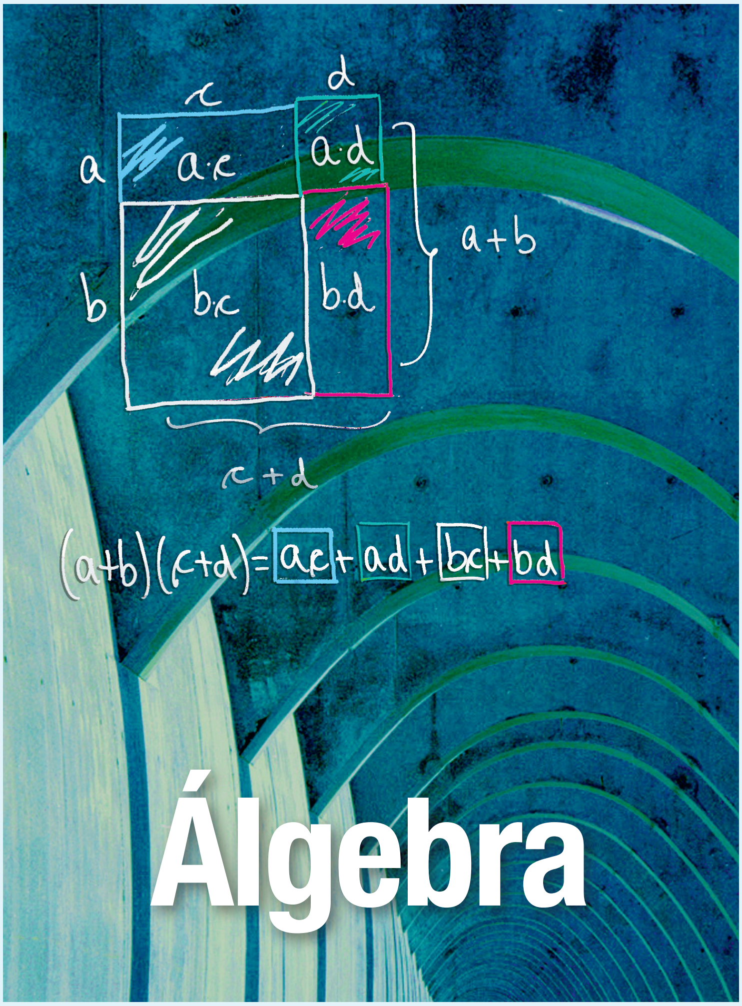
Planificación de la actividad				
Tiempo	Contenido	Actividad	Materiales utilizados	Resultado esperado
15 min.	Explicación concepto de ansiedad matemática y modelo de ciclo evitativo.	El profesor / relator presenta la historia de un niño que desarrolla ansiedad matemáticas. La historia puede ser real o un caso ficticio, pero se debe procurar que incluya detalles y especifique qué experiencias negativas inician el ciclo de evitación y cómo el ciclo se desarrolla.	Apoyo visual tipo proyector (opcional).	Los estudiantes conocen el concepto de ansiedad matemática y el modelo de ciclo evitativo.
15 - 20 min.	Visualización de experiencias previas de participantes.	El profesor entrega las instrucciones de un trabajo personal: los estudiantes / participantes deben registrar experiencias previas negativas con las matemáticas; qué sintieron al tener esa experiencia; qué sienten ahora al recordar la experiencia.	Papeles y lápiz (cada estudiantes / participante).	Los estudiantes historizan el desarrollo de su autoconcepto en relación a las matemáticas.
20 - 25 min.	Discusión colectiva de las experiencias registradas.	El profesor dirige una discusión grupal e invita a los participantes a contar las experiencias que registraron. Se estimula la participación de los estudiantes y es esperable que se presenten experiencias similares entre estudiantes, pero que tuvieron reacciones emocionales diferentes. De manera opcional, el profesor puede sugerir que los estudiantes se organicen en grupos que tuvieron experiencias similares.	(no requiere materiales)	Los estudiantes intercambian experiencias en torno a la ansiedad matemática. Los estudiantes pueden reconocer que otras personas han tenido experiencias similares y se contribuye al desarrollo de un autoconcepto matemático positivo.
5 - 10 min.	Visualización de situación actual y metas de desarrollo personal en relación a las matemáticas.	El profesor entrega las instrucciones de un trabajo personal: los estudiantes deben reflexionar individualmente y escribir cuál es su sentimiento actual hacia las matemáticas y cómo les gustaría desarrollarse en el futuro en relación a las matemáticas.	Papeles y lápiz (cada estudiantes / participante).	Los estudiantes plantean su autoconcepto y relación con las matemáticas como algo que se puede desarrollar y mejorar con el tiempo. Se facilita un autoconcepto matemático positivo.
15 - 20 min.	Discusión grupal de las situaciones individuales y propósitos.	El profesor entrega las instrucciones para un trabajo grupal: en cada grupo, los estudiantes comentan los resultados de la actividad previa y discuten distintas estrategias para lograr sus propósitos en relación a las matemáticas.	(no requiere materiales)	Los estudiantes intercambian experiencias y discuten estrategias para superar la ansiedad matemática.

Referencias

- Abed ,A. & Alkhateeb, H. (2001) Mathematics anxiety among eighth-grade students of the United Arab Emirates [abstract]. Psychol Rep, 89:65.
- Alexander & Martray (1989) The development of an abbreviated version of the Mathematics Anxiety Rating Scale. In Measurement and Evaluation in Counseling and Development. Volume 22, Issue 3, pp 143-150
- Alexander, L., & Martray, C. R. (1989). The development of an abbreviated version of the Mathematics Anxiety Rating Scale. Measurement and Evaluation in counseling and development.
- Antecol, H., Eren, O., & Ozbeklik, S. (2012). The effect of teacher gender on student achievement in primary school: evidence from a randomized experiment.
- Ashcraft, M. H., & Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. Journal of experimental psychology: General, 130(2), 224.
- Ashcraft, M. H., & Krause, J. A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety. Psychonomic Bulletin & Review, 14(2), 243-248.
- Ashcraft, M. H., & Moore, A. M. (2009). Mathematics anxiety and the affective drop in performance. Journal of Psychoeducational Assessment, 27(3), 197-205.
- Baloglu, M., & Kocak, R. (2006). A multivariate investigation of the differences in mathematics anxiety. Personality and Individual Differences, 40(7), 1325-1335.
- Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. Proceedings of the National Academy of Sciences, 107(5), 1860-1863.
- Bessant, K. C. (1995). Factors Associated with Types of Mathematics Anxiety in College Students. Journal for Research in Mathematics Education, 26(4), 327-45.
- Betz, N. E. (1978). Prevalence, distribution, and correlates of math anxiety in college students. Journal of counseling psychology, 25(5), 441.
- Birgin, O., Baloğlu, M., Çatlıoğlu, H., & Gürbüz, R. (2010). An investigation of mathematics anxiety among sixth through eighth grade students in Turkey. Learning and Individual Differences, 20(6), 654-658.
- Bursal, M., & Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science. School Science and Mathematics, 106(4), 173-180.
- Bush, W. S. (1989). Mathematics anxiety in upper elementary school teachers. School Science and Mathematics, 89(6), 499-509. Chinn, S. (2009). Mathematics anxiety in secondary students in England. Dyslexia, 15(1), 61-68.

- Chiu, L. H., & Henry, L. L. (1990). Development and validation of the Mathematics Anxiety Scale for Children. Measurement and evaluation in counseling and development
- Devine, A., Fawcett, K., Szűcs, D., & Dowker, A. (2012). Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety. Behavioral and Brain Functions, 8(33), 2-9.
- Freiberg, M. (2005). Math-that four-letter word!. Academic Exchange Quarterly, 9(3), 7-11.
- Gresham, G. (2008). Mathematics anxiety and mathematics teacher efficacy in elementary pre-service teachers. Teaching Education, 19(3), 171-184.
- Gunderson, E. A., Ramirez, G., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2012). The role of parents and teachers in the development of gender-related math attitudes. Sex Roles, 66(3-4), 153-166.
- Hadley, K. M., & Dorward, J. (2011). The Relationship among Elementary Teachers' Mathematics Anxiety, Mathematics Instructional Practices, and Student Mathematics Achievement. Journal of Curriculum & Instruction, 5(2).
- Hanna, G. (1989). Mathematics achievement of girls and boys in grade eight: Results from twenty countries. Educational Studies in Mathematics, 20(2), 225-232.
- Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety.Journal for research in mathematics education.
- Hopko, D. R., Mahadevan, R., Bare, R. L., & Hunt, M. K. (2003). The abbreviated math anxiety scale (AMAS) construction, validity, and reliability. Assessment, 10(2), 178-182.
- Karp, K. S. (1991). Elementary school teachers' attitudes toward mathematics: The impact on students' autonomous learning skills. School science and mathematics, 91(6), 265-270.
- Lyons, I. M., & Beilock, S. L. (2012). Mathematics anxiety: Separating the math from the anxiety. Cerebral Cortex, 22(9), 2102-2110.
- Martínez, Martínez y Mizala (2014) Pre-service teachers' expectations about student performance: How their beliefs are affected by their mathematics anxiety and student's gender (Enviado).
- Miller, H., & Bichsel, J. (2004). Anxiety, working memory, gender, and math performance. Personality and Individual Differences, 37(3), 591-606.
- Mitchell, C. (1987). Math anxiety: what it is and what to do about it. Action Press (AZ).
- Newstead, K. (1998). Aspects of children's mathematics anxiety. Educational Studies in Mathematics, 36(1), 53-71.

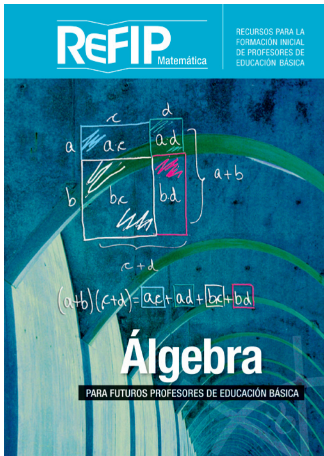
- Perry, A. B. (2004). Decreasing Math Anxiety in College Students. College Student Journal, 38(2).
- Reavis, P. (1989) Mathematics anxiety and the relationship between attitude, sex, ethnicity and achievement in mathematics in three high school curriculum tracks. University of Arizona, PhD thesis;
- Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric data. Journal of counseling Psychology, 19(6), 551.
- Robertson, D. (1991). A program for the math anxious at the University of Minnesota. American Mathematical Association of Two Year Colleges, 13(1), 53-60.
- Sandman RS (1979) Factors related to mathematics anxiety in the secondary school. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, California.
- Scarpello, G. V. (2005). The effect of mathematics anxiety on the course and career choice of high school vocational-technical education students (Doctoral dissertation, Drexel University).
- Swars, S. L., Daane, C. J., & Giesen, J. (2006). Mathematics anxiety and mathematics teacher efficacy: What is the relationship in elementary preservice teachers?. School Science and Mathematics, 106(7), 306-315.
- Varas, Felmer, Gálvez, Lewin, Martínez, Navarro, Ortiz & Schwarze (2008) Oportunidades de preparación para enseñar matemáticas de futuros profesores de educación general básica en Chile. In Calidad en la Educación, Issue 29, pp 63-88
- Wigfield, A., & Meece, J. L. (1988). Math anxiety in elementary and secondary school students. Journal of Educational Psychology, 80(2), 210.
- Woodard, T. (2004). The Effects of Math Anxiety on Post-Secondary Developmental Students as Related to Achievement, Gender, and Age. Inquiry,9(1), n1.
- Yüksel-Şahin, F. (2008). Mathematics Anxiety Among 4th And 5th Grade Turkish Elementary School Students. International Electronic Journal of Mathematics Education, 3(3).
- Woodard, T. (2004). The Effects of Math Anxiety on Post-Secondary Developmental Students as Related to Achievement, Gender, and Age. Inquiry 9(1), n1.

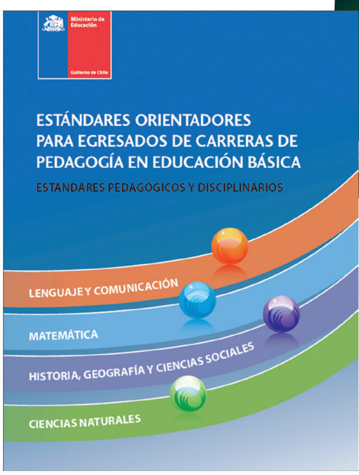


Álgebra

ReFIP Matemática

Este texto es parte de la colección ReFIP: "Recursos para la Formación Inicial de Profesores" que se basa en los Estándares Orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica. En este sentido los textos de esta colección reconocen los contenidos disciplinares presentes en los estándares y se desarrollan con el objeto de formar un profesor de Educación Básica competente en el área de Matemática.



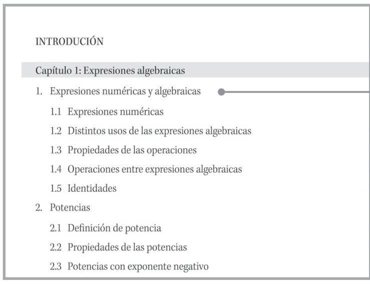


Dado que los Estándares proponen cuatro ejes de conocimiento en el área de matemática, la colección de Textos ReFIP considera estos cuatro ejes y los desarrolla en cuatro Textos: Números, Geometría, Álgebra y Datos y Azar.

1. Estructura del texto

▸ Contenido organizado en Capítulos y secciones

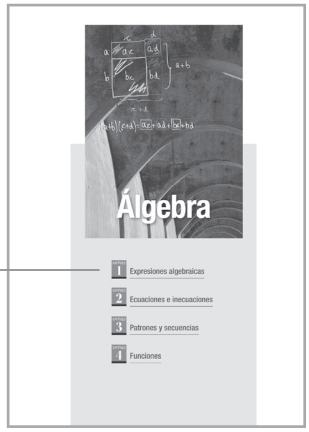
Los textos ReFIP están divididos en capítulos y estos en secciones. Algunas secciones tienen subsecciones para analizar con mayor detalle los contenidos que se desprenden de ella.



INTRODUCIÓN

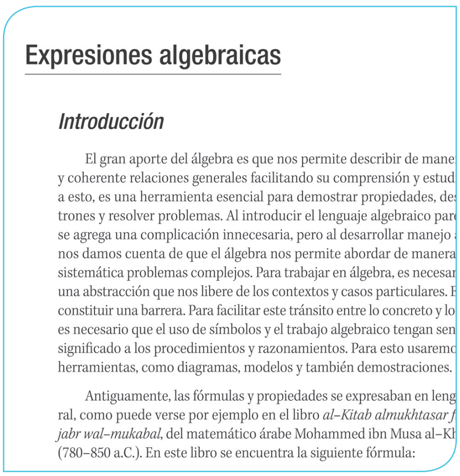
Capítulo 1: Expresiones algebraicas

1. Expresiones numéricas y algebraicas
   1.1 Expresiones numéricas
   1.2 Distintos usos de las expresiones algebraicas
   1.3 Propiedades de las operaciones
   1.4 Operaciones entre expresiones algebraicas
   1.5 Identidades
2. Potencias
   2.1 Definición de potencia
   2.2 Propiedades de las potencias
   2.3 Potencias con exponente negativo



▸ Introducción y presentación del contenido

Cada capítulo aborda de manera sistemática y profunda los contenidos disciplinarios de cada eje. Para esto se introduce al lector en el tema mediante ejemplos o una discusión general de los contenidos que abordará el capítulo.



Expresiones algebraicas

Introducción

El gran aporte del álgebra es que nos permite describir de mane
y coherente relaciones generales facilitando su comprensión y estud
a esto, es una herramienta esencial para demostrar propiedades, de
trones y resolver problemas. Al introducir el lenguaje algebraico par
se agrega una complicación innecesaria, pero al desarrollar manejo
nos damos cuenta de que el álgebra nos permite abordar de manera
sistemática problemas complejos. Para trabajar en álgebra, es necesa
una abstracción que nos libere de los contextos y casos particulares. E
constituir una barrera. Para facilitar este tránsito entre lo concreto y lo
es necesario que el uso de símbolos y el trabajo algebraico tengan sen
significado a los procedimientos y razonamientos. Para esto usaremo
herramientas, como diagramas, modelos y también demostraciones.

Antiguamente, las fórmulas y propiedades se expresaban en leng
ral, como puede verse por ejemplo en el libro *al–Kitab almukhtasar f*
jabr wal–mukabal, del matemático árabe Mohammed ibn Musa al–Kh
(780–850 a.C.). En este libro se encuentra la siguiente fórmula:

Para pensar

Para generar discusiones o reflexionar sobre los contenidos ya tratados, o los que vienen, los textos ReFIP proponen actividades “Para pensar”.

Para pensar

Para expresar un número impar, Juan propone la
propone $2n - 1$. ¿Son correctas ambas expresion

Reflexión sobre las dificultades y errores que surgen al abordar el contenido.

Una de las tareas profesionales que cada profesor tiene al enseñar un contenido es reflexionar sobre los posibles errores y dificultades que un estudiante podría presentar al abordarlo. Por esta razón los textos ReFIP presentan al lector, en cada uno de los capítulos, algunos errores asociados al contenido que se trata en éste.

3. Dificultades y errores asociados al trabajo con expresiones algebraicas y potencias

En esta sección, abordaremos algunas dificultades y errores asociados al trabajo con expresiones algebraicas y potencias que vimos en el capítulo. Algunos de estos errores y dificultades aparecen en educación básica, otros en educación media y muchos persisten inclusive en la educación universitaria.

Una de las primeras tareas que niños y niñas desarrollan cuando comienzan a estudiar álgebra tiene relación con traspasar información del lenguaje común al lenguaje algebraico. Por ejemplo, al describir la relación “en un paseo el número de niños es tres veces el número de adultos” de manera algebraica, es común que surja la respuesta errónea: $n \cdot 3 = a$, con n el número de niños y a el de adultos. Una explicación posible de este error es que se hace un traspaso literal del lenguaje natural al algebraico sin pensar en el sentido de la frase.

En resumen

Los textos ReFIP presentan un cuadro que resume los contenidos abordados en cada una de las secciones o subsecciones.

En resumen

- El uso del lenguaje algebraico nos facilita describir situaciones sin las ambigüedades del lenguaje natural.
- La propiedad fundamental de las expresiones algebraicas es que nos permiten generalizar. Así, mediante ellas podemos:
  – expresar fórmulas
  – describir propiedades
  – describir situaciones provenientes de distintos contextos
  – expresar regularidades.
- Las letras o variables siempre representan números.
- Las variables pueden ser denotadas por distintas letras, sin que cambie su significado.
- Evaluar una expresión es dar valor a sus variables. Evaluar nos ayuda a entender la

Ejemplos

Para una mayor comprensión de los contenidos, los textos muestran ejemplos de actividades o tareas que se desprenden de los ya tratados.

Ejemplo

Antonia tenía inicialmente L lápices, de los cuales c eran de cera y el resto de palo. pierde 1/3 de sus lápices de cera, 1/4 de sus lápices de palo y luego le regalan una de 20 lápices de cera. ¿Cuántos lápices tiene ahora Antonia?

Para encontrar el número de lápices que tiene Antonia, primero notamos que inicialmente tiene $L-c$ lápices de palo. Ella pierde $\frac{1}{3}c$ lápices de cera y $\frac{1}{4}(L-c)$ pices de palo, por lo que le quedan $\frac{2}{3}c$ lápices de cera y $\frac{3}{4}(L-c)$ lápices de p

Como le regalan 20 lápices de palo, ella tiene un número total de lápices dado $\frac{2}{3}c+\frac{3}{4}(L-c)+20$.

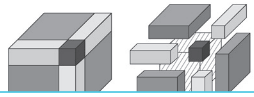
Ejercicios y problemas en cada sección

Para practicar y consolidar el conocimiento, al finalizar cada sección, los textos ReFIP presentan un listado de ejercicios y problemas.

Ejercicios

1. Determine los siguientes productos:
   a. $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)(x^3-8y^2)$ b. $(3-9x^2)(1-3x^2)$
2. Utilizando los siguientes dibujos, explique cómo se puede visualizar el cubo del binomi

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$



2. Contenidos del texto de álgebra

Este texto se organiza en cuatro capítulos. El primero de ellos se dedica a las expresiones algebraicas. En él se introduce el lenguaje algebraico y se muestran formas de trabajar con esta herramienta en distintos contextos: para describir propiedades generales, fórmulas, relaciones y regularidades. Se estudian las potencias, sus propiedades y distintas aplicaciones. El trabajo algebraico conlleva una abstracción que nos libera de los contextos y los casos particulares. Para facilitar este tránsito entre lo concreto y lo abstracto, nos preocupamos de que el uso de símbolos y el trabajo algebraico tengan sentido, dando significado a los procedimientos y razonamientos, y explicitando las razones de su validez. Para ello se usan diversas herramientas, como los diagramas, modelos, ejemplos, tablas y demostraciones.

El segundo capítulo se destina a las ecuaciones y las inecuaciones, con una especial preocupación por el modelamiento. En este contexto, el planteamiento de ecuaciones e inecuaciones cobra tanta relevancia como su resolución y la discusión de sus soluciones en el contexto del problema que las origina. Las manipulaciones que se realizan para transformar una ecuación en otra equivalente, en el proceso de resolución, se presentan conectadas con las propiedades de la igualdad que las justifican. Se estudian también en detalle las ecuaciones y los sistemas lineales, y se aborda el tránsito desde problemas aritméticos a ecuaciones y una variedad de representaciones basadas en modelos físicos y diagramas que permiten plantear y resolver ecuaciones. Con ello, se conectan los métodos algebraicos con el desarrollo de estrategias múltiples y pertinentes al problema que se desea resolver, además de mantener presente el sentido de procedimientos, cuyo propósito podría oscurecerse en complejidades puramente técnicas. Esto también muestra cómo un razonamiento algebraico intuitivo, pero riguroso, permite a niños en niveles escolares iniciales modelar matemáticamente, plantear y resolver ecuaciones, mucho antes de su formalización algebraica.

El capítulo tercero se dedica a patrones y secuencias. En él, se pone especial cuidado a distinguir habilidades de razonamiento inductivo, donde a partir de una regularidad observada se hace una predicción o conjetura, de las de razonamiento deductivo, que permiten justificar la validez de las regularidades observadas. Ambos razonamientos se fomentan promoviendo la discusión de las reglas en que se basan las predicciones a partir de un número finito de términos de una secuencia y su posterior generalización basada en propiedades conocidas, para demostrar su validez. En este capítulo se aborda el estudio de distintos tipos de patrones y secuencias numéricas, tales como progresiones aritméticas y geométricas y sus sumas asociadas, que son de gran interés en distintos tipos de problemas.

Las funciones se estudian en el último capítulo, donde se comienza por su definición matemática y formas de presentarlas, como fórmulas y tablas. Los gráficos merecen una especial atención como herramienta que permite sintetizar la información contenida en una función y también desplegarla para poder visualizar su comportamiento. Además, se estudia la interpretación de gráficos de manera cualitativa, poniendo el énfasis en sus características globales, como son el crecimiento, decrecimiento y cambios de tendencia, para luego interpretarlas en el contexto de la situación estudiada. Con especial detalle se estudia el concepto de razón de cambio y la función lineal, por su relevancia y utilidad.

3. Bibliografía usada

Para elaborar el texto consultamos distintos libros y documentos. Las referencias utilizadas son las siguientes:

- Beckmann, S. Mathematics for elementary teachers. 2ª Edición. Editorial Pearson Education. USA. 2008.
- French, D. Teaching and learning algebra. Editorial Continuum. London, Great Britain. 2002.
- Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D., Zanocco, P. Números. Colección ReFIP: Recursos para la formación de profesores de Educación Básica. Editorial Ediciones SM Chile. Santiago, Chile. 2014.
- Ministerio de Educación. Gobierno de Chile. Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica. 2011. Disponible en: http://www.mineduc.cl/usuarios/ cpeip/File/2012/librobasicaokdos.pdf
- Ministerio de Educación. Gobierno de Chile. Bases Curriculares de 1º a 6º Básico. 2013. Disponible en: http://www.mineduc.cl/index5_int.php?id_portal=47&id_contenido=17116&id_seccion=3264&c=1
- Parker, P., Baldridge, S. Elementary mathematics for teachers. Editorial Sefton-Ash Publishing. USA. 2003.
- Reyes, C., Dissett, L., Gormaz, R. Geometría. Colección ReFIP: Recursos para la formación de profesores de Educación Básica. Editorial Ediciones SM Chile. Santiago, Chile. 2014.
- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., Hernández, J. Iniciación al álgebra. Editorial Síntesis. España. 1999.
- Sowder, J., Sowder, L., Nickerson S. Reconceptualizing mathematics for elementary school teachers: Instructor's Edition. Editorial W. H. Freeman and Company, New York. USA. 2009.
- Van de Walle, J. Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally. 6a Edición. Editorial Pearson / Ally and Bacon. 2007
- Yee, L.-P., Lee, N.-H. (Eds.). Teaching primary school mathematics. A resource book. 2ª Edición. Editorial Mc Graw Hill Education. Asia. 2009.

A continuación describimos el aporte de algunos de ellos.

El texto de **Sybilla Beckmann** está enfocado en el conocimiento disciplinar, es coherente y riguroso en el tratamiento del contenido matemático. Se incluyen distintos tipos de modelos y representaciones para objetos matemáticos y presenta numerosas justificaciones de propiedades y discusiones acerca de los contenidos. El texto se desarrolla en base a ejemplos, hay muchos y muy buenos ejercicios y actividades, algunos de los cuales están enfocados en los tipos de razonamientos que hacen los niños al abordar problemas en el aula. Este libro fue consultado en la elaboración de los cuatro capítulos del texto ReFIP, y sus ejercicios complementan a aquellos considerados en él.

• • •

El texto de **Sowder, Sowder y Nickerson**, al igual que el anterior está enfocado al conocimiento disciplinario, pero incluye aspectos propios de la enseñanza, por ejemplo la forma en que los alumnos abordan ciertas tareas matemáticas o aspectos relacionados con el aprendizaje de algunos tópicos, dando un tratamiento más integral a la matemática escolar y su enseñanza. Al igual que el libro de Beckmann, se desarrolla el contenido apoyándose fuertemente en ejemplos y actividades. Este libro también incluye una gran cantidad de ejercicios y actividades, y tiene instancias para promover la reflexión acerca de la matemática y su enseñanza. Se abordan algunos contenidos con mayor profundidad que otros, por ejemplo, hay varios capítulos destinados al tema de funciones y gráficos, los cuales exceden aquellos considerados en el texto ReFIP. Este libro fue consultado en la elaboración de los cuatro capítulos del libro, sus ejercicios, actividades y también las secciones correspondientes a aspectos relacionados con la enseñanza complementan al texto ReFIP.

• • •

El texto de **French** aborda distintos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la educación básica y media. En particular, este texto discute dificultades y errores asociados al aprendizaje del álgebra, uso de distintos modelos y representaciones, cómo promover el razonamiento algebraico, entre otros aspectos. El texto incluye muchos temas de gran relevancia para la práctica en aula, que no están presentes en el texto ReFIP, y que debieran ser considerados en un curso de didáctica de la matemática. Esta referencia fue de gran utilidad en los dos primeros capítulos, no sólo para la elaboración de las secciones de dificultades y errores, sino que nos ayudó en la organización de éstos y en el enfoque adoptado, en el que se muestra el álgebra conectada a la aritmética y se motiva su estudio a partir de problemas matemáticos y de contexto, promoviendo dar sentido al trabajo con letras.

• • •

El texto de **Van de Walle**, está enfocado a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y está pensado para estudiantes de pedagogía. En particular, está muy centrado en el aula, incorpora actividades para ser realizadas en aula escolar, da recomendaciones prácticas, y también discute distintas estrategias que tienen los niños para resolver problemas y cómo razonan. Este texto tiene muchas recomendaciones concretas para el aula y fue referencia para todos los capítulos del texto ReFIP.

• • •

El texto de **Socas, Camacho, Palarea y Hernández**, también está enfocado a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Fue consultado en la elaboración de los capítulos I y II. Tiene discusiones históricas, y contiene diversas actividades para el aula. Muchos de los contenidos tratados exceden a los del texto ReFIP ya que se consideran temas que aparecen en la educación media. Este libro también complementa el texto ReFIP en temas relacionados con la enseñanza de la matemática.

• • •

El libro de **Lee Peng Yee**, es esencialmente un texto de recursos para la enseñanza de la matemática en Educación Básica. Tiene muchas recomendaciones concretas, respecto de distintos elementos presentes en la enseñanza de la matemática como: dificultades, uso de representaciones, razonamiento, mapas conceptuales, resolución de problemas, evaluación, entre otros. También presenta el marco teórico, modelo pedagógico y los aspectos centrales del currículo escolar de Singapur. Este libro considera capítulos dedicados a la enseñanza de distintos temas de la matemática en Educación Básica. Usamos como referencia aquel dedicado a la enseñanza del álgebra en los capítulos I y II del texto ReFIP, sobre todo en las secciones de dificultades y errores correspondientes.

• • •

Otro recurso importante son los problemas liberados de la Prueba PISA, de los cuales incluimos varios en las listas de ejercicios. A través de los siguientes links se pueden descargar problemas en español:

http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003liberados.pdf?documentId=0901e72b801106c6

http://www.madrid.org/cs/Satellite?blobcol=urldata&blobheader=application%2Fpdf&blobheadername1=Content-Disposition&blobheadervalue1=filename%3Dmatematicas.pdf&blobkey=id&blobtable=MungoBlobs&blobwhere=1220437556013&ssbinary=true

http://www.isei-ivei.net/cast/pub/itemsliberados/Matematicas2011/matematicas_PISA2009items.pdf

• • •

Otro documento de referencia es el Marco de la Evaluación PISA 2006, aspectos del cual están discutidos en algunos capítulos para relevar la importancia de conectar los conocimientos abstractos con las aplicaciones. Este documento se puede descargar a través del link:

http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

4. Articulación del texto de álgebra con los estándares orientadores para egresados de carreras de pedagogía en educación básica

Durante la escritura de las versiones preliminares de los textos de esta colección, y en las sucesivas correcciones, se tuvieron en consideración los Estándares Orientadores para Egresados de Carreras de Pedagogía en Educación Básica de Matemática. Los indicadores del tipo disciplinar (de la dimensión Conocimiento especializado del contenido matemático) están cubiertos casi en su totalidad, salvo algunas omisiones correspondientes a temas que exceden el currículum escolar.

Por otra parte, solo fueron abordados manera tangencial en los textos ReFIP los indicadores de carácter pedagógico, por ejemplo, aquellos relacionados con análisis y diseño de evaluaciones, conocimiento del currículum, psicología del aprendizaje, análisis y elaboración de actividades, historia de la matemática, uso de software, uso de textos escolares, entre otros.

A continuación se presentan dos tipos de tabla: en la primera se presenta la lista de estándares e indicadores, y se indica si está cubierto en los textos ReFIP y donde. En la segunda, para cada capítulo y sección del texto se indica el o los estándares que se abordan.

Estándar e Indicador	ReFIP (A= texto Álgebra)
Estándar 12: es capaz de conducir el aprendizaje de patrones y sucesiones	
1. Resuelve problemas que involucran el reconocimiento de regularidades.	
"2. Describe patrones, regularidades y relaciones numéricas que aparecen en diversas situaciones."	A.III.1, A.III.2
3. Reconoce patrones de crecimiento lineal, cuadrático o geométrico a partir de información numérica.	A.III.1, A.III.2
4. Conjetura patrones y regularidades presentados en forma numérica o tabular.	A.III.1, A.III.2
"5. Reconoce en el currículum escolar vigente, la relevancia que los niños y niñas expresen las propiedades de los números naturales en forma general, usando lenguaje algebraico."	A.III.1, A.III.2
6. Comprende la importancia que los niños y niñas reconozcan patrones numéricos geométricos y pictóricos y propongan reglas generales de formación.	
7. Reconoce el error frecuente de creer que existe una única manera de continuar una secuencia finita o un único patrón que lo describe.	
8. Analiza e implementa actividades de aprendizaje que permiten a sus alumnos y alumnas describir, en lenguaje natural, las regularidades de una secuencia y su regla de formación.	A.III.3
9. Utiliza diversos software para representar regularidades geométricas y numéricas.	
10. Dispone de estrategias para evaluar si los alumnos y alumnas adquieren destrezas relativas a descubrir regularidades y expresarlas en fórmulas.	

Estándar 13: está preparado para conducir el aprendizaje de expresiones algebraicas y ecuaciones	
1. Utiliza representaciones para visualizar procesos de resolución de ecuaciones lineales y expresiones algebraicas.	A.II.1
2. Resuelve problemas referidos a ecuaciones y expresiones algebraicas.	A.II.2
"3. Utiliza procedimientos algebraicos relacionándolos con representaciones gráficas para resolver problemas que involucran ecuaciones."	A.II.2
4. Verifica, utilizando definiciones y propiedades, la validez de procedimientos y relaciones utilizadas en la resolución de ecuaciones, como también la pertinencia de las soluciones con respecto al ámbito numérico.	A.II.1, A.II.2
5. Conoce diferentes formas de usar las letras en álgebra y diferentes maneras de entender el álgebra en la matemática de enseñanza básica.	A.I.1, A.I.2
6. Conoce elementos de la historia del álgebra y los relaciona con la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar.	
7. Relaciona el álgebra con otras áreas y en diferentes niveles de escolaridad.	
8. Conoce y explica los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) del marco curricular en el eje de Álgebra y establece las relaciones conceptuales presentes en ellos, como asimismo los progresos en los CMO.	
9. Elabora actividades de aprendizaje con el propósito de desarrollar en sus alumnos y alumnas la capacidad de visualizar la igualdad de expresiones algebraicas y de traducir del len- guaje natural al lenguaje algebraico y viceversa.	
10. Reconoce y anticipa las dificultades que los niños y niñas manifiestan al expresar propiedades de los números utilizando lenguaje algebraico.	A.II.6
11. Reconoce las dificultades que puedan tener sus alumnos y alumnas al traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa. Explica las causas de los errores frecuentes.	A.II.6
12. Comprende el valor de los juegos matemáticos para estimular el estudio del Álgebra y define estrategias para usarlos en aula.	
13. Posee estrategias para explicar a sus alumnos y alumnas como plantear expresiones algebraicas que se ajusten a problemas de la vida cotidiana.	A.II.2
14. Implementa actividades de aprendizaje, en la ejecución de clases, que permitan a sus alumnos y alumnas la generalización de algunas propiedades aritméticas y su expresión algebraica.	
15. Analiza textos escolares y los utiliza para diseñar sus clases.	
16. Diseña actividades e instrumentos para evaluar la capacidad de resolver problemas referidos a la formulación de expresiones algebraicas, planteamiento y resolución de ecuaciones.	E13.10 - E13.11
Estándar 14: demuestra competencia disciplinaria en el eje álgebra	
1. Relaciona las ecuaciones cuadráticas con geometría.	A.II.4
2. Reconoce las distintas representaciones de una función.	A.IV.1, A.IV.2
3. Grafica funciones cuadráticas y sabe interpretar sus parámetros en relación con el vértice y la existencia de raíces.	
4. Interpreta y produce gráficos provenientes de funciones que modelan situaciones de la vida cotidiana.	
5. Utiliza funciones lineales para modelar situaciones y resuelve problemas usando sistemas de ecuaciones lineales.	A.II.2, A.II.3

6. Utiliza ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resuelve problemas sencillos usando la ecuación cuadrática.	A.II.4
7. Conoce el concepto de composición de funciones y encuentra la expresión explícita de la composición en el caso en que las funciones son lineales o cuadráticas. Interpreta la com- posición de transformaciones geométricas.	
8. Grafica funciones lineales, conoce la ecuación de una recta y sabe interpretar sus parámetros.	A.IV.4
9. Plantea, resuelve y analiza sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 e interpreta geométrica- mente la solución respectiva en un plano cartesiano.	A.II.3
10. Relaciona el concepto de función como transformación (o asociación) de los elementos de un conjunto en (con) elementos de otro conjunto con procesos presentes en diversas situaciones.	A.IV.1, A.IV.2
11. Es capaz de explicar algebraicamente por qué funcionan juegos matemáticos simples.	A.I.1
"12. Comprende el significado de solución y de conjunto solución de ecuaciones e inecuaciones."	A.II.2, A.II.5
13. Conoce y justifica propiedades elementales de los números que involucran las relaciones de orden en los números. Determina y fundamenta cuando un procedimiento es correcto o incorrecto.	A.II.5
14. Establece relaciones conceptuales entre los contenidos presentes en el eje de Álgebra.	E14. 8

	Estándar e Indicador
Capítulo I: Expresiones algebraícas	
1. Expresiones numéricas y algebraícas	E13.5 - E14.1
2. Potencias	E13.5
3. Dificultades y errores asociados al trabajo con expresiones algebraicas y potencias	
Capítulo II: Ecuaciones e inecuaciones	
1. Las ecuaciones y la igualdad	E13.1 - E13.4
2. Ecuaciones lineales	E13.2 - E13.3 - E13.4 - E13.13 - E14.5 - E14.12
3. Sistemas de ecuaciones lineales	E14.5 - E14.9
4. Ecuaciones cuadráticas	E14.1 - E14.6
5. Desigualdades e inecuaciones	E14.12 - E14.13
6. Dificultades y errores asociados al trabajo con ecuaciones	E13.10 - E13.11
Capítulo III: Patrones y secuencias	
1. Patrónes numéricos	E12.1 - E12.2 - E12.3 - E12.4
2. Secuencias	E12.1 - E12.2 - E12.3 - E12.4
3. Dificultades asociadas al trabajo con patrones y secuencias	E12.7
Capítulo IV: Funciones	
1. Conceptos básicos	E14.2 - E14.10
2. Fórmulas y tablas	E14.2 - E14.10
3. Función lineal y razón de cambio	
4. Gráficos y funciones	E14. 8

5. Ejemplos de ejercicios o problemas del texto de álgebra vinculados a los estándares orientadores para egresados de carreras de pedagogía en educación básica

Los “Estándares Orientadores para Egresados de Carreras de Pedagogía en Educación Básica” son un instrumento eficaz en la planificación y evaluación de los cursos de matemática en la formación de los futuros profesores de Educación Básica. En particular, la evaluación de aprendizajes se puede realizar en términos formativos, durante el proceso de estudio de un contenido matemático; y en términos sumativos, al final del proceso, para medir el logro alcanzado por los estudiantes. Para ambos propósitos, los indicadores que especifican lo que se pretende lograr en cada estándar orientan la construcción de instrumentos o actividades de evaluación.

Los textos ReFIP proporcionan oportunidades para vincular los Estándares a la formación inicial docente, a través de ejercicios, ejemplos e incluso a través de los Para pensar. Estas instancias permiten monitorear los logros de aprendizaje de los estudiantes de pedagogía, respondiendo a las exigencias de los Estándares.

A continuación veremos algunos ejemplos extraídos del texto para cada Estándar del eje Álgebra, señalando además el indicador asociado

Estándar 12: es capaz de conducir el aprendizaje de patrones y sucesiones

Indicador 1: Resuelve problemas que involucran el reconocimiento de regularidades.

Ejemplo 1

Para pensar

Considere un número natural arbitrario n y forme su secuencia de potencias:

$$n, n^2, n^3, n^4, \ldots$$

¿Será cierto que la secuencia formada por el dígito de las unidades de estas potencias sigue un patrón repetitivo?

Extraído de A.III.1

Pág. 150

Ejemplo 2

2. Considere la secuencia que se forma repitiendo el siguiente patrón:

a. ¿Qué figura habría en la posición 13? ¿y en la posición 458?

b. ¿Qué puede decir de los números que corresponden a la posición que ocupan los pentágonos en la secuencia?

c. Describa mediante una expresión algebraica qué posición ocupa en la secuencia el n-ésimo cuadrado.

Extraído de A.III.2

Pág. 156

Estándar 3: Reconoce patrones de crecimiento lineal, cuadrático o geométrico a partir de información numérica.

Ejemplo 1

Extraído de A.III.2.1

Pág. 162

Ejemplo

Determinemos si las siguientes secuencias comienzan como una progresión aritmética:

1) 3, 7, 11, 15, 19, ...

2) 2, 7, 12, 18, 23, ...

3) 3, 3, 3, 3, 3, ...

Para la primera secuencia vemos que al restar un término del siguiente obtenemos $7-3=4$, $11-7=4$, $15-11=4$, $19-15=4$. Por lo tanto, la sucesión comienza como una progresión aritmética con primer término 3 y diferencia 4.

En la segunda secuencia, obtenemos las restas $7-2=5$, $12-7=5$, $18-12=6$, $23-18=5$. Como no todas estas restas son iguales, concluimos que la secuencia no es una progresión aritmética. En la última secuencia todos los términos son iguales, por lo tanto, la diferencia entre dos de ellos es 0, y así, la secuencia comienza como una progresión aritmética.

Ejemplo 2

Extraído de A.III.2.1

Pág. 166

1. Determine si los términos dados de las sucesiones que siguen están en progresión geométrica. De ser así, escriba el primer término y la razón.

   a. 0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 6,4

   b. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

   c. $-1, 1, -1, 1, -1, 1$

   d. 2, 4, 16, 256, 65.536

Estándar 13: está preparado para conducir el aprendizaje de expresiones algebraicas y ecuaciones.

Indicador 1: Utiliza representaciones para visualizar procesos de resolución de ecuaciones lineales y expresiones algebraicas.

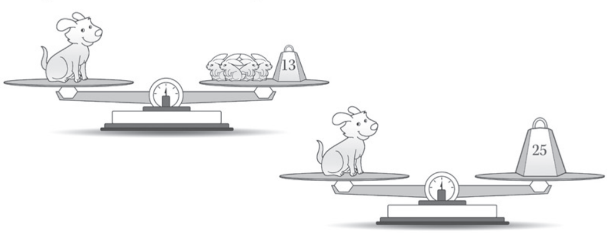
Ejemplo 1

Extraído de A.II.2.2

Pág. 102

Ejemplo

Las siguientes balanzas están en equilibrio.



En cada una de las balanzas hay perros y conejos. También hay pesas marcadas con su peso en kilogramos. Los perros pesan todos lo mismo, y al igual que todos los conejos. Obtenga el peso de un perro y un conejo.

Ejemplo 2

Ejemplo

Anita es 11 años mayor que su hermana María, pero su mamá prefiere decir que Anita tiene un año más que el doble de la edad de María. ¿Cuál es la edad de Anita?

No conocemos ninguna de las dos edades y nos preguntan por la edad de Anita. Pero como la referencia es la edad de María, usaremos esa edad como la incógnita x. Con esta elección, podemos representar el problema mediante el siguiente diagrama

x	11	
x	x	1

La ecuación asociada es $x + 11 = 2x + 1$, y del mismo diagrama se puede apreciar que $11 = x + 1$ y, por lo tanto, $x = 10$ y la edad de Anita es 21 años.

Hacemos notar la importancia de que las dos barras horizontales del diagrama estén alineadas para poder mostrar las relaciones que permiten resolver el problema.

Extraído de A.II.2.2

Pág. 95

Estándar 11: Reconoce las dificultades que puedan tener sus alumnos y alumnas al traducir del lengua- je natural al lenguaje algebraico y viceversa. Explica las causas de los errores frecuentes.

Ejemplo 1

La traducción de una situación desde el lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico puede ser compleja y esta dificultad no se origina en el álgebra, sino en las imprecisiones de nuestro modo de hablar. El uso de paréntesis permite que las expresiones algebraicas no tengan estas ambigüedades. Como se advirtió antes, las expresiones $3x - 1$ y $3(x - 1)$ corresponden, respectivamente, a "el triple de un número, menos 1" y "el triple, de un número menos 1". Pero en el lenguaje oral difícilmente se percibirá la *coma* de una manera inequívoca. Así, esta dificultad no se relaciona con errores de los niños y niñas, sino que se trata de un problema del lenguaje que el profesor debe considerar. Otras frases que producen esta misma dificultad de interpretación son, por ejemplo, "el cuadrado de un número más 3", "la mitad de un número menos 8".

Extraído de A.I.3

Pág. 71

Ejemplo 2

Otro error común, basado también en el uso del signo "=" para poner un resultado, se produce cuando se pide resolver un problema como el siguiente:

La mamá de Manuel tiene 30 años. Manuel tiene 4 años más que un quinto de la edad de su mamá. Encuentra la edad de Manuel.

Se pueden encontrar respuestas correctas obtenidas con los cálculos que siguen:

$$30 \div 5 = 6 + 4 = 10.$$

La edad de Manuel es 10 años.

Claramente, la respuesta al problema es la correcta y la idea detrás del procedimiento es adecuada. El error se reduce a la escritura, específicamente, al uso del signo "=", ya que la primera de las igualdades es falsa.

Extraído de A.II.6

Pág. 141

Estándar 14: demuestra competencia disciplinaria en el eje álgebra

Indicador 1: Reconoce las distintas representaciones de una función.

Ejemplo 1

Extraído de A.IV.2

Pág. 184

2. Fórmulas y tablas

Hay muchas maneras de presentar o describir una función y la elección dependerá del tipo de función y de qué se desea estudiar y comunicar. Consideremos la siguiente situación:

Un promotor de tarjetas de crédito gana \$5.000 diarios y \$2.000 por cada persona que contrata el servicio.

Este enunciado describe una función que entrega la ganancia diaria del promotor, si conocemos cuántas personas contactadas por el promotor deciden obtener la tarjeta. Por ejemplo, si en un día 5 personas obtienen la tarjeta, la ganancia del promotor es de $5.000 + 5 \cdot 2.000 = 30.000$ pesos.

En algunos casos, podemos describir una función mediante una expresión algebraica o fórmula. En el ejemplo anterior, la función:

$$G(n) = 5000 + 2000n$$

entrega la ganancia diaria del promotor, si n personas contactadas obtienen la tarjeta. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 2

Extraído de A.IV.2

Pág. 185

Alumno (a)	Altura (m)
Javiera Alarcón	1,28
Camilo Baeza	1,32
Mariano Barrientos	1,26
Antonia Castro	1,32
Carolina Carrasco	1,45
Martina Fernández	1,27
Carlos Gutiérrez	1,34
Daniel Herrera	1,27
Josefa Landeros	1,33
Maximiliano Lorca	1,36
Sandra Muñoz	1,32
Tomás Palacios	1,29
Florencia Zapata	1,30

Tabla IV.1

En este ejemplo, tenemos que al evaluar la función "altura" en la alumna Martina Fernández, se obtiene 1,27m. Si llamamos "altura" a esta función, entonces:

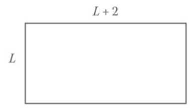
$$\textit{altura}\ (\text{Martina Fernández}) = 1{,}27\text{m}$$

Estándar 3: Utiliza ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resuelve problemas sencillos usando la ecuación cuadrática.

Ejemplo 1

Ejemplo

Se sabe que en un rectángulo de área 6 cm^2 uno de sus lados mide 2 cm más que el otro. ¿Cuánto mide cada lado?



Para resolver este problema, denotamos por L el lado desconocido de menor medida, entonces, el otro lado del rectángulo estará dado por $L + 2$. Así, el área del rectángulo está dada por $L(L + 2)$ que, por los datos del problema, es 6. Por lo tanto, se debe cumplir la igualdad:

$$L(L+2) = 6$$

la cual es equivalente a $L^2 + 2L = 6$.

Para resolver esta ecuación, trataremos de *completar un cuadrado*, lo que significa escribir el lado izquierdo de la ecuación (el que involucra la incógnita) como el cuadrado de una expresión algebraica, para así usar de manera apropiada el **Teorema II.3** para resolver la ecuación. Para hacer esto, recordamos la identidad del cuadrado de binomio que vimos en el apartado **I.1.5**, que se cumple para cualquier par de números x e y:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Así, remplazando x por L e y por 1,obtenemos que $(L+1)^2 = L^2 + 2L + 1$ para cualquier valor de L. Volviendo a nuestro problema, vemos que si sumamos 1 a ambos lados de la ecuación, obtenemos que esta es equivalente a:

$$L^2 + 2L + 1 = 7,$$

es decir, $(L+1)^2 = 7$.

Para resolver esta ecuación usamos el **Teorema II.3**, de donde obtenemos que la ecuación se satisface cuando $L+1=\sqrt{7}$ o $L+1=-\sqrt{7}$, es decir, la ecuación tiene dos soluciones: $L=-1+\sqrt{7}$ y $L=-1-\sqrt{7}$. Como $-1+\sqrt{7}>0$ y $-1-\sqrt{7}<0$, la única solución es $L=-1+\sqrt{7}$. Así, los lados del rectángulo son $-1+\sqrt{7}$ y $-1+\sqrt{7}+2=1+\sqrt{7}$.

Extraído de A.II.4.1

Pág. 126

Ejemplo 2

5. Encuentre la medida del lado de un triángulo equilátero, si se sabe que su altura es 1.

Extraído de A.II.4.2

Pág. 129

6. Articulación del texto con las bases curriculares de matemática de 1º a 6º básico

Desde la elaboración de las primeras versiones de los textos se tuvo en consideración el Currículum escolar. Los textos de la colección ReFIP cubren los Objetivos de Aprendizaje, llegando en algunos casos más allá de los contenidos que según estos objetivos se deben abordar en la Educación Básica. Asimismo, a través de los diferentes ejercicios, problemas y actividades propuestas en el texto se potencia el desarrollo de las cuatro habilidades establecidas en el Currículum: Resolver problemas, Argumentar y Razonar, Representar y Modelar.

Por otra parte, en cada capítulo del texto se potencia el uso de diferentes tipos de representación, pictóricas y simbólicas; y en los temas en que es pertinente, se describe el uso de material concreto al estudiar el contenido matemático. Un aspecto importante en cada capítulo es el análisis de posibles errores y dificultades que pueden enfrentar los niños al abordar el contenido matemático, lo que constituye otra herramienta que permite articular la formación de un profesor con la matemática escolar.

A continuación se presentan dos tipos de tabla: en la primera se presenta la lista de objetivos de aprendizaje, y se indica si está cubierto en los textos ReFIP y donde. En la segunda, para cada capítulo y sección del texto, se indica que objetivos de aprendizaje corresponde.

Curso	Objetivo de Aprendizaje	ReFIP (A= texto Álgebra)
1º Básico	**OA11:** Reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos...) y patrones numéricos hasta el 20, crecientes y decrecientes, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo.	A.III.1
	OA12: Describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio y desequilibrio, usando una balanza en forma concreta, pictórica y simbólica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=).	A.II.1, A.II.2
2º Básico	**OA12:** Crear, representar y continuar una variedad de patrones numéricos y completar los elementos faltantes, de manera manual y/o usando software educativo.	A.III.1
	OA13: Demostrar, explicar y registrar la igualdad y la desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=) y los símbolos no igual (>, <).	A.II.1, A.II.5
3º Básico	**OA12:** Generar,describir y registrar patrones numéricos,usando una variedad de estrategias en tablas del 100, de manera manual y/o con software educativo.	A.III.1, A.III.2
	OA13: Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma pictórica y simbólica del 0 al 100.	A.II.2
4º Básico	**OA13:** Identificar y describir patrones numéricos en tablas que involucren una operación, de manera manual y/o usando software educativo.	A.III.1, A.III.2
	OA14: Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción.	A.II.2, A.II.5

»

5º Básico	**OA14:** Descubrir alguna regla que explique una sucesión dada y que permita hacer predicciones.	A.III.1, A.III.2
	OA15: Resolver problemas, usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica.	A.II.2, A.II.5
6º Básico	"**OA9:** Demostrar que comprenden la relación entre los valores de una tabla y aplicarla en la resolución de problemas sencillos: › identificando patrones entre los valores de la tabla › formulando una regla con lenguaje matemático"	A.III.1, A.III.2
	OA10: Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones.	A.II.1, A.II.2, A.II.5
	"**OA11:** Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como: › usar una balanza › usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación y aplicando procedimientos formales de resolución."	A.II.1, A.II.2

	1º Básico	2º Básico	3º Básico	4º Básico	5º Básico	6º Básico
Capítulo I: Expresiones algebraícas						
1. Expresiones numéricas y algebraícas						
2. Potencias						
3. Dificultades y errores asociados al trabajo con expresiones algebraicas y potencias						
Capítulo II: Ecuaciones e inecuaciones						
1. Las ecuaciones y la igualdad	OA12	OA13				OA10 - OA11
2. Ecuaciones lineales	OA12		OA13	OA14	OA15	OA10 - OA11
3. Sistemas de ecuaciones lineales						
4. Ecuaciones cuadráticas						
5. Desigualdades e inecuaciones		OA13		OA14	OA15	OA10
6. Dificultades y errores asociados al trabajo con ecuaciones						
Capítulo III: Patrones y secuencias						
1. Patrónes numéricos	OA11	OA12	OA12	OA13	OA14	OA9
2. Secuencias			OA12	OA13	OA14	OA9
3. Dificultades asociadas al trabajo con patrones y secuencias						
Capítulo IV: Funciones						
1. Conceptos básicos						
2. Fórmulas y tablas						
3. Función lineal y razón de cambio						
4. Gráficos y funciones						

7. Vinculación del texto refip con el conocimiento del currículum escolar

Entre todos los conocimientos que un profesor debe adquirir para enseñar matemática en la escuela el conocimiento del currículo, en cuanto al dominio matemático escolar, es uno de los más relevantes dado que éste permitirá al futuro profesor situar y adecuar la matemática al nivel del alumnado. Por este motivo se hace necesario enfrentar al estudiante de pedagogía al currículo escolar desde una perspectiva disciplinar en cuanto al posicionamiento de ésta al nivel de los estudiantes.

En esta sección se muestra al lector como vincular el currículum escolar con un contenido de los textos ReFIP. Así, se presentan actividades concretas para analizar y discutir con los estudiantes de pedagogía, por ejemplo se ofrece al lector un diagrama que muestra cómo un conocimiento disciplinar matemático específico, evoluciona en el currículo escolar. También se presentan actividades que permiten identificar el conocimiento y posicionarlo en función del nivel del alumnado.

En este texto presentamos un ejemplo en el tema "Expresiones Algebraicas", conocimiento que se aborda en el capítulo I del texto ReFIP.

▸ Ejemplo de cómo articular los textos ReFIP con el currículum escolar: Expresiones Algebraicas

El estudio de las expresiones algebraicas en Educación Básica responde principalmente a la generalización de propiedades de operaciones aritméticas, a la tarea de expresar fórmulas geométricas relacionadas con el perímetro y el área de figuras planas, a la generalización de reglas en secuencias o patrones algebraicos, y a la modelización de problemas aritméticos en diversos contextos.

Desde los primeros niveles de enseñanza básica los niños resuelven problemas usando operaciones aritméticas, siendo una tarea importante, escribir la expresión numérica que permite resolver el problema. A medida que se avanza en los diferentes niveles, el currículo promueve que se presenten problemas en los cuales se debe plantear una ecuación para resolverlos.

El tipo de tareas que niños y niñas realizan para estudiar expresiones algebraicas son: plantear la expresión numérica que resuelve un problema, traducir relaciones del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, evaluar expresiones algebraicas, manipular expresiones algebraicas. La siguiente tabla muestra en qué nivel se trabaja cada una de estas tareas según el currículo.

	Curso						
Tareas Matemáticas	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
Plantear la expresión numérica que resuelve un problema							
Traducir relaciones de lenguaje cotidiano a lenguaje algebraico.							
Uso de expresiones algebraicas para describir propiedades y fórmulas generales.							
Evaluar expresiones algebraicas.							
Manipular expresiones algebraicas.							

Tipo de trabajo matemático	1° Básico	2° Básico	3° Básico	4° Básico	5° Básico	6° Básico	7° Básico
Plantear la expresión numérica que resuelve un problema	Operación: adición y sustracción Situaciones: concretas o pictóricas.	Operación: adición y sustracción. Provienen de situaciones concretas, pictóricas o enunciados.	Operación: adición, sustracción, multiplicación y división. Provienen de situaciones concretas, pictóricas o enunciados.	Operación: adición, sustracción, multiplicación y división. Provienen de situaciones concretas, pictóricas o enunciados.	Operación: adición, sustracción, multiplicación y división. Provienen de situaciones concretas, pictóricas o enunciados. Uso de paréntesis	Operación: adición, sustracción, multiplicación y división. Provienen de situaciones concretas, pictóricas o enunciados. Uso de paréntesis	
Traducir relaciones de lenguaje cotidiano a lenguaje algebraico.					Secuencias numéricas. Secuencias geométricas.	Fórmulas (perímetro y área de rectángulos) Presentadas en lenguaje cotidiano. Presentadas en lenguaje matemático.	
Uso de expresiones algebraicas para describir propiedades y fórmulas generales.						Expresiones algebraicas. Números naturales.	
Evaluar expresiones algebraicas.						Propiedad conmutativa	
Manipular expresiones algebraicas.							Expresiones algebraicas con una variable. Expresiones algebraicas con dos variables.

El estudio de las expresiones algebraicas varía entre un nivel y otro. La siguiente tabla presenta un análisis general de dichas variaciones entre 1° y 7° básico

El uso de expresiones algebraicas permite generalizar propiedades, fórmulas, y en particular, la regla de formación de una secuencia numérica. Desde pre Kínder los niños trabajan con secuencias y patrones, la principal tarea es completar secuencias. En 3º y 4º básico se incorpora la problemática de describir, en lenguaje cotidiano la regla de formación, mientras que en 5° básico se ven enfrentados a escribir en lenguaje matemático esta regla. Veamos un ejemplo de esta evolución.

Actividad 1

Dibuja la figura que sigue en la secuencia

Actividad 2

Completa la secuencia con los números que siguen

21	26	31	36			

¿Cuál es la regla para encontrar el número que sigue en la secuencia?

Actividad 3

Completa la secuencia con los números que siguen

1	3	5	7	9	11	

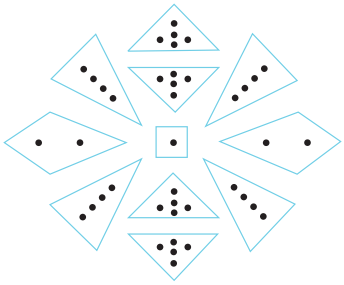
a) Escribe una regla que permita escribir el término que sigue.

b) ¿Cuál es el término en la posición 12?

En las tres actividades anteriores hay que determinar el elemento que sigue en una secuencia pero, dependiendo del nivel, es cómo se solicita la regla de formación. En la primera actividad los niños la describen en forma oral, en la segunda se solicita que la escriban usando lenguaje cotidiano (por ejemplo “Va de cinco en cinco partiendo de 21”), y en la tercera escriben la regla usando un lenguaje matemático, es decir, utilizando una expresión algebraica (por ejemplo, 2n-1).

El trabajo de formulación de expresiones algebraicas continúa en 6º básico. En este nivel se ven enfrentados a la tarea de escribir la expresión algebraica a partir de un enunciado presentado en lenguaje cotidiano, por ejemplo “la diferencia entre el doble de un número y cinco”. Otro tipo de actividad es la que se muestra a continuación:

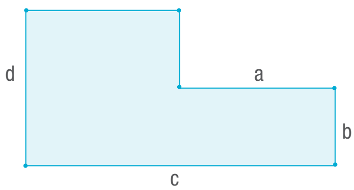
Observe la siguiente figura 1



Escriba una expresión que use multiplicaciones y adiciones para determinar la cantidad de puntos sin contarlos.

Otra tarea que se propone en este nivel es la de formular la expresión algebraica que permite encontrar el perímetro y/o área de una figura geométrica donde la medida de los lados está representada por una letra o una expresión algebraica. Veamos un ejemplo:

Observe la siguiente figura 2



a) Escriba dos expresiones algebraicas para el perímetro de la figura. Explique brevemente cómo obtuvo las expresiones.

b) Escriba dos expresiones algebraicas para determinar el área de la superficie. Explique brevemente cómo obtuvo las expresiones.

El estudio del perímetro de una figura se inicia en 3º básico, mientras que el estudio del área en 4º básico, en ambos niveles las medidas de las figuras vienen expresadas numéricamente. Ya en 6º básico los niños deben determinar perímetros y áreas de figuras cuyas medidas aparecen dadas con letras. También en este nivel, se propone la tarea de evaluar expresiones algebraicas, es decir, reemplazar las variables de la expresión algebraica por un valor dado y calcular el resultado.

▸ Ejercicios propuestos para estudiantes de pedagogía

1. Observe la siguiente figura:

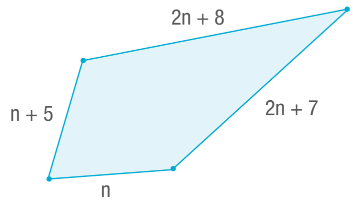


Figura 3

a) Encuentre una expresión algebraica para el perímetro de la figura.

b) Aparte de formular la expresión que permite determinar el perímetro de la figura ¿Qué tipo de trabajo matemático, referido al estudio de las expresiones algebraicas, permite abordar este ejercicio?

c) En qué nivel o niveles se puede estudiar este tipo de ejercicios.

2. Lea el siguiente problema extraído de una actividad escolar:

Juan dio la misma cantidad de dulces a sus 5 amigos.
Cada uno de ellos recibió 10 dulces y Juan se quedó con 3 dulces.
¿Cuántos dulces tenía Juan antes de repartirlos?

Escribe en el recuadro la frase numérica que permite resolver el problema.

a) De acuerdo al currículum vigente, ¿en qué nivel de Educación Básica se aborda este tipo de trabajo matemático con los estudiantes?

b) ¿Cómo contribuye esta actividad al estudio de las expresiones algebraicas?

3. Proponga una actividad que permita abordar el trabajo matemático pedido, en el nivel especificado.

Tipo de trabajo matemático	Nivel	Ejercicio o actividad
Formulación de expresiones algebraicas	5° Básico	
Evaluar expresiones algebraicas	6° Básico	
Reducción de términos semejantes	7° Básico	

8. Recursos multimedia complementarios al texto

En el marco del Proyecto ReFIP, se desarrollaron siete recursos multimedia, en conjunto con investigadores del Laboratorio de Innovación en Tecnología Educativa (LITE) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), que abordan temas centrales presentes en los textos ReFIP y que están dirigidos a estudiantes de pedagogía.

Estos recursos interactivos se enfocan a enseñar un conjunto de tópicos seleccionados y persiguen que los futuros profesores se cuestionen el cómo enseñar cada uno de los conceptos tratados.

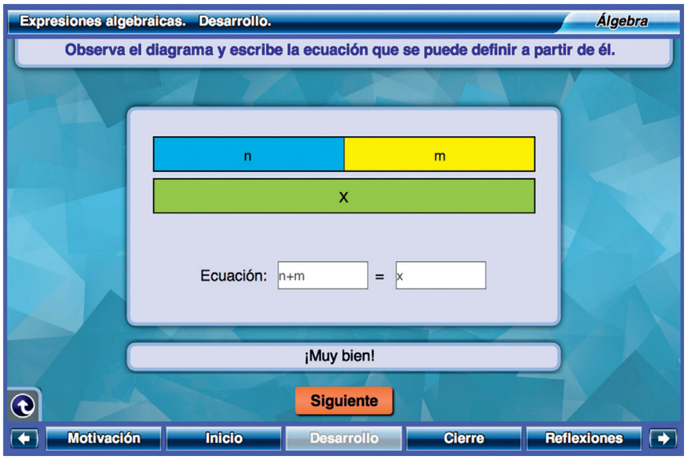
Para cada uno de los cuatro ejes disciplinarios, Álgebra, Datos y Azar, Geometría, y Números, acordes a cada uno de los libros, se desarrollaron los siguientes recursos:

- Resolución de problemas mediante diagramas
- Muestreo
- Probabilidades
- Redes del cubo
- Áreas y perímetros
- Adición y sustracción
- Cálculo mental

Se puede acceder a estos recursos a través del siguiente link:

http://arquimedes. .unam.mx/chile/

Considerando que los recursos multimedia tradicionalmente se han dirigido a niños, esta experiencia resulta particularmente innovadora al estar orientada a profesores en formación. Las principales características de los recursos son:

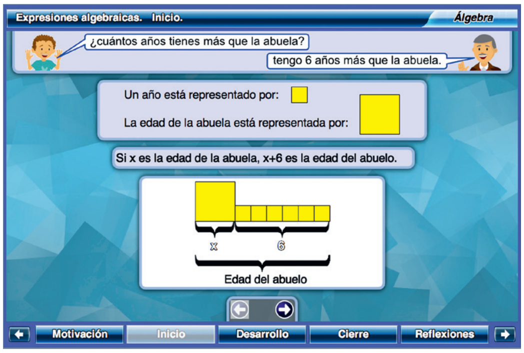


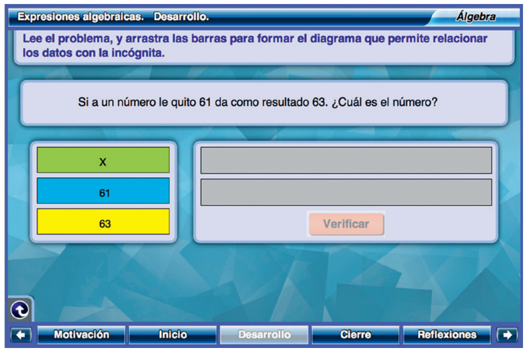
- Estar dirigidos a estudiantes de pedagogía en Educación Básica.
- Tener foco en el conocimiento matemático para enseñar.
- Abordar temas nucleares de los Textos ReFIP.
- Poder ser reorientados y utilizados en el aula escolar.
- Haber sido realizados en conjunto con investigadores del Laboratorio de Innovación en Tecnología Educativa (LITE) de la Universidad Nacional Autónoma de México.

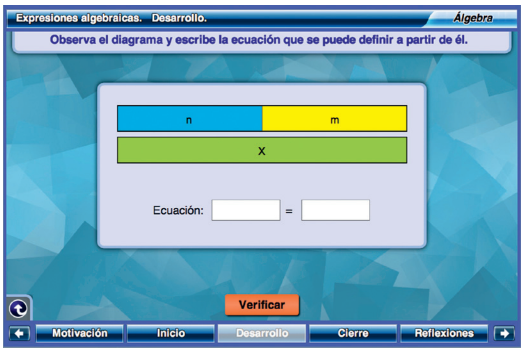
Cada recurso interactivo está compuesto por cinco momentos de estudio, que pretenden orientar el desarrollo de una clase. Se inicia con una motivación que propone un video con un problema o situación de contexto para introducir el contenido matemático que aborda el recurso. El segundo momento corresponde al inicio donde se trabaja una actividad para dar pie al estudio de este contenido. Luego, el momento de desarrollo permite profundizar y trabajar el contenido matemático en torno a problemas o ejercicios. El cierre sistematiza las definiciones y propiedades relacionadas con el tema abordado en el interactivo. Finalmente en la reflexión se abordan problemáticas relacionadas con la enseñanza del tema en la escuela básica, articulando de forma explícita la formación de los futuros profesores con el aula escolar.

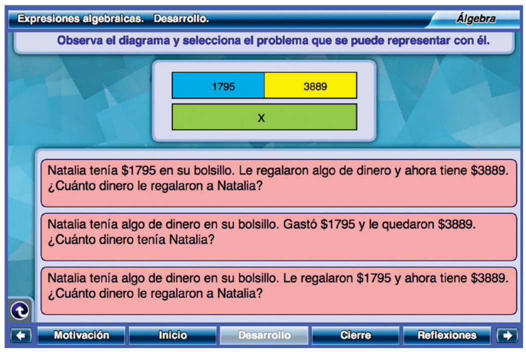
Para el eje Álgebra el recurso se denomina "**Resolución de problemas mediante diagramas**" y se articula con el estudio del Capítulo II del Texto "Ecuaciones e Inecuaciones". El objetivo del recurso es comprender el uso de diagramas de barra como medio de representación, previo al planteamiento de ecuaciones de primer grado. Entre las actividades del recurso están:

- Construir un diagrama para representar un problema.
- Identificar el diagrama que corresponde a una ecuación.
- Identificar el problema que se puede formular a partir de un diagrama.









ReFIP Matemática

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

La colección ReFIP es una serie de cuatro textos: Números, Geometría, Álgebra y Datos y azar, enfocados en la matemática para enseñar que requieren los profesores de Educación Básica.

Esta colección fue desarrollada en el proyecto FONDEF-D09I1023 "Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica en Matemática", por un equipo de expertos disciplinarios y en educación de distintas universidades, liderados desde el Laboratorio de Educación del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile.

El proceso de elaboración de estos textos se llevó a cabo durante tres años y contempló el pilotaje de versiones preliminares en cursos de carreras de Pedagogía en Educación Básica de 16 universidades, en el que participaron alrededor de 5.000 estudiantes de Pedagogía de todo el país. Esto permitió hacer los cambios y ajustes necesarios para producir las versiones finales, y hacer que estos textos se constituyan en herramientas de gran utilidad en la formación docente.

Los textos promueven la reflexión acerca de la matemática escolar y su enseñanza, contribuyen a integrar conocimientos disciplinarios y pedagógicos, y tienen su foco en la matemática específica de la tarea de enseñar.

Más información acerca de la colección y el proyecto se encuentra en:
http://refip.cmm.uchile.cl/

Álgebra
Texto para el formador
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Geometría
Texto para el formador
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Números
Texto para el formador
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Datos y azar
Texto para el formador
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

CMM Center for Mathematical Modeling
Fondef
Fundación Luksic
Academia Chilena de Ciencias
sm
Ministerio de Educación